

Προπτυχιακό Σεμινάριο Ανάλυσης & Γεωμετρίας

Μ. Ανούσης, Χ. Τσιχλιάς, Α. Τσολομύτης, Β. Φελουζής
(Editors)

2018–2019

Καρλόβασι, Σάμος



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΙΓΑΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Προπτυχιακό Σεμινάριο Ανάλυσης & Γεωμετρίας

Μ. Ανούσης, Χ. Τσιχλιάς, Α. Τσολομύτης, Β. Φελουζής
(Editors)

2018–2019

Καρλόβασι, Σάμος



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΙΓΑΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Βιβλιογραφικά δεδομένα:

Προπτυχιακό Σεμινάριο Ανάλυσης και Γεωμετρίας / Μ. Ανούσης, Χ. Τσιχλιάς, Α. Τσολομύτης, Β. Φελουζής (Editors). —

Έκδοση 1.0 ¶ 5 4 3 2 1

viii. 80 σελ. 38 σχ. 4 φωτ. 29,7 cm

1. Μαθηματική Ανάλυση

2. Γεωμετρία

I. Μ. Ανούσης.

II. Χ. Τσιχλιάς.

III. Α. Τσολομύτης.

IV. Β. Φελουζής.

LCC: QA 299.6—433 2019 | DEWEY: 515.15—DC 23

Το πρόγραμμα και οι σελίδες του σεμιναρίου βρίσκονται στη διεύθυνση
<http://myria.math.aegean.gr/psag/>

Αντιγραφή και αναπαραγωγή. Ελεύθερη χρήση του υλικού με αναφορά στην παρούσα έκδοση.

Στοιχειοθετήθηκε με το X_YL^AT_EX.

© 2019 Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών

Πρόλογος

Το Προπτυχιακό Σεμινάριο Ανάλυσης & Γεωμετρίας έχει σκοπό να αναπτύξει το ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά ανάμεσα στους φοιτητές και τις φοιτήτριες και να προκαλέσει τη συζήτηση για αυτά, παρουσιάζοντας θέματα που σχετίζονται με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο με την περιοχή της Μαθηματικής Ανάλυσης και της Γεωμετρίας, είτε από την ιστορική της είτε από τη σύγχρονη περίοδό της.

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις είναι συνήθως ελάχιστες και μπορούν να παρακολουθήσουν και πρωτοετείς φοιτητές.

Οι ομιλίες στον τόμο αυτό παρουσιάζονται με τη χρονολογική σειρά που δόθηκαν.

Όπου χρειάστηκε δεσμός προς διεύθυνση του διαδικτύου τοποθετήθηκε στο περιθώριο η λέξη «δεσμός» η οποία είναι ενεργή για κλικ όταν το αρχείο διαβάζεται σε οθόνη και δίπλα δίνεται ο ίδιος δεσμός με QR-code στην περίπτωση που το αρχείο διαβάζεται τυπωμένο. Το QR-code μπορεί να σκαναριστεί με οποιοδήποτε QR-code scanner από κινητό ή tablet με σύνδεση στο διαδίκτυο.

Μ. Ανούσης, Χ. Τσιχλιάς,
Α. Τσολομύτης, Β. Φελουζής.

Σάμος 2019

Περιεχόμενα

1. Τι πραγματικά είναι ένας πίνακας και η ορίζουσά του; 1
Αντώνης Τσολομύτης
2. Η ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού μέσου 9
Αντώνης Τσολομύτης
3. Μια τεχνική στις ανισότητες: The Flop 15
Αντώνης Τσολομύτης
4. Ο διπλασιασμός του κύβου 23
Μιχάλης Ανούσης
5. Μια μαθηματική συνταγή για μια «καρδιά» 33
Χαράλαμπος Τσιχλιάς
6. Το Θεώρημα Ramsey 45
Κώστας Τσαπρούνης
7. Μαθηματικά και αβεβαιότητα 55
Σταύρος Βακερούδης
8. Η Χρυσή Τομή στη Μουσική 65
Ανδρέας Παπασαλούρος

Ομιλία 1

Τι πραγματικά είναι ένας πίνακας και η ορίζουσά του;

Αντώνης Τσολομύτης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
atsol@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: -

1.1 Τι συμβαίνει όταν πολλαπλασιάσουμε με 2 όλα τα διανύσματα;

- Διαστολή του χώρου επί 2

-

$$2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Παρατηρήστε όμως ότι $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Άρα

$$2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \left(2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + y \left(2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Δηλαδή το πού θα καταλήξει η εικόνα του $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ καθορίζεται πλήρως από το πού θα απεικονιστούν τα διανύσματα $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (τα οποία στο προηγούμενο παράδειγμα απεικονίζονται στα $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$).

