Μάθημα 22

Άσκηση $\int x \sin^2 x \, dx = \int x \, \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx =$ (1)

$= \frac{1}{2} \int x \, dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x \, dx$ (2)

$= \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x \cos 2x \, dx$ (3)

$\int x \cos(2x) \, dx = \int x \left(\frac{\sin(2x)}{2} \right)' dx =$ (4)

$= x \frac{\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} \, dx =$ (5)

$= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos(2x) + c$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$ (10)

Αν $n \geq m$ διαιρούμε τα πολυώνυμα ώστε να προκύψει (11)

$f =$ πολυώνυμο $+ \frac{p(x)}{q(x)}$ με $\deg(p(x)) < \deg(q(x))$ (12)

π.χ. $f(x) = \frac{3x^5 + x - 1}{x^3 + x - 2}$ (13)

$3x^5 + x - 1 \;\big|\; x^3 + x - 2$ (14)

$3x^2 - 3$ (15)

(16) $-3x^5 - 3x^3 + 6x^2$

(17) $-3x^3 + 6x^2 + x - 1$

(18) $+3x^3 + 3x - 6$

(19) $+6x^2 + 4x - 7$

(20)

Άρα $$f(x) = 3x^2 - 3 + \frac{+6x^2+4x\cancel{+5}-7}{x^3+x-2}$$

Τώρα παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή $q(x)$ εάν αυτό είναι εφικτό. Αν $q(x)=\lambda(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_\ell x+\gamma_\ell)^{s_\ell}$ και γράφουμε το κλάσμα $p(x)/q(x)$ ως εξής

$$\frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}+\frac{A_{21}}{x-\alpha_2}+\frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2}+\cdots+\frac{A_{2r_2}}{(x-\alpha_2)^{r_2}}+$$

$$+\cdots+\frac{A_{k1}}{(x-\alpha_k)}+\cdots+\frac{A_{kr_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}+\frac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{x^2+\beta_1x+\gamma_1}+\frac{B_{12}x+\Gamma_{12}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^2}+\cdots+$$

$$+\frac{B_{1s_1}x+\Gamma_{1s_1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}}+\cdots+\frac{B_{\ell1}x+\Gamma_{\ell1}}{(x+\beta_\ell\cancel{x}+\gamma_\ell)}+\frac{B_{\ell2}x+\Gamma_{\ell2}}{(x+\beta_\ell x+\gamma_\ell)^2}+\cdots$$

$$+\cdots+\frac{B_{\ell s_\ell}x+\Gamma_{\ell s_\ell}}{(x+\beta_\ell x+\gamma_\ell)^{s_\ell}}$$

Οπότε η ολοκλήρωση ανάγεται στην ολοκλήρωση δύο τύπων συναρτήσεων: της $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$ και του $\dfrac{Ax+B}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$

με $\beta^2-4\alpha\gamma<0$.

Ας ολοκληρώσουμε όμως το παράδειγμά μας:

Το x^3+x-2 έχει ρίζα το $x=1$. Άρα

$$\begin{array}{l|l} x^3+x-2 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3+x^2} & x^2+x+2 \\ \quad x^2+x-2 & \\ \underline{\quad -x^2+x} & \\ \qquad 2x-2 & \\ \underline{\qquad -2x+2} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Άρα

(σελ 3)

$$f(x) = 3x^2 - 3 + \frac{6x^2+4x+5}{(x-1)(x^2+x+2)}$$ Γράφουμε το κλάσμα (1)

Στη μορφή: $$\frac{6x^2+4x+5}{(x-1)(x^2+x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+2}$$ (2)

Βρίσκουμε τα A, B, Γ με απαλοιφή παρονομαστών & ομαδοποίηση όρων: (3)

$$6x^2+4x+5 = A(x^2+x+2) + (x-1)(Bx+\Gamma)$$ (4)

$$= Ax^2 + Ax + 2A + Bx^2 + \Gamma x - Bx - \Gamma$$ (5)

$$= (A+B)x^2 + (A+\Gamma-B)x + (2A-\Gamma)$$ (6)

(7) Άρα $A+B=6$

(8) $A+\Gamma-B=4$ $\xrightarrow{(+)}$ $2A+\Gamma=10$ $\xrightarrow{(-)}$ $2\Gamma=5$ (10)

(9) $2A-\Gamma=5$ $\qquad$ $2A-\Gamma=5$ (11)

$\Rightarrow \boxed{\Gamma = 5/2}$ $\quad 2A = 5+\frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{A = 15/4}$ & $\boxed{B = 6-\frac{15}{4} = \frac{9}{4}}$ (12)

Συνεπώς $$f(x) = 3x^2-3 + \frac{15/4}{x-1} + \frac{\frac{9}{4}x + 5/2}{x^2+x+2}$$ (13)

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|$$ (14)

$$\int \frac{-\frac{5}{4}x+\frac{5}{2}}{x^2+x+2}\,dx = -\frac{5}{4}\int \frac{x-2}{x^2+x+2}\,dx =$$ (15)

$$= -\frac{5}{8}\int \frac{2x-4}{x^2+x+2}\,dx = -\frac{5}{8}\int \frac{2x+1-5}{x^2+x+2}\,dx$$ (16)

$$= -\frac{5}{8}\int \frac{(x^2+x+2)'}{x^2+x+2}\,dx + \frac{25}{8}\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx$$ (17)

$$= -\frac{5}{4}\cdot \ln|x^2+x+1| + \frac{25}{4}\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx$$ (18)

