Κεφάλαιο 1

Τοπολογία του $\mathbb{R}$

1.1 Στοιχεία Θεωρίας

Ορισμός 1 *Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$ ονομάζουμε ϵ-περιοχή του α ή περιοχή κέντρου α και ακτίνας ϵ και συμβολίζουμε $N_\alpha(\epsilon)$ το σύνολο όλων των αριθμών που έχουν απόσταση από το α μικρότερη από ϵ. Δηλαδή*

$$N_\alpha(\epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| < \epsilon\} = (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$$

Είναι φανερό ότι αν $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 \Longrightarrow N_\alpha(\epsilon_1) \subseteq N_\alpha(\epsilon_2)$.

Ορισμός 2 *Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ λέγεται ανοικτό αν για οποιοδήποτε σημείο x του A υπάρχει κάποια περιοχή N_x του x που περιέχεται στο A. Δηλαδή, για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ ώστε $N_x(\epsilon) \subseteq A$.*

Ορισμός 3 *Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ θα το λέμε κλειστό αν έχει την εξής ιδιότητα: αν $\{x_n\}$ είναι οποιαδήποτε ακολουθία που κάθε όρος της ανήκει στο A (λέμε τότε: η $\{x_n\}$ είναι στο A) και που συγκλίνει σε κάποιο x, τότε το όριό της x ανήκει και αυτό στο A.*

Τα ανοικτά διαστήματα (a, b) είναι ανοικτά σύνολα ενώ τα κλειστά διαστήματα $[a, b]$ κλειστά σύνολα. Υπάρχουν και σύνολα που είναι ανοικτά και κλειστά όπως το $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Θεώρημα 4 *Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν το συμπληρωμά του είναι κλειστό.*

Η ένωση ανοικτών συνόλων δίνει ανοικτό σύνολο. Η τομή κλειστών συνόλων δίνει κλειστό σύνολο. Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων δίνει κλειστό σύνολο και η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων δίνει ανοικτό σύνολο.

Ορισμός 5 *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και x σημείο του A. Το x λέγεται εσωτερικό σημείο του A αν υπάρχει περιοχή N_x που περιέχεται στο A. Το σύνολο που έχει σαν στοιχεία του όλα τα εσωτερικά σημεία του A (και μόνο αυτά) λέγεται εσωτερικό του A και γράφεται $\mathring{A}$. Προφανώς $\mathring{A} \subseteq A$ και A ανοικτό αν και μόνο αν $\mathring{A} = A$. Το $\mathring{A}$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A.*

Ορισμός 6 *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Το x λέγεται σημείο επαφής του A αν υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}$ στο A ώστε $x_n \longrightarrow x$. Το σύνολο που έχει σαν στοιχεία όλα τα σημεία επαφής του A (και μόνο αυτά) λέγεται κλειστή θήκη του A και γράφεται $\overline{A}$.*

Φανερά $A \subseteq \overline{A}$ και A κλειστό αν και μόνο αν $A = \overline{A}$.

Το x είναι σημείο επαφής του A αν και μόνο αν κάθε περιοχή N_x του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A. Το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A.

Ορισμός 7 *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, το x λέγεται συνοριακό σημείο του A αν κάθε περιοχή N_x περιέχει και σημείο του A και σημείο του A^c. Το σύνολο που περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του A (και μόνο αυτά) λέγεται σύνορο του A και γράφεται ∂A.*

Θεώρημα 8 *Έστω $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*
(α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
(β) Για κάθε ανοικτό $A \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$
(γ) Για κάθε κλειστό $A \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$

1.2 Ασκήσεις

Άσκηση 1

Ορισμός 9 *Αν $A \subset \mathbb{R}$ τότε το σύνολο που περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσης του A ονομάζεται παράγωγο σύνολο του A και γράφεται A'. Για τα ακόλουθα σύνολα A απαντήστε αν είναι ανοικτά ή κλειστά ή τίποτε και βρείτε τα $\mathring{A}$, $\overline{A}$, ∂A, A':*

(α) όλων των ειδών τα διαστήματα με άκρα πραγματικούς αριθμούς,
(β) οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με πεπερασμένου πλήθους στοιχεία,
(γ) $\mathbb{Z}$,
(δ) $\mathbb{Q}$,

(ε) $\{1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \ldots\}$,
(στ) $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$,
(ζ) $\{\ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$,
(η) $\{(-1)^n + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$,
(θ) $\{\frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}\}$
(ι) $\mathbb{C}$
(ια) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 1 Λύση

Λύση (α) Τα διαστήματα της μορφής $[a, b]$ είναι κλειστά, τα (a, b) ανοιχτά και τα $(s, b]$ ή $[a, b)$ τίποτα. Όλα αυτά έχουν εσωτερικό το (a, b), θήκη το $[a, b]$, σύνορο το $\{a, b\}$ και σύνολο σημείων συσσώρευσης το $[a, b]$.
(β) Τα σύνολα με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων στο $\mathbb{R}$ είναι κλειστά, έχουν κενό εσωτερικό, ταυτίζονται με τη θήκη τους και με το σύνορό τους και δεν έχουν σημεία συσσώρευσης.
(γ) Ισχύουν τα ίδια με το (β).
(δ) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό. Έχει κενό εσωτερικό, θήκη, σύνορο και σύνολο σημείων συσσώρευσης όλο το $\mathbb{R}$.
(ε) Το σύνολο αυτό έχει κενό εσωτερικό, θήκη και σύνορο τον εαυτό του ένωση με το $\{0\}$, και σημεία συσσώρευσης το $\{0\}$.
(στ) Το σύνολο αυτό έχει κενό εσωτερικό, θήκη και σύνορο τον εαυτό του ένωση με το $\{0\}$, και σημεία συσσώρευσης το $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \cup \{0\}$,

Ομοίως κάνουμε και τα υπόλοιπα.

Άσκηση 1 Υπόδειξη

Άσκηση 2

Έστω $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι κλειστά σύνολα: $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = \alpha\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq \alpha\}$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 2 Λύση

Λύση Τα σύνολα $\{\alpha\}$ και $[\alpha, +\infty)$ είναι κλειστά στο $\mathbb{R}$. Αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι κλειστό σύνολο. Άρα,

$$A = f^{-1}(\{\alpha\}) \text{ κλειστό και } B = p^{-}1([\alpha, +\infty)) \text{ κλειστό}$$

Άσκηση 2 Υπόδειξη

Άσκηση 3

Έστω $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $\{x \mid f(x) < g(x)\}$ είναι ανοικτό σύνολο και ότι τα $\{x \mid f(x) \leq g(x)\}$, $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστά σύνολα. Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 3 Λύση

Λύση Ορίζουμε $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = g(x) - f(x)$. Η h είναι συνεχής, άρα: Το $\{x : f(x) < g(x)\} = \{x : h(x) > 0\} = h^{-1}((0, +\infty))$ είναι ανοικτό, αφού $(0, +\infty)$ ανοικτό. Το $\{x : f(x) \leq g(x)\} = \{x : h(x) \geq 0\} = h^{-1}([0, +\infty))$ είναι κλειστό, αφού $[0, +\infty)$ κλειστό. Το $\{x : f(x) = g(x)\} = \{x : h(x) = 0\} = h^{-1}(\{0\})$ είναι κλειστό, αφού $\{0\}$ κλειστό. Άσκηση 3 Υπόδειξη

Άσκηση 4

Έστω A ανοικτό και B κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $A \setminus B$ είναι ανοικτό και το $B \setminus A$ είναι κλειστό. Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 4 Λύση

Λύση Έχουμε: A ανοικτό $\Rightarrow$ A^c κλειστό και B κλειστό $\Rightarrow$ B^c ανοικτό. Άρα, $A \cap B = A \cap B^c =$ ανοικτό (τομή ανοικτών-πεπερασμένων το πλήθος). $B \cap A = b \cap A^c =$ κλειστό (τομή κλειστών).

Άσκηση 4 Υπόδειξη

Άσκηση 5

Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του A (δηλαδή $x \in A'$) αν και μόνον αν κάθε περιοχή του x περιέχει άπειρα σημεία του A. Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 5 Λύση

Λύση Έστω x σημείο συσσώρευσης του A και έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε οτι $(N_x(\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Ας υποθέσουμε οτι έχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία, τα $x_1, \ldots, x_m$. Είναι $x \neq x_i \Rightarrow |x - x_i| > 0$, $i = 1, \ldots, m$. Θέτουμε $\varepsilon' = min\{|x - x_1|, \ldots, |x - x_m|\} > 0$. Τότε, $\varepsilon' < \varepsilon$ και $x_1, \ldots, x_m \notin N_x(\varepsilon')$. Δηλαδή, $(N_x(\varepsilon') \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$. Άτοπο, γιατί το x είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Δηλαδή, $\forall\, \varepsilon > 0$ είναι $(N_x(\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A =$ άπειρο $\Rightarrow N_x(\varepsilon) \cap A =$ άπειρο. Το αντίστροφο είναι προφανές: αν κάθε περιοχή του x περιέχει άπειρα σημεία του A, τότε περιέχει και κάποιο διαφορετικό από το x. Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι $(N_x(\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Αρα το x είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Άσκηση 5 Υπόδειξη

Άσκηση 6

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $x \in A'$ αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία x_n στο A με $x_n \neq x$, $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \longrightarrow x$. Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 6 Λύση

Λύση Έστω $x \in A'$. Για $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, εφαρμόζουμε τον ορισμό και βρίσκουμε $x_n \in A$ με $x_n \neq x$και$|x - x_n| < \frac{1}{n}$. Έστω $x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to x$. Αντίστροφα: Έστω οτι υπάρχουν $x_n \in A$, $x_n \neq x$ με $x_n \to x$. Αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in N$ για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $x_n \in N_x(\varepsilon)$. Αφού $x_n \neq x$, έπεται οτι $(N_x(\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, το x είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Άσκηση 6 Υπόδειξη

Άσκηση 7

Έστω $A, B, \Gamma, \ldots, A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$. Τότε
(α) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $(A')' \subset A'$. Βρείτε σύνολο A ώστε $(A')' \neq A'$.
(β) $\overline{(A \cap B \cap \Gamma \cap \ldots)} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{\Gamma} \cap \ldots$ Βρείτε δύο σύνολα A, B ώστε $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.
(γ) Αν $B = \mathring{A}$ τότε $\mathring{B} = \mathring{A}$

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 7 Λύση

Λύση (α) Το $\overline{A}$ είναι κλειστό, άρα ταυτίζεται με την κλειστή του θήκη: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Έχουμε $(A')' \subseteq \overline{A'}$ και από το α το A' είναι κλειστό. Άρα, $(A')' \subseteq A\prime$. Δεν ισχύει πάντα ισότητα: Αν $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}, \text{τότε} A' = 0 \text{και} (A')' = \emptyset$.

(β) Για κάθε $i \in I$είναι$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i \to \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \overline{A_i}$. Άρα, $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$. Άν $A = (0,1), B = (1,2)$, τότε $\overline{A} = [0,1]$, $\overline{B} = [1,2]$ άρα $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$, ενώ $A \cap B = \emptyset \to \overline{A \cap B} = \emptyset$.

(γ) Το $\mathring{A}$ είναι ανοικτό, άρα ταυτίζεται με το εσωτερικό του.

Άσκηση 7 Υπόδειξη

Άσκηση 8

Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Τότε $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{A^c}$, $\partial A = \partial(A^c)$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 8 Λύση

Λύση Έχουμε

$$\begin{aligned} x \in \partial A \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \ N_x(\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ και } N_x(\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset && (1.1)\\ &\Leftrightarrow \quad x \in \overline{A} \text{ και } x \in \overline{A^c} && (1.2)\\ &\Leftrightarrow \quad x \in \overline{A} \cap \overline{A^c} && (1.3) \end{aligned}$$

Δηλαδή, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. Επίσης, $\overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap (\mathring{A})^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ (από την προηγούμενη άσκηση με A αντί του A^c, $\mathring{A} = (\overline{A^c})^c$ δηλαδή $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$). Άρα, $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$. Τέλος, $\partial(A^c) = \overline{A^c} \cap \overline{(A^c)^c} = \overline{A^c} \cap \overline{A} = \partial A$. Άσκηση 8 Υπόδειξη

Άσκηση 9

Κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει και ρητούς και άρρητους αριθμούς.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 9 Λύση

Λύση Έστω A μη-κενό, ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$. Υπάρχει $x \in A$ και το x είναι εσωτερικό σημείο του A, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ του $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$. Ανάμεσα στους $x-\varepsilon$ και $x+\varepsilon$ μπορούμε να βρούμε και ρητούς και άρρητους αριθμούς. Άρα, $A \cap Q \neq \emptyset$ και $A \cap Q^c \neq \emptyset$.

Άσκηση 9 Υπόδειξη

Άσκηση 10

Έστω $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αν και μόνον αν

$$f^{-1}(\mathring{A}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{(f^{-1}(A))}}$$

για κάθε $A \subset \mathbb{R}$, αν και μόνον αν $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 10 Λύση

Λύση Έστω οτι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Ξέρουμε οτι η αντίστροφη εικόνα ανοικτού συνόλου είναι ανοικτό σύνολο, άρα το $f^{-1}(\mathring{A})$ είναι ανοικτό. Αφού $\mathring{A} \subseteq A$ έχουμε $f^{-1}(\mathring{A}) \subseteq f^{-1}(A)$ και αφού το $(f^{-1}(\mathring{A}))$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο $f^{-1}(A)$, έπεται στο $f^{-1}(\mathring{A}) \subseteq (f^{-1}(\mathring{A}))$. Αντίστροφα, αν η $f^{-1}(\mathring{A}) \subseteq (f^{-1}(\mathring{A}))$ ισχύει για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό παίρνει τη μορφή $f^{-1}(A) \subseteq (f^{-1}(\mathring{A}))$ που σημαίνει οτι $f^{-1}(A) = (f^{-1}(\mathring{A}))$ (γιατί ;). Αυτό πάλι σημαίνει οτι αντίστροφη εικόνα ανοικτού είναι ανοικτό, οπότε έχουμε δει οτι η f είναι συνεχής. Έστω παλι οτι η f είναι συνεχής και $x \in \overline{A}$ κάποιου $A \subseteq \mathbb{R}$. Υπάρχουν $x_n \in A$ με $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ και $f(x_n) \in f(A)$, άρα $f(x) \in \overline{f(A)}$. Δηλαδή, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Αντίστροφα, έστω οτι ισχύει η $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$. Θεωρούμε $k \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό και γράφουμε $A = f^{-1}(k)$. Τότε,

$$f(\overline{f^{-1}(k)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(k))} = \overline{k} = k$$

άρα $\overline{f^{-1}(k)} \subseteq f^{-1}(k)$. Αυτό σημαίνει οτι $f^{-1}(k) =$ κλειστό. Αφού αντιστροφη εικόνα κλειστού είναι κλειστό, η f είναι συνεχής.

Άσκηση 10 Υπόδειξη

Άσκηση 11

Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Το σύνολο

$$N_A(\varepsilon) = \{x \ : \ \text{υπάρχει } y \in A \text{ με } |y - x| < \varepsilon\}$$

είναι ανοικτό και περιέχει το A.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 11 Λύση

Λύση Αν $x \in A$, τότε για το $y = x \in A$ έχουμε $|x - y| = 0 < \varepsilon$. Άρα $x \in N_A(\varepsilon)$. Δηλαδή $A \subseteq N_A(\varepsilon)$. Έστω $x \in N_A(\varepsilon)$. Υπάρχει $y \in A$ των $|x - y| < \varepsilon$. Θέτουμε $\delta = \varepsilon - |x - y| > 0$. Θα δείξουμε οτι $N_x(\delta) \subseteq N_A(\varepsilon)$: έστω $z \in N_x(\delta)$. Τότε $|y - z| \leq |y - x| + x - z| < |y - x| + \delta = \varepsilon$. Άρα, $z \in N_A(\varepsilon)$. Αφού κάθε $x \in N_A(\varepsilon)$ είναι εσωτερικό σημείο του $N_A(\varepsilon)$, το $N_A(\varepsilon)$ είναι ανοικτό.

