Μάθημα 31

Δείξτε ότι οι $f(x)=x$ και $g(x)=\sin x$ για $x\in\mathbb{R}$
είναι ομοιόμορφα συνεχείς, αλλά το γινόμενο $f\cdot g$ δεν είναι.

Λύση Η f είναι ομ. συνεχής από τον ορισμό $(\delta=\varepsilon)$

Για την g μπορούμε να δείξουμε ότι είναι Lipschitz με σταθερά 1

Πράγματι από τον τύπο διαφοράς ημιτόνων έχουμε

$$|g(x)-g(y)| = |\sin x-\sin y| = \left|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|$$

$$\leq 2\,\frac{|x-y|}{2} = |x-y|$$

Άρα αν θέτω $\delta=\varepsilon$ ώστε $|x-y|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(y)|<\varepsilon$ δηλ. g ομ. συνεχής

Η $fg = x\sin x$ δεν είναι ομ. συνεχής γιατί αν επιλέξω
$\varepsilon=1$ και υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $|x-y|<\delta$ τότε
$|fg(x)-fg(y)|<1$ επιλέγω $y=2n\pi$ οπότε $fg(y)=0$
και $x=2n\pi+\frac{\delta}{2}$. Άρα $fg(x)=\left(2n\pi+\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\delta}{2}\right)$

$$=\left(2n\pi+\frac{\delta}{2}\right)\sin(\quad)$$

Έτσι $|x-y|=\frac{\delta}{2}<\delta$ αλλά $|fg(x)-fg(y)| =$

$$=\left(2n\pi+\frac{\delta}{2}\right)\left|\sin\frac{\delta}{2}\right| > 1 \text{ αν } n>$$

Άρα fg όχι ομ. συνεχής

Αποδείξτε με τον ορισμό ότι η $f(x)=x^4$ $\quad -3\leq x\leq 2$
είναι ομ. συνεχής.

(σελ 2)

Λύση: Έστω $\varepsilon>0$ θέλω να βρω $\delta>0$ ώστε αν $|x-y|<\delta$, $x,y\in[-3,2]$

να ισχύει $|x^4-y^4|<\varepsilon$

$\iff |(x^2-y^2)(x^2+y^2)|<\varepsilon$

$\iff |(x-y)(x+y)(x^2+y^2)|<\varepsilon$ (1)

Η μέγιστη τιμή του $|x+y|$ είναι $\leq |x|+|y| \leq 3+3=6$

——— // ——— $|x^2+y^2|$ είναι $3^2+3^2=18$

Άρα αν ισχύει $|x-y|\cdot 6\cdot 18<\varepsilon$ θα ισχύει και η (1)

Θέτω $\delta=\dfrac{\varepsilon}{6\cdot 18}$

Ομοίως $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad x\geq 1$

Έστω $\varepsilon>0$. Θέλω να βρω $\delta>0$ ώστε αν $|x-y|<\delta$, $x,y\geq 1$

να ισχύει $\left|\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right|<\varepsilon \iff \left|\dfrac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}\right|<\varepsilon$

$\iff \left|\dfrac{(y-x)}{\sqrt{xy}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right|<\varepsilon$ (2)

Η ελάχιστη τιμή του $\sqrt{xy}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ είναι $\sqrt{1\cdot 1}\,(\sqrt{1}+\sqrt{1})=2$

άρα αν $\dfrac{|y-x|}{2}<\varepsilon \implies$ (2)

Θέτω $\delta=2\varepsilon$.

Ελέγξτε αν η $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ για $x\in\mathbb{R}$ είναι ομ. συνεχής. (1)

Έστω $\varepsilon>0$ πρέπει να βρούμε $\delta>0$ ώστε αν τότε (2)

$$\Big| \qquad\qquad \Big| \iff$$ (3)

$$\iff \left|\frac{x(1+|y|)-y(1+|x|)}{(1+|x|)(1+|y|)}\right|<\varepsilon \iff \frac{\big|x-y+x|y|-y|x|\big|}{(1+|x|)\,(1+|y|)}<\varepsilon$$ (4)

Επειδή $(1+|x|)(1+|y|)\geq 1$ αρκεί να ισχύει $\Big| \qquad \Big|<\varepsilon$ (5)

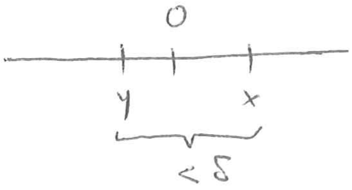
ή αρκεί να ισχύει $|x-y|+\big|x|y|-y|x|\big|<\varepsilon$ (6)

Το ερώτημα λοιπόν καταλήγει στο πόσο μεγάλο μπορεί να είναι (7)

το $\big|x|y|-y|x|\big|$ όταν $|x-y|<\delta$; (8)

Αν $x,y\geq 0$ ή $x,y\leq 0$ $\big|x|y|-y|x|\big|=0$ (9)