Από τις εικόνες των e_1 και e_2 , δηλαδή τα $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, αφού αυτές καθορίζουν πλήρως την εικόνα του γενικού διανύσματος $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, φτιάχνουμε το σύμβολο $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ και το θεωρούμε τον «τύπο» του μετασχηματισμού! Έτσι,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \text{ορσ} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Προσοχή το εξής: η παραπάνω σχέση δεν είναι το αποτέλεσμα (τουλάχιστον προς το παρόν) κάποιου «πολλαπλασιασμού», αλλά η *εξ ορισμού* επίδραση του μετασχηματισμού με σύμβολο το $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ στο διάνυσμα $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Γενικεύουμε αυτή την ιδιότητα φτιάχνοντας μετασχηματισμούς που καθορίζονται από το σε ποια διανύσματα απεικονίζονται τα e_1 και e_2 . Έτσι αν το e_1 απεικονίζεται στο $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ και το e_2 απεικονίζεται στο $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ τότε το διάνυσμα $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, επειδή ισούται με $xe_1 + ye_2$ θέλουμε να απεικονιστεί στο

$$x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}.$$

Σε αυτόν τον μετασχηματισμό λοιπόν φυσιολογικά αποδίδουμε το σύμβολο

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

βάζοντας «μαζί» τις εικόνες των e_1 και e_2 . Άρα ισχύει

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}.$$

Τονίζουμε και πάλι ότι η παραπάνω σχέση δεν είναι το αποτέλεσμα (τουλάχιστον προς το παρόν) κάποιου «πολλαπλασιασμού», αλλά η *εξ ορισμού* επίδραση του μετασχηματισμού με σύμβολο το $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ στο διάνυσμα $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Τα σύμβολα αυτά τα ονομάζουμε πίνακες και την επίδρασή τους στα διανύσματα (τώρα είναι η σωστή στιγμή!) ένα είδος «πολλαπλασιασμού», αφού αφαιρέσουμε τις μεγάλες παρενθέσεις γύρω από το $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1.2 Διανύσματα

Για τους Φυσικούς συχνά τα διανύσματα εμφανίζονται ως βέλη σε ένα χώρο (για παράδειγμα, επίπεδο) όπου βέλη με ίσο μήκος και ίδια διεύθυνση και φορά θεωρούνται ίσα. Για τους ανθρώπους της πληροφορικής τα διανύσματα είναι λίστες από αριθμούς, όπως

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} -2000 \\ 3000 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Οι Μαθηματικοί όμως τα διανύσματα στο επίπεδο ή στον χώρο μπορεί να τα φανταζόμαστε ως βέλη, αλλά αυτά έχουν πάντα αρχή το 0, και τα ξεχωρίζουμε από τα τερματικά τους σημεία γράφοντας $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ αντί για (2, 1). Το (2, 1) είναι το τερματικό σημείο του διανύσματος $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ακριβολόγοι όπως επιδιώκουν να είναι, οι μαθηματικοί στην πραγματικότητα κάνουν κάτι πολύ πιο περίπλοκο. Θεωρούν ως διάνυσμα την κλάση ισοδυναμίας των διατεταγμένων ζευγών σημείων του \mathbb{R}^2 με ίδιο μήκος και ίδια φορά. Στην επιλογή αντιπροσώπου κάθε κλάσης ισοδυναμίας, ο Φυσικός βρίσκει την ευχέρεια να επιλέγει κάθε φορά όποιον αντιπρόσωπο τον διευκολύνει, ενώ ο Μαθηματικός επιλέγει συνήθως αυτόν που ξεκινάει από το 0.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.1. Ένα σύνολο V λέγεται διανυσματικός χώρος αν

- για κάθε $x, y \in V$ ορίζεται το $x + y \in V$ και ισχύουν $x + y = y + x$, $(x + y) + z = x + (y + z)$, υπάρχει στοιχείο $0 \in V$ με την ιδιότητα να ισχύει $0 + x = x + 0 = x$ για κάθε $x \in V$, και για κάθε $x \in V$ υπάρχει $x' \in V$ ώστε $x + x' = x' + x = 0$. Το x' το συμβολίζουμε με $-x$.
- Για κάθε $x \in V$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ (το \mathbb{F} μπορεί να είναι είτε ο \mathbb{R} είτε το \mathbb{C}) ορίζεται το $\lambda \cdot x \in V$ με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε $x, y \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ να ισχύουν οι $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot y$ και $1 \cdot x = x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.2. Στον \mathbb{R}^2 ή στον \mathbb{R}^3 ή στον \mathbb{R}^n , αν οι πράξεις οριστούν κατά συντεταγμένα, δηλαδή για παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y + w \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix},$$

εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούν τις ιδιότητες του παραπάνω ορισμού.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.2.3. Στη συνέχεια θα σταματήσουμε να γράφουμε την τελεία στον πολλαπλασιασμό $\lambda \cdot x$ και θα γράφουμε απλά λx .

