# Μάθημα 23

$$\int \frac{x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}\, dx$$

$$\frac{x+2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{\Gamma x + \Delta}{x^2+1} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x+2 = A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (\Gamma x + \Delta)(x+1)^2$$

$$= A(\qquad\qquad) + Bx^2 + B + (\Gamma x + \Delta)(\qquad\qquad)$$

$$=$$

$$= \_\_ + \sim + = + A + = + + \_\_ + = + \sim + = + \sim + \Delta$$

$$= (\qquad)x^3 + (\qquad\qquad)x^2 + (\qquad\qquad)x + (\qquad)$$

Άρα

Οπότε $\quad A = \qquad B = \qquad \Gamma = -1 \qquad \Delta = 1/2$

$$\int \frac{1}{x+1}\, dx = \ln|x+1| + c \quad , \quad \int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = \int (x+1)^{-2}\, dx = \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$$\int \frac{-x + 1/2}{x^2+1}\, dx = -\int \frac{x - 1/2}{x^2+1}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2+1}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan(x) + c$$

$I = \int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}\,dx$ . Πιθανές ρίζες του παρονομαστή (1)

$\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$ (2)

Η $x=1$ είναι ρίζα οπότε $x^3+3x^2-4 \ \big| \ x-1$ (3)

(4)

Άρα $x^3+3x^2-4 = (x-1)(x+2)^2$

$$\frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{\Gamma}{(x+2)^2} \Longrightarrow$$ (5)

$$\Longrightarrow \quad 5x^2+12x+1 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + \Gamma(x-1)$$ (6)

$$= \underline{Ax^2} + \underline{\underline{4Ax}} + 4A + \underline{Bx^2} + \underline{\underline{2Bx}} - Bx - 2B + \underline{\underline{\Gamma x}} - \Gamma$$ (7)

$$= ( \qquad )x^2 + ( \qquad )x + 4A - 2B - \Gamma$$ (8)

Άρα $A+B=$ , $4A \qquad =12$, $4A-2B-\Gamma = 1$ (9)

Λύνουμε το σύστημα
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 12 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & -3 & -2 & -11 \end{array}\right)$$ (10)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$\boxed{\Gamma = 1}$ (11)

$-3B + \Gamma = -8 \Longrightarrow -3B + 1 = -8$ (12)

$\Longrightarrow \boxed{B = 3}$ (13)

$A + B = 5 \Longrightarrow \boxed{A = 2}$ (14)

Άρα

$$I = \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$$ (15)

$$= 2\ln|x-1| + 3\,2\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + c$$ (16)

# Ρητές συναρτήσεις των $\cos x$ και $\sin x$ (1)

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx \quad (2)$$

Θέτουμε $u = \tan\frac{x}{2}$ και παρατηρούμε ότι (3)

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \cdot \left(1 - \tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad (5)$$

$$\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2} = \frac{2u}{1+u^2} \quad (6)$$

$$\frac{x}{2} = \arctan u \Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}$$

Έτσι αναγόμαστε στο $\int R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right) \cdot \frac{2}{1+u^2}\, du$ (7)

όπου $R$ ρητή συνάρτηση.

Πχ $$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\, dx \overset{u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=} \int \frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{1-\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2}\, du \quad (8)$$

$$= \int \frac{\frac{1+u^2+2u}{}}{\underline{1+u^2-1+u^2}} \frac{2}{1+u^2}\, du = \quad (9)$$

$$= \int \frac{(1+u)^2}{u^2(1+u^2)}\, du = \int \frac{1+u^2+2u}{u^2(1+u^2)}\, du = \quad (10)$$

$$= \int \frac{1+u^2}{u^2(1+u^2)}\, du + \int \frac{2u}{u^2(1+u^2)}\, du = \quad (11)$$

$$= \int \frac{1}{u^2}\, du + \int \frac{2u}{1+u^2}\, du = -\frac{1}{u} + \ln(1+u^2) + c = \quad (12)$$

$$= -\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} + \ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) + c. \quad (1)$$

---

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2-1}), \quad \int R(x, \sqrt{1+x^2}) \quad (2)$$

$$x = \sin t \quad (8)$$

ή

$$\begin{cases} u = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} \quad (10) \\ \sqrt{1-x^2} = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ x = -\dfrac{2u}{u^2+1} \quad (11) \\ dx = 2\,\dfrac{u^2-1}{(u^2+1)^2}\,du \quad (12) \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{\cos t} \quad (9)$$

ή

$$u = x + \sqrt{x^2-1} \quad (13)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = (u^2+1)/2u \quad (14) \\ \sqrt{x^2-1} = \dfrac{u^2-1}{2u} \quad (15) \\ dx = \dfrac{u^2-1}{2u^2}\,du \quad (16) \end{cases}$$

$$x = \tan t \quad (3)$$

ή (4)

$$u = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u^2-1}{2u} \quad (5) \\ \sqrt{x^2+1} = \dfrac{u^2+1}{2u} \quad (6) \\ dx = \dfrac{u^2+1}{2u^2}\,du \quad (7) \end{cases}$$

Πχ

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \frac{u^2-1}{2u}\,\frac{u^2-1}{2u^2}\,du = \quad (17)$$

$$= \int \frac{(u^2-1)^2}{4u^3}\,du = \frac{1}{4}\int \frac{u^4-2u^2+1}{u^3}\,du = \quad (18)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int u\,du - 2\int \frac{1}{u}\,du + \int \frac{1}{u^3}\,du\right) = \quad (19)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{u^2}{2} + 2\ln|u| + \frac{u^{-3+1}}{-3+1}\right) + c = \quad (20)$$

$$= \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{8} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| - \frac{1}{8}\,\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^2} + c \quad (21)$$