Άσκηση 11 Υπόδειξη

Κεφάλαιο 2

Μετρικοί Χώροι

2.1 Στοιχεία Θεωρίας

Έστω X ένα μη κενό σύνολο

Ορισμός 10 *Ονομάζουμε μετρική στο X μια συνάρτηση ϱ ορισμένη στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times X$ και με πραγματικές τιμές:*

$$\varrho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\varrho(x, y) \geq 0$, για κάθε $x, y \in X$
(β) $\varrho(x, y) = 0$ αν και μόνον αν $x = y$
(γ) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$ (συμμετρία)

(δ) $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ για κάθε $x, y, z \in X$ (τριγωνική ιδιότητα)

Λέμε οτι το ζευγάρι (X, ϱ) αποτελεί ένα *μετρικό χώρο*. Επίσης την τιμή $\varrho(x, y)$ στο ζεύγος (x, y) την ονομάζουμε *απόσταση* μεταξύ των x, y.

Ορισμός 11 *Αν $\alpha \in X$ και $\varepsilon > 0$ ονομάζουμε $\varepsilon -$ περιοχή του α ή περιοχή κέντρου α και ακτίνας ε το σύνολο*

$$N_\alpha(\varepsilon) = \{x \in X \mid \varrho(x, \alpha) < \varepsilon\}$$

Ορισμός 12 *Έστω ακολουθία $\{x_n\}$ στον μετρικό χώρο (X, ϱ). Λέμε οτι η $\{x_n\}$ συγκλίνει στο $x \in X$, και γράφουμε $x_n \longrightarrow x$ ή $\lim x_n = x$ αν δοθείσης οποιασδήποτε περιοχής N_x υπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε όλοι οι όροι της $\{x_n\}$ μετά από τον x_{n_0} βρίσκονται μέσα στην N_x.*

Ορισμός 13 *Έστω δύο μετρικοί χώροι* (X,ϱ) *και* (Y,r) *και συνάρτηση* $f : A \longrightarrow Y$ *όπου* $A \subseteq X$ *και* $x_0 \in A$. *Λέμε οτι η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο* x_0 *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *ώστε* $x \in A, \varrho(x,x_0) < \delta \Longrightarrow r(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Ανισοτητα Cauchy-Schwarz

Για κάθε $a_1, a_2, \dots, a_n\ ,\ b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)\ ({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2)$$

Τριγωνικη Ανισοτητα

Για κάθε $a_1, a_2, \dots, a_n\ ,\ b_1, b_2, \dots, b_n\ \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$[(a_1 + b_1)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2]^{\frac{1}{2}} \leq [{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2]^{\frac{1}{2}} + [{b_1}^2 + \cdots + {b_n}^2]^{\frac{1}{2}}$$

Τέλος να παρατηρήσουμε ότι το άθροισμα, το γινόμενο, ο λόγος και η σύνθεση συναρτήσεων (όταν αυτές οι πράξεις ορίζονται) δίνουν συνεχείς συναρτήσεις.

Άσκηση 1

Αν $x_n \longrightarrow x$ σε μετρικό χώρο (X,ϱ) αποδείξτε οτι για κάθε υποακολουθία $\{x_{\kappa_n}\},\ x_{\kappa_n} \longrightarrow x$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 1 Λύση

Λύση Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ που για κάθε $n \geq n_0$ να έχουμε $x_n \in N_x(\varepsilon)$. Είναι $k_n \geq n$, άρα αν $k_n \geq n \geq n_0$ οπότε $x_{k_n} \in N_x(\varepsilon)$. Άρα, $x_{k_n} \to x$.

Άσκηση 1 Υπόδειξη

Άσκηση 2

Έστω ότι $x_n \longrightarrow x,\ y_n \longrightarrow y$ σε μετρικό χώρο (X,ϱ). Αποδείξτε ότι $\varrho(x_n, y_n) \longrightarrow \varrho(x,y)$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Αποδείξτε πρώτα ότι

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x,y)|\ \leq\ \varrho(x_n, x) + \varrho(y_n, y).$$

Λύση Έχουμε: $|p(x_n,y_n)-p(x,y)| = |p(x_n,y_n)-p(x,y_n)+p(x,y_n)-p(x,y)| \leq |p(x_n,y_n)-p(x,y_n)|+|p(x,y_n)-p(x,y)| \leq p(x_n,x)+p(y_n,y)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, $y_n \to y$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ που για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$p(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{και } p(y_n,y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τότε, αν $n \geq n_0$ έχουμε $|p(x_n,y_n)-p(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Άρα,

$$p(x_n,y_n) \in p(x,y).$$

Άσκηση 2 Υπόδειξη

Άσκηση 3

Αν (X,ϱ) είναι μετρικός χώρος και ορίσουμε:

$$\varrho'(x,y) = \frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)} \ , \ x,y \in X$$

τότε
(α) η ϱ' είναι μετρική στον X
(β) $0 \leq \varrho'(x,y) < 1$, για κάθε $x,y \in X$
(γ) $x_n \longrightarrow x$ στον (X,ϱ') αν και μόνον αν $x_n \longrightarrow x$ στον (X,ϱ).
(δ) τα κλειστά σύνολα στον (X,ϱ') είναι τα ίδια με τα κλειστά σύνολα στον (X,ϱ).

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη

Λύση (α) Οι τρεις πρώτες ιδιότητες της μετρικής ελέγχονται εύκολα για την p'. Δείχνουμε την τριγωνική ιδιότητα: Έστω $x,y,z \in X$. Τότε, $p(x,y) \leq p(x,z)+p(z,y)$. Η συνάρτηση $f(t) = \frac{t}{1+t}$ είναι αύξουσα στο $[0,\infty)$, άρα

$$\begin{aligned} p'(x,y) = \frac{p(x,y)}{1+p(x,y)} &\leq \frac{p(x,z)+p(z,y)}{1+p(x,z)+p(z,y)} \\ &= \frac{p(x,z)}{1+p(x,z)+p(z,y)} + \frac{p(z,y)}{1+p(x,y)+p(z,y)} \\ &\leq \frac{p(x,z)}{1+p(x,z)} + \frac{p(z,y)}{1+p(z,y)} \\ &= p'(x,z)+p'(z,y). \end{aligned}$$

(β) Αφού $0 \le p(x,y) \le 1+p(x,y)$, είναι φανερό οτι $0 \le p'(x,y) = \frac{p(x,y)}{1+p(x,y)} \le 1$.
(γ) Θέτουμε $\alpha_n = p(x_n, x)$. Τότε $p'(x_n, x) = \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}$. Αν $x_n \xrightarrow{p} x$ τότε $\alpha_n \to 0$ και $0 \le \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n} = \alpha_n$. Άρα, $\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n} \to 0$ δηλαδή $p'(x_n, x) \to 0$ δηλαδή $x_n \xrightarrow{p'} x$. Αντίστροφα, αν $x_n \xrightarrow{p'} x$ έχουμε $\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n} \to 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+\alpha_n} \to 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+\alpha_n} \to 1 \Rightarrow 1 + \alpha_n \to 1 \Rightarrow \alpha_n \to 0$ δηλαδή $x_n \xrightarrow{p} x$.
(δ) Έστω $K \subseteq (X, p)$ κλειστό. Θα δείξουμε οτι είναι κλειστό και ως προς την p': αν $x_n \in K$ και $x_n \xrightarrow{p'} x$, τότε $x_n \xrightarrow{p} x$ (από το (γ)), και αφού το K είναι κλειστό ως προς την p έχουμε $x \in K$. Αφού η $\{x_n\}$ ήταν τυχούσα p'-συγκλίνουσα ακολουθία στο K, το K είναι p'-κλειστό. Όμοια δείχνουμε οτι κάθε p'-κλειστό σύνολο είναι και p-κλειστό.

Άσκηση 3 Υπόδειξη

Άσκηση 4

Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ λέγεται *κυρτό* αν για $x, y \in A$ και κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $0 < t < 1$ ισχύει οτι $tx + (1-t)y \in A$. Ποιά είναι η γεωμετρική σημασία (στους $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$) αυτού του ορισμού; Αποδείξτε οτι κάθε ε-περιοχή είναι κυρτό σύνολο και ότι, αν A είναι κυρτό, τότε $\mathring{A}, \overline{A}$ είναι επίσης κυρτά σύνολα.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη

Λύση (α) *Κάθε ε-περιοχή είναι κυρτό σύνολο* Δείχνουμε πρώτα οτι η $N_0(\varepsilon)$ είναι κυρτή. Έστω $x, y \in N_0(\varepsilon)$ και $t \in (0, 10)$. Έχουμε $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < \varepsilon^2$, $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 < \varepsilon^2$ και από την ανισότητα του Minkowski,

$$\begin{aligned}
\varrho(tx \quad + \quad & (1-t)y, 0) = \sqrt{(tx_1 + (1-t)y_1)^2 + \cdots + (tx_1 + (1-t)y_1)^2} \\
\le \quad & \sqrt{(tx_1)^2 + \cdots + (tx_n)^2} + \sqrt{((1-t)y_1)^2 + \cdots + ((1-t)y_n)^2} \\
\le \quad & t\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} + (1-t)\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} \\
< \quad & t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

Άρα, $tx + (1-\varepsilon)y \in N_0(\varepsilon)$.

Αν τώρα η ε-περιοχή έχει κέντρο οποιδήποτε $x \in \mathbb{R}^n$, εύκολα βλέπουμε οτι $y \in N_x(\varepsilon)$ αν και μόνο αν $y - x \in N_0(\varepsilon)$. Οπότε, αν $y, z \in N_x(\varepsilon)$ και

$t \in (0,1)$ έχουμε: υπάρχουν $y_1, z_1 \in N_0(\varepsilon)$ ώστε $y = x + ty_1$, $z = x + z_1 \Rightarrow ty + (1-t)z = tx + y_1 + (1-t)x + (1-t)z_1 = x + (ty_1 + (1-t)z_1)$. Όμως έχουμε δείξει οτι η $N_0(\varepsilon)$ είναι κυρτή, άρα $ty_1 + (1-t)z_1 \in N_0(\varepsilon)$ το οποίο δίνει $ty + (1-t)z \in N_0(\varepsilon)$.

(β) Έστω $x, y \in \mathring{A}$ και $t \in (0,1)$. Θέλουμε να δείξουμε οτι το $z = tx + (1-t)y$ είναι εσωτερικό σημείο του A. Αφού $x, y \in \mathring{A}$, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ ώστε $N_x(\varepsilon) \subseteq A$, $N_y(\varepsilon)$. Θα δείξουμε οτι $N_z(\varepsilon) \subseteq A$. Έστω $w \in N_z(\varepsilon)$. Θεωρούμε το $w - z$ και το προσθέτουμε στα x, y: αφού $w - z \in N_0(\varepsilon)$ έχουμε

$$x + (w-z) \in N_x(\varepsilon) \subseteq A, \qquad y + (w-z) \in N_y(\varepsilon) \subseteq A.$$

Το A είναι κυρτό, άρα $t[x + (w-z)] + (1-t)[y + (w-z)] \in A$. Δηλαδή,

$$tx + (1-t)y + w - z \in A \Rightarrow w \in A.$$

Άρα, $N_z(\varepsilon) \subseteq A$ οπότε $z \in \mathring{A}$.

(γ) Έστω $x, y \in \overline{A}$ και $t \in (0,1)$. Υπάρχουν $x_n, y_n \in A$ με $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Αφού το A είναι κυρτό, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $tx_n + (1-t)y_n \in A$.

Επίσης, $tx_n + (1-t)y_n \to tx + (1-t)y$, άρα $tx + (1-t)y \in \overline{A}$.

Άσκηση 4 Υπόδειξη

Άσκηση 5

Έστω (X, ϱ) μετρικός χώρος και $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στον (X, ϱ). Έστω $A \subset X$ με την ιδιότητα $\overline{A} = X$. Αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in X$. (Ένα σύνολο A με $\overline{A} = X$ ονομάζεται *πυκνό* στον (X, ϱ). Για παράδειγμα $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$).

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη

Λύση Έστω $x \in X$. Τότε, $x \in \overline{A}$ άρα υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}$ στο A με $x_n \to x$. Αφού η f είναι συνεχής, έχουμε $f(x_n) \to f(x)$. Όμως $x_n \in A$, άρα $f(x_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $f(x) = \lim_n 0 = 0$.

Άσκηση 5 Υπόδειξη

Άσκηση 6

Έστω μη κενό υποσύνολο E μετρικού χώρου (X, ϱ). Ορίζουμε την *απόσταση σημείου* $x \in X$ *από το* E ως εξής: $\varrho_E(x) = \inf \ \varrho(x, y)$.
(α) Αποδείξτε την ύπαρξη του infimum.
(β) Αποδείξτε ότι: $\varrho_E(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{E}$.
(γ) Αποδείξτε ότι: $|\varrho_E(x) - \varrho_E(y)| \leq \varrho(x, y)$, $x, y \in X$ και ότι η $(\varrho_E : X \longrightarrow \mathbb{R})$ είναι συνεχής στον (X, ϱ).

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη

Λύση (α) Έχουμε $p(x, y) \geq 0$ για κάθε $y \in E$, άρα το $\{p(x, y) : y \in E\}$ είναι κάτω φραγμένο από το 0. (Προφανές είναι μη-κενό, αφού υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του E). Έπεται από το αξίωμα της συνέχειας οτι υπάρχει το $\inf\{p(x, y) : y \in E\} \geq 0$.
(β) Αν $p_E(x) = 0$ έχουμε οτι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y_\varepsilon \in E$ του $p(x, y_\varepsilon) < \varepsilon$. Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε ακολουθία $y_n \in E$ με $0 \leq p(x, y_n) < \frac{1}{n}$. Έπεται οτι $p(x, y_n) \to 0 \Rightarrow y_n \to x \Rightarrow x \in \overline{E}$. Αντίστροφα, αν $x \in \overline{E}$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $N_x(\varepsilon) \cap E \neq \emptyset$ δηλαδή $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists y \in E$ με $p(x, y) < \varepsilon$. Έπεται οτι $0 \leq p_E(x) < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, δηλαδή $p_E(x) = 0$.
(γ) Έστω $x, y \in X$. Αν $\alpha \in E$ έχουμε $p(x, \alpha) \leq p(x, y) + p(y, \alpha) \Rightarrow \inf\{p(x, \alpha) : \alpha \in E\} \leq p(x, y) + p(y, \alpha)$ δηλαδή $p_E(x) \leq p(x, y) + p(y, \alpha)$. Έχουμε $p_E(x) - p(x, y) \leq p(y, \alpha)$ για κάθε $\alpha \in E$. Άρα,

$$p_E(x) - p(x, y) \leq \inf\{p(y, \alpha) : \alpha \in E\} = p_E(y).$$

Δηλαδή, $p_E(x) - p_E(y) \leq p(x, y)$. Από συμμετρία,

$$|p_E(x) - p_E(y)| \leq p(x, y) \quad (*)$$

Η $(*)$ αποδεικνύει την συνέχεια της p_E : αν μας δώσουν $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$ τότε για $\delta = \varepsilon$ παίρνουμε: αν $x \in N_{x_0}(\delta)$ τότε $p(x, x_0) < \delta \Rightarrow |p_E(x) - p_E(x_0)| \leq p(x, x_0) < \delta = \varepsilon$.

Άσκηση 6 Υπόδειξη

Άσκηση 7

Ένας μετρικός χώρος (X, ϱ) λέγεται *διαχωρίσιμος* αν υπάρχει υποσύνολό του A με τις ιδιότητες:
(α) το A έχει αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων και
(β) $\overline{A} = X$ (δηλαδή το A είναι πυκνό στον (X, ϱ)).

Αποδείξτε οτι το (β) είναι ισοδύναμο με την

(β') οποιαδήποτε περιοχή $N_x(\varepsilon)$ οποιουδήποτε σημείου $x \in X$ περιέχει στοιχείο του A.

Είναι ο $\mathbb{R}$ διαχωρίσιμος; Είναι ο $(\mathbb{R}^n, \varrho)$ διαχωρίσιμος; (Υπόδειξη: Θεωρείστε το σύνολο A των σημείων που όλες τους οι συντεταγμένες είναι ρητοί αριθμοί.)