Με το ίδιο σκεπτικό έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1x + c_1y \\ b_1x + d_1y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \left((a_1x + c_1y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (b_1x + d_1y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &\stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \left((a_1x + c_1y) \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + (b_1x + d_1y) \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} a_2a_1x + a_2c_1y + c_2b_1x + c_2d_1y \\ b_2a_1x + b_2c_1y + d_2b_1x + d_2d_1y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (a_2a_1 + c_2b_1)x + (a_2c_1 + c_2d_1)y \\ (b_2a_1 + d_2b_1)x + (b_2c_1 + d_2d_1)y \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{pmatrix} a_2a_1 + c_2b_1 & a_2c_1 + c_2d_1 \\ b_2a_1 + d_2b_1 & b_2c_1 + d_2d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 + c_2b_1 & a_2c_1 + c_2d_1 \\ b_2a_1 + d_2b_1 & b_2c_1 + d_2d_1 \end{pmatrix}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2.4. Για οποιουσδήποτε πίνακες A, B και C ισχύει

$$(AB)C = A(BC).$$

Απόδειξη: Προφανές! Γιατί η πρώτη στήλη του $(AB)C$ και του $A(BC)$ είναι η εικόνα του e_1 . Αλλά και στις δύο περιπτώσεις

$$\begin{aligned}
 ((AB)C)(e_1) &= (AB)(Ce_1) = A(B(Ce_1)) \\
 (A(BC))(e_1) &= A((BC)e_1) = A(B(Ce_1)). \quad \square
 \end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύουμε και τις υπόλοιπες ιδιότητες όπως $A(B + C) = AB + AC$, $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ κλπ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.5. Μια απεικόνιση $T : V \rightarrow V$ ονομάζεται γραμμικός μετασχηματισμός αν $T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$, για κάθε $u, v \in V$ και για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$.

1.3 Ορίζουσες

Η ορίζουσα είναι ένα μέτρο της παραμόρφωσης του χώρου που κάνει η εφαρμογή του πίνακα στα διανύσματα του χώρου.

- Ο πολλαπλασιασμός του \mathbb{R} επί -2 διαστέλλει το \mathbb{R} , αφού το διάστημα $[0, 1]$ απεικονίζεται στο διάστημα $[-2, 0]$, το οποίο έχει διπλάσιο μήκος από το αρχικό. Ταυτόχρονα όμως έχει αλλάξει τον προσανατολισμό της πραγματικής ευθείας:



Για αυτό θέτουμε

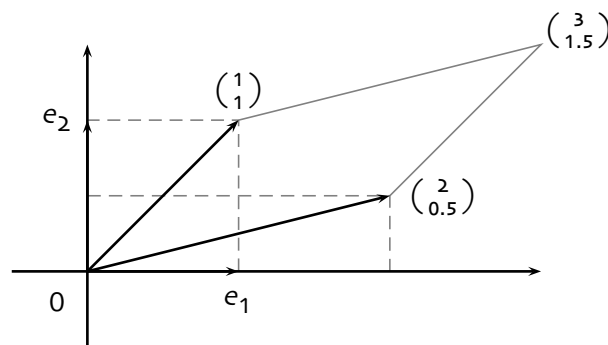
$$\det(\text{πολλαπλασιασμός επί } -2) = -2,$$

όπου το πλην εκφράζει την αλλαγή προσανατολισμού και το 2 το απόλυτο μέγεθος της παραμόρφωσης.

- Ας θεωρήσουμε τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix}$. Αυτός απεικονίζει το e_1 στο $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και το e_2 στο $\begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$. Επειδή οι γραμμικοί μετασχηματισμοί απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες, αφού

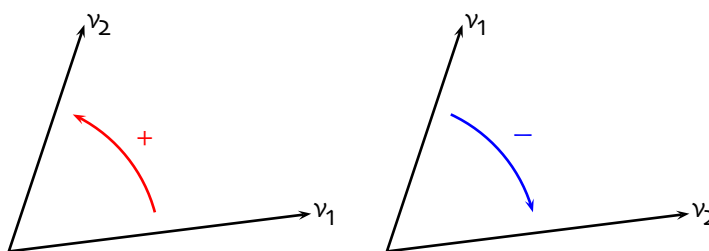
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} (\lambda u + \nu) = \lambda \left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} (u) \right) + \nu \left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} (v) \right),$$

η παραμόρφωση του \mathbb{R}^2 που κάνει ο B φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Άρα το μοναδιαίο τετράγωνο απεικονίζεται στο παραλληλόγραμμο. Η παραμόρφωση που γίνεται είναι η μεταβολή από το εμβαδόν 1 του μοναδιαίου τετραγώνου στο εμβαδόν του παραλληλογράμμου το οποίο είναι ίσο με 1,5. Για να αποφασίσουμε ποια είναι η ορίζουσα θα πρέπει να αποφασίσουμε αν θα τη θέσουμε 1,5 ή $-1,5$ ανάλογα αν η παραμόρφωση που κάνει περιλαμβάνει και αλλαγή του προσανατολισμού ή όχι. Στο παρακάτω σχήμα αν ν_1 και ν_2 είναι

οι εικόνες των e_1 και e_2 αντίστοιχα τότε αν το σχήμα των v_1 και v_2 που προκύπτει είναι όπως στα αριστερά του σχήματος (δηλαδή αν το v_1 πρέπει να στραφεί κατά κυρτή γωνία *αριστερόστροφα* για να βρεθεί στην ίδια διεύθυνση με το v_2) ο προσανατολισμός είναι θετικός. Αν είναι όπως στα δεξιά του παρακάτω σχήματος (δηλαδή αν το v_1 πρέπει να στραφεί κατά κυρτή γωνία *δεξιόστροφα* για να βρεθεί στην ίδια διεύθυνση με το v_2) τότε είναι αρνητικός.

