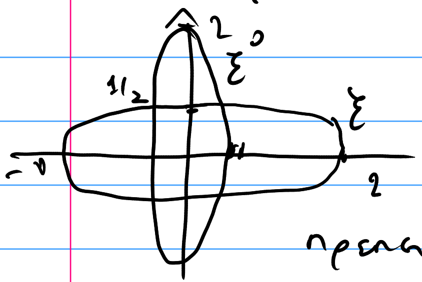
Παράδειγμα 3.4.4 Έστω ότι το $\mathcal{E}$ είναι ελλειψοειδές με κέντρο το 0 και μήκη ημιαξόνων $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

$$\mathcal{E} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n , \ \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\alpha_j^2} \le 1 \right\}$$

Το πολικό $\mathcal{E}^\circ$ είναι το ελλειψοειδές

$$\mathcal{E}^\circ = \left\{ (y_1 \dots y_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 y_j^2 \le 1 \right\} \quad \left(\sum \frac{y_j^2}{(1/\alpha_j)^2} \le 1 \right)$$



Απόδειξη Θέτω $\mathcal{E}' = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sum \alpha_j^2 y_j^2 \le 1 \right\}$

Θα δείξω ότι $\mathcal{E}' = \mathcal{E}^\circ$. Έστω $y \in \mathcal{E}'$ τότε πρέπει $y \in \mathcal{E}^\circ$. Έστω ότι $x \in \mathcal{E}$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j}{\alpha_j} \right) \cdot (\alpha_j y_j) \overset{C-S}{\le}$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j}{\alpha_j} \right)^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j y_j)^2 \right)^{1/2} \le 1 \Rightarrow y \in \mathcal{E}^\circ$$

Άρα $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}^\circ$. Έστω ότι $y \in \mathcal{E}^\circ \Rightarrow \langle x, y \rangle \le 1 \ \forall x \in \mathcal{E}$

αν $y = 0 \Rightarrow y \in \mathcal{E}'$. Υποθέτω ότι $y \neq 0$ θέτω $x = (x_1 \dots x_n)$

$$x_j = \frac{\alpha_j^2 y_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 y_i^2}}$$

Ισχύει $x \in \mathcal{E}$

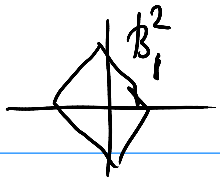
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\alpha_j^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\cancel{\alpha_j^2}} \frac{\alpha_j^{2} y_j^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 y_i^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 y_j^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 y_i^2} = 1$$

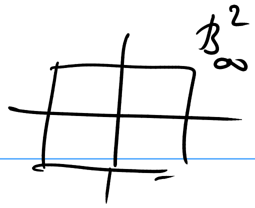
$$1 \ge \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j^2 y_j}{\sqrt{\ }} y_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 y_j^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 y_i^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \ge \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 y_j^2} \Rightarrow y \in \mathcal{E}' \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}^\circ \subseteq \mathcal{E}'}$$

Άρα $\mathcal{E}' = \mathcal{E}^\circ$

Παράδειγμα $(B_1^n)^\circ = B_\infty^n$





Αν $y \in (B_1^n)^\circ \Rightarrow \langle x, y \rangle \le 1 \quad \forall x \in B_1^n$

θέτω $j_0 : |y_{j_0}| = \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\}$

Αν $|y_{j_0}| = 0 \Rightarrow y = 0 \in B_\infty^n$

Αν $|y_{j_0}| \neq 0$ θέτω $x = (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad$ j_0 θέση

$$x_j = \begin{cases} 0 & \text{αν } j \neq j_0 \\ \dfrac{|y_{j_0}|}{y_{j_0}} & j = j_0 \end{cases} \qquad x = \left(0,0,\dots,0,\frac{|y_{j_0}|}{y_{j_0}},0,\dots,0\right)$$

$x \in B_1^n$ διότι $\|x\|_1 = \left| \dfrac{|y_{j_0}|}{y_{j_0}} \right| = 1$

$$1 \geq \langle x, y \rangle = \frac{|y_{j_0}|}{\cancel{y_{j_0}}} \cdot \cancel{y_{j_0}} = |y_{j_0}| = \|y\|_\infty$$

$\Rightarrow (B_1^n)^\circ \subseteq B_\infty^n$. Αντίστροφα αν $y \in B_\infty^n$

$\Rightarrow \max_j |y_j| \le 1$. Αν $x \in B_1^n$ τότε

$$\langle x, y \rangle = \sum x_j y_j \le \sum_j |x_j| |y_j| \le \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \, \|y\|_\infty$$

$$\le \|y\|_\infty \|x\|_1 \le 1 \Rightarrow y \in (B_1^n)^\circ$$

Άρα $B_\infty^n \subseteq (B_1^n)^\circ$. Συνεπώς $(B_1^n)^\circ = B_\infty^n$.