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη

Λύση Είναι: $\overline{A} = X$ αν και μόνο αν κάθε $x \in X$ είναι σημείο επαφής του A, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $N_x(\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Ο $\mathbb{R}$ είναι διαχωρίσιμος: παίρνουμε $A = \mathbb{Q}$. Το $\mathbb{Q}$ έχει αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων και αν $x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχουν ρητοί στο $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Δηλαδή, $N_x(\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.) $(\mathbb{R}^n, p)$ είναι διαχωρίσιμος: παίρνουμε $A = \mathbb{Q}^n = \{(q_1, \ldots, q_n) \, : \, q_i \in \mathbb{Q} \, , \, i - 1, \ldots, n\}$. Το A είναι αριθμήσιμο εαν καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους αριθμησίμων συνόλων. Έστω $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. Για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ μπορούμε να βρούμε $q_i \in Q$ του $|x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Τότε,

$$q = (q_1, \ldots q_n) \in A \text{ και } p(x, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - q_i|^2} < \sqrt{n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

Δηλαδή, $N_x(\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Άρα, $\overline{A} = \mathbb{R}^n$.

Άσκηση 7 Υπόδειξη

Άσκηση 8

Έστω μη κενά κλειστά υποσύνολα A, B μετρικού χώρου (X, ϱ) ξένα μεταξύ τους. Ορίζουμε $f(x) = \frac{\varrho_A(x)}{\varrho_A(x) + \varrho_B(x)}$, $x \in X$.

(α) Η $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον (X, ϱ).

(β) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 8 Λύση

Λύση Άσκηση 8 Υπόδειξη

Κεφάλαιο 3

Συμπάγεια

Ορισμός 14 *Λέμε οτι «τα $A, B, \Gamma, \cdots$ αποτελούν κάλυψη του M» αν $M \subseteq A \cup B \cup \Gamma \cup \cdots$. Αν το πλήθος των $A, B, \Gamma, \cdots$ είναι πεπερασμένο τότε λέμε οτι αποτελούν πεπερασμένη κάλυψη του M. Αν $P, Q, R, \cdots$ είναι μερικά από τα $A, B, \Gamma, \cdots$ και τα $P, Q, R, \cdots$ επίσης αποτελούν κάλυψη του M τότε λέμε οτι «τα $P, Q, R, \cdots$ αποτελούν υπο-κάλυψη του M» ή ότι «η κάλυψη $A, B, \Gamma, \cdots$ του M περιέχει την υποκάλυψη $P, Q, R, \cdots$ του M». Αν επιπλέον το πλήθος των $P, Q, R, \cdots$ είναι πεπερασμένο τότε λέμε οτι «η κάλυψη $A, B, \Gamma, \cdots$ του M περιέχει την πεπερασμένη υπο-κάλυψη $P, Q, R, \cdots$ του M».*

Ορισμός 15 *Έστω οτι (X, ϱ) είναι, μετρικός χώρος. Αν τα $A, B, \Gamma, \cdots$ αποτελούν κάλυψη του M και όλα τα $A, B, \Gamma, \cdots$ είναι ανοικτά υποσύνολα του (X, ϱ) τότε λέμε οτι «τα $A, B, \Gamma, \cdots$ αποτελούν ανοικτή κάλυψη του M».*

Ορισμός 16 *Έστω M υποσύνολο μετρικού χώρου (X, ϱ). Το M λέγεται φραγμένο αν υπάρχει $x_0 \in X$ και θετικός αριθμός R ώστε $M \subseteq N_{x_0}(R)$. Αν ένα σύνολο $M \subseteq X$, όπου (X, ϱ) μετρικός χώρος, είναι συμπαγές τότε το M είναι κλειστό και φραγμένο. Το αντίστροφο δεν είναι πάντα σωστό. Το αντίστροφο ισχύει όμως όταν ο X είναι ο $\mathbb{R}^n$ με την συνήθη μετρική (Θεώρημα $Heine - Borel$). Αν το N είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς M τότε και το N είναι συμπαγές.*

Θεώρημα 17 *Έστω υποσύνολο M του $\mathbb{R}^n$. Το M είναι συμπαγές αν και μόνο αν οποιαδήποτε ακολουθία στο M έχει υποακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του M. Μια συνέπεια αυτού του θεωρήματος είναι ότι κάθε μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο. Παρατηρούμε εδώ ότι το* *παραπάνω θεώρημα ισχύει και σε γενικούς μετρικούς χώρους και όχι μόνο στον $\mathbb{R}^n$.*

Θεώρημα 18 *Έστω M συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και συνάρτηση $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ συνεχής στο M. Τότε το $f(M)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Δηλαδή «η συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές σύνολο» και αυτό το θεώρημα συνεχίζει να ισχύει στους γενικούς μετρικούς χώρους.*

Ορισμός 19 *Έστω μετρικοί χώροι $(X, \varrho), (Y, r)$και $A \subseteq X,\ f : A \longrightarrow Y$. Η f λέγεται ομοιόμορφα συνεχής στο A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε $x, y \in A, \varrho(x, y) < \delta \Longrightarrow r\Big(f(x), f(y)\Big) < \varepsilon$.*

Πρόταση 20 *Έστω M συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και συνάρτηση $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ συνεχής στο M. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Άσκηση 1

Έστω μετρικός χώρος (X, ϱ) , $A, B \subset X$, A συμπαγές και B κλειστό. Τότε το $A \cap B$ είναι συμπαγές.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση Λύση

Λύση Το A είναι συμπαγές άρα κλειστό. Επμένως, το $A \cap B$ είναι κλειστό σαν τομή κλειστών συνόλων. Έχουμε $A \cap B \subseteq A$ και το A είναι συμπαγές, άρα το $A \cap B$ είναι συμπαγές.

Άσκηση 1 Υπόδειξη

Άσκηση 2

Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Αν το A είναι φραγμένο και η f ομοιόμορφα συνεχής στο A τότε η f είναι φραγμένη.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Πάρτε $\varepsilon = 1$ και το αντίστοιχο δ. Υπάρχουν πεπερασμένου πληθους σημεία στο A που κάθε άλλο σημείο του A να απέχει από τουλάχιστον ένα από αυτά απόσταση μικρότερη από δ. Άσκηση 2 Λύση

Λύση Ψάχνουμε θετικό αριθμό M με την ιδιότητα $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$. Το A είναι φραγμένο, επομένως περιέχεται σε κάποιο διάστημα: έστω οτι

$$A \subseteq [\alpha, b]\ ,\ \alpha < b \text{ στο} \mathbb{R}.$$

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, άρα για $\varepsilon = 1 > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ που αν $x, y \in A$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x)-f(y)| < 1$. Βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{b-\alpha}{n} < \delta$ και χωρίζουμε το $[\alpha, b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα $J_1, \ldots, J_n$ μήκους $\frac{b-\alpha}{n}$. Από αυτά τα διαστήματα κρατάμε μόνο εκείνα που έχουν μη κενή τομή με το A: έστω $J'_n, \ldots, J'_m$ εκείνα τα J_i για τα οποία $J_i \cap A \neq \emptyset$. Σε κάθε $J'_i\ ,\ i \leq m$ επιλέγουμε τυχόν $\alpha_i \in A$. Έχουμε δηλαδή

$$A \subseteq J'_1 \cup \ldots \cup J'_m \text{ και } \alpha_i \in A \cap J'_i\ ,\ i = 1, \ldots, m.$$

Θα δείξουμε οτι $|f(x)| \leq \max\{|f(\alpha_1)|, \ldots, |f(\alpha_m)|\} + 1 \leq M$ Έστω $x \in A$. Υπάρχει $i \leq m$ του $x \in J'_i$ και τότε $|x - \alpha_i| \leq \frac{b-\alpha}{n} < \delta$, οπότε

$$|f(x) - f(\alpha_i)| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |f(\alpha_i)| + 1 \leq M.$$

Άσκηση 2 Υπόδειξη

Άσκηση 3

Έστω μετρικός χώρος (X, ϱ) και $A_i \subset X\ i \in I$.
(α) Αν τα A_i είναι συμπαγή τότε το $\cap_{i \in I} A_i$ είναι συμπαγές.
(β) Αν τα A_i είναι συμπαγή και πεπερασμένου πλήθους (το I είναι πεπερασμένο) τότε το $\cup_{i \in I} A_i$ είναι συμπαγές.

Βρείτε στον $\mathbb{R}$ άπειρου πλήθους υποσύνολα $A, B, \Gamma, \cdots$ συμπαγή ώστε το $A \cup B \cup \Gamma \cup \cdots$ να μην είναι συμπαγές.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 3 Λύση

Λύση (α) Σταθεροποιούμε κάποιο $i_0 \in I$. Κάθε $A_i,\ i \in I$ είναι κλειστό σύνολο (τα συμπαγή είναι κλειστά), άρα το $\cap_{i \in I} A_i$ είναι κλειστό.

Επίσης, $\cap_{i \in I} \subseteq A_{i_0}$ και το A_{i_0} είναι συμπαγές. Άρα το $\cap_{i \in I} A_i$ είναι συμπαγές.

(β) Έστω $\{U_i,\ i \in I\}$ μία ανοιχτή κάλυψη του $A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Έχουμε $A_1 \cup \cdots \cup A_n \subseteq \cup_{i \in I} U_i$, άρα και

$$A_j \subseteq \cup_{i \in I} U_i, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Δηλαδή τα U_i σχηματίζουν ανοιχτή κάλυψη για καθένα από τα A_j. Το A_j είναι συμπαγές άρα υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη: μπορούμε να βρούμε $U_1^{(j)}, \ldots, U_{m_j}^{(j)}$ από την κάλυψη ώστε $A_j \subseteq U_1^{(j)}, \ldots, U_{m_j}^{(j)}$ $j = 1, 2, \ldots, n$. Τότε,

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n \subseteq \left(U_1^{(1)}, \ldots, U_{m_1}^{(1)}\right) \cup \cdots \cup U_1^{(n)}, \ldots, U_{m_n}^{(n)}$$

δηλαδή βρήκαμε πεπερασμένη υποκάλυψη για το $A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Άρα το $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ είναι συμπαγές.
(γ) Θετουμε $A_n = \{n\}$ για $n \in \mathbb{N}$. Κάθε A_n είναι συμπαγές όμως το $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ δεν είναι συμπαγές αφού δεν είναι φραγμένο.

Άσκηση 3 Υπόδειξη

Άσκηση 4

Έστω συγκλίνουσα ακολουθία $\{x_n\}$, $x_n \to x$ στον $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε οτι το σύνολο $K = \{x, x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 4 Λύση

Λύση Έστω $\{A_i,\ i \in I\}$ μία ανοιχτή κάλυψη του K. Δηλαδή $K \subseteq \cup_{i \in I} A_i$. Υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $x \in A_{i_0}$. Το A_{i_0} είναι ανοιχτό, άρα το x είναι εσωτερικό σημείο του: υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $N_x(\varepsilon) \subseteq A_{i_0}$.

Η ακολουθία x_n συγκλίνει στο x άρα υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $x_n \in N_x(\varepsilon)$. Άρα

$$\{x\} \cup \{x_n \ : \ n \geq n_0\} \subseteq A_{i_0}.$$

Κάθε x_n για $n = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$ είναι στοιχείο του $K \subseteq \cup_{i \in I} A_i$, άρα υπάρχει $i_n \in I$ ώστε $x_n \in A_{i_n}$. Έπεται οτι $K \subseteq A_{i_0} \cup A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_{n_0-1}}$, δηλαδή υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη, άρα το K είναι συμπαγές.

Άσκηση 4 Υπόδειξη

Άσκηση 5

Έστω μετρικός χώρος (X, ϱ) και ακολουθία $\{K_n\}$ μη κενών και συμπαγών υποσυνόλων του X που είναι *εγκιβωτισμένα* δηλαδή: $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$. Αποδείξτε οτι η τομή τους είναι μη κενή. (Υπόδειξη: Θεωρείστε την ανοικτή κάλυψη του K_1 που αποτελείται από τα ${K_2}^c, {K_3}^c, \ldots$, αφού υποθέσετε οτι η τομή των $K_1, K_2, \ldots$ είναι κενή).

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 5 Λύση

Λύση Χρησιμοποιούμε την απαγωγή σε άτοπο. Έστω οτι $\cap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$. Τότε $K_1 \cap (K_2 \cap \cdots \cap K_n \cap \cdots) = \emptyset$, δηλαδή:

$$K_1 \subseteq K_2^c \cup \cdots \cup K_n^c \cup \cdots .$$

Κάθε K_n είναι συμπαγές άρα και κλειστό. Επομένως τα $K_2^c, \ldots, K_n^c, \ldots$ είναι ανοιχτά και αποτελούν κάλυψη του K_1. Αφού το K_1 είναι συμπαγές, υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Υπάρχουν δηλαδή $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ ώστε

$$K_1 \subseteq K_{n_1}^c \cup \cdots \cup K_{n_k}^c = (K_{n_1} \cap \cdots \cap K_{n_k})^c.$$

Άρα $K_1 \cap K_{n_1} \cap \cdots \cap K_{n_k} = \emptyset$. Όμως τα K_n είναι εγκιβωτισμένα, άρα

$$K_1 \supseteq K_{n_1} \supseteq \cdots \supseteq K_{n_k}.$$

Οπότε $K_1 \cap K_{n_1} \cap \cdots \cap K_{n_k} = K_{n_k} \neq \emptyset$, άτοπο.

Άσκηση 5 Υπόδειξη

Άσκηση 6

Έστω συμπαγές υποσύνολο A και κλειστό υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$, ώστε $A \cap B = \emptyset$. Αποδείξτε οτι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\varrho(x, y) \geq \delta$, $\forall\, x \in A$, $y \in B$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Θεωρείστε την συνάρτηση $\varrho_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$\varrho_B(x) = \inf_{y \in B} \varrho(x, y).$$

Ο περιορισμός της στο A είναι συνεχής και > 0. Άρα έχει θετικό ελάχιστο.

Άσκηση 6 Λύση

Λύση Θεωρούμε τη συνάρτηση $\rho_B : A \mapsto \mathbb{R}$ με $\rho_B(x) = \{\varrho(x, y) : \ y \in B\}$. Το B είναι κλειστό και τα A, B ξένα. Αν λοιπόν πάρουμε κάποιο $x \in A$ έχουμε $x \in B^c$ το οποίο είναι ανοιχτό. Άρα υπάρχει ε_x ώστε $N_x(\varepsilon_x) \subseteq B^c$. Τότε $\varrho(x, y) \geq \varepsilon_x$ για κάθε $y \in B$ δηλαδή

$$\rho_B(x) \geq \varepsilon_x > 0.$$

Άρα η ρ_B παίρνει γνήσια θετικές τιμές.

Η ρ_B είναι συνεχής αφού $|\rho_B(x)-\rho_B(x')| \leq \rho(x,x')$. Το A είναι συμπαγές, άρα η ρ_B παίρνει ελάχιστη τιμή. Υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $\rho_B(x) \geq \rho_B(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Θέτουμε $\delta = \rho_B(x_0) > 0$. Έστω $x \in A$, $y \in B$. Τότε,

$$\varrho(x,y) \geq \inf\{\varrho(x,y) \ : \ y \in B\} = \rho_B(x) \geq \rho_B(x_0) = \delta.$$

Άσκηση 6 Υπόδειξη

Άσκηση 7

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ και $f : A \to B$ η οποία είναι συνεχής στο A και αμφιμονοσήμαντη από το A στο B. Αν το A είναι συμπαγές τότε η αντίστροφη $f^{-1} : B \to A$ είναι συνεχής στο B.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 7 Λύση

Λύση Χρησιμοποιούμε απαγωγή στο άτοπο. Υποθέτουμε οτι η f^{-1} δεν είναι συνεχής σε κάποιο $b \in B$. Τότε υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και μία ακολουθία $\{b_k\}$ στο B ώστε

$$b_k \to b \qquad \text{αλλά} \qquad \rho\left(f^{-1}(b_k), f^{-1}(b)\right) \geq \varepsilon.$$

Θέτουμε $a_k = f^{-1}(b_k) \in A$. Το A είναι συμπαγές, άρα υπάρχει υποακολουθία $\{a_{p_k}\}$ της $\{a_k\}$ που συγκλίνει σε κάποιο $a \in A$. Από τη συνέχεια της f έχουμε $b_{p_k} = f(a_{p_k}) \to f(a)$. Όμως $b_k \to b$ άρα $b_{p_k} \to b$. Από τη μοναδικότητα του ορίου, $f(a) = b$ δηλαδή $a = f^{-1}(b)$.

Έχουμε $f^{-1}(b_{p_k}) = a_{p_k} \to a = f^{-1}(b)$. Αυτό είναι άτοπο αφού

$$\rho\left(f^{-1}(b_{p_k}), f^{-1}(b)\right) \geq \varepsilon$$

για κάθε p_k.