Αν $x>0$ & $y<0$ $\big|x|y|-y|x|\big|=$ (10)



$\Rightarrow x<\delta$ & $|y|<\delta$ $\Rightarrow \big|x|y|-y|x|\big|<2\delta^2$

Άρα όταν $|x-y|<\delta$ το $\big|x|y|-y|x|\big|$ είναι το πολύ $2\delta^2$ (11)

Άρα αρκεί $\delta+2\delta^2<\varepsilon \iff 2\delta^2+\delta-\varepsilon<0$ $(\star)$ (12)

ρίζες $=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8\varepsilon}}{4}$ Άρα η $(\star)$ ισχύει όταν (13)

δ ανάμεσα στις ρίζες. Επειδή θέλουμε και $\delta>0$ (14)

θέλουμε $0<\delta=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{-1+\sqrt{1+8\varepsilon}}{4}<\dfrac{-1+\sqrt{1+8\varepsilon}}{4}$ και ισχύει η $(\star)$ (15)

Άρα f ομ. συνεχής. (16)

$\lfloor \sigma \epsilon \lambda 4$

Δείξτε ότι η $f(x) = \log x$ $x > 0$ δεν είναι ομ. συνεχής (1)

Αρκεί να βρω ακολουθίες x_n, y_n ώστε $x_n - y_n \to 0$ αλλά (2)

$f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$. (3)

Πχ $x_n = \frac{1}{n}\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ $y_n = \frac{1}{n}$ $x_n - y_n \to 0$ (4)

Αλλά $f(x_n) - f(y_n) =$ (5)

Δείξτε ότι η $f(x) = \frac{1}{x^2}$ είναι ομ. συνεχής στο $[a, \infty)$ με $a > 0$. (6)

Είναι Lipschitz; (7)

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right| = \Big| \qquad \Big| = |x - y|. \quad (8)$$

$$\leq |x - y| \frac{|x| + |y|}{\qquad} = |x - y| \left(\frac{|x|}{\qquad} + \frac{|y|}{\qquad} \right) \quad (9)$$

$$\leq |x - y| \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \right) \leq \frac{2}{a} |x - y| \quad (10)$$

Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n f 0}$ για την (11)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases} \quad (12)\ (13)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} \quad (14)$$

$$\lim_{h\to 0^+} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$$

Ομοίως για το $\lim_{h\to 0^-}$

Άρα $f'(0) = 0$ $\quad f'(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} \dfrac{2}{x^3} & x\neq 0 \end{cases}$

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(h)-0}{h-0} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{h^3} e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\, e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\, e^{-x^2}}{\frac{1}{x^4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^3}{2x\, e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{2xe^{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{e^{x^2}} = 0$$

Γενικώς $f^{(n)}(0) = 0$ άρα $T_{n f 0} = 0$

Υπολογίστε το $\sin 1$ με ακρίβεια 10^{-6}

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad |R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Άρα θέλουμε $|R_{2n+1}(1)| \leq 10^{-6} \Leftarrow \dfrac{1}{(2n+2)!} \leq \dfrac{1}{10^6}$

$n=3 \quad (2\cdot 3+2)! = 8! = 40\,320 < 1.000.000 = 10^6$

$n=4 \quad (2\cdot 4+2)! = 10! = 3.628.800 > 10^6$. Άρα για ακρίβεια $<10^{-6}$

$$\sin 1 \approx \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k 1^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 + \frac{(-1)}{3!} + \frac{(-1)^2}{5!} + \frac{(-1)^3}{7!} + \frac{(-1)^4}{9!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} \simeq$$

$$\simeq 0{,}841468254$$

Προσοχή Αυτό που υπολογίσατε δεν είναι το sin της μιας μοίρας (που θα έπρεπε να είναι πολύ μικρό)

γιατί μετράμε τις γωνίες σε rad όταν πχ.

λέμε $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Δηλαδή το $\frac{\pi}{2}$ είναι 90 μοίρες

αλλά ως αριθμός (rad) είναι $\frac{3,14159\ldots}{2} \simeq 1,570795$

Όταν λέμε $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ εννοούμε σε rad την εξίσωση

$$\sin(1,570795) \simeq 1$$

Έτσι το 1 είναι ο αριθμός $\frac{\pi}{3,14159\ldots} \simeq 57,2958$ <u>μοίρες</u>

Για αυτό το sin βγαίνει μεγάλο.

Αν θέλατε να υπολογίσετε της 1 μοίρας θα λέγαμε

$180^\circ \longrightarrow 3,14159$ rad

$1^\circ \longrightarrow \frac{3,14159}{180}$ rad $\simeq 0,0174532$ rad

Οπότε $\sin(1^\circ) = \sin(0,0174532 \text{ rad}) \overset{\text{Taylor}}{=\!=} 0,000304617$