Μένει να υπολογισεί το $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx$: Συμπληρώνουμε το τετράγωνο: (1)

$$= \int \frac{1}{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2}\,dx = \tag{2}$$

$$= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2-\frac{1}{4}}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,dx = \tag{3}$$

$$= \frac{4}{7}\int \frac{1}{\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{7/4}+1}\,dx = \frac{4}{7}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{7/4}}\right)^2+1}\,dx \; ☆ \tag{4}$$

αντικαθιστούμε $t = \dfrac{x+1/2}{\sqrt{7/4}} \Longrightarrow \sqrt{\frac{7}{4}}\,t-\frac{1}{2}=x$ (5)

$\Longrightarrow dx = \sqrt{\frac{7}{4}}\cdot dt$. Συνεπώς (6)

$$☆ = \frac{4}{7}\int \frac{1}{t^2+1}\sqrt{\frac{7}{4}}\,dt = \sqrt{\frac{4}{7}}\arctan(t) = \tag{7}$$

$= \sqrt{\frac{4}{7}}\arctan\left(\dfrac{x+1/2}{\sqrt{7/4}}\right)$. Συνεπώς βάζοντας τα όλα μαζί (8)

$$\int \frac{3x^5+x-1}{x^3+x-2}\,dx = x^3-3x+\frac{15}{4}\ln|x-1|-\frac{5}{4}\ln|x^2+x+2| \tag{9}$$

$$+\frac{25}{4}\sqrt{\frac{4}{7}}\arctan\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{7/4}}\right)+c \;\blacksquare \tag{10}$$

• Υπολογισμός του $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = \int (x-a)^{-k}\,dx =$ (11)

$$= \begin{cases} \ln|x-a|+c & \text{αν } k=1 \quad (12) \\ \underbrace{\dfrac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}\cdot(-1)}\;+c & \text{αν } k>1 \quad (13) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+c \tag{14}$$

• Υπολογισμός του $\displaystyle\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx$ με $\beta^2-4\gamma<0$ (1)

Πρώτα προσπαθούμε να εμφανίσουμε την παράγωγο του $x^2+\beta x+\gamma$ (2)

στον αριθμητή $(x^2+\beta x+\gamma)'=2x+\beta$. Άρα (3)

$$\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\frac{2}{B}\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx = \quad (4)$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{2x+\beta + \frac{2\Gamma}{B}-\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx = \quad (5)$$

$$= \frac{B}{2}\left(\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx + \left(\frac{2\Gamma}{B}-\beta\right)\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx\right) \quad (6)$$

Στο πρώτο θέτουμε $y = x^2+\beta x+\gamma$ (7)

(8)

Για το δεύτερο συμπληρώνουμε το τετράγωνο:

$$x^2+\beta x+\gamma = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{4\gamma-\beta^2}{4} = \frac{4\gamma-\beta^2}{4}\left(\left(\frac{x+\beta/2}{\sqrt{\frac{4\gamma-\beta^2}{4}}}\right)^2+1\right) \quad (9)$$

και θέτοντας $y = \dfrac{x+\beta/2}{\sqrt{\frac{4\gamma-\beta^2}{4}}}$ αναγόμαστε στο (10)

$$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy$$. Αυτό υπολογίζεται με παραγοντική (11)

ολοκλήρωση (12)

$$I_k = \int y' \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy = \frac{y}{(y^2+1)^k} - \int y\,(-k)\,(y^2+1)^{-k-1}\,2y\,dy \quad (13)$$

$$= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(y^2+1)^{k+1}} = \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k\int \frac{y^2+1-1}{(y^2+1)^{k+1}}\,dy \quad (14)$$

$$= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k\,I_k - 2k\,I_{k+1} \Rightarrow \quad (15)$$

$$\Rightarrow I_{k+1} = \frac{1}{2k} \frac{y}{(y^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k} I_k \qquad (16)$$

$$\text{Άρα} \quad I_k = \frac{1}{2(k-1)} \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2(k-1)-1}{2(k-1)} I_{k-1} . \qquad (17)$$

Αλλιώς

$$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\, dy = \int \left(-\frac{1}{y^2+1}\right)' \frac{1}{2y} \frac{1}{(y^2+1)^{k-2}}\, dy$$

$$= -\frac{1}{2y\,(y^2+1)^{k-1}} + \int \frac{1}{y^2+1} \left(+ \frac{1}{\cancel{2y}} \frac{-(k-2)\,\cancel{2y}}{(y^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2y^2} \frac{1}{(y^2+1)^{k-2}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2y\,(y^2+1)^{k-1}} - (k-2) \int \frac{1}{(y^2+1)^k} - \int \frac{1}{2y^2} \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\, dy$$

$$\Rightarrow (k-1) I_k = -\frac{1}{2y(y^2+1)^{k-1}} - \int \frac{1}{2y^2} \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\, dy$$

$$= -\frac{1}{2y\,(y^2+1)^{k-1}} \int$$