Άσκηση 7 Υπόδειξη

Κεφάλαιο 4

Σειρές πραγματικών αριθμών

Ορισμός 21 *Αν έχουμε μια ακολουθία $\{a_n\}$ στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε την ακολουθία $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots$, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \cdots$ Αν η $\{s_n\}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό s τότε γράφουμε $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ Χρησιμοποιούμε επίσης τις συντομεύσεις: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ και αν η $\{s_n\}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό s, $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Το σύμβολο $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ονομάζεται σειρά της a_k.*

Αν μια σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό και απαλείψουμε ένα πεπερασμένο πλήθος όρων της, τότε πάλι θα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Το ίδιο και αν αλλάξουμε ένα πεπερασμένο πλήθος όρων της.

Πρόταση 22
(α) *Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ τότε $a_k \to 0$*
(β) *Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $\forall\, \varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε*

$$|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k| < \varepsilon.$$

Μερικά παραδείγματα:

(α) Η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ όπου $x \in \mathbb{R}, (x^0 = 1)$ συγκλίνει αν και μόνο αν $|x| < 1$ τότε $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.
(β) Τηλεσκοπικές σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ όπου $a_k = b_{k+1} - b_k$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (b_k) συγκλίνει και μάλιστα ισχύει $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(b_{k+1} - b_k) = \lim b_k - b1$.

Θεώρημα 23 *(Κριτήριο Cauchy). Έστω η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Αυτή συγκλίνει αν και μόνο αν ισχύει το εξής: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon)\ \in \mathbb{N}$ ώστε $N \leq m < n \Longrightarrow |\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$. Με χρήση του κριτηρίου Cauchy μπορεί να δείξει κανείς ότι η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.*

Θεώρημα 24 *Έστω η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ με $a_k \geq 0\ ,\ k \in \mathbb{N}$ και $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η $\{s_n\}$ είναι άνω φραγμένη. Αν η $\{s_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$. Συνέπεια αυτού του θεωρήματος είναι ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ συγκλίνει. Μάλιστα $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.*

Πρόταση 25 *(Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy). Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ έχει όρους που φθίνουν προς το μηδέν τότε αυτή συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ συγκλίνει. Η πρόταση αυτή εύκολα δίνει ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\varrho}}\ ,\ \varrho \in \mathbb{R}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\varrho > 1$.*

Ορισμός 26 *Λέμε οτι μια σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως αν η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Λέμε οτι συγκλίνει υπό συνθήκη αν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.*

Θεώρημα 27 (Σύγκριση σειρών) *Έστω οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ με $b_k > 0\ (k \in \mathbb{N})$*

(α) Αν υπάρχει αριθμός M ώστε $|a_k| \leq M \cdot b_k\ ,\ k \in \mathbb{N}$, τότε αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, θα συγκλίνει απολύτως η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
(β) Αν η $\{\frac{a_k}{b_k}\}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, τότε αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει θα συγκλίνει απολύτως η $\sum_{k=1}^{\infty}\ a_k$.

Θεώρημα 28 *(Κριτήριο λόγου D' Alembert). Έστω η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ με μη μηδενικούς όρους.*

(α) Αν $\limsup |\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως
(β) Αν $\liminf |\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει
(γ) Αν $\liminf |\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq 1 \leq \limsup |\frac{a_{k+1}}{a_k}|$ τότε δεν υπάρχει συμπέρασμα.

Θεώρημα 29 *(Κριτήριο ρίζας του Cauchy). Έστω η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(α) Αν $\limsup \sqrt[k]{|a-k|} < 1$ τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως

(β) Αν $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ τότε η σειρά αποκλίνει

(γ) Αν $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ τότε δεν υπάρχει συμπέρασμα

Θεώρημα 30 *(Dirichlet) Έστω δυο ακολουθίες* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *με τις ιδιότητες*

(α) *Η* $\{b_n\}$ *φθίνει προς το μηδέν*

(β) *Η* $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *είναι φραγμένη:* $|s_n| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$.

Τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_n b_n$ *συγκλίνει. Συνήθως αυτό το θεώρημα χρησιμοποιείται στις εναλλάσουσες σειρές όπου* $a_n = (-1)^n$.

Άσκηση 1

Έξετάστε την σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \log k (\log \log k)^p}$ ανάλογα με την τιμή του $p \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Χρησιμοποιήστε το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy. Άσκηση 1 Λύση

Λύση Εφαρμόζουμε το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy: κοιτάμε δηλαδή αν συγκλίνει η σειρά:

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log(2^k)(\log\log 2^k)^p} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)k\,(\log\log 2)^p}.$$

Αρκεί να δούμε λοιπόν αν συγκλίνει η

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}.$$

Για αυτήν τώρα ξαναχρησιμοποιούμε το κριτήριο συμπύκνωσης, δηλαδή συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\log 2^k)^p}$$

η οποία συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

η οποία συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$. Το ίδιο λοιπόν ισχύει και για τη δοθείσα σειρά.

Άσκηση 1 Υπόδειξη

Άσκηση 2

Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου και ρίζας στις ακόλουθες σειρές και βρείτε για ποιές τιμές του x συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

(α) $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$
(β) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$
(γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 2 Λύση

Λύση (α) Αν $x = 0$ προφανώς συγκλίνει. Αν $x \neq 0$ με το κριτήριο του λόγου :

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{(k+1)^3 |x|^{k+1}}{k^3 |x|^k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^3 |x| \to |x|.$$

Αν $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει. Αν $|x| > 1$ αποκλίνει. Αν $x = \pm 1$ τότε $|a_k| = k^3 \to +\infty$ άρα η σειρά αποκλίνει. Δηλαδή η $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$ συγκλίνει απολύτως αν $|x| < 1$.

Με το κριτήριο ρίζας

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \left(\sqrt[k]{k}\right)^3 |x| \to |x|$$

και συμεχίζουμε όπως πρίν.

(β) Με το κριτήριο της ρίζας:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{2|x|}{\sqrt[k]{k!}} \to 0 < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει όποιο και αν είναι το $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Με το κριτήριο της ρίζας:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{2|x|}{\sqrt[k]{k^2}} \to 2|x|.$$

Αν $|x| < 1/2$ τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αν $|x| > 1/2$ τότε η σειρά αποκλίνει. Αν $x = 1/2$ προκύπτει η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ που συγκλίνει, ενώ αν $x = -1/2$ προκύπτει η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ που συγκλίνει απολύτως.

Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$ συγκλίνει αν $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

Άσκηση 2 Υπόδειξη

Άσκηση 3

5. Τι μπορείτε να πείτε για την σύγκλιση ή απόκλιση των σειρών:

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{logk}{k}$
(β) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^a}\ ,\ a \in \mathbb{R}$

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 3 Λύση

Λύση (α) Η $\frac{\log x}{x}$ έχει παράγωγο $\frac{1-\log x}{x^2}$, άρα είναι φθίνουσα στο $(e, +\infty)$. Οπότε η $\frac{\log k}{k}$ για $k \geq 3$ είναι φθίνουσα άρα η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{logk}{k}$ συγκλίνει αφού $\frac{\log k}{k} \searrow 0$.
(β) Αν $a \leq 0$ τότε $a_k = (-1)^k \frac{1}{k^a} \not\to 0$ άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^a}\ ,\ a \in \mathbb{R}$ συγκλίνει.

Άσκηση 3 Υπόδειξη

Άσκηση 4

Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές:

(α) $\sum_{k=2}^{\infty} (logk)^p$,
(ε) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k}\ ,\ 0 < q < p$
(στ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log(1+\frac{1}{k})}$
(ζ) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$
(θ) $\sum_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 4 Λύση

Λύση (α) Αν $p \leq 0$, τότε $(\log k)^p \not\to$, οπότε η σειρά αποκλίνει. Αν $p < 0$, πάλι $(\log k)^{-p} < \sqrt{k}$ για μεγάλα k οπότε $(\log k)^p > \frac{1}{\sqrt{k}}$ και αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ αποκλίνει το ίδιο θα ισχύει για την $\sum_{k=1}^{\infty} (\log k)^p$.

(β) Αν $0 < p < 1$, τότε εφαρμόζουμε κριτήριο του λόγου: $\frac{p^{k+1}(k+1)^p}{p^k k^p} < p(1+\frac{1}{k})^p \to p < 1$, άρα η σειρά συγκλίνει. Αν $p \geq 1$, τότε $p^k k^p \not\to 0$, άρα η σειρά αποκλίνει.

(γ) Είναι $k^p - k^q < k^p \Rightarrow p \leq 1$ τότε η $\sum \frac{1}{k^p}$ αποκλίνει άρα και η $\sum \frac{1}{k^p - k^q}$. Αν $p > 1$, τότε $k^p - k^q > \frac{1}{2}k^p$ για μεγάλα k, δηλαδή $\frac{1}{k^p - k^q} < 2\frac{1}{k^p}$ και αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει, το ίδιο ισχύει για την $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q}$ (κριτήριο σύγκρισης).

(δ) Έχουμε $k^{1+\frac{1}{k}} = k\sqrt{k}k < M_k$ (αφού $\lim_{k\to\infty} \sqrt{k}k = 1$, $\sqrt{k}k$ είναι φραγμένη). Άρα $\frac{1}{k^{1+1}k} > \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{k}$ και αφού η $\sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει το ίδιο ισχύει για την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+4k}}$.

(ε) Είναι $p^k - q^k < p^k \Rightarrow \frac{1}{p^1 - q^k} > \frac{1}{p^k}$. Αν $p \leq 1$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k}$ αποκλίνει, άρα και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k}$. Έστω $p > 1$. Είναι $p^k - q^k > \frac{1}{2}p^k$ αν $p^k > 2q^k$ δηλαδή $k \log\left(\frac{p}{q}\right) > \log 2$. Δηλαδή τελικά $\frac{1}{p^k - q^k} < 2\frac{1}{p^k}$. Όμως, η $\sum \left(\frac{1}{p}\right)^k$ συγκλίνει, άρα και η $\sum \frac{1}{p^k - q^k}$ (κριτήριο σύγκρισης).

(στ) Είναι $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = 1$. Άρα, $\alpha_k \not\to 0$ και η σειρά αποκλίνει (πάρτε $x = \frac{1}{k}$).

(ζ) Είναι $\log k > e^2$ αν $k > e^{e^2}$. Άρα $(\log k)^{\log k} > e^{2\log k} = k^2$ για μεγάλα k. Αφού η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$.

(η) Η ακολουθία είναι φθίνουσα με θετικούς όρους, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy: Θεωρούμε την $\beta_k = \frac{2^k}{(\log\log 2^k)^{\log\log 2^k}} = \frac{2^k}{(\log(klog2))^{\log(k\log 2)}}$.

Έχουμε: $(\log(k\log 2))^{\log(k\log 2)} = e^{\log(k\log 2)\log\log(k\log 2)} < e^{(\log(k\log 2))^2} < 2^k$. για μεγάλα k (γιατί;) Άρα, $\beta_k \not\to 0$ οπότε η $\sum \beta_k$ αποκλίνει και το ίδιο ισχύει για την (η).

(θ) Έχουμε $\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}$. Άρα, η

$$k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

συγκρίνεται με την $k^{p-\frac{3}{2}}$. Δηλαδή η $\sum_{k=1}^{\infty} k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ συγκλίνει αν $p-\frac{3}{2}<-1 \Leftrightarrow p<\frac{1}{2}$.

(ι) Είναι:

$$\begin{aligned}
\sqrt{k+1} &- 2\sqrt{k}+\sqrt{k-1}=\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)-\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}\\
&= \frac{\sqrt{k-1}-\sqrt{k+1}}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)}\\
&= \frac{-2}{\left(\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)}.
\end{aligned}$$

Άρα, η $\sum_{k=1}^{\infty} k^p\left(\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)$ συγκρίνεται με την

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-\frac{3}{2}}.$$

Δηλαδή συγκλίνει αν και μόνο αν $p<\frac{1}{2}$.

Άσκηση 4 Υπόδειξη

Άσκηση 5

Έστω οτι $a_n>0$ $(n\in\mathbb{N})$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε οι

$$\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2\ ,\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{1+a_k}\ ,\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{{a_k}^2}{1+{a_k}^2}$$

συγκλίνουν επίσης.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Χρησιμοποιήστε το θεώρημα σύγκρισης.

Άσκηση 5 Λύση

Λύση Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει έχουμε οτι $a_k \to 0$. Άρα υπάρχει k_0 ώστε για κάθε $k \geq k_0$ να ισχύει $0 < a_k^2 < a_k < 1$. Η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, οπότε από το κριτήριο σύγκρισης συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2$.

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $0 < \frac{a_k}{1+a_k} < a_k$, και αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει έπεται οτι και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει.

Το ίδιο ισχύει και με την τρίτη σειρά αφού $0 < \frac{a_k^2}{1+a_k^2} < a_k^2$ και έχουμε δει οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

Άσκηση 5 Υπόδειξη

Άσκηση 6

Έστω οτι $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$. Αποδείξτε οτι αν η $\{a_k\}$ είναι και φθίνουσα τότε αληθεύει και το αντίστροφο.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Άσκηση 6 Λύση

Λύση Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, συγκλίνει και η $\sum_{k=2}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}$. Άρα συγκλίνει και το άθροισμα τους: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + a_{k+1})$. Από την άλλη μεριά $0 < \sqrt{a_k a_{k+1}} < \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, οπότε από το κριτήριο σύγκρισης η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει.

Έστω τώρα οτι η $\{a_k\}$ είναι φθίνουσα και οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει. Αφού $a_k \geq a_{k+1}$, έχουμε $0 < \sqrt{a_{k+1} a_{k+1}} \leq \sqrt{a_k a_{k+1}}$ δηλαδή $0 < a_{k+1} \leq \sqrt{a_k a_{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$.

Από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} = \sum_{k=2}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Άρα και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Άσκηση 6 Υπόδειξη

Άσκηση 7

Έστω οτι $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Άσκηση 7 Λύση

Λύση Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ έχει θετικούς όρους να δείξουμε οτι τα μερικά της αθροίσματα είναι ομοιόμορφα φραγμένα. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Από την ανισότητα Cauchy - Schwartz παίρνουμε

$$\begin{aligned} s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{\sqrt{a_k}}{k} &\leq \left(\sum_{k=1}^{m} (\sqrt{a_k})^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{M_1}\sqrt{M_2} \end{aligned}$$

όπου $M_1 = \sum_{k=1}^{m} a_k$, $M_2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{k^2}$. Έχουμε λοιπόν $s_m \leq M$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, όπου $M = \sqrt{M-1}\sqrt{M_2}$. Έπεται οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

Άσκηση 7 Υπόδειξη

Άσκηση 8

Έστω $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

(α) Αποδείξτε οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ αποκλίνει.
(β) Αποδείξτε οτι για $1 \leq m < n$: $\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} \geq 1 - \frac{s_m}{s_n}$
(γ) Αποδείξτε οτι $\frac{a_n}{{s_n}^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ και συμπεράνετε οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{{s_k}^2}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη (α) σύγκριση
(β) η $\{s_n\}$ είναι αύξουσα – κριτήριο Cauchy και $s_n \to +\infty$.
(γ) $a_n = s_n - s_{n-1}$

Άσκηση 8 Λύση

Λύση (α) Έστω οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει. Τότε, $\frac{a_k}{1+a_k} \to 0 \Rightarrow \frac{1}{1+a_k} = 1 - \frac{1}{1+a_k} \to 1 \Rightarrow 1+a_k \to 1 \Rightarrow a_k \to 0$. Άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < a_k < \frac{1}{2}$ αν $k \geq k_0$. Έπεται οτι για $k \geq k_0$, $1 + a_k < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+a_k} > \frac{2}{3} \Rightarrow a_k < \frac{3}{2}\frac{a_k}{1+a_k}$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, άτοπο. Άρα, η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ αποκλίνει.

(β) Αφού $a_k > 0,\ k \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $\{s_n\}$ των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα: $s_{m+1} < \cdots < s_n$. Άρα, $\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} > \frac{a_{m+1}}{s_n} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} = \frac{a_{m+1}+\cdots+a_n}{s_n} < \frac{s_n - s_m}{s_n} = 1 - \frac{s_m}{s_n}$.

