Μάθημα 27

Το θεώρημα Taylor

Ορισμός (Πολυώνυμο Taylor τάξης n) Αν η $f:[a b] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι (1)
n φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in [a\ b]$ ορίζουμε το πολυώνυμο τάξης (2)
n της f στο x_0 να είναι το πολυώνυμο (3)

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \quad (4)$$

$$= \quad (5)$$

Υπόλοιπο Taylor τάξης n στο x_0 ονομάζουμε τη διαφορά (6)

$$R_{nfx_0}(x) = f(x) - T_{nfx_0}(x) \quad (7)$$

Όταν $x_0 =$ το πολυώνυμο και το υπόλοιπο ονομάζονται (8)
πολυώνυμο MacLaurin και υπόλοιπο MacLaurin. Δηλαδή (9)

$$T_{nf}(x) = \sum \quad (10)$$

$$R_{nf}(x) = \quad (11)$$

Παρατηρούμε ότι $T_{nfx_0}(x_0) =$ και $R_{nfx_0}(x_0) =$ (12)

$T'_{nfx_0}(x) =$ (1)

$=$ άρα $T'_{nfx_0}(x_0) =$ (2)

$T''_{nfx_0}(x) =$ (3)

άρα $T''_{nfx_0}(x_0) =$ (4)

$=$

Γενικά $T^{(\ell)}_{nfx_0}(x) = \sum_{k=\ell}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-\ell)!}(x-x_0)^{k-\ell}$ και άρα $T^{(\ell)}_{nfx_0}(x_0)=$ (5)

Δηλαδή τα πολυώνυμα Taylor έχουν τις ίδιες παραγώγους (6)
με την f στο x_0 και μάλιστα είναι το μόνο πολυώνυμο (7)
με αυτή την ιδιότητα. (8)

Το θεώρημα Taylor μας δίνει διάφορες μορφές του υπολοίπου (9)
R_{nfx_0} τις οποίες συχνά εκμεταλλευόμαστε για να δείξουμε (10)
ότι $R_{nfx_0}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ισοδύναμα ότι $T_{nfx_0}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ και (11)
έτσι να έχουμε μια προσέγγιση της f από πολυώνυμα, τα T_{nfx_0}. (12)

<u>Θεώρημα Taylor</u> $f:[ab]\longrightarrow\mathbb{R}$ $n+1$ φορές παραγωγίσιμη (13)
στο $[ab]$ και $x_0\in[ab]$. Τότε για κάθε $x\in[ab]$ (14)
(i) (Μορφή Cauchy του υπολοίπου Taylor) $\exists$ ξ ανάμεσα στα x και x_0 (15)
ώστε $R_{nfx_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$ (16)

ΓΣΕΔ 3

(ii) (Μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor) (1)

Υπάρχει ξ μεταξύ του x και x_0 ώστε (2)

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (3)$$

(4)

(iii) (ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου Taylor)

Αν η f^{n+1} είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε (5)

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt. \quad (6)$$

Απόδειξη Θέτουμε $\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k =$ (7)

$$= f(x) - \qquad - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \quad (8)$$

Άρα $\varphi'(t) = \frac{d}{dt} R_{n,f,t}(x) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{n}$ (9)

Το άθροισμα είναι τηλεσκοπικό οπότε (10)

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \Big(\frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x-t)^1 - \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x-t)^0 \quad (11)$$

$$+ \frac{f^{(3)}(t)}{3!}(x-t)^2 - \frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x-t)^1 \quad (12)$$

$$+ \cdots + \quad (13)$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \Big) \quad (14)$$

$$= -f'(t) + f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \quad (15)$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \quad (16)$$

(i) Από το Θ. Μ. Τ. για φ στο διάστημα από x μέχρι x_0 υπάρχει ξ ανάμεσα στα x, x_0 ώστε

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \varphi'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

$$\Longrightarrow \varphi(x) = - \underbrace{\varphi(x_0)}_{R_{n f x_0}} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n (x-x_0)$$

(ii) Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ του Cauchy για την φ και την $g(t) = (x-t)^{n+1}$ για t στο διάστημα ανάμεσα στα x και x_0

__Υπενθύμιση__ __ΘΜΤ Cauchy__ $f, g : [ab] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a b]$ και παραγωγίσιμες στο $(a b)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a b)$ ώστε

$$\big(f(b)-f(a)\big)\, g'(\xi) = \big(g(b)-g(a)\big)\, f'(\xi)$$

Για την απόδειξη εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στην

$$h(x) = \big(f(x)-f(a)\big)\big(g(b)-g(a)\big) - \big(f(b)-f(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big)$$

στο $[a b]$ $\quad h(a) = h(b) = 0$

Οπότε $\exists\, \xi$ ανάμεσα στα x, x_0 ώστε

$$\big(\underbrace{\varphi(x_0)}_{R_{n f x_0}} - \underbrace{\varphi(x)}_{0}\big)\, g'(\xi) = \big(g(x_0) - \underbrace{g(x)}_{0}\big)\, \varphi'(\xi)$$

$$\Longrightarrow$$

$$R_{n f x_0}(x) \cdot (n+1)(-1)(x-\xi)^n = (x-x_0)^{n+1}\, \varphi'(\xi)$$

$$= (x-x_0)^{n+1}\left(-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\right)$$

$$\Longrightarrow R_{n f x_0}(x) = \frac{\qquad}{\qquad}\left(\qquad \right)$$

(iii) $R_{nfx_0}(x) = \varphi(x_0) = \varphi(x_0) - \underset{\overset{\|}{0}}{\varphi(x)}$ $\overset{\varphi' \text{ ολοκλη-}}{\underset{\text{ρωσιμη}}{=\!=\!=}}$ (1)

$$= \int_{x}^{x_0} \varphi'(t)\,dt = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt \qquad \blacksquare$$ (2)

Εφαρμογή $e^x = f(x)$ $\quad f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 \quad (x_0 = 0)$ (3)

Άρα $T_{nf}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ (4)

(υπόλοιπο Lagrange) $R_{nf}(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$ (5)

(προσέξτε ότι το ξ εξαρτάται από το x) (6)

Αν $x > 0$ $\quad 0 < \xi < x \Rightarrow e^{\xi} \le e^{x} = e^{|x|}$ (7)

Αν $x \le 0$ $\quad \Rightarrow \xi \le 0 \Rightarrow e^{\xi} \le 1$ (8)

Σε κάθε περίπτωση $\left|R_{nf}(x)\right| \le \frac{e^{|x|}\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (9)

(10)

από το κριτήριο λόγου

$$\frac{\dfrac{e^{|x|}\,|x|^{n+2}}{(n+2)!}}{\dfrac{e^{|x|}\,|x|^{n+1}}{(n+1)!}} = \cdots = \frac{|x|}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ (11)

Άρα $R_{nf}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ δηλαδή $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$ (12)

$$\Rightarrow \boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$ μάλιστα η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη (13)

σε κάθε φραγμένο διάστημα $[a,b]$ διότι (14)

$\forall\, x \in [a,b]$ $\quad \frac{|x|}{n+2} \le \frac{\qquad}{n+2} \longrightarrow 0$ (15)