Μάθημα 28

$\boxed{f(x) = \cos x}$

$f(x_0) = \cos x_0 \qquad f'(x_0) = -\sin x_0$ (1)

$f''(x_0) = -\cos x_0 \qquad f^{(3)}(x_0) = \sin x_0$ (2)

$f^{(4)}(x_0) = \cos x_0 \qquad f^{(5)}(x_0) = -\sin(x_0)$ (3)

$f^{(2k)}(x_0) = (-1)^k \cdot \cos x_0 \qquad f^{(2k-1)}(x_0) = (-1)^k \cdot \sin x_0$ (4)

(5)

Αν επιλέξουμε $x_0 = 0$ τότε $f^{(2k-1)}(x_0) = 0$

ενώ $f^{(2k)}(x_0) = (-1)^k$ (6)

Οπότε $T_{2n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ (7)

(8)

<u>Συγκλίνει στην $\cos x$;</u>

$R_{2n}(x) \underset{=}{\text{Lagrange}} \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad |R_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (9)

και πάλι με το κριτήριο λόγου $\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \longrightarrow 0$ ομοιόμορφα (10)

(11)

σε κάθε φραγμένο διάστημα. Άρα

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$ (12)

(13)

$\boxed{f(x) = \sin x}$

$f(0) = 0 \qquad f'(0) = \cos 0 = 1$ (14)

$f''(0) = -\sin 0 = 0 \qquad f'''(0) = -\cos 0 = -1$

$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1}$ (15)

$T_{2n-1}(x) = \frac{1}{1!} x^1 + \frac{-1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$ (16)

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$ (17)

ή $T_{2n+1}(x) = T_{2(n+1)-1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \overset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$ (18)

Ομοίως με την $\cos x$, $\left|R_{2n+1}(x)\right| = \left|\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\, x^{2n+2}\right| \le$

$$\le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \longrightarrow 0$$

Άρα $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Με αυτούς τους τύπους λειτουργούν οι υπολογιστές τσέπης και υπολογίζουν γρήγορα ποσότητες όπως e^2, $e^{0,5}$, $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$, $\cos(2,76)$, $\cos(e)$ κλπ.

π.χ. το $\cos(2,76) \simeq \sum_{k=0}^{10} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ με σφάλμα

$$R_{2\cdot 10}(x) = R_{20}(x) \le \frac{3^{2\cdot 10+1}}{(2\cdot 10+1)!} = \frac{3^{21}}{21!} < 0,\underbrace{000000000}_{9}21$$

$$\boxed{f(x) = \ln(1+x) \qquad x \in (-1, 1]}$$

$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ $\forall\, x > -1$ $k = 1, 2, \dots$ (άσκηση)

$f(0) = 0$ $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$

Άρα $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k =$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n} \qquad x > -1$$

$$R_n(x) \underset{\text{μορφή}}{\overset{\text{ολοκλ.}}{=}} (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt$$

Αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{x-t}{1+t}$ αν $t = 0 \Rightarrow u = x$

$t = x \Rightarrow u = 0$

$$-\frac{du}{1+u} = \frac{dt}{1+t} \quad \text{(ελέγξτε το!)}$$

Άρα $R_n(x) = (-1)^n \int_x^0 u^n \frac{-du}{1+u} = (-1)^n \int_0^x \frac{u^n}{1+u}\, du$.

Αν $-1 < x < 0$ τότε

$$|R_n(x)| \le \int_x^0 \frac{|u|^n}{1+u}\, du \le \int_x^0 \frac{|u|^n}{1+x}\, du$$

$$\le \frac{1}{1+x} \int_x^0 |u|^n\, du \underset{s=-u}{=} \frac{1}{1+x} \int_0^{|x|} s^n\, ds = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\frac{1}{1+u} \le \frac{1}{1+x}$

$1+x \le 1+u$

$x \le u$

Αν $0 \le x \le 1$ $\quad |R_n(x)| \le \int_0^x |u|^n\, du = \frac{x^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(αφού $0 \le x \le 1$)