Ας υποθέσουμε οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο του Cauchy, για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n > m \geq n_0$ τότε $\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} < \frac{1}{2}$ δηλαδή $1 - \frac{s_m}{s_n} < \frac{1}{2} \Rightarrow s_m > \frac{1}{2} s_n$. Κρατάμε κάποιο $m \geq n_0$ σταθερό και αφήνουμε το n να πάει στο άπειρο. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει, έχουμε $s_n \to +\infty$ και $s_m > \frac{1}{2} s_n \; \forall n > m \Rightarrow s_m = +\infty$. Άτοπο. Άρα, η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ αποκλίνει.

(γ) Είναι $s_{n-1} < s_n \Rightarrow \frac{1}{s_n^2} < \frac{1}{s_n s_{n-1}} \Rightarrow \frac{a_n}{s_n^2} < \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n^2} < \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$. Τότε, για το μερικό άθροισμα t_n της $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ έχουμε:

$$t_n = \frac{a_1}{s_1^2} + \frac{a_2}{s_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{s_n^2}$$

$$< \frac{1}{s_1} + \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right) + \left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}\right)$$

$$= \frac{2}{s_1} - \frac{1}{s_n} < \frac{2}{s_1}$$

Αφού η t_n είναι φραγμένη, η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

Άσκηση 8 Υπόδειξη

Άσκηση 9

Αν $\{x_n\}$ είναι ακολουθία θετικών αριθμών αποδείξτε οτι

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Συμπεράνετε ότι όταν το κριτήριο λόγου δείχνει σύγκλιση σειράς το ίδιο κάνει και το κριτήριο ρίζας και όταν το κριτήριο ρίζας δεν δείχνει τίποτε το ίδιο κάνει και το κριτήριο λόγου.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Έστω $x > \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} < x$ για $n \geq N$. Άρα

$$\frac{a_{n+1}}{a_N} = \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{an+1}{a_n} < x^{n-N+1}.$$

Οπότε $\sqrt[n+1]{a_{n+1}} < x \cdot x^{-\frac{N}{n+1}} \sqrt[n+1]{a_N}$ και $\limsup \sqrt[n+1]{a_{n+1}} \leq x$.

Άσκηση 9 Λύση

Λύση Έστω $x > \limsup \frac{a_{k+1}}{a_k}$. Πεπερασμενοι το πλήθος όροι της $\{\frac{a_{k+1}}{a_k}\}$ μπορούν να ξεπεράσουν το x, υπάρχει δηλαδή $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $k \geq k_0$ τότε $a_{k+1} < xa_k$. Δηλαδή αν $k > k_0$ τότε $a_k < xa_{k-1} < \cdots < x^{k-k_0}a_{k_0} = \frac{a_{k_0}}{x^{k_0}}x^k$. Έπεται οτι,

$$\sqrt[k]{a_k} < \sqrt[k]{\frac{a_{k_0}}{x^{k_0}}}x \to x$$

Άρα, $\limsup \sqrt[k]{a_k} < x$ και αφού το x μπορεί να επιλεγεί οσοδήποτε κοντά στο $\limsup \frac{a_{k+1}}{a_k}$, παίρνουμε

$$\limsup \sqrt[k]{a_k} \leq \limsup \ \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

.

Η μεσαία ανισότητα είναι προφανής, ενώ η αριστερή αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο. Ας υποθέσουμε οτι το κριτήριο του λόγου δείχνει σύγκλιση σειράς τότε, $\limsup \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ οπότε $\limsup \sqrt[k]{a_k} < 1$, άρα και το κριτήριο της ρίζας δείχνει σύγκλιση σειράς. Αν το κριτήριο της ρίζας δεν δείχνει τίποτε, τότε $\limsup \sqrt[k]{a_k} = 1 \Rightarrow \limsup \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, άρα ούτε το κριτήριο του λόγου δείχνει κάτι (είναι και $\liminf \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \liminf \sqrt[k]{a_k} \leq 1$).

Άσκηση 9 Υπόδειξη

Άσκηση 10

Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε και η $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k$ αποκλίνει.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 10 Λύση

Λύση Απαγωγή σε άτοπο: Υποθέτουμε οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k$ συγκλίνει και θέτουμε $\beta_k = ka_k$. Θα δείξουμε οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k}$ συγκλίνει, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Cauchy: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, αν $m < n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_{m+1}}{m+1} + \frac{\beta_{m+2}}{m+2} &+ \cdots + \frac{\beta_n}{n} = \beta_{m+1}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) \\
&+ (\beta_{m+1} + \beta_{m+2})\left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3}\right) \\
&+ \cdots + (\beta_{m+1} + \cdots + \beta_{n-1})\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&+ (\beta_{m+1} + \cdots + \beta_n)\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Αφού η $\sum \beta_k$ συγκλίνει, υπάρχει $n, \in \mathbb{N}$ ώστε αν $k_2 > k_1 \geq n_0$ τότε $|\beta_{k_1+1} + \cdots + \beta_{k_2}| < \varepsilon$. Τότε, αν $n > m \geq n_0$ παίρνουμε $|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\beta_k}{k}| \leq |\beta_{m+1}| \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + |\beta_{m+1} + \beta_{m+2}| \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3}\right) + \cdots + |\beta_{m+1} + \cdots + \beta_n| \frac{1}{n} < \varepsilon \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \varepsilon \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3}\right) + \cdots + \varepsilon \frac{1}{n} = \varepsilon \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n}\right) < \varepsilon$.

Από το κριτήριο Cauchy, η $\sum_{a_k} = \sum \frac{\beta_k}{k}$ συγκλίνει. Άτοπο. Η απόδειξη δίνει κάτι πιο γενικό: Αν $\sum_{\beta_k}$ συκλίνει, και $\gamma_k \geq 0$ μονότονη και φραγμένη, τότε η $\sum \beta_k \gamma_k$ συγκλίνει.

Άσκηση 10 Υπόδειξη

Κεφάλαιο 5

Ακολουθίες συναρτήσεων

Έστω συνάρτηση f και ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, όπου όλες οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε ένα μη κενό σύνολο A και παίρνουν τιμές $f : A \to \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 31 *Λέμε οτι η $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο στην f στο A και γράφουμε $f_n \longrightarrow f$ ή $f_n \overset{\kappa.\sigma}{\longrightarrow}$ στο A αν για κάθε $t \in A$ η ακολουθία των αριθμών $\{f_n(t)\}$ συγκλίνει στον αριθμό $f(t)$, δηλαδή $f_n(t) \to f(t)$ για κάθε $t \in A$.*

Η σύγκλιση συναρτήσεων κατά τον προηγούμενο ορισμό *δεν* διατηρεί διάφορες ιδιότητες. Για παράδειγμα αν οι f_n είναι συνεχείς και $f_n \to f$ στο A δεν μπορούμε να συμπεράνουμε οτι και η f είναι συνεχής. Για παράδειγμα έστω $f_n : [01] \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = t^n$.

Φανερά οι f_n είναι όλες συνεχείς όμως $f_n \to f$ με

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

η οποία είναι ασυνεχής. Ομοίως αν $f_n \to f$ *δεν* συνεπάγεται ούτε οτι $f_n' \to f'$ ούτε οτι $\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$. Στο προηγούμενο παράδειγμα οι f_n' υπάρχουν ενώ η f δεν είναι καν παραγωγίσιμη ή η $f_n(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$ με πεδίο ορισμού το $[0, 2\pi]$ συγκλίνει στο μηδέν (αφού $|f_n(t)| \le \frac{1}{n}$) αλλά $f_n'(t) = \cos(nt)$ δεν συγκλίνει στο $0 = 0'$. Τέλος αν $f_n : [01] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)t-1}, & \frac{1}{n} \le t \le 1 \\ n^2 t, & 0 \le t \le \frac{1}{n} \end{cases}$$

τότε $f_n \to 0$ αλλά $\int_0^1 f_n(t)dt = 1$ δεν συγκλίνει στο $0 = \int_0^1 0dt$.

Ορισμός 32 *Έστω μια ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n\}$ *και* f , *με* $f_n : A \to \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. *Λέμε οτι η* $\{f_n\}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην* f *στο* A *και συμβολίζουμε* $f_n \rightrightarrows f$ *ή* $f_n \xrightarrow{o.\mu.} f$ *στο* A *αν* $\varrho(f_n, f) \to 0$ *δηλαδή* $\sup_{t\in A} |f_n(t) - f(t)| \to 0$.

Ορισμός 33 *Μια ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n\}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ *την λέμε ομοιόμορφα φραγμένη αν υπάρχει* M *που να είναι κοινό φράγμα για όλες τις* f_n. *Δηλαδή* $|f_n(t)| \leq M$ *για κάθε* $t \in A$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 34 *Έστω* A *υποσύνολο ενός μετρικού χώρου* (X, ϱ) *και* $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f : A \to \mathbb{R}$ *και* $t_0 \in A$. *Αν* $f_n \rightrightarrows f$ *στο* A *και κάθε* f_n *είναι συνεχής στο* t_0, *τότε και η* f *είναι συνεχής στο* t_0. *Άρα, αν κάθε* f_n *είναι συνεχής στο* A, *τότε και η* f *είναι συνεχής στο* A.

Θεώρημα 35 *Έστω οτι κάθε* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$ *και οτι* $f_n \rightrightarrows f$ *στο* $[a, b]$. *Τότε η* f *είναι Reimann-ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$ *και* $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

Θεώρημα 36 *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Έστω οτι κάθε* f_n *είναι παραγωγίσιμη στο* $[a, b]$ *και η παράγωγος* f_n' *είναι συνεχής στο* $[a, b]$. *Αν*

(α) $f_n' \rightrightarrows g$ *στο* $[a, b]$
(β) *η* $\{f_n(t_0)\}$ *συγκλίνει για τουλάχιστον ένα* $t_0 \in [a, b]$

τότε η $\{f_n\}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια* f *στο* $[a, b]$ *η οποία είναι παραγωγίσιμη στο* $[a, b]$ *και* $f' = g$.

Θεώρημα 37 (Κριτήριο Cauchy) . *Έστω* $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Η* $\{f_n\}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο* A *αν και μόνο αν: για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *ώστε* $n, m \geq n_0 \Rightarrow \varrho(f_n, f_m) \leq \varepsilon$, *δηλαδή* $|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$, $\forall\, t \in A$.

Άσκηση 1

Έστω $f_n(t) = \frac{1}{1+nt}$, $t \in [0, 1]$. Αποδείξτε οτι η $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση f στο $[0, 1]$. Ποιά είναι η f;

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 1 Λύση

Λύση Για $t = 0$ έχουμε $f_n(0) = 1 \to 1$. Αν $t \in (0,1]$, τότε $f_n(t) = \frac{1}{1+nt} \to 0$. Άρα, $f_n \overset{\text{κ.σ}}{\longrightarrow} f$ όπου

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t = 0 \\ 0, & \text{αν } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση. Αφού η f δεν είναι συνεχής, η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη.

Απ' ευθείας επιχείρημα: αν ήταν, τότε για $t = 1/3$ θα υπήρχε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και $0 < t \leq 1$ να ισχύει: $\left| \frac{1}{1+nt} - 0 \right| < 1/3$. Δηλαδή $\frac{1}{1+nt} < 1/3$. Όμως για $t = 1/n$ έχουμε

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

το οποίο είναι άτοπο. Άσκηση 1 Υπόδειξη

Άσκηση 2

Έστω $f_n(t) = \frac{t^{2n}}{1+t^{2n}}$, $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε οτι η $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια f στο $\mathbb{R}$. Ποιά είναι η f;

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Διακρίνετε τις περιπτώσεις $|t| > 1$, $|t| < 1$, $|t| = 1$ Άσκηση 2 Λύση

Λύση Αν $|t| < 1$ τότε $t^{2n} \to 0$ και $f_n(t) \to \frac{0}{1+0} = 0$.

Αν $|t| = 1$ τότε $f_n(t) = \frac{1}{1+1} \to \frac{1}{2}$

Αν $|t| > 1$ τότε $f_n(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^{2n}+1} \to \frac{1}{0+1} = 1$

Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ}}{\longrightarrow} f$ όπου

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } |t| < 1 \\ 1/2, & \text{αν } |t| = 1 \\ 1, & \text{αν } |t| > 1. \end{cases}$$

Αφού κάθε f_n είναι συνεχής ενώ η f όχι, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Άσκηση 2 Υπόδειξη

Άσκηση 3

Έστω $f_n(t) = n^p t(1-t^2)^n$, $t \in [0,1]$ p είναι παράμετρος στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε οτι, για κάθε $p \in \mathbb{R}$, η$\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f στο $[0,1]$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιές τιμές του p ισχύει οτι $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$;

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Παρατηρήστε οτι $n^p a^n \to 0$ για $0 \leq a < 1$, $p > 0$

Άσκηση 3 Λύση

Λύση Έχουμε $f_n(0) = 0 \to 0$.

Αν $0 < t \leq 1$, τότε $0 \leq 1 - t^2 < 1$, άρα $n^p t(1-t^2)^n \to 0$ (δείξτε οτι $\frac{n^p}{a^n} \to 0$, αν $a > 1$). Άρα, όποια και αν είναι η τιμή της παραμέτρου p, έχουμε $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ}} f$, όπου f η μηδενική συνάρτηση.

Για να δούμε για ποιές τιμές του p η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, βρίσκουμε τη μέγιστη τιμή της f_n:

$$\begin{aligned} f_n'(t) &= n^p(1-t^2)^n - n^p t(1-t^2)^{n-1}(2t) \\ &= n^p(1-t^2)^{n-1}[1-t^2-2nt^2] \\ &= n^p(1-t^2)^{n-1}[1-(2n+1)t^2] \end{aligned}$$

Άρα, η f_n έχει μέγιστο στο $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, ίσο με

$$\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n.$$

Αν $p < 1/2$, τότε $0 \leq f_n(t) < \frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \to 0$. Άρα $f_n \rightrightarrows 0$.

Αν $p \geq 1/2$, τότε

$$\max_{t\in[0,1]} f_n(t) \geq \frac{n^p}{\sqrt{2n+1}}\frac{1}{\sqrt{e}}$$

που τείνει στο άπειρο αν $p > 1/2$ ενώ είναι μεγαλύτερο ή ίσο με $1/\sqrt{2e}$ αν $p = 1/2$.

Και στις δύο περιπτώσεις η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της f_n:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 n^p t(1-t^2)^n\,dt &\overset{y=1-t^2}{=} \int_1^0 n^p y^n \left(-\frac{dy}{2}\right)\\
&= \frac{n^p}{2}\int_0^1 y^n\,dy\\
&= \frac{n^p}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

Έχουμε οτι $\frac{n^p}{2(n+1)} \to 0$ αν και μόνο αν $p<1$. Άρα,

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt \to \int_0^1 f(t)\,dt$$

όταν $p<1$.

Άσκηση 3 Υπόδειξη

Άσκηση 4

Έστω $f_n(t) = \frac{t}{1+nt^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε οτι υπάρχει f ώστε $f_n \rightrightarrows f$ στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε οτι $f_n'(t) \to f'(t)$ αν $t \neq 0$, αλλά $f_n'(0)$ δεν συγκλίνει στο $f'(0)$. Για ποιά διαστήματα $[a,b]$ ισχύει οτι $f_n' \rightrightarrows f'$ στο $[a,b]$;

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 4 Λύση

Λύση Αν $t=0$, τότε $f_n(0)=0\to 0$. Αν $t\neq 0$, τότε $f_n(t)\to 0$ (λόγω του n στο παρονομαστή). Για να δείξουμε οτι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε οτι

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)| \to 0$$

καθώς $n\to\infty$. Εξετάζουμε την f_n στο $(0,+\infty)$:

$$f_n'(t) = \frac{1+nt^2-2nt^2}{(1+nt^2)^2} = \frac{1-nt^2}{(1+nt^2)^2}$$

Δηλαδή, η μέγιστη τιμή της f_n στο $(0,+\infty)$ είναι:

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Αφού η f_n είναι περιττή, έχουμε $\sup_{t\in\mathbb{R}}|f_n(t)| = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$. Άρα, $f_n \overset{\text{ο.μ.}}{\to} 0$.