$$h_K(u) = \sup\{\langle x, u \rangle : x \in K\} \qquad u \in S^{n-1}$$

Ορισμός Αν K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ θέτουμε

$$h_K(y) = \sup\{\langle x, y\rangle \ x\in K\}$$

Παρατηρούμε $h_K(y) = \|y\|_2 \, h_K\left(\frac{y}{\|y\|_2}\right) \ \forall y\in\mathbb{R}^n\setminus 0$

$$K^\circ = \{y\in\mathbb{R}^n \ \langle x, y\rangle \le 1 \ \forall x\in K\} = \{y\in\mathbb{R}^n : h_K(y)\le 1\}$$

Αν K κεντρικά συμμετρικό $\quad K^\circ = \{y\in\mathbb{R}^n \ : \ \|y\|_{K^\circ}\le 1\}$

$\Rightarrow K^\circ$ είναι κεντρικά συμμετρικό

Πρόταση Αν K κυρτό κεντρικά συμμετρικό σώμα στον $\mathbb{R}^n$

τότε $h_K(y) = \|y\|_{K^\circ}$

Απόδειξη $h_K(y) = \sup\{\langle x, y\rangle : x\in K\} = \quad (y\neq 0)$

$$= \|y\|_{K^\circ} \underbrace{\sup\left\{\left\langle x, \frac{y}{\|y\|_{K^\circ}}\right\rangle : x\in K\right\}}_{I} \qquad \text{Αρκεί } I = 1$$

$$\left\|\frac{y}{\|y\|_{K^\circ}}\right\|_{K^\circ} = 1 \Rightarrow \frac{y}{\|y\|_{K^\circ}} \in K^\circ \Rightarrow \left\langle x, \frac{y}{\|y\|_{K^\circ}}\right\rangle \le 1 \ \forall x\in K$$

Άρα $I\le 1$. Αν $I<1$ θεωρούμε $\lambda>1$ ώστε $\lambda I<1$ $\left(\lambda = \frac{1}{\sqrt{I}} > 1\right)$

$$\Rightarrow \sup\left\{\left\langle x, \frac{\lambda y}{\|y\|_{K^\circ}}\right\rangle : x\in K\right\} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda y}{\|y\|_{K^\circ}} \in K^\circ \Rightarrow \underbrace{\left\|\frac{\lambda y}{\|y\|_{K^\circ}}\right\|_{K^\circ}}_{=\lambda} \le 1$$

άτοπο

άρα $I = 1$ $\blacksquare$

Ασκ 3.4.1 | $(B_2^n)^\circ = B_2^n$ & $(r B_2^n)^\circ = r^{-1} B_2^n \ \forall r>0$

Άσκηση 3.4.2 | Αν $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ αντιστρέψιμος πίνακας και K κυρτό σώμα με $0 \in int(K)$ δείξτε ότι το $T(K)$ περιέχει το 0 στο εσωτερικό του και

$$(TK)^\circ = (T^t)^{-1}(K^\circ) \leftarrow$$

[Ασκ Δείξτε ότι $T(K)$ κυρτό σώμα]

Λύση Η $T^{\pm 1}$ είναι συνεχής $:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Άρα $M = \sup\limits_{\|x\|_2=1} \|T^{-1}x\|_2 \in \mathbb{R}$ αφού η S^{n-1} είναι συμπαγές. Άρα $\forall x \neq 0$ $\left\|T^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right)\right\|_2 \le M$

$\Rightarrow \|T^{-1}(x)\|_2 \le M\|x\|_2$

Έτσι $\forall r>0$ αν $T^{-1}x \in T^{-1}(B(0,r)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \|T^{-1}x\|_2 \le M\|x\|_2 \le Mr$ Δηλαδή

$$T^{-1}(B(0,r)) \subseteq B(0,Mr) \quad \forall r>0$$

$$\Rightarrow B(0,r) \subseteq T(B(0,Mr)) \quad \forall r>0 \quad (*)$$

Άρα αφού $0 \in int(K)$ $\exists \delta>0$ ώστε $B(0,\delta) \subseteq K$

$$\Rightarrow \underbrace{T(B(0,\delta))}_{= T(B(0, M\frac{\delta}{M}))} \subseteq T(K)$$

$$= T\left(B\left(0, M\frac{\delta}{M}\right)\right) \underset{r=\frac{\delta}{M}}{\overset{(*)}{\supseteq}} B\left(0,\frac{\delta}{M}\right)$$

$$\Rightarrow B\left(0,\frac{\delta}{M}\right) \subseteq T(B(0,\delta)) \subseteq T(K)$$

$$0 \in int(T(K)).$$

Av $x \in (TK)^\circ \iff \|x\|_{(TK)^\circ} \le 1 \iff h_{TK}(x) \le 1$

Abk 3..!!

$$\iff h_K(T^t x) \le 1 \iff \|T^t x\|_{K^\circ} \le 1$$

vi giver!

$$\iff T^t x \in K^\circ \iff x \in (T^t)^{-1}(K)$$

■

$$\langle x, Tz\rangle = \langle T^t x, z\rangle$$

$$x^t \cdot (Tz) = (x^t T)\cdot z = (T^t x)^t z = \langle T^t x, z\rangle$$