Μάθημα 30

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές: (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{(n+1)(n+k)} - n\right)^n \qquad k>0$$ (2)

κριτήριο n-οστής ρίζας $\sqrt[n]{\left|\left(\sqrt{(n+1)(n+k)}-n\right)^n\right|} = \sqrt{(n+1)(n+k)} - n =$ (3)

$$= \frac{(n+1)(n+k)-n^2}{\sqrt{(n+1)(n+k)}+n} = \frac{n^2+nk+n+k-n^2}{\sqrt{(n+1)(n+k)}+n} =$$ (4)

$$= \frac{n\left[(\qquad)+k/n\right]}{n\left(\sqrt{\qquad}+1\right)} \to \frac{k+1}{2}$$ (5)

(6)

άρα αν $\frac{k+1}{2} < 1 \iff k<1$ η σειρά συγκλίνει απόλυτα (7)

αν $k>1$ αποκλίνει και αν $k=1$ τότε (8)

η σειρά ισούται με $\sum_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!\,(n+2)} \le \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \qquad} = e^1 - 1 < \infty$$ (9)

(10)

Αλλιώς κριτήριο λόγου (άσκηση)

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n-n} \le$$ (11)

(σελ 2

βαθμος = 1/2

$$\sum \frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}}$$ Αρα συμπεριφερεται σαν την $\frac{1}{\quad}$ (1)

βαθμος 2

Οριακό κριτήριο σύγκρισης με την $\frac{1}{\quad}$ (2)

Αλλιως $\sum \frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}} \leq \sum \frac{4\sqrt{n}}{\quad} = \quad < \infty$ (3)

$$\sum \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^5+1}} = \sum \frac{n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{n^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}}$$ οριακό (4)

κριτήριο με την $\frac{1}{\quad}$ (5)

αλλιως $\sum \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^5+1}} \leq$ (6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{e^n}$$ n-οστή ρίζα $\sqrt[n]{\quad} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{e} \to \frac{1}{e} < 1$ (7)

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}} = \sum \frac{1}{\quad}$$ (8)

(σελ) (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\log n)^2}$$

(2)

(3)

φραγμένη

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n^3-1}}$$ άρα πρέπει να συγκλίνει απόλυτα! (4)

$\sim n^{3/2}$

(5)

$\sum |$ $|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)^2}$$ (απολύτως αποκλίνει. γιατί;) (6)

Η $\frac{n}{(n+1)^2} \longrightarrow 0$ και $\left(\frac{x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(x+1)^2 - x\,2(x+1)}{(x+1)^4} =$ (7)

(8)

$$= \frac{x^2+2x+1-2x^2-2x}{(x+1)^4} = \frac{1-x^2}{(x+1)^4} < 0$$ για $x \in [1,\infty)$

(9)

άρα $\frac{n}{(n+1)^2} \downarrow$

Από κρ. Leibnitz συγκλίνει. (10)

(σελ 4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$$ (1)

n-οστή ρίζα $\sqrt[n]{} = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}} \longrightarrow$ (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-(-1)^n}$$ (3)

---

(4)

Δείξτε ότι αν $a_n > 0$ & $\sum a_n < \infty \Rightarrow \sum \sqrt{a_n a_{n+1}} < \infty$

(5)

$\left((x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \quad \text{άρα} \right)$

(6)

$$\sum \sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}$$

Για ποιο a η σειρά $\sum \dfrac{(an)^n}{n!}$ συγκλίνει; (7)

κριτήριο λόγου $\left| \dfrac{\frac{(a(n+1))^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(an)^n}{n!}} \right| = \left| \dfrac{\frac{a^{n+1}(n+1)^n \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}\, n!}}{\frac{\cancel{a^n}\, n^n}{\cancel{n!}}} \right| =$ (8)

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |a| \longrightarrow$ (9)

Άρα αν $|a| <$ συγκλίνει απολύτως (10)

Αν $|a| >$ αποκλίνει (11)

Μένουν οι περιπτώσεις $\alpha = \pm \frac{1}{e}$ (1)

$\boxed{\alpha = \frac{1}{e}}$ (δύσκολη) (2)

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$ [δείξτε ότι για $x \geq 1$ $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} > e \Leftrightarrow$ (3)

$\Leftrightarrow (x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) > 1$ (4)

χρησιμοποιώντας παραγώγους] (5)

Δείξτε ότι η $\frac{n^{n+1}}{e^n n!}$ είναι αύξουσα (6)

(7)

Άρα $\frac{n^{n+1}}{e^n n!} \geq \frac{1^{1+1}}{e^1 1!} = \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{n^n}{e^n n!} \geq \frac{1}{e \cdot n}$

(8)

Άρα $\sum \frac{n^n}{e^n n!} \geq \frac{1}{e} \sum \frac{1}{n} = \infty$

(9)

$\boxed{\alpha = -\frac{1}{e}}$ Επειδή η σειρά θα προκύψει εναλλάσσουσα, αρκεί

να δείξουμε ότι η $\frac{n^n}{e^n n!} \searrow 0$ (10)

Μπορεί να αποδείξει κανείς ότι $\frac{n^n}{e^n n!} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ (11)

αλλά θέλει δύσκολο απ. λογισμό ή παραλείπεται (12)