Αν $t \neq 0$, τότε $f_n'(t) = \frac{1-nt^2}{1+2nt^2+n^2t^4} = \frac{n}{n^2}\frac{\frac{1}{n}-t^2}{\frac{1}{n^2}+\frac{2t^2}{n}+t^4} \to (-\frac{1}{t^2}) = 0 = f'(t)$.
Αν $t = 0$, $f_n'(0) = 1 \not\to f'(0)$.

Έστω $[\alpha, b]$ διάστημα που δεν περιέχει το 0. Έχουμε:

$$|f_n'(t)| = |\frac{1-nt^2}{(1+nt^2)^2}| \leq \frac{1+nt^2}{(1+nt^2)^2} = \frac{1}{1+nt^2} \leq \frac{1}{n}\frac{1}{\min\{\alpha^2, b^2\}}$$

δηλαδή $\max_{t\in[\alpha,b]}|f_n'(t)| \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Άρα,

$f_n' \overset{\text{ο.μ.}}{rightarrow} f' \equiv 0$ στο $[\alpha, b]$.

Αν το $0 \in [\alpha, b]$ τότε $f_n' \overset{\text{κ.σ.}}{\not\to} 0$ (αφού $f_n'(0) \to 1$),

άρα $f_n' \overset{\text{ο.μ.}}{\not\to} 0$ στο $[\alpha, b]$.

Άσκηση 4 Υπόδειξη

Άσκηση 5

Έστω $f_n(t) = \frac{1}{n}e^{-n^2t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε οτι $f_n \rightrightarrows 0$ στο $\mathbb{R}$ και $f_n' \to 0$ στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε οτι f_n' δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0 σε οποιοδήποτε διάστημα περιέχει το 0, ενώ $f_n' \to 0$ σε οποιοδήποτε *κλειστό* διάστημα *δεν περιέχει το* 0.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 5 Λύση

Λύση Έχουμε $f_n(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}$. Παραγωγίζοντας, παίρνουμε

$$f_n'(t) = \frac{-2n^2t}{n}e^{-n^2t^2}$$

δηλαδή $f_n' > 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f_n' < 0$ στο $(0, +\infty)$. Άρα,

$$\max_{t\in\mathbb{R}} f_n(t) = f_n(0) = \frac{1}{n}.$$

Έπεται οτι

$$p(f_n, 0) = \sup_{t\in\mathbb{R}}|f_n(t) - 0| = \sup_{t\in\mathbb{R}} f_n(t) = \frac{1}{n} \to 0.$$

Άρα, $f_n \overset{\text{ο.μ.}}{\to} 0$. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Είναι $|f_n'(t)| = 2|t|ne^{-n^2t^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ ($e^{n^2t^2} > n^2t^2 \Rightarrow ne^{-n^2t^2} < \frac{1}{nt^2} \to 0$ αν $t \neq 0$, και $f_n'(0) - 0 \overset{n\to\infty}{\to} 0$). Άρα, $f_n' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ του $\mathbb{R}$.

Αν $[\alpha, b]$ είναι ένα κλειστό διάστημα που δεν περιέχει στο 0, τότε π.χ. αν $0 < \alpha < \beta$ έχουμε $f_n'(t)| = 2|t|ne^{-n^2t^2} \leq 2bne^{-n^2\alpha^2}$ $\forall\ t \in [\alpha, b]$ και αφού $ne^{-n^2\alpha^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ έπεται οτι $f_n' \overset{\text{ο.μ.}}{\to}$ στο $[\alpha, b]$.

Άσκηση 5 Υπόδειξη

Κεφάλαιο 6

Θεώρημα Weierstrass

Θεώρημα 38 (Weierstrass) . *Αν* $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $[\alpha, b]$ *τότε* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ *πολυώνυμο* P *ώστε* $|f(t) - P(t)| \leq \varepsilon$ *για κάθε* $t \in [\alpha, b]$.

Θεώρημα 39 (Weierstrass) . *Αν* $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $[\alpha, b]$ *τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων* $\{P_n\}$ *η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην* f *στο* $[\alpha, b]$.

Άσκηση 1

Έστω συνεχής $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Αποδείξτε οτι $f = 0$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 1 Λύση

Λύση Η f έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν $P : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι οποιοδήποτε πολυώνυμο, τότε $\int_0^1 f(t)P(t)dt = 0$. Πράγματι, αν $P(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$ τότε από την υπόθεση

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)P(t)dt &= \int_0^1 f(t)(\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n)dt \\ &= \alpha_0 \int_0^1 f(t)t^0 dt + \alpha_1 \int_0^1 f(t)t^1 d + \cdots + \alpha_n \int_0^1 f(t)t^n dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει πολυώνυμο $P : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $|f(t) - P(t)| <$

ε για κάθε $t \in [0,1]$. Γράφουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(t)dt &= \int_0^1 f(t)\{P(t)+f(t)-P(t)\}dt \\ &= \int_0^1 f(t)P(t)dt + \int_0^1 f(t)(f(t)-P(t)dt \\ &\leq \int_0^1 |f(t)|\,|f(t)-P(t)|dt \leq \varepsilon \int_0^1 |f(t)|dt\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται οτι $\int_0^1 f^2(t)dt = 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παίρνουμε $f = 0$ (γιατί ;)

Άσκηση 1 Υπόδειξη

Άσκηση 2

Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[1,+\infty)$ ώστε το $\lim_{x\to\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε οτι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συνάρτηση της μορφής $Q(x) =$ πολυώνυμο του $\frac{1}{x}$ ώστε $|f(x) - Q(x)| \leq \varepsilon$ για κάθε $x \geq 1$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 2 Λύση

Λύση Ορίζουμε $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ αν $0 < t \leq 1$ και $g(0) = \lim_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (γιατί ;), οπότε από το Θεώρημα του Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο $P : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$|g(t) - P(t)| \leq \varepsilon \;,\; t \in [0,1]$$

Θέτουμε $Q(x) = P\left(\frac{1}{x}\right)\;,\; x \geq 1$. Τότε

$$|f(x) - Q(x)| = |\underbrace{g\left(\frac{1}{x}\right) - P\left(\frac{1}{x}\right)}_{t\in(0,1]}| \leq \varepsilon \;,\; x \geq 1$$

Άσκηση 2 Υπόδειξη

Άσκηση 3

Έστω $f : [0,+\infty) \to R$ συνεχής στο $[0,+\infty)$ ώστε το $\lim_{x\to\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε οτι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συνάρτηση της μορφής $Q(x) =$πολυώνυμο του e^{-x} ώστε $|f(x) - Q(x)| \leq \varepsilon$ για κάθε $x \geq 0$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 3 Λύση

Λύση Ορίζουμε $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(t) = f\left(ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)$, $0 < t \leq$ και $g(0) = \lim_{t\to 0^+} f\left(ln\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (γιατί ;), οπότε από το Θεώρημα Weierstrass αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $P : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$|g(t) - P(t)| \leq \varepsilon\ ,\ t \in [0,1].$$

Θέτουμε $Q(x) = P(e^{-x})$, $x \geq 0$. Τότε

$$|f(x) - Q(x)| = |\underbrace{g(e^{-x}) - P(e^{-x})}_{t\in(0,1]}| \leq \varepsilon\ ,\ x \geq 0.$$

Άσκηση 3 Υπόδειξη

Κεφάλαιο 7

Σειρές συναρτήσεων

Ορισμός 40 *Έστω ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $\{f_n\}$ ορισμένων σε μη κενό υποσύνολο A, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το άρθροισμα s_n των πρώτων n από αυτές:*

$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n \ : \ A \to \mathbb{R}$, δηλαδή

$s_n(t) = f_1(\epsilon) + f_2(t) + \cdots + f_n(t), \ t \in A$

Αν υπάρχει συνάρτηση $s : A \to \mathbb{R}$ ώστε $s_n \to s$ στο A, τότε λέμε οτι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$συγκλίνει κατά σημείο στην s στο A και γράφουμε $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\kappa.\sigma}{=}\cdot$ s στο A. Αν όμως $s_n \rightrightarrows s$ τότε λέμε οτι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην s στο A και γράφουμε $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{o.\mu.}{=}$ στο A.

Επομένως η σύγκλιση σειρών συναρτήσεων ανάγεται σε σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων.

Πρόταση 41 *Αν $\sum_{k=1}^{\infty} f_n \overset{o.\mu.}{=} s$ στο A, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma}{=}\cdot$ s στο A.*

Πρόταση 42 (Κριτήριο Cauchy) *$\sum_{k=1}^{\infty} f_n \overset{o.\mu.}{=} s$ στο A αν και μόνο αν ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: $n_0 \leq m < n \ \Rightarrow$ $|f_{m+1}(t) + \cdots + f_n(t)| \ \varepsilon \ \forall \ t \in A$.*

Θεώρημα 43 (Κριτήριο Weierstrass) *Αν $\sup_{t \in A} |f_n(t)| \ \leq \ M_n$ (δηλαδή το M_n είναι άνω φράγμα της $|f_n|$) και η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.*

Η οριακή συνάρτηση μιας ομοιόμορφα συγκλίνουσας σειράς συναρτήσεων διατηρεί διάφορες ιδιότητες της ακολουθίας:

Θεώρημα 44 . *Έστω μετρικός χώρος (X, r) και $A \subseteq X$. Ακόμη έστω $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{o.\mu.}{=}$ s στο A. Πιο γενικά, αν όλες οι f_n είναι συνεχείς σε κάποιο $t_0 \ \in \ A$ τότε και η s είναι συνεχής στο t_0.*

Θεώρημα 45 *Έστω* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{o.\mu.}{=} s$ *στο* $[a,b]$ *και οτι όλες οι* f_n *είναι* $R-$*ολοκληρώσιμες στο* $[a,b]$*. Τότε η* s *είναι επίσης* $R-$*ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ *και* $\int_a^b s = \sum_{k=1}^{\infty}(\int_a^b f_k)$*.*

Θεώρημα 46 *. Έστω* $f_k : [\alpha, b] \to \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$*, παραγωγίσιμη στο* $[\alpha, b]$ *και με* f_k' *συνεχή στο* $[\alpha, b]$*. Αν*
(α) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k' \overset{o.\mu.}{=} g$ *στο* $[a,b]$ *και*
(β) *η* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t_0)$ *συγκλίνει για κάποιο* $t_o \in [a,b]$ *τότε η* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση* s *στο* $[a,b]$*, η* s *είναι παραγωγίσιμη στο* $[a,b]$ *και* $s' = g$*.*

7.1 Δυναμοσειρές

Ορισμός 47 *Αν* $\{a_k\}$ *είναι μια οποιαδήποτε ακολουθία στο* $\mathbb{R}$*, τότε τη σειρά* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *την ονομάζουμε δυναμοσειρά με συντελεστές* a_k*. Έστω*

$$\alpha = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Τότε $0 \leq \alpha \leq +\infty$*.*

Ορισμός 48 *Τον αριθμό* $R = \frac{1}{\alpha}$ *τον ονομάζουμε ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Δεχόμαστε* $\frac{1}{0} = +\infty,\ \frac{1}{+\infty} = 0$*. Άρα* $0 \leq R \leq +\infty$*. Αυτή την ονομασία δικαιολογεί το ακόλουθο:*

Θεώρημα 49 *(α)* *Αν* $t \in (-R, R)$ *η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο* t*.*
(β) *Αν* $t \notin [-R, R]$ *η δυναμοσειρά αποκλίνει στο* t*.*
(γ) *Για* $t = R$ *δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.*
(δ) *Η* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα* $[a,b]$ *το οποίο περιέχεται στο* $(-R, R)$*. Το διάστημα* $(-R, R)$ *ονομάζεται διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.*

Άσκηση 1

Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως. Αποδείξτε οτι οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kt), \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 1 Λύση

Λύση Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Weierstrass: αν $f_k(t) = \alpha_k \sin kt$, τότε

$$|f_k(t)| = |\alpha_k \sin kt| \leq |\alpha_k| \ , \ t \in \mathbb{R}$$

. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ συγκλίνει από την υπόθεση, άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin kt = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Ανάλογα για την $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kt$.

Άσκηση 1 Υπόδειξη

Άσκηση 2

Έστω $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (t - t_0)^k$ με διάστημα σύγκλισης $|t - t_0| < R$ $(R > 0)$. Αποδείξτε οτι $f^{(k)}(t_0) = k!\alpha_k$ $k \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 2 Λύση

Λύση Έχουμε δει οτι μια δυναμοσειρά παραγωγίζεται κατά όρους σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος σύγκλισής της. Δηλαδή, αν $|t - t_0| < \mathbb{R}$ τότε

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k (t - t_0)^{k-1}$$

$$f''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\alpha_k (t - t_0)^{k-2}$$

$$\dots$$

$$f^{(m)}(t) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)\alpha_k (t - t_0)^{k-m}$$

Αν θέσουμε $t = t_0$, παίρνουμε

$$f^{(m)}(t_0) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)\alpha_k (t - t_0)^{k-m}$$

Οι όροι που αντιστοιχούν σε $k > m$ μηδενίζονται, άρα

$$f^{(m)}(t_0) - m(m-1)\dots(m-m+1)\alpha_m = m!\alpha_m.$$

Άσκηση 2 Υπόδειξη

Άσκηση 3

Αποδείξτε οτι η $\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)x^k$ συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Ενώ η $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k(1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη βρείτε τα μερικά αθροίσματα.

Άσκηση 3 Λύση

Λύση $\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)x^k$: Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα

$$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k=(1-x)(1+x+\cdots+x^n)=1-x^{n+1}$$

αν $0\le x<1$ και $s_n(1)=0$. Άρα,

$$s_n(x)\to s(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Αφού η s δεν είναι συνεχής στο 0, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k(1-x)=(1-x)\frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}=\frac{1-x}{1+x}(1+(-1)^n x^{n+1}).$$

Αν $0\le x<1$, τότε $x^{n+1}\to 0$, άρα $s_n(x)\to\frac{1-x}{1+x}$. Αν $x=1$, τότε $s_n(1)=0\to 0=\frac{1-1}{1+1}$. Άρα, $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k(1-x)=\frac{1-x}{1+x}$, $x\in[0,1]$. Για να δείξουμε οτι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, θεωρούμε την διαφορά

$$\left|\ s_n(x)-\frac{1-x}{1+x}\ \right|=\left|\ \frac{1-x}{1+x}(-1)^n x^{n+1}\ \right|=\frac{x^{n+1}-x^{n+2}}{1+x}\le x^{n+1}-x^{n+2}$$

Βρίσκουμε το $\max_{x\in[0,1]}(x^{n+1}-x^{n+2})$: η παράγωγος είναι $(n+1)x^n-(n+2)x^{n+1}$, άρα το μέγιστο πιάνεται στο $x_0=\frac{n+1}{n+2}$ και είναι ίσο με $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}[1-\frac{n+1}{n+2}]<\frac{1}{n+2}$.

Άρα,

$$\max_{x\in[0,1]}\left|\ s_n(x)-\frac{1-x}{1+x}\ \right|\le\max_{x\in[0,1]}(x^{n+1}-x^{n+2})<\frac{1}{n+2}$$

Οπότε,

$$s_n(x)\xrightarrow{\text{ο.μ.}}\frac{1-x}{1+x}$$

Άσκηση 3 Υπόδειξη

Άσκηση 4

Αποδείξτε οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(1+\frac{t}{k}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-A, A]$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Χρησιμοποιήστε οτι $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, $|\sin x| \leq |x|$, $|1-\cos x| \leq \frac{1}{2}|x|^2)$.

Άσκηση 4 Λύση

Λύση Είναι $\sin\left(1+\frac{t}{k}\right) = \sin 1 \cos\left(\frac{t}{k}\right) + \cos 1 \sin\left(\frac{t}{k}\right)$, άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(1+\frac{t}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin 1 \cos\left(\frac{t}{k}\right) + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos 1 \sin\left(\frac{t}{k}\right)\right\}$$

Εξετάζουμε χωριστά τις:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{t}{k}\right) \ , \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{t}{k}\right)$$

στο $[-A, A]$

Για την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{t}{k}\right)$: $|f_k(t)| = |\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{t}{k}\right)| \leq \frac{|t|}{\sqrt{k}k} \leq \frac{A}{k^{\frac{3}{2}}}$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A}{k^{\frac{3}{2}}}$ συγκλίνει, οπότε από το κριτήριο του Weierstrass η

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{t}{k}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A, A]$.

