Μάθημα 20

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Τεχνικές υπολογισμού αντιπαραγώγου. Δεδομένου του ότι αν (1)
f συνεχής τότε $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ όπου F αντιπαράγωγος της f (2)
Θα αναπτύξουμε τεχνικές υπολογισμού αντιπαραγώγων. Θα γράφουμε (3)
$\int f(x)\,dx$ (χωρίς άκρα ολοκλήρωσης) για τον γενικό τύπο αντιπαραγώγου (4)
της f. Έτσι επειδή $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$ $\forall \alpha \neq -1$ ισχύει (5)

$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$. Επειδή $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$ ισχύει (6)

$\int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = \log|x| + c$. Ομοίως $\int e^x\,dx =$ (7)

$\int \cos x\,dx =$ (8)

$\int \sin(x)\,dx =$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$ (9)

$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$ (10)

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$

$\int_a^t f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ (με την φ' ολοκληρώσιμη) (11)

$\underset{\text{1ο θ. αντικατάστασης}}{=}$ $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(t)} f(x)\,dx$. Για να μην μπερδευόμαστε [illegible] (12)

με τα άκρα γράφουμε τον υπολογισμό του $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ (13)
ως εξής: θέτουμε $u=\varphi(x)$ οπότε (14)

$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \overset{\text{θ. αντικ.}}{=} \int f(u)\,du$. (15)

Παρατήρηση $\frac{du}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x) \xLeftrightarrow[\text{γραφή προς το παρόν}]{\text{τυπική}} du = \varphi'(x)\,dx$ (16)

Ο τελευταίος τύπος μας διευκολύνει οπτικά για τους υπολογισμούς. (1)

Πχ. $\int x\cos(x^2+1)\,dx$ θέτουμε $u = x^2+1$ (2)

$du = (x^2+1)'dx = 2x\,dx$ (3)

$\Longrightarrow \quad x\,dx = \frac{1}{2}du$ (4)

$\|$

$\int \cos(u)\,\frac{1}{2}du =$ $\qquad =$ (5)

$\int \frac{\arctan x}{x^2+1}dx \overset{u=\arctan x}{\underset{du=\frac{1}{x^2+1}dx}{=\!=\!=}} \int \quad du = \qquad =$ (6)

(7)

$=$

$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx \overset{u=}{\underset{du}{=\!=\!=}} \int \qquad dx$ (8)

(9)

$=$

---

(10)

$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx \overset{u=}{=\!=\!=}$

Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx$$ (1)

(2)

$=$

Ομοίως για όλες τις άρτιες δυνάμεις εφόσον αναγωγή σε των $\cos 2x$ (3)

π.χ. $\int \cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1+\cos^2 2x + 2\cos 2x}{4}\,dx$ (4)

(5)

$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$

(6)

$= \qquad + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx +$

(7)

$= \ldots$

Αν εμφανίζονται περιττές δυνάμεις τότε αντικαθιστούμε $u=\sin x$ (8)

(9)

η $u=\cos x$ π.χ.

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\underbrace{\cos x\,dx}_{du}$$ (10)

(11)

$$\xrightarrow[du=\cos x\,dx]{u=\sin x} \int (1- \quad)\,du =$$

(12)

Ομοίως αν ολοκληρώνουμε γινόμενα $\cos^m x \cdot \sin^n x$

με τον ένα εκθέτη άρτιο και τον άλλον περιττό. Π.χ. (13)

$$\int \cos^3 x \sin^4 x\,dx = \int \cos^2 x \sin^4 x \underbrace{\cos x\,dx}_{} \xrightarrow[du=\cos x\,dx]{u=\sin x}$$ (14)

(15)

$$= \int (1-u^2)\,u^4\,du =$$

Αν και οι δύο εκθέτες είναι άρτιοι χρησιμοποιούμε τις (1)

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \text{και} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad (2)$$

για να μειώσουμε τους εκθέτες. Πχ. $\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx$ (3)

$$= \int (\cos^2 x)^2 \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int (1+\cos 2x)^2 (1-\cos 2x) \, dx \right) = \qquad (5)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int (1+\cos^2 2x + 2\cos 2x)(1-\cos 2x) \, dx \right) = \qquad (6)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int (1 - \cos 2x + \cos^2 2x - \cos^3 2x + 2\cos 2x - 2\cos^2 2x) \, dx \right) \qquad (7)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int (1 + \cos 2x - 2\cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx \right) \qquad (8)$$

$$\int 1 \, dx = x + c \qquad \int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + c \qquad (9)$$

$$\int \cos^2 2x \, dx = \int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \ldots \qquad (10)$$

$$\int \cos^3 2x \, dx = \int \cos^2 2x \cos 2x \, dx \xrightarrow[du = 2\cos 2x \, dx]{u = \sin 2x} \qquad (11)$$

$$= \int (1-u^2) \cdot \frac{1}{2} \, du = \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3}\right) + c \qquad (12)$$

$$\xrightarrow{u = \sin 2x} \frac{1}{2}\left(\sin(2x) - \frac{1}{3}\sin^3(2x)\right) + c \qquad (13)$$

/0Σ15

Εφαπτομένη & συνεφαπτομένη (1)

$$\int \tan^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx =$$ (2)

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \tan x - x + c$$ (3)

$$\int \cot^2 x\, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\, dx =$$ (4)

$$= \int \frac{\quad}{\quad} - \quad dx =$$ (5)

(6)

Επειδή $1-\sin^2 x = \cos^2 x$ οπότε $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ (για $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

και ομοίως $a^2 - (a\sin x)^2 = a^2(1-\sin^2 x) = a^2\cos^2 x$ οπότε (7)

$$\sqrt{a^2 - (a\sin x)^2} = a\cos x$$ (8)

μπορούμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα που περιέχουν την (9)

$\sqrt{a^2-x^2}$ αντικαθιστώντας $x = a\sin t$ (ή $x = a\cos t$) (10)

πχ $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\, \underbrace{dx}_{2\cos t\, dt} \qquad \frac{x = 2\sin t}{dx = 2\cos t\, dt}$$ (11)

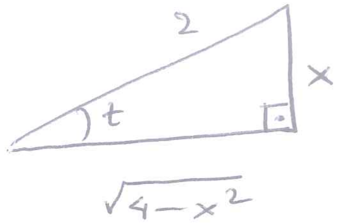
$$\int \frac{1}{4\sin^2 t\,\sqrt{4-4\sin^2 t}}\; 2\cos t\, dt =$$ (12)

$$= \int \frac{1}{8\sin^2 t\,\cos t}\; 2\cos t\, dt = \frac{1}{4}\int \qquad dt$$ (13)

$$= -\frac{\cot(t)}{4} + c = -\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + c$$ (14)

(διότι $\frac{x}{2} = \sin t \Rightarrow \arcsin\frac{x}{2} = t$) (15)

σελ 6



$$t = \arcsin\frac{x}{2} \Leftrightarrow \sin t = \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$\cot(t) = \cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \quad (2)$$

Άρα

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c \quad (3)$$