Μάθημα 31

Δείξτε ότι οι $f(x)=x$ και $g(x)=\sin x$ για $x\in\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς, αλλά το γινόμενο $f\cdot g$ δεν είναι.

Λύση Η f είναι ομ. συνεχής από τον ορισμό ($\delta=\varepsilon$)

Για την g μπορούμε να δείξουμε ότι είναι Lipschitz με σταθερά 1

Πράγματι από τον τύπο διαφοράς ημιτόνων έχουμε

$$|g(x)-g(y)| = |\sin x - \sin y| = \left|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|$$

$$\le 2\,\frac{|x-y|}{2} = |x-y|$$

Άρα αν θέτω $\delta=\varepsilon$ και $|x-y|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(y)|<\varepsilon$ δηλ g ομ. συνεχής

Η $fg = x\sin x$ δεν είναι ομ. συνεχής γιατί αν επιλέξω $\varepsilon=1$ και υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $|x-y|<\delta$ τότε $|fg(x)-fg(y)|<1$ επιλέγω $y=2n\pi$ οπότε $fg(y)=0$ και $x=2n\pi+\frac{\delta}{2}$. Άρα $fg(x) = \left(2n\pi+\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\delta}{2}\right)$

$$= \left(2n\pi+\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Έτσι $|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ αλλά $|fg(x)-fg(y)| =$

$$= \left(2n\pi+\frac{\delta}{2}\right)\left|\sin\frac{\delta}{2}\right| > 1 \text{ αν } n > \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{1}{\left|\sin\frac{\delta}{2}\right|}-\frac{\delta}{2}\right)$$

Άρα fg όχι ομ. συνεχής

Αποδείξτε με τον ορισμό ότι η $f(x)=x^4$ $\quad -3\le x\le 2$ είναι ομ. συνεχής.

Λύση Έστω $\varepsilon>0$ θέλω να βρω $\delta>0$ ώστε αν $|x-y|<\delta$, $x,y\in[-3,3]$

να ισχύει $|x^4-y^4|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow |(x^2-y^2)(x^2+y^2)|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |(x-y)(x+y)(x^2+y^2)|<\varepsilon \quad (1)$$

Η μέγιστη τιμή του $|x+y|$ είναι $\leq |x|+|y| \leq 3+3=6$

—— // —— $|x^2+y^2|$ είναι $3^2+3^2=18$

Άρα αν ισχύει $|x-y|\cdot 6\cdot 18<\varepsilon$ θα ισχύει και η (1)

Θέτω $\delta=\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{6\cdot 18}$

Ομοίως $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad x\geq 1$

Έστω $\varepsilon>0$. Θέλω να βρω $\delta>0$ ώστε αν $|x-y|<\delta$, $x,y\geq 1$

να ισχύει $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}\right|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{(y-x)}{\sqrt{xy}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right|<\varepsilon \quad (2)$$

Η ελάχιστη τιμή του $\sqrt{xy}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ είναι $\sqrt{1\cdot 1}\,(\sqrt{1}+\sqrt{1})=2$

άρα αν $\frac{|y-x|}{2}<\varepsilon \Rightarrow (2)$

Θέτω $\delta=2\varepsilon$.

Ελέγξτε αν η $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ για $x\in\mathbb{R}$ είναι ομ. συνεχής.

Έστω $\varepsilon>0$ πρέπει να βρούμε $\delta>0$ ώστε αν $|x-y|<\delta$ τότε

$$\left|\frac{x}{1+|x|}-\frac{y}{1+|y|}\right|<\varepsilon \iff$$

$$\iff \left|\frac{x(1+|y|)-y(1+|x|)}{(1+|x|)(1+|y|)}\right|<\varepsilon \iff \frac{\left|x-y+x|y|-y|x|\right|}{(1+|x|)(1+|y|)}<\varepsilon$$

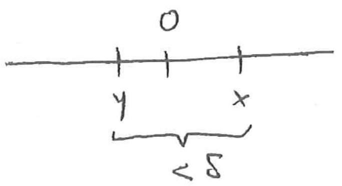
Επειδή $(1+|x|)(1+|y|)\geq 1$ αρκεί να ισχύει $\left|x-y+x|y|-y|x|\right|<\varepsilon$

ή αρκεί να ισχύει $|x-y|+\left|x|y|-y|x|\right|<\varepsilon$

Το ερώτημα λοιπόν καταλήγει στο πόσο μεγάλο μπορεί να είναι το $\left|x|y|-y|x|\right|$ όταν $|x-y|<\delta$;

Αν $x,y\geq 0$ ή $x,y\leq 0$ $\left|x|y|-y|x|\right|=0$

Αν $x>0$ & $y<0$ $\left|x|y|-y|x|\right|=-2xy=2x|y|$ $\Big\}\Rightarrow \left|x|y|-y|x|\right|<2\delta^2$



$\Big\}\Rightarrow x<\delta$ & $|y|<\delta$

Άρα όταν $|x-y|<\delta$ το $\left|x|y|-y|x|\right|$ είναι το πολύ $2\delta^2$

Άρα αρκεί $\delta+2\delta^2<\varepsilon \iff 2\delta^2+\delta-\varepsilon<0$ (★)

ρίζες $=\frac{-1\pm\sqrt{1+8\varepsilon}}{4}$ Άρα η (★) ισχύει όταν

δ ανάμεσα στις ρίζες. Επειδή θέλουμε & $\delta>0$

θέτουμε $0<\delta=\frac{1}{2}\,\frac{-1+\sqrt{1+8\varepsilon}}{4}<\frac{-1+\sqrt{1+8\varepsilon}}{4}$ & ισχύει η (★)

Άρα f ομ. συνεχής.