Άρα $\lim_n |R_n(x)| = 0$ $\quad \forall x \in (-1, 1]$ οπότε

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}}$$

Διωνυμική συνάρτηση $\quad f(x) = (1+x)^a \quad x > -1 \quad a \in \mathbb{R}$

Αν $a > 0$ η f ορίζεται στο -1 από δεξιά με την έννοια ότι υπάρχει το $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$. Θέτοντας $f(-1) = 0$ η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[-1, \infty)$

$$f^{(k)}(x) = a(a-1)\cdots(a-k+1)(1+x)^{a-k}$$

$$f^{(k)}(0) = a(a-1)\cdots(a-k+1).$$

Ορίζουμε τον «διωνυμικό συντελεστή» $\binom{a}{k}$ για a όχι απαραίτητα ακέραιο με τον τύπο

$$\boxed{\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}}$$ οπότε (1)

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k$$ (2)

Παρατηρήστε ότι αν $a \in \mathbb{N}$ τότε $\binom{a}{k} = 0 \ \forall k > a$ (3)

διότι $k > a \overset{a\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow} k-1 \geq a$ άρα κάποιος από τους (4)

$a, a-1, a-2, \ldots, a-(k-1)$ είναι μηδέν. (5)

Στην περίπτωση λοιπόν όπου $a \in \mathbb{N}$ (6)

$$(1+x)^a = \sum_{k=1}^{a} \binom{a}{k} x^k = T_a(x)$$ (7)

↑ (8)

διωνυμικό ανάπτυγμα

(δες Σ&Α)

Αν $a \notin \mathbb{N}$ το $\binom{a}{k}$ δεν ισούται ποτέ με 0. (9)

Θα δείξουμε ότι αν $|x|<1$ τότε $T_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1+x)^a$ (10)

Υπόλοιπο στη μορφή Cauchy (για $x_0 = 0$): $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \cdot x$ (11) "ξ" ανάμεσα στο x και στο 0

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}(1+\xi)^{a-(n+1)}(x-\xi)^n \cdot x =$$ (12)

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}\left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n \cdot (1+\xi)^{a-1} \cdot x$$ (13)

(14)

Ισχυρισμός $\left|\dfrac{x-\xi}{1+\xi}\right| \leq |x|$

[Αν $0 \leq x \Rightarrow 0 \leq \xi \leq x$ οπότε $\dfrac{x-\xi}{1+\xi} \leq \dfrac{x}{1+\xi} \leq x = |x|$ (15)

(16)

Αν $-1 < x \leq \xi \leq 0$ $\quad x - \xi < 0$ άρα $|x-\xi| = \xi - x$. Συνεπώς για τον ισχυρισμό αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{\xi - x}{1+\xi} < |x| = -x$ (1)

(2)

$\overset{1+\xi>0}{\iff} \quad \xi - x < -x - x\xi$

$\iff \quad \xi < -x\xi \quad \underset{αν\ \xi\neq 0}{\overset{\xi\le 0}{\iff}} \quad 1 > -x \iff x > -1$ (3)
αληθές

(4)

(αν $\xi = 0$ ισχύει ο ισχυρισμός τετριμμένα)]

(5)

Συνεπώς $|R_n(x)| \le \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}|x|^n (1+\xi)^{\alpha-1}|x|$

$\overset{|\xi|\le|x|\le 1}{\le} \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}|x|^n \, 2^{\alpha-1}|x|$ (6)

(7)

Αρκεί $\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}|x|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (8)

Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου στην ακολουθία $y_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}|x|^n$

(9)

$\left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right| = \left|\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(\alpha-(n+1))}{(n+1)n!}}{\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n}\right| \le \left|\frac{a-(n+1)}{n+1}\cdot x\right| =$

$= \frac{(n+1)-a}{n+1}|x| = \left(1-\frac{a}{n+1}\right)|x| \longrightarrow |x| < 1$ (10)

(11)

άρα $y_n \longrightarrow 0$. Συνεπώς $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}x^k$

(12)

για $|x|<1$.

Αν $|x|>1$ η σειρά αποκλίνει (κριτήριο λόγου) (13)

(14)

αν $|x|=1$ εξαρτάται από την τιμή του α (15)

(δεν θα μας απασχολήσει)

αν $x>y$

$(x+y)^\alpha = x^\alpha\left(1+\frac{y}{x}\right)^\alpha = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\left(\frac{y}{x}\right)^k =$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k} y^k x^{\alpha-k}$