σελ 1

Μάθημα 28

$\boxed{f(x) = \cos x}$ $f(x_0) = \cos x_0$ $f'(x_0) = -\sin x_0$ (1)

$f''(x_0) = -\cos x_0$ $f^{(3)}(x_0) = \sin x_0$ (2)

$f^{(4)}(x_0) = \cos x_0$ $f^{(5)}(x_0) =$ (3)

$f^{2k}(x_0) = (\quad)^k \cdot$ $f^{2k-1}(x_0) = (\quad)\cdot$ (4)

Αν επιλέξουμε $x_0 = 0$ τότε $f^{2k-1}(x_0) =$ (5)

ενώ $f^{2k}(x_0) = (\quad)$ (6)

Οπότε $T_{2n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ (7)

Συγκλίνει στην $\cos x$; (8)

$R_{2n}(x) \underset{=}{\text{Lagrange}} \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $|R_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (9)

και πάλι με το κριτήριο λόγου $\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \longrightarrow 0$ ομοιόμορφα (10)

σε κάθε φραγμένο διάστημα. Άρα (11)

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$ (12)

$\boxed{f(x) = \sin x}$ $f(0) = 0$ $f'(0) = \cos 0 = 1$ (13)

$f''(0) = -\sin 0 = 0$ $f'''(0) = -\cos 0 = -1$ (14)

$f^{(2k)}(0) = 0$ $f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1}$ (15)

$T_{2n-1}(x) = \frac{1}{1!}x^1 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$ (16)

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$ (17)

ή $T_{2n+1}(x) = T_{2(n+1)-1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \overset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$ (18)

σελ 2

Ομοίως με την $\cos x$, $\left| R_{2n+1}(x) \right| = \left| \dfrac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \leq$ (1)

$$\leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \longrightarrow 0$$ (2)

Άρα $\sin x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ (3)

Με αυτούς τους τύπους λειτουργούν οι υπολογιστές τσέπης (4)
και υπολογίζουν γρήγορα ποσότητες όπως e^2, $e^{0,5}$, (5)
$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ $\cos(2,76)$ $\cos(e)$ κλπ. (6)

π.χ. το $\cos(2,76) \simeq \displaystyle\sum_{k=0}^{10} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ με σφάλμα (7)

$$R_{2\cdot 10}(x) = R_{20}(x) \leq \frac{3^{2\cdot 10+1}}{(2\cdot 10+1)!} = \frac{3^{21}}{21!} < 0,\underbrace{000000000}_{9}21$$ (8)

$$\boxed{f(x) = \ln(1+x) \qquad x \in (-1, 1]}$$ (9)

$f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ $\forall x > -1$ $k = 1, 2, \ldots$ (άσκηση) (10)

$f(0) = 0$ $f^{(k)}(0) =$ (11)

Άρα $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k =$ (12)

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n} \qquad x > -1$$ (13)

$$R_n(x) \underset{\text{μορφή}}{\overset{\text{ολοκλ.}}{=\!=}} (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt$$ (14)

Αλλαγή μεταβλητής $u = \dfrac{x-t}{1+t}$ αν $t = 0 \Rightarrow u =$ (15)
$t = x \Rightarrow u =$ (16)

$$-\frac{du}{1+u} = \frac{dt}{1+t}$$ (ελέγξτε το!) (17)

Άρα $R_n(x) = (-1)^n \int_x^0 u^n \frac{-du}{1+u} = (-1)^n \int_0^x \frac{u^n}{1+u}\, du$

Αν $-1 < x < 0$ τότε

$$|R_n(x)| \leq \int_x^0 \frac{|u|^n}{1+u}\, du \leq \int_x^0 \frac{|u|^n}{1+x}\, du$$

$$= \frac{1}{1+x} \int_x^0 |u|^n\, du \underset{s=-u}{=} \frac{1}{1+x} \int_0^{|x|} s^n\, ds = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Αν $0 \leq x \leq 1$ $\quad |R_n(x)| \leq \int_0^x |u|^n\, du = \frac{x^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(αφού $0 \leq x \leq 1$)