(σελ 4)

Δείξτε ότι η $f(x)=\log x$ $\quad x>0$ δεν είναι ομ. συνεχής (1)

Αρκεί να βρω ακολουθίες x_n, y_n ώστε $x_n-y_n\to 0$ αλλά (2)

$f(x_n)-f(y_n)\not\to 0$. (3)

Π.χ. $x_n=\frac{1}{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)$ $\quad y_n=\frac{1}{n}$ $\quad x_n-y_n\to 0$ (4)

Αλλά $f(x_n)-f(y_n)=\cancel{\log\frac{1}{n}}+\log\left(2+\frac{1}{n}\right)-\cancel{\log\frac{1}{n}}=\log\left(2+\frac{1}{n}\right)\to\log 2>0$ (5)

ή $x_n=\frac{2}{n}$ $\quad y_n=\frac{1}{n}$

Δείξτε ότι η $f(x)=\frac{1}{x^2}$ είναι ομ. συνεχής σε $[a,\infty)$ για $a>0$. (6)

Είναι Lipschitz; (7)

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right|=\left|\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}\right|=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{x^2y^2} \quad (8)$$

$$\le|x-y|\frac{|x|+|y|}{|x|^2|y|^2}=|x-y|\left(\frac{\cancel{|x|}}{|x|^2|y|^2}+\frac{\cancel{|y|}}{|x|^2|y|^2}\right) \quad (9)$$

$$\le|x-y|\left(\frac{1}{|x||y|^2}+\frac{1}{|y||x|^2}\right)\le\frac{2}{a^3}|x-y| \quad (10)$$

Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για την (11)

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0 \quad (12)\\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \quad (13)\end{cases}$$

$f(0)=0$, $\quad f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}$ (14)

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$$ (1)

(2)

Ομοίως για το $\lim_{h\to 0^-}$ (3)

Άρα $f'(0) = 0$ $\qquad f'(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3} & x \neq 0 \end{cases}$ (4)

(5)

$$f''(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h) - 0}{h - 0} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{h^3}e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} =$$

(6)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^4} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2e^{-x^2}}{\frac{1}{x^4}} =$$

(7)

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{8x^3}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{8x}{2xe^{x^2}}$$

(8)

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4}{e^{x^2}} = 0$$

(9)

Γενικώς $f^{(n)}(0) = 0$ άρα $T_{n f 0} = 0$

(10)

Υπολογίστε το $\sin 1$ με ακρίβεια 10^{-6}

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad |R_{2n+1}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$ (11)

Άρα θέλουμε $|R_{2n+1}(1)| \le 10^{-6} \Rightarrow \frac{1}{(2n+2)!} \le \frac{1}{10^6}$ (12)

(13)

$n=3 \quad (2\cdot 3+2)! = 8! = 40\,320 < 1.000.000 = 10^6$ (14)

$n=4 \quad (2\cdot 4+2)! = 10! = 3.628.800 > 10^6$. Άρα για ακρίβεια $< 10^{-6}$ (15)

$$\sin 1 \approx \sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k 1^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 + \frac{(-1)}{3!} + \frac{(-1)^2}{5!} + \frac{(-1)^3}{7!} + \frac{(-1)^4}{9!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} \approx$$ (16)

$$\simeq 0{,}84146825$$

Προσοχή Αυτό που υπολογίσατε δεν είναι το sin της
μιας μοίρας (που θα έπρεπε να είναι πολύ μικρό)

γιατί μετράμε τις γωνίες σε rad όταν π.χ.

λέμε $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Δηλαδή το $\frac{\pi}{2}$ είναι 90 μοίρες

αλλά ως αριθμός (rad) είναι $\frac{3,14159\ldots}{2} \simeq 1,570795$

Όταν λέμε $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ εννοούμε σε rad την έκφραση

$$\sin(1,570795) \simeq 1$$

Έτσι το 1 είναι ο αριθμός $\frac{\pi}{3,14159\ldots} \simeq 57,2958$ μοίρες

Για αυτό το sin βγαίνει μεγάλο.

Αν θέλατε να υπολογίσετε της 1 μοίρας θα λέγατε

$180^\circ \longrightarrow 3,14159$ rad

$1^\circ \longrightarrow \frac{3,14159}{180}$ rad $\simeq 0,0174532$ rad

Οπότε $\sin(1^\circ) = \sin(0,0174532 \text{ rad}) \xlongequal{\text{Taylor}} 0,000304617$