Για την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{t}{k}\right)$: Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει, άρα συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A, A]$ αν την δούμε σαν σειρά (σταθερών) συναρτήσεων. Επίσης $|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{t}{k}\right) - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}| = \frac{1}{\sqrt{k}} \, |\cos\left(\frac{t}{k}\right) - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \frac{t^2}{k^2} \leq \frac{A^2}{2k^{\frac{3}{2}}}$ οπότε το κριτήριο του Weierstrass μας δίνει οτι η

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{t}{k}\right) - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right\}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A, A]$. Προσθέτοντας, έχουμε οτι η

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{t}{k}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A, A]$.

Έπεται οτι η

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(1 + \frac{t}{k}\right) =$$

$$= \sin 1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{t}{k}\right) + \cos 1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(1 + \frac{t}{k}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A, A]$.

Άσκηση 4 Υπόδειξη

Άσκηση 5

Αποδείξτε οτι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{t^2+k}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[-A, A]$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Χωρίστε την σε δύο σειρές και για την μια εφαρμόστε κριτήριο Weierstrass) αλλά οτι δεν συγκλίνει απολύτως για καμία τιμή του t.

Άσκηση 5 Λύση

Λύση Η $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$ συγκλίνει, ομοιόμορφα στο $[-A, A]$ αν την δούμε σαν σειρά (σταθερών) συναρτήσεων.

Αν $f_k(t) = (-1)^k \frac{t^2}{k^2}$, έχουμε $|f_k(t)| = \frac{t^2}{k^2} \leq \frac{A^2}{k^2}$ στο $[-A, A]$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^2}{k^2}$ συγκλίνει άρα από το κριτήριο του Weierstrass η

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{t^2}{k^2}$$

συγκλίνει, ομοιόμορφα στο $[-A, A]$. Προσθέτοντας, παίρνουμε οτι η

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{t^2+k}{k^2}$$

συγκλίνει, ομοιόμορφα στο $[-A, A]$.

Είναι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k \frac{t^2+k}{k^2}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^2+k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Άσκηση 705 Υπόδειξη

Άσκηση 6

Αποδείξτε οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t}{k^\alpha(1+kt^2)}$, $\alpha > \frac{1}{2}$, συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 6 Λύση

Λύση Θέτουμε $f_k(t) = \frac{t}{k^\alpha(1+kt^2)}$. Τότε,

$$f_k'(t) = \frac{1}{k^\alpha}\frac{1+kt^2-2kt^2}{(1+kt^2)^2} = \frac{1-kt^2}{k^\alpha(1+kt^2)^2}.$$

Η f_k παίρνει μέγιστη τιμή στο $(0,+\infty)$ όταν $t = \frac{1}{\sqrt{k}}$ και $f_k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{2k^{\alpha+\frac{1}{2}}}$. Αφού η f_n είναι περιττή συνάρτηση, έπεται οτι

$$|f_k(t)| \le \frac{1}{2k^{\alpha+\frac{1}{2}}}\ ,\ k = 1,2,\ldots, t \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε $\alpha > \frac{1}{2}$, άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ συγκλίνει (p-σειρά με $p = \alpha + \frac{1}{2} > 1$). Από το κριτήριο του Weierstrass έπεται οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t}{k^\alpha(1+kt^2)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 6 Υπόδειξη

Άσκηση 7

Αποδείξτε οτι η $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{t^{2k+1}}{2k+1} - \frac{t^{k+1}}{2k+2})$ συγκλίνει κατά σημείον αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 7 Λύση

Λύση Έστω $0 < t < 1$. Δείχνουμε οτι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{2k+2}$ συγκλίνουν, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου:

(i) αν $\alpha_k = \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$, τότε $\frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} = \frac{t^{2k+3}}{2k+3}\frac{2k+1}{t^{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k+3}\,t^2 \to t^2 < 1$

(ii) αν $\beta_k = \frac{t^{k+1}}{2k+2}$, τότε $\frac{|\beta_{k+1}|}{|\beta_k|} = \frac{t^{k+2}}{2k+4}\frac{2k+2}{t^{k+1}} = \frac{2k+2}{2k+4}\,t \to t < 1$

Προσθέτοντας, βλέπουμε οτι η $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^{2k+1}}{2k+1} - \frac{t^{k+1}}{2k+2}\right)$ συγκλίνει

Αν $t = 0$ ή $t = 1$, είναι φανερό οτι η $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^{2k+1}}{2k+1} - \frac{t^{k+1}}{2k+2}\right)$ συγκλίνει (γιατί;). Άρα, η σειρά συγκλίνει κατά σημείο στο $[0,1]$.

Έχουμε δει οτι: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1} = \log\left(\frac{1}{1-t}\right)$, αν $-1 < t < 1$. Άρα,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t^2)^2}{k} \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1-t^2}\right) \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2k} \\ &= \log\left(\frac{1}{1-t}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1-t^2}\right). \end{aligned}$$

Έπεται οτι: $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^{2k+1}}{2k+1} - \frac{t^{k+1}}{2k+2}\right) = \log\left(\frac{1}{1-t}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1-t^2}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{1}{1-t}\right) - \log\left(\frac{1}{1-t^2}\right)\right] = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-t^2}{1-t}\right) = \frac{1}{2}\log(1+t)$, $0 \le t < 1$. Αν η σύγκλιση της σειράς ήταν ομοιόμορφη στο $[0,1]$, θα έπρεπε η οριακή συνάρτηση να είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \frac{1}{2}\log(1+1) = \frac{\log 2}{2}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{\log 2}{2}$$

Όμως, το τελευταίο άθροισμα είναι ίσο με $\log 2$. Άτοπο.

Άσκηση 7 Υπόδειξη

Άσκηση 8 Υπόδειξη

Κεφάλαιο 8

Γενικευμένα ολοκληρώματα

Έστω πραγματική συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα $[a, b)$ όπου $a \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R}$ η $b = +\infty$. Επιπλέον υποθέτουμε οτι για κάθε γ με $a \leq c < b$ η f είναι $R-$ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$. Αν το όριο $\lim_{c \to b^-} \int_a^c f$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε οτι η f έχει *γενικευμένο ολοκλήρωμα* στο $[a, b)$ με τιμή ίση με

$$\int_a^{\to b} f = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f.$$

Επίσης λέμε οτι *γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.* Αν το παραπάνω όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ λέμε οτι *το γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει.* Βέβαια αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι $R-$ολοκληρώσιμη τότε έχει γενικευμένο ολοκλήρωμα και

$$\int_a^{\to b} f = \int_a^b f.$$

Τα ίδια ισχύουν όταν η f είναι στο $(a, b]$ οπότε το γενικευμένο της ολοκλήρωμα (όταν υπάρχει) είναι το $\int_a^b f = \lim_{c \to a^+} \int_c^b g$. Στην περίπτωση που η f είναι ορισμένη μόνο στο (a, b) και ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο (a, b) ως το

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f = \int_{a\leftarrow}^{\delta} f + \int_{\delta}^{\to b} f.$$

Αν όμως ένα από αυτά τα δύο ολοκληρώματα αποκλίνει τότε λέμε οτι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο (a, b) αποκλίνει. Πάλι είναι εύκολο να δει κανείς οτι όταν η f ορίζεται και είναι ολοκληρώσιμη σε όλο το $[a, b]$ τότε

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f = \int_a^b f.$$

Ανάλογο χειρισμό κάνουμε για μια f που ορίζεται σε ένα διάστημα (a, b) εκτός από πεπερασμένο πλήθος σημείων $\xi_1, \ldots, \xi_n \in (a, b)$: το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f ισούται με

$$\int_{a\leftarrow}^{\to\xi_1} f + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\xi_i\leftarrow}^{\to\xi_{i+1}} f + \int_{\xi_n\leftarrow}^{\to b} f.$$

Δεδομένου οτι όταν η f είναι $R-$ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ (και ορίζεται παντού σε αυτό) το $R-$ολοκληρωμά της ταυτίζεται με το γενικευμένο της ολοκλήρωμα στο (a,b) (ακόμη και αν αφαιρέσουμε πεπερασμένο πλήθος σημείων από το (a,b)) μπορούμε να καταργήσουμε τον ειδικό συμβολισμό $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f$ με τον συνήθη $\int_a^b f$ και να εννοούμε με τον τελευταίο το γενικευμένο ολοκλήρωμα στην περίπτωση που η f δεν ορίζεται σε ολόκληρο το $[ab]$.

Θεώρημα 50 (Cauchy) *Το $\int_a^b f$ συγκλίνει αν και μόνο αν ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει*

$$c_0 \leq c_1 < c_2 < b \Rightarrow |\int_{c_1}^{c_2} f| < \varepsilon$$

Ειδικά για την περίπτωση όπου η f έχει τιμές στο $[0,\infty]$ έχουμε τα ακόλουθα:

Θεώρημα 51 *Έστω $f(t) \geq 0$ στο $[a,b)$. Το $\int_a^b f$ συγκλίνει αν το $\int_a^c f$ είναι φραγμένο σαν συνάρτηση του c, ενώ $\int_a^b f = +\infty$ αν το $\int_a^c f$ δεν είναι φραγμένο.*

Θεώρημα 52 (ολοκληρωτικό κριτήριο σειράς) *Έστω οτι $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι μη-αρνητική και φθίνουσα προς το μηδέν καθώς $t \to +\infty$. Ορίζουμε $s(c) = \int_1^c f$ και $s_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ τότε*
(α) $s(n+1) \leq s_n \leq s(n) + f(1)$ και
(β) το $\int_1^{+\infty} f$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ συγκλίνει και $\int_1^{+\infty} f \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f$

8.1 Γενικευμένα ολοκληρώματα για γενικές συναρτήσεις

Ορισμός 53 *Λέμε οτι το $\int_a^b f$ συγκλίνει απολύτως αν το $\int_a^b |f|$ συγκλίνει. Λέμε οτι το $\int_a^b$ συγκλίνει υπό συνθήκη (ή καταχρηστικά) αν το $\int_a^b f$ συγκλίνει αλλά όχι απολύτως. Αν το $\int_a^b f$ συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει.*

Θεώρημα 54 (σύγκριση ολοκληρωμάτων) *Έστω $f,g : [a,b) \to \mathbb{R}$ όπου $g(t) \geq$ στο $[a,b)$. Αν υπάρχει αριθμός M ώστε $|f(t)| \leq M \cdot g(t)$ για $t \in [a,b)$ τότε αν το $\int_a^b g$ συγκλίνει, τότε το $\int_a^b f$ συγκλίνει απολύτως.*

Πρόταση 55 *(α) (Ολοκλήρωση κατά μέρη) Αν οι f, g έχουν συνεχή παράγωγο στο $[a, b)$ τότε $\int_a^b f'(t)dt = \lim_{c\to b^-}(f(c)g(c)) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt$*

(β) (Αλλαγή μεταβλητής). Αν η $t = t(s) : [a', b') \xrightarrow{\varepsilon\pi\acute{\iota}} [a, b)$ είναι γνησίως αύξουσα και έχει συνεχή παράγωγο τότε

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a'}^{b'} f(t(s))t'(s)ds$$

Ορισμός 56 *Έστω συνάρτηση $f : [a, b)\cup(b, c] \to \mathbb{R}$ είναι $R-$ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, d],\ a \le d < b$ και σε κάθε διάστημα $[d, c],\ b < d \le c$. Ονομάζουμε πρωτεύουσα τιμή (principal value) του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^c f$ τον αριθμό (αν υπάρχει)*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{b-\varepsilon} f + \int_{b+\varepsilon}^c f\right)$$

και τον συμβολίζουμε με $P.V. \int_a^c f$. Είναι δυνατόν να μην υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα αλλά να υπάρχει η πρωτεύουσα τιμή του. Για παράδειγμα, έστω $f(t) = \frac{1}{t}$ στο $[-1, 0) \cup (0, 1]$. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{1}{t}dt$ δεν υπάρχει αλλά

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}dt + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{t}dt) = 0\right).$$

Πρόταση 57 *Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^c f$ υπάρχει τότε και η πρωτεύουσα τιμή του υπάρχει και έχουν την ίδια τιμή.*

8.2 Γενικευμένα ολοκληρώματα με παράμετρο

Έστω συνάρτηση $f(t, x)$, όπου $t \in [a, b]$ και το x ανήκει σε κάποιο διάστημα I. Θα ολοκληρώνουμε ως προς t και το x θα παίζει τον ρόλο της παραμέτρου:

$$\int_a^b f(t, x)dt\ ,\ x \in I.$$

Αν για κάθε $x \in I$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, τότε ορίζεται μια συνάρτηση

$$g(x) = \int_a^b f(t, x)dt\ ,\ x \in I$$

Ορισμός 58 *Λέμε οτι το $\int_a^b f(t, x)dt$ συγκλίνει στην $g(x)$ κατά σημείο στο I αν για κάθε $x \in I$, η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος είναι $g(x)$ ή ισοδύναμα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $c_0 = c_0(\varepsilon, x)\ \in\ [a\ b)$ ώστε*

$$c_0 \le c < b \Rightarrow \left|\ g(x) - \int_a^c f(t, x)dt\ \right| < \varepsilon\ \forall x \in I.$$

Ορισμός 59 *Λέμε οτι το $\int_a^1 f(t,x)dt$ συγκλίνει στη $g(x)$ομοιόμορφα στο I αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $c_0 = c_0(\varepsilon)$ στο $[a,b]$ ώστε*

$$c_0 \leq c < b \Rightarrow \left| \, g(x) - \int_a^c f(t,x)dt \, \right| < \varepsilon \; \forall x \in I.$$

Είναι φανερό οτι αν το $\int_a^b f(t,x)dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια $g(x)$ στο I τότε συγκλίνει και κατά σημείο.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση μεταφέρει στην g ιδιότητες της f. Για παράδειγμα αν η $f(t,x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ $x \in I$ και το $\int_a^b f(t,x)dt$ συγκλίνει στην $g(x)$ ομοιόμορφα τότε και η g είναι συνεχής στο I. Ομοίως αν $f(t,x)$ και $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ είναι συνεχείς στο $[a,b)$ $x \in I$, το $\int_a^b f(t,x_0)dt$ συγκλίνει για κάποιο $x_0 \in I$ και το $\int_a^b f(t,x)dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I σε μια συνάρτηση $h(x)$ τότε το $\int_a^b f(t,x)dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I και

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(t,x)dt\right) = \frac{d}{dx} g(x) = h(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)dt$$

Θεώρημα 60 *Έστω $f(t,x)$ παραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[a,b)$ $x \in I$. Έστω οτι υπάρχει συνάρτηση $F(t)$ ορισμένη στο $[a,b)$ ώστε*

$$|f(t,x)| \leq f(t) \; , \; t \in [a \; b), \; x \in I.$$

Αν το $\int_a^b F(t)dt$ συγκλίνει, τότε $\int_a^b f(t,x)dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

8.3 Η συνάρτηση Γ (γάμμα)

Έστω $x > 0$ και ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(t,x) = t^{x-1}e^{-t}$ για $t > 0$. Σχηματίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} f(t,x)dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

Έστω ορίζεται μια συνάρτηση του x που συμβολίζουμε με $\Gamma(x)$ και ονομάζουμε συνάρτηση Γάμμα. Αποδεικνύεται οτι το γενικευμένο αυτό ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $x > 0$ και συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $I = [A,B]$ όπου $0 < A \leq B < +\infty$. Η συνάρτηση Γ στο $(0,+\infty)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}(\log t)^n e^{-t}dt \; , \; n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον ιδιότητες είναι οι εξής:

(α) $\Gamma(x) \geq 0$ και $\Gamma(x) \to +\infty$ όταν $x \to 0^+$ ή $x \to +\infty$

(β) $\Gamma(1) = 1 \; , \; \Gamma(n) = (n-1)! \; , \; n \in \mathbb{N}$

(γ) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \; , \; x > 0$

(δ) η Γ είναι κυρτή.

