Μάθημα 30

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές: (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{(n+1)(n+k)} - n\right)^n \qquad k>0$$ (2)

<u>κριτήριο n-οστής ρίζας</u>

$$\sqrt[n]{\left|\left(\sqrt{(n+1)(n+k)} - n\right)^n\right|} = \sqrt{(n+1)(n+k)} - n =$$ (3)

$$= \frac{(n+1)(n+k) - n^2}{\sqrt{(n+1)(n+k)} + n} = \frac{\cancel{n^2} + nk + n + k - \cancel{n^2}}{\sqrt{(n+1)(n+k)} + n} =$$ (4)

$$= \frac{\cancel{n}\left[(k+1) + k/n\right]}{\cancel{n}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{k}{n}\right)} + 1\right)} \longrightarrow \frac{k+1}{2}$$ (5)

(6)

άρα αν $\frac{k+1}{2} < 1 \iff k<1$ η σειρά συγκλίνει απόλυτα (7)

αν $k>1$ αποκλίνει και αν $k=1$ τότε (8)

η σειρά ισούται με $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!\,(n+2)} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e^1 - 1 < \infty$$ (9)

(10)

Άλλως κριτήριο λόγου (άσκηση)

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 2^{n-1}}$$ διότι $n \le 2^{n-1}$ (επαγωγή) (11)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \infty$$

(σελ 2)

$$\sum \frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}}$$

βαθμός = 1/2

βαθμός 2

Άρα συμπεριφέρεται σαν την $\frac{1}{n^{3/2}}$ (1)

Οριακό κριτήριο σύγκρισης με την $\frac{1}{n^{3/2}}$ (2)

Αλλιώς $\sum \frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}} \le \sum \frac{4\sqrt{n}}{n^2} = 4\sum \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$ (3)

$\sum \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^5+1}} = \sum \frac{n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{n^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}}$ οριακό (4)

κριτήριο με την $\frac{1}{n^{3/2}}$ (5)

αλλιώς $\sum \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^5+1}} \le \sum \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^5}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$ (6)

---

(7)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$ n-οστή ρίζα $\sqrt[n]{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{e} \to \frac{1}{e} < 1$

$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}} = \sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ Οριακό κριτήριο σύγκρισης με την $1/n$ (8)

ή $\sqrt[n]{n} \le 2$ $(\iff n \le 2^n)$

Άρα $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \ge \sum \frac{1}{n\cdot 2} = \infty$

(σελ 3)

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\log n)^2}$ συγκλίνει αν-ν συγκλίνει η $\sum 2^n e^{-(\log 2^n)^2}$ (1)

$= \sum 2^n e^{-n^2(\log 2)^2} = \sum e^{n\log 2} e^{-n^2(\log 2)^2} =$ (2)

κριτήριο n-οστής ρίζας $\sqrt[n]{e^{n\log 2}\, e^{-n^2(\log 2)^2}} = 2\cdot e^{-n(\log 2)^2} \longrightarrow 0$ (3)

<1 άρα η σειρά συγκλίνει

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n^3-1}}$ φραγμένη; $\sim n^{3/2}$ άρα πρέπει να συγκλίνει απόλυτα; (4)

$\sum \left| (-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n^3-1}} \right| = \sum \frac{|\cos(nx)|}{\sqrt{n^3-1}} \le \sum \frac{1}{\sqrt{n^3-1}}$ (5)

οριακό κριτήριο σύγκρισης με την $\frac{1}{n^{3/2}}$ (άσκηση)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)^2}$ (απολύτως αποκλίνει. γιατί;) (6)

Η $\frac{n}{(n+1)^2} \longrightarrow 0$ και $\left(\frac{x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(x+1)^2 - x\,2(x+1)}{(x+1)^4} =$ (7)

(8)

$= \frac{x^2+2x+1-2x^2-2x}{(x+1)^4} = \frac{1-x^2}{(x+1)^4} < 0$ για $x \in [1,\infty)$

(9)

άρα $\frac{n}{(n+1)^2} \downarrow$

(10)

Από κρ. Leibnitz συγκλίνει.

(σελ 4)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$$ (1)

n-οστή ρίζα $\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}} \longrightarrow \frac{1}{e}<1$ (2)

άρα η σειρά συγκλίνει

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-(-1)^n}$ αποκλίνει, αφού $2^{n-(-1)^n} \to +\infty \; (\not\to 0)$ (3)

---

(4)

Δείξτε ότι αν $a_n>0$ & $\sum a_n<\infty \Rightarrow \sum\sqrt{a_n a_{n+1}}<\infty$

(5)

$\left((x-y)^2\geq 0 \Rightarrow x^2+y^2\geq 2xy \right.$ άρα$\left. \right)$

(6)

$$\sum\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}\sum\left(\sqrt{a_n}^2+\sqrt{a_{n+1}}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum a_n+\sum a_{n+1}\right)<\infty$$

Για ποιο a η σειρά $\sum\frac{(an)^n}{n!}$ συγκλίνει; (7)

<u>κριτήριο λόγου</u> $\left|\frac{\frac{(a(n+1))^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(an)^n}{n!}}\right| = \left|\frac{\frac{a^{n+1}(n+1)^n\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}}{\frac{\cancel{a^n}\,n^n}{\cancel{n!}}}\right| =$ (8)

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n|a| \longrightarrow e|a|$ (9)

Άρα αν $|a|<\frac{1}{e}$ συγκλίνει απολύτως (10)

Αν $|a|>\frac{1}{e}$ αποκλίνει (11)

(σελ 5)

Μένουν οι περιπτώσεις $a = \pm \frac{1}{e}$ (1)

$\boxed{a = \frac{1}{e}}$ (δύσκολη) (2)

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$ [δείξτε ότι για $x \geq 1$ $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} > e \iff$ (3)

$\iff (x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) > 1$ (4)

χρησιμοποιώντας παραγώγους] (5)

Δείξτε ότι η $\frac{n^{n+1}}{e^n n!}$ είναι αύξουσα (6)

Άρα $\frac{n^{n+1}}{e^n n!} \geq \frac{1^{1+1}}{e^1\, 1!} = \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{n^n}{e^n n!} \geq \frac{1}{e\cdot n}$ (7)

Άρα $\sum \frac{n^n}{e^n n!} \geq \frac{1}{e} \sum \frac{1}{n} = \infty$ (8)

(9)

$\boxed{a = -\frac{1}{e}}$ Επειδή η σειρά θα προκύψει εναλλάσσουσα, αρκεί

να δείξουμε ότι η $\frac{n^n}{e^n n!} \searrow 0$ (10)

Μπορεί να αποδειχθεί κανείς ότι $\frac{n^n}{e^n n!} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ (11)

αλλά θέλει δύσκολο απ. λογισμό ή παραλείπεται (12)