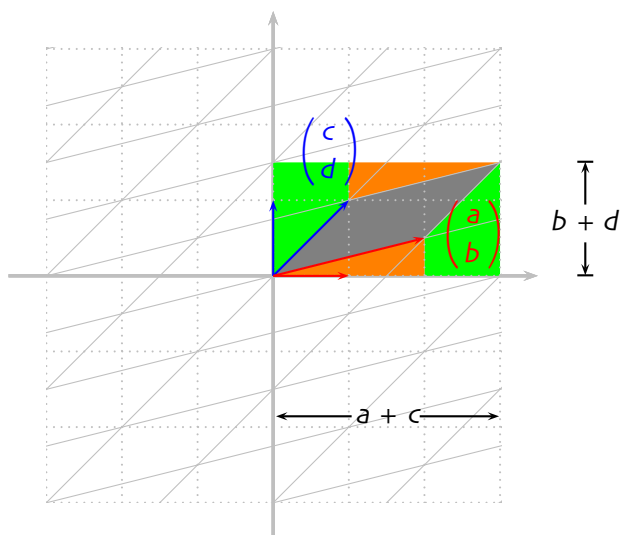


Ο Ορισμός λοιπόν της ορίζουσας στις δύο διαστάσεις είναι:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.1.

$$\text{Ορίζουσα} = (\text{προσανατολισμός}) \times \begin{pmatrix} \text{εμβαδόν παραλληλογράμμου} \\ \text{εικόνων των } e_1 \text{ και } e_2 \end{pmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του μετασχηματισμού που απεικονίζει το e_1 στο $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ και το e_2 στο $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ όπως στο παρακάτω σχήμα



παρατηρούμε ότι ο προσανατολισμός είναι θετικός άρα η ορίζουσα ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, δηλαδή είναι ίση με

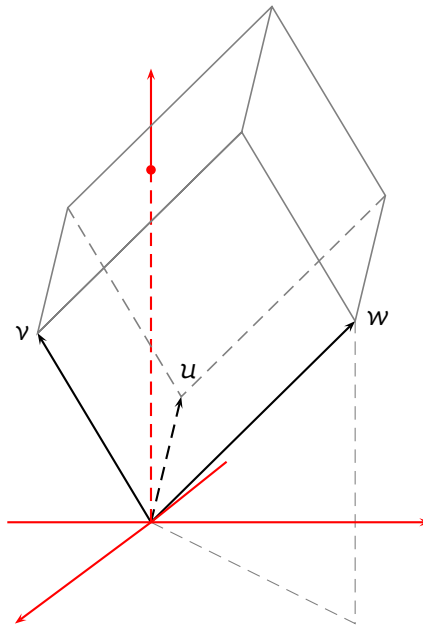
$$(a+c)(b+d) - 2 \frac{ab}{2} - 2 \frac{b+b+d}{2} c = ab + ad + cb + cd - ab - 2bc - dc = ad - bc.$$

Αν τώρα η παραπάνω εικόνα δεν είναι η σωστή αλλά το $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ είναι στη θέση του $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ και το $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ στη θέση του $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, τότε ο προσανατολισμός είναι αρνητικός και η ορίζουσα ισούται με πλην το εμβαδόν του παραλληλογράμμου. Αλλά στον υπολογισμό αυτού του εμβαδού όπως πριν τα a, b πρέπει να ανταλλαχθούν με τα c, d οπότε η ορίζουσα θα ισούται με $-(cb - da)$ δηλαδή και πάλι $ad - bc$. Δείξαμε δηλαδή ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

1.3.1 Η ορίζουσα στον \mathbb{R}^3

Ομοίως και στις τρεις διαστάσεις (και σε οσοδήποτε πεπερασμένου πλήθους διαστάσεις) αν το e_1 απεικονίζεται στο u , το e_2 στο v και το e_3 στο w όπως στο παρακάτω σχήμα,



η ορίζουσα αυτού του μετασχηματισμού θα ισούται με πλην ή συν τον όγκο του παραλληλεπίπεδου που ορίζουν τα u, v, w . Τι είναι όμως τώρα ο προσανατολισμός με βάση τον οποίο θα αποφασίσουμε για το συν ή το πλην; Η απάντηση είναι απλή. Αφού ξέρουμε τι είναι ο προσανατολισμός δύο διανυσμάτων, στρέφουμε μαζί τα u, v, w ώστε το w να γίνει ομόρροπο με το e_3 και στη συνέχεια κοιτάμε τον προσανατολισμό των u και v στο επίπεδο που ορίζουν. Αν αυτός είναι θετικός είναι θετικός και ο προσανατολισμός των u, v, w . Αν όχι, είναι αρνητικός. Με αυτό το σκε-

πτικό και χρησιμοποιώντας επαγωγή ορίζουμε τον προσανατολισμό σε κάθε διάσταση.