Άσκηση 1

Αποδείξτε οτι, αν $p > 1$, το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{xp} dx$ συγκλίνει απολύτως (Υπόδειξη: συγκρίνετε με $\frac{1}{x^p}$ ενώ αν $0 < p \leq 1$ συγκλίνει υπό συνθήκην.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 1 Λύση

Λύση $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^{\infty}$. Αν $p > 1$ τότε $\lim_{x\to\infty} x^{-p+1} =$ 0 άρα

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| dx \leq \left(0 - \frac{1}{-p+1}\right) = \frac{1}{p-1}.$$

Αν $0 < p \leq 1$ τότε

$$\begin{aligned}
\int_1^N \frac{\sin x}{x^p}\, dx &= \int_1^N \sin x\; x^{-p}\, dx \\
&= \int_1^N (-\cos x)' x^{-p}\, dx \\
&= (-\cos x) x^{-p} \Big|_1^N - p \int_1^N \cos x\; x^{-p-1}\, dx \\
&= \frac{-\cos N}{N^p} - \frac{-\cos 1}{1} - \int_1^N \frac{\cos x}{x^{p+1}}.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{\sin x}{x^p}\, dx &= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{-\cos N}{N^p} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^N \frac{\cos x}{x^{p+1}}\, dx \right) \\
&= (\cos 1) - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^{1+p}}.
\end{aligned}$$

Το $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^{1+p}}$ συγκλίνει αφού $\int_1^{\infty} \left| \frac{\cos x}{x^{1+p}} \right| dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1+p}} = \frac{1}{p}$.

Άσκηση 1 Υπόδειξη

Άσκηση 2

Αποδείξτε οτι το $\int_2^{+\infty} x^p (\log x)^q dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν

(α) $p < -1$ ή

(β) $p = -1, q < -1$

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Αλλαγή μεταβλητής $x = e^t$ Άσκηση 2 Λύση

Λύση (α)

$$\int_2^\infty x^p (\log x)^q \, dx = \int_2^\infty \left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)' (\log x)^q \, dx =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^{p+1}}{p+1} (\log x)^q\right) - \int_2^\infty \frac{1}{p+1} x^{p+1} q (\log x)^{q-1} \frac{1}{x} dx$$

$$= \text{σταθερά} - \frac{q}{p+1} \int_2^\infty x^p (\log x)^{q-1} \, dx.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο κατεβάζουμε συνεχώς τον εκθέτη του λογαρίθμου. Αν κάνουμε $[q]+1$ τέτοια βήματα (όταν $q > 0$) τότε προκύπτει οτι το $\int_2^\infty x^p (\log x)^q \, dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν το $\int_2^\infty x^p (\log x)^r \, dx$ συγκλίνει με $r \leq 0$. Όμως $x \geq 2$ άρα $\log x \geq \log 2$ οπότε $(\log x)^r \leq (\log 2)^r$ (αφού $r \leq 0$). Έτσι παίρνουμε $\int_2^\infty \left| \, x^p (\log x)^r \, \right| \, dx \leq \int_2^\infty x^p \, dx$ το οποίο συγκλινει για $p < -1$.

(β) Αν $p = -1, \; q < -1$ έχω το $\int_2^\infty \frac{1}{x (\log x)^{|q|}} \, dx$. Θέτω $x = e^t, \; dx = e^t dt$ και το ολοκλήρωμα γίνετε

$$\int_{\log 2}^\infty \frac{1}{e^t t^{|q|}} e^t \, dt = \int_{\log 2}^\infty \frac{1}{t^{|q|}} \, dt.$$

το οποίο συγκλίνει αν και μόνο αν $|q| > 1$ δηλαδή $q < -1$.

Άσκηση 2 Υπόδειξη

Άσκηση 3

Αποδείξτε οτι τα $\int_1^{+\infty} \sin^2(\frac{1}{x}) dx$, $\int_0^{+\infty} x^p e^{-x^9} dx \; (p, q > 0)$ συγκλίνουν.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη $|\sin t| \leq |t|)$.

Άσκηση 3 Λύση

Λύση (α) $\int_0^\infty \left| \, \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \, \right| \, dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ αφού $|\sin x| \leq |x|$, αλλά το δεύτερο ολοκλήρωμα συγκλίνει. (β)

$\int_0^\infty x^p e^{-x^q} \, dx + \int_1^\infty x^p e^{-x^q} \, dx$. Όμως

$$\int_0^1 |x^p e^{-x^q}| \, dx \leq \int_0^1 e^{-x^q} \leq \int_0^1 a \, dx = 1.$$

και

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x^p e^{-x^q}\,dx &= \int_1^\infty x^p \frac{-1}{qx^{q-1}}\left(e^{-x^q}\right)'\,dx\\ &= -\frac{1}{q}\int_1^\infty x^{p-(q-1)}\left(e^{-x^q}\right)'\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{q}\left(\lim_{x\to\infty} x^{p-(q-1)}e^{-x^q} - 1e^{-1} - \int_1^\infty x^{p-q}e^{-x^q}\,dx\right)\\ &= (\text{σταθερά}) + \frac{1}{q}\int_1^\infty x^{p-q}e^{-x^q}\,dx.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι κάθε φορά που εκτελουμε μια ολοκλήρωση κατά παράγοντες ο εκθέτης του x μειώνεται κατά $q > 0$ άρα αν επαναλάβουμε τη διαδικασία $\left[\frac{p}{q}\right] + 1$ φορές θα προκύψει το ολοκλήρωμα:

$$(\text{μιά άλλη σταθερά}) + \left(\frac{1}{q}\right)^{1+\left[\frac{p}{q}\right]}\int_1^\infty x^r e^{-x^q}\,dx,$$

όπου $r \le 0$. Άρα το ολοκλήρωμα συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει το $\int_1^\infty e^{-x^q}\,dx$ αφού $x^r \le 1$ για $x \ge 1$. Τέλος δείχνουμε οτι το $\int_1^\infty e^{-x^q}dx$ συγκλίνει. Μπορούμε να το δείξουμε με το θεώρημα για τη σύγκλιση σειρών. Το ολοκλήρωμα συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^\infty e^{-n^q}$. Για αυτήν χρησιμοποιούμε το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy δηλαδή, συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η

$$\sum_{k=2}^\infty 2^n e^{-(2^n)^q} = \sum_{k=2}^\infty 2^n e^{-2^n q} = \sum_k^\infty = 2e^{n\log 2}e^{-2^{nq}} = \sum_{k=2}^\infty e^{-(2^{nq}-n\log 2)}$$

αλλά $(2^{nq} - n\log 2)n^{-1} \to \infty$ καθώς $n \to \infty$ άρα υπάρχει $N \in \mathbb{N} : 2^{nq} - n\log 2 \ \ge\ n\ \forall\ n\ \ge\ M$ άρα $\sum_{k=2}^\infty e^{-(2^{nq}-n\log 2)} \le \sum_{k=2}^M e^{-(2^{nq}-n\log 2)} + \sum_{M+1}^\infty e^{-n}$. Η πρώτη είναι πεπερασμένο άθροισμα και η δεύτερη γεωμετρική $\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2^{xq}-x\log 2}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2^{xq}q\log 2-\log 2}{1} = \infty \text{ αφού } q > 0\right)$.

Άσκηση 3 Υπόδειξη

Άσκηση 4

Αποδείξτε το τα $\int_0^1 \log x\log(1+x)dx$, $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{\sqrt{1-x}}dx$ συγκλίνουν.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη $\log(1+x) \le x$ για $x > 0$ και για το δεύτερο, αλλαγή μεταβλητής $1 - x = e^{-t}$ Άσκηση 4 Λύση

Λύση (α) $\int_0^{\prime}(\log x)\log(1+x)dx \leq \int_0^{\prime} x\log x dx$ αφού $\log(1+x)\varepsilon x\ \forall x>0$. Αλλά

$$\begin{aligned}
\int_0^{\prime} x\log x dx &= \int_0^{\prime}\Big(\frac{x^2}{2}\Big)^1 \log x dx \\
&= \frac{x}{2}\log\Big|_0^1 \int_0^{\prime}\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\prime} x = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

($\lim_{x\to 0} x\log x = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$)

(β) Θέτουμε $1-x=e^{-1}\ dx=e^{-t}dt$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{\log(e^{-t})}{\sqrt{e^{-t}}}e^{-t}dt &= \int_0^{\infty} -te^{-\frac{t}{2}}dt \\
&= \int_0^{\infty} 2t(e^{-\frac{t}{2}})^1 dt \\
&= 2te^{-\frac{t}{2}}\Big|_0^{\infty} -2\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt \\
&= -2\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt \\
&= e^{-\frac{t}{2}}\Big|_0^{\infty} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Άσκηση 4 Υπόδειξη

Άσκηση 5

Χρησιμοποιώντας οτι $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ και κάνοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής δείξτε οτι $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Αποδείξτε οτι $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (2n)!\frac{\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ για $n=0,1,2,3,\ldots$

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 5 Λύση

Λύση $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ άρα $\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt$ Θέτω $t = x^2$ $dt = 2xdx$

$$\begin{aligned}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) &= \int_0^\infty x^{-1}e^{-x^2}2xdx \\ &= 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx \\ &= 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big) &= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(n-\frac{1}{2}\Big) \text{ (αφού } \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)) \\ &= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big(n-\frac{3}{2}\Big)\Gamma\Big(n-\frac{3}{2}\Big) \\ &\vdots \\ &= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\ \Big(n-\frac{3}{2}\Big)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) \\ &= \frac{2n-1}{2}\ \frac{2n-3}{2}\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 2}\frac{1}{2^n}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!}\ \frac{1}{2^n}\sqrt{\pi} \\ &= (2n)!\frac{\sqrt{\pi}}{4^n n!}\end{aligned}$$

Άσκηση 5 Υπόδειξη

Άσκηση 6

Για $1 < x < +\infty$ ορίζουμε $\zeta(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^x}$. Αποδείξτε οτι

(α) $\zeta(x) = x\int_1^{+\infty}\frac{[t]}{t^{x+1}}dt$

(β) $\zeta(x) = \frac{x}{x-1} - x\int_1^{+\infty}\frac{t-[t]}{t^{x+1}}dt.$

Αποδείξτε οτι το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει για $x > 1$ ενώ το δεύτερο συγκλίνει για $x > 0$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 6 Λύση

Λύση (α)

$$\begin{aligned}
x\int_1^{\infty}\frac{[t]}{t^{x+1}}dt &= x\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{[t]}{t^{x+1}}dt \\
&= x\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{n}{t^{x+1}}dt \\
&= x\sum_{n=1}^{\infty}n\int_n^{n+1}t^{-x-1}dt \\
&= x\sum_{n=1}^{\infty}n\Big(\frac{t^{-x}}{-x}\Big)\Big|_{t=n}^{t=n+1} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}n((n+1)^{-x}-n^{-x}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}n\Big(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x} \\
&= \zeta(x)
\end{aligned}$$

Όμως η $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^x}$ είναι γνωστό οτι συγκλίνει για $x>1$.

(β)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x-1}-x\int_1^{\infty}\frac{t-[t]}{t^{x+1}}\,dt &= \frac{x}{x-1}-x\int_1^{\infty}\frac{1}{t^x}\,dt+x\int_1^{\infty}\frac{[t]}{t^{x+1}}\,dt \\
&= \frac{x}{x-1}-x\left(\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right)\Big|_{t=1}^{t=\infty}+\zeta(x) \\
&= \frac{x}{x-1}-x\left(0-\frac{1}{-x+1}\right)+\zeta(x) \\
&= \zeta(x)
\end{aligned}$$

Αυτό το ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $x>0$ αφού $\mid t-[t]\mid\leq 1\ \forall t\in\mathbb{R}$ οπότε

$$\int_1^{\infty}\Big|\frac{t-[t]}{t^{x+1}}\Big|\,dt\leq\infty_1^{\infty}\frac{1}{t^{x+1}}\,dt$$

το οποίο συγκλίνει αφού $x+1>1$.

Άσκηση 6 Υπόδειξη

Άσκηση 7

Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(t) = \frac{(-1)^n}{n}$ για $n - 1 \leq t < n$ $(n \in \mathbb{N})$. Αποδείξτε οτι το $\int_0^{+\infty} f$ συγκλίνει υπό συνθήκην.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 7 Λύση

Λύση

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t)dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{(-1)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

η οποία συγκλίνει υπό συνθήκη (και όχι απόλυτα).

Άσκηση 7 Υπόδειξη

Άσκηση 8

(α) Χρησιμοποιείστε την $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ μαζί με τον τύπο

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

για να δείξετε οτι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx = \frac{\pi}{4}$.

(β) Με ολοκλήρωση κατά μέρη στην (α) δείξτε οτι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

(γ) Από την (β), την $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ και αλλαγή $x = 2x'$ αποδείξτε οτι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

(δ) Από την (γ) δείξτε οτι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη Άσκηση 8 Λύση

Λύση (α) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ αφού όταν θέτω $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$.

(β) Από την (α) έχω

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} = \int_0^\infty \frac{\sin x \cos x}{x} dx &= \int_0^\infty (\sin^2 x)' \cdot \frac{1}{2x} dx \\
&= \left.\frac{\sin^2 x}{2x}\right|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{-2x^2} dx \\
&= 0 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx
\end{aligned}$$

Άρα $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$. (Θυμηθείτε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2} \cdot \frac{\sin x}{x}$ και $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

(γ)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx &= \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{2 - 2\cos 2x - \sin^2 2x}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^\infty 2\frac{1-\cos 2x}{x^2} - \frac{\sin^2 2x}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^\infty 2\frac{2\sin^2 x}{x^2} - \frac{\sin^2 2x}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{\sin^2 2x}{x^2} dx \\
&\overset{(\beta)}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{\sin^2 2x}{x^2} dx
\end{aligned}$$

Θέτω $2x = t \Rightarrow 2dx = dt$ άρα

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \int_0^\infty 4 \, \frac{\sin^2 t}{t^2} \, \frac{1}{2} dt \\
&= \frac{\pi}{2} \, \frac{1}{2} \, \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx &= \int_0^\infty \left(\sin^4 x\right)\left(\frac{x^{-3}}{-3}\right)'\,dx \\
&= \sin^4 x \,\cdot\, \frac{x^{-3}}{-3}\Big|_0^\infty + \frac{1}{3}\int_0^\infty 4\left(\sin^3 x\right)(\cos x)x^{-3}\,dx \\
&= 0 + \frac{1}{3}\int_0^\infty 4\left(\sin^3 x\right)(\cos x)\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)'\,dx \\
&= 0 + \frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left(-\sin^4 x + 3\sin^2 x\cos^2 x\right)\,dx \\
&= 2\int_0^\infty \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{x^2}\,dx - \frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx \\
&\overset{(\gamma)}{=} 2\int_0^\infty \frac{\sin^2 2x}{4x^2}\,dx - \frac{2}{3}\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Τώρα θέτω $t = 2x$, $dt = 2dx$ και έχω:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4} &= 2\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\frac{1}{2}\,dt - \frac{2\pi}{12} \\
&\overset{(\beta)}{=} \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Άσκηση 8 Υπόδειξη

Άσκηση 9

Έστω οτι $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$, $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}dt$.

(α) Δείξτε οτι $f'(x) + g'(x) = 0$ για κάθε x και ότι $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ για κάθε x. (Υπόδειξη: Πόσο είναι το $g(0)$;)

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε οτι $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Υπόδειξη Λύση

Υπόδειξη (α) Πόσο είναι το $g(0)$;

(β) $0 \le g(x) \le \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}e^{-x^2} \to 0$ για $x \to +\infty$.

Άσκηση 9 Λύση

Λύση (α) $f'(x) = s\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)e^{-x^2}$ και

$$g^prime(x) = \int_0^1 e^{-x^2(t^2+1)}\,dt = -x\left(\int_0^1 e^{x^2t^2}\,dt\right)e^{-x^2},$$

άρα αν κάνω αλλαγή μεταβλητής θετοντας $y = xt$ η $g'(x) = -f'(x)$ άρα $f'(x) + g'(x) = 0$.

Επίσης $f(x) + g(x) = \int f'(x) + g'(x)\,dx = \int 0\,dx = c$. Για να βρούμε τη σταθερά θέτουμε $x = 0$ και παίρνουμε $c = f(0) + g(0)$. Όμως $f(0) = 0$ και

$$g(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(β) Άρα $f(x)+g(x) = \frac{\pi}{4}$. Στην τελευταία σχέση του προηγούμενου αφήνουμε το x να πάει στο άπειρο. Όμως,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} g(x) &= \lim_{x\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^1+1}\,dt\\
&\leq \lim_{x\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{t^2+1}\,dt\\
&\leq \lim_{x\to\infty}\left(\left(\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt\right)e^{-x^2}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Άρα $\frac{\pi}{4} = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2$.

Έπεται οτι $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Άσκηση 9 Υπόδειξη