Μάθημα 19

Αν όμως η G' είναι ολοκληρώσιμη τότε το προηγούμενο ισχύει:

Θεώρημα (Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απ. Λογ)

Αν $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και G' ολοκληρώσιμη τότε

$$\int_a^b G(t)\,dt = G(b)-G(a).$$

Απόδειξη Έστω ότι $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ διαμέριση του $[a,b]$.

Από το Θ. Μέσης Τιμής του Απ. Λογ $\exists\ \xi_k\in[x_k,\ x_{k+1}]$ ώστε

$$\frac{G(x_{k+1})-G(x_k)}{x_{k+1}-x_k}=G'(\xi_k)\Rightarrow G(x_{k+1})-G(x_k)=$$

Άρα

$$L(G',P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(G')(x_{k+1}-x_k)\le \boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\dots(x_{k+1}-x_k)}\le\sum_{k=0}^{n-1}M_k(G')(x_{k+1}-x_k)$$

$= U(G',P)$ αλλά

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\left(G(x_{k+1})-G(x_k)\right)} = \cancel{G(x_1)}-G(\underset{a}{x_0})+G(x_2)-\cancel{G(x_1)}+\dots+G(\underset{b}{x_n})-\cancel{G(x_{n-1})}$$

$$= G(b)-G(a)$$

Άρα $L(G',P)\le G(b)-G(a)\le U(G',P)$

$$\downarrow \sup_P \qquad\qquad \downarrow \inf_P$$

$$\int_a^b G'(x)dx=\underline{\int_a^b} G'(x)dx\le G(b)-G(a)$$

$$G(b)-G(a)\le\overline{\int_a^b} G'(x)\,dx=\int_a^b G'(x)dx$$

Άρα

$$\boxed{\int_a^b G'(x)dx = G(b)-G(a)}$$

■

Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Θεώρημα (ολοκλήρωση κατά μέρη) Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με f' κ g' ολοκληρώσιμες. Τότε

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = (f(b)g(b)-f(a)g(a)) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

(άλλως $\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$)

Απόδειξη Οι fg, fg' κ $f'g$ είναι ολοκληρώσιμες γιατί οι f,g είναι συνεχείς (ως παραγωγίσιμες) και άρα ολοκληρώσιμες. Οι f',g', είναι εξ υποθέσεως ολοκληρώσιμες. Άρα είναι ολοκληρώσιμα κ τα γινόμενα fg, $f'g$, fg' καθώς και το $f'g+fg'=(fg)'$. Άρα, χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το 2ο Θεμελιώδες Θεώρημα θα έχουμε

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_a^b ((fg)(x))'\,dx = (fg)(b)-(fg)(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = (f(b)g(b)-f(a)g(a)) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \quad \boxed{}$$

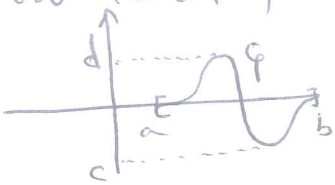
Θεώρημα (Πρώτο Θ. αντικατάστασης) Έστω $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με φ' ολοκληρώσιμη. (Το σύνολο τιμών της φ είναι διάστημα της μορφής $[c,d]$ ($c=\min\varphi$, $d=\max\varphi$)) και αν $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, ισχύει

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\,ds = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Απόδειξη Η f ως συνεχής στο $[c,d]$ είναι ολοκληρώσιμη

Ορίζουμε $F:I\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_{\varphi(a)}^{x} f(s)\,ds$

(Το $\varphi(a)$ δεν ισούται αναγκαστικά με κάποιο άκρο c ή d

Πχ η  στέλνει κ το a κ το b στο 0, ενώ τα $c, d \neq 0$)

Το πρώτο θεμελιώδες Θ. του Απ. Λογ. λέει ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο $[c\, d]$ και $F' = f$. $\Rightarrow F'(\varphi(t)) = f(\quad)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_a^b \underbrace{F'(\varphi(t))\varphi'(t)}_{\|\ \text{κανόνας αλυσίδας}} dt.$$

$$(\qquad)'$$

Άρα από το 2ο θεμελιώδες Θ. του Απ. Λογ.

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\, dt = \int_a^b (F\circ\varphi)'(t)\, dt = (F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a) =$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\, ds - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(a)} f(s)\, ds$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\, ds \qquad \blacksquare$$

Θεώρημα (2ο Θ. αντικατάστασης) Έστω ότι $\psi : [ab] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση (δηλ. ψ' συνεχής) με $\psi'(x) \neq 0$ $\forall x \in [ab]$ (ή ψ γνησίως μονότονη). Αν $I = \psi([ab])$ κ $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε

$$\int_a^b f(\psi(t))\, dt = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(s)\, (\psi^{-1})'(s)\, ds.$$

Απόδειξη: ψ' συνεχής κ $\psi' \neq 0$ $\Rightarrow$ $\psi'(x) > 0$ $\forall x$ ή $\psi'(x) < 0$ $\forall x$ δηλ. $\psi \uparrow$ ή $\psi \downarrow$. Ας υποθέσουμε ότι $\psi\uparrow$. Τότε ορίζεται η ψ^{-1} και είναι συνεχής. Αφού $\psi\uparrow \Rightarrow \psi([ab]) = [\quad , \quad]$

Εφαρμόζουμε το 1ο Θ. αντικατάστασης στην $f\cdot(\psi^{-1})'$ (και ψ στη θέση της φ) οπότε έχουμε

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} (f\cdot(\psi^{-1})')(s)\, ds = \int_a^b \underbrace{(f\cdot(\psi^{-1})')(\psi(t))}_{f(\psi(t))\ (\psi^{-1})'(\psi(t))}\ \psi'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b (f\circ\psi)(t)\; ((\psi^{-1})'\circ\psi)(t)\; \psi'(t)\,dt$$ (1)

$$= \int_a^b (f\circ\psi)(t)\; (\qquad)'(t)\,dt$$ (2)

$$= \int_a^b (f\circ\psi)(t)\,dt.$$ (3)

<u>Παράδειγμα</u> Υπολογίστε το $\int_0^{\pi} x\cos(x^2+1)\,dx$ (4)

Θα εφαρμόσουμε το 1ο θ. αντικατάστασης: θέτουμε $f(x)=\cos x$ (5)

$\varphi(x)=x^2+1$, $\varphi'(x)=2x$ ολοκληρώσιμη ως συνεχής στο $[0,\pi]$ (6)

Άρα $$\int_0^{\pi} x\cos(x^2+1)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\varphi'(x)\cos(\varphi(x))\,dx$$ (7)

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \;\underline{\underline{\text{1ο θ. αντικ.}}}$$ (8)

$$= \frac{1}{2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi)} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\pi^2+1}\cos(x)\,dx =$$ (9)

$$= \frac{1}{2}\sin x\Big|_{x=1}^{x=\pi^2+1} = \frac{1}{2}\left(\sin(\pi^2+1)-\sin(1)\right)$$ (10)

$\blacksquare$