Με αυτή την προσέγγιση είναι απλό να αποδείξουμε για παράδειγμα ότι $\det(AB) = \det A \det B$. Πράγματι, ο B θα παραμορφώσει οποιοδήποτε τετράγωνο (ή κύβο κλπ) κατά ένα παράγοντα $\det B$. Επειδή το παραλληλόγραμμο στο οποίο παραμορφώνει ο B το τετράγωνο (ή κύβο κλπ), προσεγγίζεται από τετράγωνα, τα οποία ο A θα τα παραμορφώσει κατά παράγοντα $\det A$, συνεπάγεται ότι η συνολική παραμόρφωση που κάνει το γινόμενο AB ισούται με $\det A \det B$. Δηλαδή

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Κλείνουμε με την παρατήρηση ότι η δουλειά που πρέπει να γίνει στη συνέχεια και έχει γεωμετρικό ενδιαφέρον είναι η παραγωγή του γνωστού τύπου της ορίζουσας σε κάθε διάσταση. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε σε μια άλλη ομιλία ή να ανατρέξετε στις σημειώσεις γραμμικής άλγεβρας στο δεσμό του περιθωρίου ή στο υπό έκδοση βιβλίο «Linear Algebra: an Analytic and Geometric approach» των Μ. Ανούση, Α. Τσολομύτη και Β. Φελουζή.



δεσμός

Ομιλία 2

Η ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου

Αντώνης Τσολομύτης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
atsol@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: Μαθηματική
επαγωγή

2.1 Η ανισότητα και η γενίκευσή της

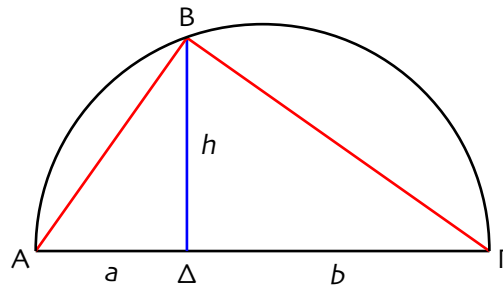
ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.1. Από όλα τα ορθογώνια εμβαδού E τη μικρότερη περίμετρο έχει το τετράγωνο.

Απόδειξη: Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει μήκη πλευρών a και b τότε για το εμβαδόν του E ισχύει $E = ab$. Ένα τετράγωνο με το ίδιο εμβαδόν θα έχει πλευρά, έστω x , για την οποία θα ισχύει $x^2 = E = ab$. Άρα $x = \sqrt{ab}$. Άρα το ζητούμενο θα είναι σωστό αν αποδείξουμε ότι $2a + 2b \geq 4\sqrt{ab}$. Αλλά αυτή είναι ισοδύναμη με την $(a - b)^2 \geq 0$ που είναι προφανής. \square

Έτσι από την απόδειξη του παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς a, b ισχύει

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Αυτή η ανισότητα ονομάζεται ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου. Ο αριθμός $(a + b)/2$ είναι ο αριθμητικός μέσος (ο μέσος όρος) ενώ \sqrt{ab} ονομάζεται γεωμετρικός μέσος. Η «γεωμετρικότητα» του γεωμετρικού μέσου όρου προέρχεται από το ότι το ύψος h στο παρακάτω σχήμα είναι ένα είδος μέσου όρου των a και b .



Παρατηρήστε ότι επειδή το $(a + b)/2$ είναι ακτίνα του κύκλου αναγκαστικά ισχύει

$$\frac{a + b}{2} \geq h$$

αλλά το h υπολογίζεται από το Θεώρημα ομοιότητας τριγώνων για τα τρίγωνα $\widehat{A\Delta B}$ και $\widehat{\Delta B \Gamma}$, από όπου προκύπτει

$$\frac{a}{h} = \frac{h}{b},$$

δηλαδή $h = \sqrt{ab}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.2. Από όλα τα παραλληλεπίπεδα όγκου V στον \mathbb{R}^n το ελάχιστο συνολικό μήκος ακμών διάστασης 1 το έχει ο κύβος.

Απόδειξη: Αν οι ακμές διάστασης 1 του παραλληλεπίπεδου έχουν μήκη a_1, \dots, a_n τότε ισχύει $V = a_1 a_2 \dots a_n$. Ο κύβος ίδιου όγκου πρέπει να έχει ακμή μήκους x ώστε

$$x^n = V = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Άρα $x = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

Αν υποθέσουμε ότι τα a_i είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους, οι ακμές του παραλληλεπίπεδου μήκους a_1 είναι ακριβώς όσες οι κορυφές του $[0, a_2] \times \dots \times [0, a_n]$, δηλαδή 2^{n-1} . Έτσι το σύνολο των ακμών διάστασης 1 του κύβου είναι $n2^{n-1}$. Άρα το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι

$$2^{n-1}(a_1 + \dots + a_n) \geq n2^{n-1} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