(σ-ε)5

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \frac{1-u^2}{1+u^2}\; 2\,\frac{u^2-1}{(u^2+1)^2}\,du = \tag{1}$$

$$= -2\int \frac{(u^2-1)^2}{(u^2+1)^3}\,du = -2\int \frac{\left((u^2+1)-2\right)^2}{(u^2+1)^3}\,du \tag{2}$$

$$= -2\int \frac{(u^2+1)^2 - 4(u^2+1) + 4}{(u^2+1)^3}\,du = \tag{3}$$

$$= -2\left[\int \frac{1}{u^2+1}\,du - 4\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du + 4\int \frac{1}{(u^2+1)^3}\,du\right] \tag{4}$$

☆

$$\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \arctan u + c \tag{5}$$

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du = \int \frac{u^2+1-u^2}{(u^2+1)^2}\,du = \int \frac{1}{u^2+1} - \int \frac{u^2}{(u^2+1)^2}\,du \tag{6}$$

$$= \arctan(u) - \int \frac{u^2}{(u^2+1)^2}\,du \tag{7}$$

$$= \arctan(u) - \int \frac{1}{2}\,u\,\underbrace{\left(-\frac{1}{u^2+1}\right)'}_{=\frac{2u}{(u^2+1)^2}}\,du \tag{8}$$

(9)

$$= \arctan u - \frac{1}{2}\left[u\left(-\frac{1}{u^2+1}\right) - \int u'\left(-\frac{1}{u^2+1}\right)du\right] \tag{10}$$

$$= \arctan u + \frac{1}{2}\,\frac{u}{u^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \tag{11}$$

$$= \arctan u + \frac{1}{2}\,\frac{u}{u^2+1} - \frac{1}{2}\arctan u + c = \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2}\arctan u + \frac{1}{2}\,\frac{u}{u^2+1} + c \tag{13}$$

(σελ) 6

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^3}\,du = \int \frac{u^2+1-u^2}{(u^2+1)^3}\,du = \int \frac{1}{(u^2+1)^2} - \int \frac{u^2}{(u^2+1)^3}\,du$$ (1)

Το $\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du$ υπολογίστηκε πριν (2)

$$\int \frac{u^2}{(u^2+1)^3}\,du = \int \frac{1}{4}\,u\,\underbrace{\left(-\frac{1}{(u^2+1)^2}\right)'}_{=\,2(u^2+1)^{-3}\,2u}\,du =$$ (3) (4)

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du.$$ (5)

Άρα $$\int \frac{1}{(u^2+1)^3}\,du = \int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du + \frac{1}{4}\,\frac{u}{(u^2+1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du$$ (6)

$$= \frac{1}{4}\,\frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du$$ (7)

$$= \frac{1}{4}\,\frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\arctan u + \frac{1}{2}\,\frac{u}{u^2+1}\right) + c$$ (8)

Επιστρέφουμε όλα τα ολοκληρώματα στην (*) (9)

και επιστρέφουμε τη μεταβλητή u σε x. (10)

## 6.5 Ασκήσεις

**Ομάδα Α΄**

**1.** Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+2}dx\ , \qquad \int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}dx\ , \qquad \int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}dx.$$

**2.** Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{x^4+1}\ , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\ , \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\ , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\ .$$

**3.** Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \cos^3 x\,dx\ , \quad \int \cos^2 x\sin^3 x\,dx\ , \quad \int \tan^2 x\,dx\ , \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x}\ , \quad \int \sqrt{\tan x}\,dx\ .$$

**4.** Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, δείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}\ .$$

**5.** Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2-1)}\,dx\ , \qquad \int \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\,dx\ , \qquad \int x\log x\,dx$$

$$\int x\cos x\,dx\ , \qquad \int e^x \sin x\,dx\ , \qquad \int x\sin^2 x\,dx$$

$$\int \log(x+\sqrt{x})\,dx\ , \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx\ , \qquad \int \frac{x+4}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$$

$$\int \frac{x}{1+\sin x}\,dx\ , \qquad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx\ , \qquad \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}\ .$$

**6.** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \sin(\log x)\,dx\ , \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}}\log(1-x)\,dx.$$

**7.** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx\ , \qquad \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx.$$

**8.** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx\,, \qquad \int \frac{\log(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx.$$

**9.** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx \quad , \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}dx$$

$$\int_0^5 x\log\left(\sqrt{1+x^2}\right)\,dx \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,dx.$$

**10.** Υπολογίστε τα ακόλουθα εμβαδά:

(α) Του χωρίου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x-2$ και από τον $x$-άξονα.

(β) Του χωρίου που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\cos x$ και $g(x)=\sin x$ στο διάστημα $[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$.

### Ομάδα Β′

**11.** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx\,, \quad \int \frac{1}{\sin x}\,dx\,, \quad \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx\,, \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx\,, \quad \int x\arctan x\,dx\,, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\,, \quad \int \sqrt{x^2-1}\,dx.$$

**12.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

**13.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx.$$

**14.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx.$$

**15.** Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} x^p\,dx$$

δεν είναι πεπερασμένο για κανένα $p \in \mathbb{R}$.

**16.** Υπολογίστε τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx \ , \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \ , \quad \int_0^1 \log x \, dx \ .$$

**17.** Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n!$$

**18.** Βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 e^{-x^6} \int_0^{x^3} e^{t^2} dt \ , \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \sin t \, dt.$$