

## Απειροστικός Λογισμός II

### Ιούνιος 2021

**Θέμα 1ο** (α) Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές και υπολογίστε το άθροισμα της δεύτερης.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \right|.$$

(0,5+0,5)

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right)}$$

(1,0+1,5)

**Θέμα 2ο** (α) Δίνεται ο τύπος

$$\sin x + \sin(2x) + \dots + \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Υπολογίστε με τον ορισμό (όποιο είδος αθροισμάτων προτιμάτε) το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta.$$

(1,0)

(β) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx \quad \int \cos x \sin^2(2x) \, dx.$$

(0,5+0,5)

(γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int \frac{1}{x^3-1} \, dx$ . (1,5)

**Θέμα 3ο** (α) Αποδείξτε με τον ορισμό ότι η συνάρτηση  $\sqrt{x}$  είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $[1, 2]$  και ελέγξτε αν είναι συνάρτηση Lipschitz. (1,0+0,5)

(β) Αναπτύξτε σε σειρά MacLaurin τη συνάρτηση  $\sqrt{1+x}$  για  $x \in (-1, 1)$ . (1,5)