Ισοδύναμα

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}. \quad (2.1)$$

Η συντομότερη (μάλλον) απόδειξη της (2.1) είναι η εξής: θέτοντας

$$x_j = \frac{a_j}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$$

για κάθε j αρκεί να δείξουμε ότι $x_1 + \cdots + x_n \geq n$. Όμως ισχύει $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι αν $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ για θετικούς x_j , τότε αναγκαστικά $x_1 + \cdots + x_n \geq n$. Η απόδειξη με επαγωγή στο n είναι απλή εκτός από ένα λεπτό σημείο: Για $n = 1$ το ζητούμενο ισχύει προφανώς. Υποθέτουμε ότι ισχύει για n αριθμούς και έστω ότι οι x_1, \dots, x_{n+1} είναι $n+1$ θετικοί αριθμοί με $x_1 \cdots x_{n+1} = 1$. Αν είναι όλοι ίσοι με 1 τότε βεβαίως $x_1 + \cdots + x_{n+1} = n+1$. Αν κάποιος είναι μικρότερος του 1 αναγκαστικά (αφού $x_1 \cdots x_{n+1} = 1$) θα υπάρχει και κάποιος άλλος που θα είναι μεγαλύτερος του 1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας $x_1 > 1$ και $0 < x_2 < 1$. Επειδή φανερά $(x_1 x_2) x_3 \cdots x_{n+1} = 1$ και αυτό είναι γινόμενο n θετικών αριθμών ισχύει από την επαγωγική υπόθεση $x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} \geq n$. Ισοδύναμα

$$x_1 + x_2 + x_2 + \cdots + x_{n+1} \geq x_1 + x_2 - x_1 x_2 + n.$$

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί αν δείξουμε ότι $x_1 + x_2 - x_1 x_2 + n \geq n + 1$. Αλλά μετά τη διαγραφή του n αυτό είναι προφανές αφού είναι ισοδύναμο με την

$$(1 - x_2)(x_1 - 1) \geq 0$$

η οποία είναι αληθής.

Η απόδειξη του Cauchy: Η ανισότητα ισχύει για 2^n πλήθος όρων. Πράγματι, με επαγωγή, αν $n = 1$ η ανισότητα όπως είδαμε στην αρχή της ομιλίας ισχύει για $2 = 2^1$ όρους. Για $n = 2$ δηλαδή για $2^2 = 4$ όρους

$$(a_1 a_2 a_3 a_4)^{1/4} = ((a_1 a_2)^{1/2} (a_3 a_4)^{1/2})^{1/2}$$

και από την περίπτωση $n = 1$ η τελευταία ποσότητα είναι μικρότερη από

$$\frac{(a_1 a_2)^{1/2} + (a_3 a_4)^{1/2}}{2}.$$

Συνεχίζοντας από την περίπτωση $n = 1$ σε κάθε προσθετό του αριθμητή βρίσκουμε ότι

$$(a_1 a_2 a_3 a_4)^{1/4} \leq \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}.$$

Η απόδειξη συνεχίζεται με την ίδια μέθοδο επαγωγικά από την περίπτωση n στην περίπτωση $n + 1$ και αφήνεται ως άσκηση.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να την αποδείξουμε για ένα πλήθος n όρων που δεν είναι δύναμη του 2. Βρίσκουμε πρώτα φυσικό αριθμό k ώστε $n < 2^k$ και θέτουμε

$$a_{n+1} = \dots = a_{2^k} = A := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Έτσι συμπληρώσαμε τη λίστα των n αριθμών σε μια λίστα από 2^k αριθμούς, και από τα προηγούμενα θα ισχύει

$$(a_1 \dots a_n a_{n+1} \dots a_{2^k})^{1/2^k} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2^k}}{2^k}.$$

Ισοδύναμα

$$(a_1 \dots a_n)^{1/2^k} A^{\frac{2^k - n}{2^k}} \leq \frac{nA + (2^k - n)A}{2^k} = A.$$

Λύνοντας παίρνουμε ότι

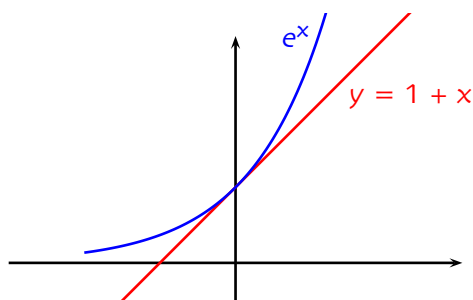
$$(a_1 \dots a_n)^{1/2^k} \leq A^{n/2^k}$$

από όπου $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq A$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.3 (Η ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΡΟΛΥΑ). Για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς a_1, \dots, a_n και θετικούς αριθμούς p_1, \dots, p_n με $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ ισχύει

$$a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + \dots + p_n a_n.$$

Απόδειξη: Επειδή $1 + x \leq e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,



με την ανισότητα να είναι γνήσια για $x \neq 0$, αν $A = p_1 a_1 + \dots + p_n a_n$, τότε

$$\frac{a_k}{A} < e^{\frac{a_k}{A} - 1}$$

εκτός αν $a_k = A$ οπότε ισχύει ισότητα. Άρα

$$\left(\frac{a_k}{A}\right)^{p_k} < e^{\frac{p_k a_k}{A} - p_k}$$

εκτός αν $a_k = A$ οπότε ισχύει ισότητα. Πολλαπλασιάζοντας όλες αυτές τις ανισότητες για $k = 1, \dots, n$ παίρνουμε

$$\frac{a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n}}{A^{\sum_{k=1}^n p_k}} < e^{\sum_{k=1}^n \frac{p_k a_k}{A} - \sum_{k=1}^n p_k} = e^{\frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k}{A} - 1} = e^{1-1} = 1,$$