Άρα $\lim_n |R_n(x)| = 0 \quad \forall x \in (-1, 1]$ οπότε

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}}$$

<u>Διωνυμική συνάρτηση</u> $\quad f(x) = (1+x)^\alpha \quad x > -1 \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Αν $\alpha > 0$ η f ορίζεται στο -1 από δεξιά με την έννοια ότι υπάρχει το $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$. Θέτοντας $f(-1) = 0$ η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[-1, \infty)$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$$

Ορίζουμε τον «διωνυμικό συντελεστή» $\binom{\alpha}{k}$ για α όχι αναγκαστικά ακέραιο με τον τύπο

$$\boxed{\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}}$$ οπότε (1)

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}x^k$$ (2)

Παρατηρήστε ότι αν $a\in\mathbb{N}$ τότε $\binom{a}{k}=0 \quad \forall k>a$ (3)

διότι $k>a \overset{a\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow} k-1\geq a$ άρα κάποιος από τους (4)

$a,\ a-1,\ a-2,\ \dots,\ a-(k-1)$ είναι μηδέν. (5)

Στην περίπτωση λοιπόν όπου $a\in\mathbb{N}$ (6)

$$\underbrace{(1+x)^a = \sum_{k=1}^{a}\binom{a}{k}x^k}_{\text{διωνυμικό ανάπτυγμα (δες Σ \& Α)}} = T_a(x)$$ (7)

(8)

Αν $a\notin\mathbb{N}$ το $\binom{a}{k}$ δεν ισούται ποτέ με 0. (9)

Θα δείξουμε ότι αν $|x|<1$ τότε $T_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}(1+x)^a$ (10)

Υπόλοιπο στη μορφή Cauchy (για $x_0=0$): $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\cdot x$ (11) "ξ ανάμεσα στο x και στο 0"

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}(1+\xi)^{a-(n+1)}(x-\xi)^n\cdot x =$$ (12)

$$= \underline{\hspace{4cm}}\left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n\cdot(1+\xi)^{a-1}\cdot x$$ (13)

(14)

Ισχυρισμός $\left|\dfrac{x-\xi}{1+\xi}\right|\le|x|$

[Αν $0\le x \Rightarrow 0\le\xi\le x$ οπότε $\dfrac{x-\xi}{1+\xi}\le\dfrac{x}{1+\xi}\le x=|x|$ (15)

(16)

Αν $-1<x\le\xi\le 0$ $\quad x-\xi<0$ άρα $|x-\xi|=\xi-x$. Συνεπώς για τον ισχυρισμό (σελ 5

αρκεί να δείξαμε οτι $\frac{\xi - x}{1+\xi} < |x| = -x$ (1)

$\overset{1+\xi>0}{\Longleftrightarrow} \quad \xi - x < -x - x\xi$ (2)

$\Longleftrightarrow \quad \xi < -x\xi \quad \underset{\text{αν } \xi \neq 0}{\overset{\xi \leq 0}{\Longleftrightarrow}} \quad 1 > -x \Leftrightarrow x > -1$ (3)

αληθες

(αν $\xi = 0$ ισχύει οι ισχυρισμοί τετριμμένα)] (4)

Συνεπως $|R_n(x)| \leq \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!} |x|^n (1+\xi)^{\alpha-1} |x|$ (5)

$\leq \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!} |x|^n \, 2^{\alpha-1} |x|$ (6)

(7)

Αρκεί $\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!} |x|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (8)

Εφαρμόζουμε το κριτηριο λόγου στην ακολουθία $y_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!} |x|^n$

$\left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right| = \left| \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad \text{\_\_\_\_} \right| = \left| \frac{a-(n+1)}{n+1} \cdot x \right| =$ (9)

$= \frac{(n+1)-a}{n+1} |x| = \left(1 - \frac{a}{n+1}\right) |x| \longrightarrow |x| < 1$ (10)

αρα $y_n \longrightarrow 0$. Συνεπως $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$ (11)

(12)

για $|x|<1$.

Αν $|x|>1$ η σειρά αποκλίνει (κριτήριο λόγου) (13)

(14)

αν $|x|=1$ εξαρτάται από την τιμή του α (15)

(δεν θα μας απασχολήσει)