$$\boxed{f(x) = \arctan x, \quad |x| \leq 1} \qquad \arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \qquad (1)$$

Ειδικά για την arctan x αντί να ακολουθήσουμε την τυπική διαδικασία (2)
που ακολουθήσαμε στις προηγούμενες συναρτήσεις μπορούμε να (3)
παρατηρήσουμε ότι (4)

$$\frac{1}{1+t^2} = \qquad (5)$$

$$\left(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} - \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda} \right) \qquad (6)$$

οπότε $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \quad - \quad + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \quad dt$ (7)

Αν θέσουμε $\displaystyle P_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ τότε (8)

$$|f(x) - P_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2}\, dt = \qquad (9)$$

Άρα αν $|x| \leq 1$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n(x) =$ (10)

Συνεπώς

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (11)$$

(12)

$$=$$

για $x \in [-1, 1]$ (13)

Το ολοκληρωτικό κριτήριο για σειρές

Πρόταση Αν $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f\downarrow$ και $f(x)\geq 0 \ \forall x\in[1,\infty)$ θέτουμε $a_n=f(n)$. Τότε η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν το $\int_1^{\infty} f(x)dx$ συγκλίνει

(δηλ. $\lim_{t\to\infty}\int_1^t f(x)\,dx \in\mathbb{R}$)

Απόδειξη Αφού $f\downarrow$ ισχύει $f(n)\geq f(x)\geq f(n+1)\ \forall x\in[n,n+1]$

$$\cancel{\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \int_1^N f(x)dx}$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(n)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx$$

$$\Rightarrow f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1} f(x)\,dx = \qquad \geq \sum_{n=1}^{N} f(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{1}^{N} f(n) \geq \int_1^N f(x)\,dx \geq \sum_{1}^{N} f(n+1) = \sum_{n=1}^{N} a_{n+1} =$$

$$= \sum_{n=2}^{N+1} a_n.$$

Έτσι αν το $\int_1^N f(x)\,dx$ συγκλίνει (σε αριθμό στο $\mathbb{R}$ για $N\to\infty$) η $\sum_{n=2}^{N+1} a_n$ είναι άνω φραγμένη, και ως αύξουσα (αφού $a_n\geq 0$) συγκλίνει. Ομοίως αν η $\sum_{1}^{N} a_n$ συγκλίνει η ακολουθία $\left(\int_1^N f(x)\,dx\right)_{N\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη άρα συγκλίνει έστω στο $\ell\in\mathbb{R}$

Οπότε υπάρχει το όριο $\lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t f(x)\,dx$

διότι
$$\underbrace{\int_1^{[t]} f(x)\,dx}_{\downarrow\, t\to\infty \atop l} \le \int_1^{t} f(x)\,dx \le \underbrace{\int_1^{[t]+1} f(x)\,dx}_{\downarrow\, t\to\infty \atop l}$$

άρα $\lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t f(x)\,dx = l.$ $\blacksquare$

Άσκηση Ελέγξτε με το ολοκληρωτικό κριτήριο τη σύγκλιση της $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ για $p>0$.

Λύση Αφού $p>0$, $\frac{1}{x^p}\ge 0$ και $\downarrow$ άρα η σειρά $\sum\frac{1}{n^p}$ συγκλίνει $\iff$ το ολοκλήρωμα $\int \quad dx$ συγκλίνει.

Όμως
$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p} = \begin{cases} \log x\Big|_{x=1}^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty}\log x & \text{αν } p=1 \\ = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right) & \text{αν } 0<p\neq 1 \end{cases}$$

Φανερά τα όρια αυτά υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ αν-ν $p>1$

Άρα η $\sum\frac{1}{n^p}$ συγκλίνει $\iff p>1$.

Άσκηση Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$

Η λύση με το κριτήριο σύγκρισης: $\left(\frac{n}{1+n^2}\ge 0\right)$

και $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2} \ge \sum\frac{n}{n^2+n^2} = \sum\frac{1}{2n} = \infty$

ΛΥΣΗ

Με το ολοκληρωτικό: $\frac{x}{1+x^2} \geq 0$ για $x \geq 1$ και (1)

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1+x^2 - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \leq 0 \text{ για } x \geq 1$$ (2)

(3)

άρα $\frac{x}{1+x^2} \downarrow$.

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\Big|_1^{\infty} = \infty$$ (4)

(5)

άρα η σειρά αποκλίνει

<u>Άσκηση</u> $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ (6)

1ος τρόπος: κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log 2^n} =$ (7)

$= \qquad = \infty$

(8)

2ος τρόπος: Ολοκληρωτικό κριτήριο $\frac{1}{x \log x} \geq 0$ για $x \geq 2$

και $\frac{1}{x\log x} \downarrow$ (αφού $x \log x \uparrow$ (γιατί;)) (9)

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x}\,dx = \log(\log x)\Big|_2^{\infty} = +\infty \quad \text{άρα } \sum \frac{1}{n \log n} = \infty$$ (10)

Άσκηση $\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n^2}$ (1)

(2)

1ος τρόπος ολοκληρωτικό κριτήριο $\frac{x}{e^{x^2}} \downarrow$ (άσκηση) ≥ 0

$$\int_0^\infty x e^{-x^2} dx \xlongequal[2x\,dx = -du]{u = -x^2} \int_0^{-\infty} e^u (-du) =$$ (3)

$x=0 \quad u=0$

$x=\infty \quad u=-\infty$

$$= \int_{-\infty}^0 e^u du = e^u \Big|_{-\infty}^0 = 1 - 0 = 1$$ (4)

(5)

άρα η σειρά συγκλίνει

(6)

2ος τρόπος : κριτήριο n-οστής ρίζας

$$\sqrt[n]{n e^{-n^2}} = \sqrt[n]{n}\, e^{-n} \longrightarrow 1 \cdot 0 < 1$$ (7)

(8)

άρα η σειρά συγκλίνει.