Μάθημα 20

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Τεχνικές υπολογισμού αντιπαραγώγου. Δεδομένου του ότι αν (1)
f συνεχής τότε $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ όπου F αντιπαράγωγος της f (2)
Θα αναπτύξουμε τεχνικές υπολογισμού αντιπαραγώγων. Θα γράφουμε (3)
$\int f(x)\,dx$ (χωρίς άκρα ολοκλήρωσης) για τον γενικό τύπο αντιπαραγώγου (4)
της f. Έτσι επειδή $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$ $\forall \alpha \neq -1$ ισχύει (5)

$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$. Επειδή $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$ ισχύει (6)

$\int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = \log|x| + c$. Ομοίως $\int e^x\,dx = e^x + c$ (7)

$\int \sin(x)\,dx = -\cos x + c$ $\quad \int \cos x\,dx = \sin x + c$ (8)

$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + c$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$ (9)

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$ $\quad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$ (10)

$\int_{\alpha}^{t} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ (με την φ' ολοκληρώσιμη) (11)

$\underset{\text{1ο θ. αντικατάστασης}}{=}$ $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)\,dx$. Για να μην μπερδευόμαστε (12)
με τα άκρα γράφουμε τον υπολογισμό του $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ (13)
ως εξής: θέτουμε $u = \varphi(x)$ οπότε (14)

$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \overset{\text{θ. αντικ.}}{=} \int f(u)\,du$. (15)

Παρατήρηση $\frac{du}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x) \underset{\text{γραφή προς το παρόν}}{\overset{\text{τυπική}}{\Longleftrightarrow}} du = \varphi'(x)\,dx$ (16)

Ο τελευταίος τύπος μας διευκολύνει οπτικά για τους υπολογισμούς. (1)

Πχ. $\int x \cos(x^2+1)\, dx$ θέτουμε $u = x^2+1$ (2)

$du = (x^2+1)'\, dx = 2x\, dx$ (3)

$\Rightarrow x\, dx = \frac{1}{2} du$ (4)

$$\| $$

$$\int \cos(u)\, \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\sin(u) + c = \frac{1}{2}\sin(x^2+1) + c \quad (5)$$

$$\int \frac{\arctan x}{x^2+1} dx \xrightarrow[du = \frac{1}{x^2+1} dx]{u = \arctan x} \int u\, du = \frac{u^2}{2} + c = \quad (6)$$

$$= \frac{(\arctan x)^2}{2} + c \quad (7)$$

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \xrightarrow[du = -\sin x\, dx]{u = \cos x} \int \left(-\frac{1}{u}\right) du \quad (8)$$

$$= -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c \quad (9)$$

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \xrightarrow[du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx]{u = \sqrt{x}} \int \cos u\; 2du = 2\sin u + c \quad (10)$$

$2\, du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$$= 2\sin\sqrt{x} + c$$

Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx$$ (1)

(2)

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,\frac{\sin(2x)}{2} + c$$

(3)

Ομοίως για όλες τις άρτιες δυνάμεις εφόσον αναγόμαστε σε $\cos 2x$

πχ $\int \cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1+\cos^2 2x + 2\cos 2x}{4}\,dx$ (4)

(5)

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

(6)

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2x}{2} + c$$

(7)

$$= \dots$$

Αν εμφανίζονται περιττές δυνάμεις τότε αντικαθιστούμε $u=\sin x$ (8) (9)
ή $u=\cos x$ πχ.

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\underbrace{\cos x\,dx}_{du}$$ (10)

(11)

$$\xrightarrow[du=\cos x\,dx]{u=\sin x} \int (1-u^2)\,du = u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

(12)

Ομοίως αν ολοκληρώνουμε γινόμενα $\cos^m x \cdot \sin^n x$
με τον ένα εκθέτη άρτιο και τον άλλον περιττό. Πχ (13)

$$\int \cos^3 x \sin^4 x\,dx = \int \cos^2 x \sin^4 x \underbrace{\cos x\,dx} \quad \frac{u=\sin x}{du=\cos x\,dx}$$ (14)

$$= \int (1-u^2)\,u^4\,du = \int u^4 du - \int u^6 du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c$$ (15)

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c$$

Αν και οι δύο εκθέτες είναι άρτιοι χρησιμοποιούμε τις (1)

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \text{και} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad (2)$$

για να μειώσουμε τους εκθέτες. Πχ $\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx$ (3)

$$= \int (\cos^2 x)^2 \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int (1+\cos 2x)^2 (1-\cos 2x) \, dx \right) = \qquad (5)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int (1+\cos^2 2x + 2\cos 2x)(1-\cos 2x) \, dx \right) = \qquad (6)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int \left(1 - \cos 2x + \cos^2 2x - \cos^3 2x + 2\cos 2x - 2\cos^2 2x\right) dx \right) \qquad (7)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int \left(1 + \cos 2x - 2\cos^2 2x - \cos^3 2x\right) dx \right) \qquad (8)$$

$$\int 1 \, dx = x + c \qquad \int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + c \qquad (9)$$

$$\int \cos^2 2x \, dx = \int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \dots \qquad (10)$$

$$\int \cos^3 2x \, dx = \int \cos^2 2x \cos 2x \, dx \xrightarrow[du = 2\cos 2x \, dx]{u = \sin 2x} \qquad (11)$$

$$= \int (1-u^2) \cdot \frac{1}{2} \, du = \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3}\right) + c \qquad (12)$$

$$\xrightarrow{u = \sin 2x} \frac{1}{2}\left(\sin(2x) - \frac{1}{3}\sin^3(2x) \right) + c \qquad (13)$$

Εφαπτομένη & συνεφαπτομένη

$$\int \tan^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + c$$

$$\int \cot^2 x\, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\cot x + x + c$$

Επειδή $1-\sin^2 x = \cos^2 x$ οπότε $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ (για $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

και ομοίως $a^2 - (a\sin x)^2 = a^2(1-\sin^2 x) = a^2\cos^2 x$ οπότε

$\sqrt{a^2 - (a\sin x)^2} = a\cos x$

μπορούμε να υπολογίζουμε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{a^2 - x^2}$ αντικαθιστώντας $x = a\sin t$ (ή $x = a\cos t$)

π.χ. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\, dx$ $\quad \frac{x = 2\sin t}{dx = 2\cos t\, dt}$

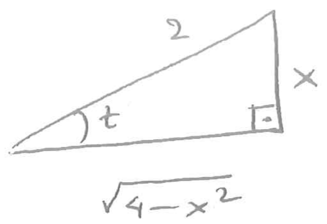
$$\int \frac{1}{4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}}\, 2\cos t\, dt =$$

$$= \int \frac{1}{8\sin^2 t\cos t}\, 2\cos t\, dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin^2 t}\, dt$$

$$= -\frac{\cot(t)}{4} + c = -\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + c$$

(διότι $\frac{x}{2} = \sin t \Rightarrow \arcsin\frac{x}{2} = t$)

σελ6



$$t = \arcsin \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sin t = \frac{x}{2} \qquad (1)$$

$$\cot(t) = \cot(\arcsin \frac{x}{2}) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \qquad (2)$$

Άρα $$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c \qquad (3)$$

https://sagecell.sagemath.org

```
integrate(1/(x^2 * sqrt(4-x^2)), x)
```