εκτός αν $a_k = A$ για κάθε $k = 1, \dots, n$ οπότε ισχύει ισότητα. \square

2.2 Η ανισότητα Carleman

Η ανισότητα Carleman είναι μια γενίκευση της ανισότητας αριθμητικού γεωμετρικού μέσου σε άπειρο πλήθος αριθμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2.1 (CARLEMAN, 1923). Αν $a_1, \dots, a_n > 0$ τότε ισχύει

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_1 \dots a_k)^{1/k} \leq e \sum_{k=1}^n a_k.$$

Πριν την απόδειξη παρατηρούμε ότι η άμεση εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου δεν αποδίδει. Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι

$$(a_1 \dots a_k)^{1/k} \leq \frac{1}{k} \sum_{k=1}^n a_k,$$

και θέσουμε $\chi_{\{1, \dots, k\}}(j) = 1$ αν $j \in \{1, \dots, k\}$ και $\chi_{\{1, \dots, k\}}(j) = 0$ αν $j \notin \{1, \dots, k\}$, θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_1 \dots a_k)^{1/k} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k a_j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{1}{k} a_j \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \chi_{\{1, \dots, k\}}(j) \frac{1}{k} a_j = \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \chi_{\{1, \dots, k\}}(j) \\ &\leq \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=j}^n \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

διότι $\chi_{\{1, \dots, k\}}(j) = 1$ αν και μόνο αν $j \leq k$ αν και μόνο αν $\chi_{\{j+1, \dots, n\}}(k) = 1$. Αλλά όταν αφήσουμε το n να πάει στο άπειρο η σειρά $\sum_{k=j}^n 1/k$ απειρίζεται και δεν παίρνουμε κανένα αποτέλεσμα.

Στην παρακάτω απόδειξη, η ιδέα του Polya είναι να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου αλλά αφού πρώτα τροποποιήσουμε με κατάλληλα βάρη τα a_j .

Απόδειξη (Ρολγα, 1926): Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς c_j , $j \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (a_1 \cdots a_k)^{1/k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(c_1 a_1 \cdots c_k a_k)^{1/k}}{(c_1 \cdots c_k)^{1/k}} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_1 a_1 + \cdots c_k a_k}{k(c_1 \cdots c_k)^{1/k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(c_1 \cdots c_k)^{1/k}} \sum_{j=1}^k c_j a_j \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j(c_1 c_2 \cdots c_j)^{1/j}}. \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε αριθμούς c_j που να κάνουν συγκλίνουσα την τελευταία σειρά. Αν βρω αριθμούς c_j ώστε να ισχύει $(c_1 c_2 \cdots c_j)^{1/j} = j + 1$ τότε η τελευταία σειρά θα είναι η $\sum_{j=k}^{\infty} 1/(j(j+1))$ η οποία είναι τηλεσκοπική και συγκλίνει στο $1/k$. Έτσι θα καταλήξουμε στην

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_1 \cdots a_k)^{1/k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k \frac{1}{k}.$$

Αναζητώντας τέτοια c_j παρατηρούμε ότι

$$j + 1 = (c_1 c_2 \cdots c_j)^{1/j} = \left(\left((c_1 \cdots c_{j-1})^{1/(j-1)} \right)^{j-1} c_j \right)^{1/j} = (j^{j-1} c_j)^{1/j}.$$

Λύνοντας καταλήγουμε στο ότι

$$\frac{c_j}{j} = \left(1 + \frac{1}{j} \right)^j.$$

Άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_1 \cdots a_k)^{1/k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αν παρατηρήσουμε ότι η ακολουθία $(1 + \frac{1}{k})^k$ είναι αύξουσα με όριο το e (δες [ΣΑ] Λήμμα 5.2.1 σελ. 116), οπότε είναι πάντα μικρότερη του e . \square

Αναφορές

[ΣΑ] Αντώνης Τσολομύτης, *Σύνολα και Αριθμοί*, Leader Books 2004.

Ομιλία 3

Μια τεχνική στις ανισότητες: The Flop

Αντώνης Τσολομύτης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
atsol@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: εσωτερικά γινόμενα,
ολοκλήρωση

3.1 Η ανισότητα Hölder

Κατ' αρχάς θα χρειαστούμε την ανισότητα Cauchy–Schwarz την οποία θεωρούμε γνωστή, αλλά και την ανισότητα Hölder, την οποία θα αποδείξουμε. Με αυτή την ευκαιρία θα παρουσιάσουμε μια άλλη απόδειξη (επαγωγική), διαφορετική από τη συνηθισμένη που είναι μέσω της ανισότητας Young. Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς a_j, b_j και $p \geq 1$ ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^n a_j b_j \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n b_j^q \right)^{1/q},$$

