Μάθημα 27

Το Θεώρημα Taylor

Ορισμός (Πολυώνυμο Taylor τάξης n) Αν η $f : [a\,b] \to \mathbb{R}$ είναι (1)
n φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in [a\ b]$ ορίζουμε το πολυώνυμο τάξης (2)
n της f στο x_0 να είναι το πολυώνυμο (3)

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \quad (4)$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (5)$$

Υπόλοιπο Taylor τάξης n στο x_0 ονομάζουμε τη διαφορά (6)

$$R_{nfx_0}(x) = f(x) - T_{nfx_0}(x) \quad (7)$$

Όταν $x_0 = 0$ το πολυώνυμο και το υπόλοιπο ονομάζονται (8)
πολυώνυμο MacLaurin και υπόλοιπο MacLaurin. Δηλαδή (9)

$$T_{nf}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k \quad (10)$$

$$R_{nf}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (11)$$

Παρατήρηση ότι $T_{nfx_0}(x_0) = f(x_0)$ και $R_{nfx_0}(x_0) = 0$ (12)

$$T'_{nfx_0}(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}2\cdot(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}3(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(x-x_0)^{n-1}$$

$$= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$ άρα $T'_{nfx_0}(x_0) = f'(x_0)$

$T''_{nfx_0}(x) =$

$=$ άρα $T''_{nfx_0}(x_0) = f''(x_0)$

Γενικά $T^{(\ell)}_{nfx_0}(x) = \sum_{k=\ell}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-\ell)!}(x-x_0)^{k-\ell}$ και άρα $T^{(\ell)}_{nfx_0}(x_0) = f^{(\ell)}(x_0)$

Δηλαδή τα πολυώνυμα Taylor έχουν τις ίδιες παραγώγους με την f στο x_0 και μάλιστα είναι το μόνο πολυώνυμο με αυτή την ιδιότητα.

Το θεώρημα Taylor μας δίνει διάφορες μορφές του υπολοίπου R_{nfx_0} τις οποίες συχνά εκμεταλλευόμαστε για να δείξουμε ότι $R_{nfx_0}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ισοδύναμα ότι $T_{nfx_0}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ και έτσι να έχουμε μια προσέγγιση της f από πολυώνυμα, τα T_{nfx_0}.

<u>Θεώρημα Taylor</u> $f:[ab] \to \mathbb{R}$ $n+1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[ab]$ και $x_0 \in [ab]$. Τότε για κάθε $x \in [ab]$

(i) (Μορφή Cauchy του υπολοίπου Taylor) $\exists$ ξ ανάμεσα στα x και x_0 ώστε $R_{nfx_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$

(ii) (Μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor)

Υπάρχει ξ μεταξύ του x και x_0 ώστε

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(iii) (ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου Taylor)

Αν η $f^{(n+1)}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt.$$

<u>Απόδειξη</u> Θέτουμε $\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k =$

(Παρατηρείστε ότι $\varphi(x) = f(x) - f(x) = 0$ & $\varphi(x_0) = R_{n,f,x_0}(x)$)

$$= f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

Άρα $\varphi'(t) = \frac{d}{dt} R_{n,f,t}(x) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right)$

Το άθροισμα είναι τηλεσκοπικό οπότε

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \Bigg(\cancel{\frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t)^1} - \frac{f^{(1)}(t)}{0!}(x-t)^0$$

$$+ \cancel{\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2} - \cancel{\frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t)^1}$$

$$+ \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \cancel{\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}} \Bigg)$$

$$= -f'(t) + f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

(i) Από το Θ. Μ. Τ για φ στο διάστημα από x μέχρι x_0 υπάρχει ξ ανάμεσα στα x, x_0 ώστε

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \varphi'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

$$\xRightarrow{\varphi(x)=0} \quad \underbrace{-\varphi(x_0)}_{\substack{\| \\ R_{nfx_0}}} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$$

(ii) Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ του Cauchy για την φ και την $g(t)=(x-t)^{n+1}$ για t στο διάστημα ανάμεσα στα x και x_0

<u>Υπενθύμιση</u> <u>ΘΜΤ Cauchy</u> $f, g : [a\,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a\,b]$ και παραγωγίσιμες στο $(a\,b)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a\,b)$ ώστε

$$\big(f(b)-f(a)\big)\,g'(\xi) = \big(g(b)-g(a)\big)\,f'(\xi)$$

Για την απόδειξη εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στην

$$h(x) = \big(f(x)-f(a)\big)\big(g(b)-g(a)\big) - \big(f(b)-f(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big)$$

στο $[a\,b]$ $\quad h(a)=h(b)=0$

Οπότε $\exists\,\xi$ ανάμεσα στα x x_0 ώστε

$$\big(\underbrace{\varphi(x_0)}_{\substack{\| \\ R_{nfx_0}}} - \underbrace{\varphi(x)}_{\substack{\| \\ 0}}\big)\, g'(\xi) = \big(g(x_0) - \underbrace{g(x)}_{\substack{\| \\ 0}}\big)\, \varphi'(\xi)$$

$$\Longrightarrow$$

$$R_{nfx_0}(x)\cdot(n+1)\cancel{(-1)}\cancel{(x-\xi)^n} = (x-x_0)^{n+1}\varphi'(\xi)$$

$$= (x-x_0)^{n+1}\left(\cancel{-}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cancel{(x-\xi)^n}\right)$$

$$\Longrightarrow R_{nfx_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(iii) $R_{nfx_0}(x) = \varphi(x_0) = \varphi(x_0) - \underset{0}{\underset{\|}{\varphi(x)}}$ $\dfrac{\varphi' \text{ ολοκλη-}}{\text{ρωσιμη}}$ (1)

$$= \int_x^{x_0} \varphi'(t)\,dt = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt \quad \blacksquare$$ (2)

<u>Εφαρμογή</u> $e^x = f(x)$ $\quad f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 \quad (x_0 = 0)$ (3)

Άρα $T_{nf}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ (4)

(υπόλοιπο Lagrange) $R_{nf}(x) = \dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$ (5)

(προσέξτε ότι το ξ εξαρτάται από το x) (6)

Αν $x > 0$ $\quad 0 < \xi < x \Rightarrow e^{\xi} \le e^x = e^{|x|}$ (7)

Αν $x \le 0$ $\quad \Rightarrow \xi \le 0 \Rightarrow e^{\xi} \le 1$ (8)

Σε κάθε περίπτωση $|R_{nf}(x)| \le \dfrac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (9)

(10)

από το κριτήριο λόγου

$$\frac{\dfrac{e^{|x|}|x|^{n+2}}{(n+2)!}}{\dfrac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}} = \cdots = \frac{|x|}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ (11)

Άρα $R_{nf}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ δηλαδή $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$ (12)

$\Rightarrow \boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$ μάλιστα η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη (13)
σε κάθε φραγμένο διάστημα $[a,b]$ διότι (14)

$\forall x \in [a,b]$ $\quad \dfrac{|x|}{n+2} \le \dfrac{\max\{|a|,|b|\}}{n+2} \longrightarrow 0$ (15)