όπου $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Δείχνουμε πρώτα με επαγωγή στο n ότι για p της μορφής 2^m και για μη αρνητικούς αριθμούς a_{ij} με $j = 1, \dots, n$ και

$i = 1, \dots, p = 2^m$ ισχύει

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{1j} a_{2j} \cdots a_{pj} \right)^p \leq \sum_{j=1}^n a_{1j}^p \sum_{j=1}^n a_{2j}^p \cdots \sum_{j=1}^n a_{pj}^p.$$

Για $m = 1$ η προηγούμενη γίνεται

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{1j} a_{2j} \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n a_{1j}^2 \sum_{j=1}^n a_{2j}^2,$$

η οποία ισχύει γιατί είναι η ανισότητα Cauchy–Schwarz. Δείχνουμε πώς προχωράει η απόδειξη για $m = 3$ και αφήνουμε ως άσκηση την περίπτωση $m = 2$ και το επαγωγικό βήμα. Για $m = 3$, οπότε $p = 8$ χρησιμοποιούμε ομαδοποίηση των όρων και την ανισότητα Cauchy–Schwarz:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} a_{2j} a_{3j} a_{4j} a_{5j} a_{6j} a_{7j} a_{8j} \right)^8 \\ & \leq \left(\left(\sum_{j=1}^n (a_{1j} a_{2j} a_{3j} a_{4j})^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n (a_{5j} a_{6j} a_{7j} a_{8j})^2 \right)^{1/2} \right)^8 \\ & \leq \left(\sum_{j=1}^n (a_{1j} a_{2j})^2 (a_{3j} a_{4j})^2 \sum_{j=1}^n (a_{5j} a_{6j})^2 (a_{7j} a_{8j})^2 \right)^4 \\ & \leq \left(\left(\sum_{j=1}^n (a_{1j} a_{2j})^4 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n (a_{3j} a_{4j})^4 \right)^{1/2} \right. \\ & \quad \left. \left(\sum_{j=1}^n (a_{5j} a_{6j})^4 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n (a_{7j} a_{8j})^4 \right)^{1/2} \right)^4 \\ & \leq \left(\sum_{j=1}^n (a_{1j} a_{2j})^4 \sum_{j=1}^n (a_{3j} a_{4j})^4 \sum_{j=1}^n (a_{5j} a_{6j})^4 \sum_{j=1}^n (a_{7j} a_{8j})^4 \right)^2 \\ & \leq \left(\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}^8 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n a_{2j}^8 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n a_{3j}^8 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n a_{4j}^8 \right)^{1/2} \right. \\ & \quad \left. \left(\sum_{j=1}^n a_{5j}^8 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n a_{6j}^8 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n a_{7j}^8 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n a_{8j}^8 \right)^{1/2} \right)^2 \\ & \leq \sum_{j=1}^n a_{1j}^8 \sum_{j=1}^n a_{2j}^8 \sum_{j=1}^n a_{3j}^8 \sum_{j=1}^n a_{4j}^8 \sum_{j=1}^n a_{5j}^8 \sum_{j=1}^n a_{6j}^8 \sum_{j=1}^n a_{7j}^8 \sum_{j=1}^n a_{8j}^8, \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη για $m = 3$.

Αν για $k \in \{1, 2, \dots, p = 2^m\}$, θέσουμε $a_{1j} = \dots = a_{kj} =: a_j$ και $a_{k+1,j} = \dots = a_{pj} =: b_j$ για $j = 1, 2, \dots, n$, τότε παίρνουμε

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j^k b_j^{p-k} \right)^p \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^p \right)^k \left(\sum_{j=1}^n b_j^p \right)^{p-k}.$$

Ισοδύναμα,

$$\sum_{j=1}^n a_j^k b_j^{p-k} \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^p \right)^{k/p} \left(\sum_{j=1}^n b_j^p \right)^{1-k/p}.$$

Αντικαθιστώντας $x_j = a_j^k$ και $y_j = b_j^{p-k}$, δηλαδή $a_j = x_j^{1/k}$ και $b_j = y_j^{1/(p-k)}$, παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^n x_j y_j \leq \left(\sum_{j=1}^n x_j^{p/k} \right)^{1/(p/k)} \left(\sum_{j=1}^n y_j^{1/(1-k/p)} \right)^{1-1/(p/k)}.$$

Δηλαδή αποδείχθηκε η ανισότητα Hölder για εκθέτες της μορφής $2^m/k$ όπου $k \in \{1, 2, \dots, 2^m\}$.

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί αν δείξουμε ότι οι αριθμοί της μορφής $2^m/p$ είναι πυκνοί στο σύνολο $[1, \infty)$. Αυτό αφήνεται ως άσκηση με την υπόδειξη ότι είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι το σύνολο $\{k/2^m : m \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \dots, 2^m\}$ είναι πυκνό στο διάστημα $[0, 1]$.

3.2 The flop: πρώτο παράδειγμα

Το ενδιαφέρον σημείο στο οποίο θέλουμε να βάλουμε έμφαση είναι ένα σημείο στην απόδειξη της ανισότητας Minkowski:

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p},$$

το οποίο την πρώτη φορά που το βλέπει κάποιος του δίνει την εντύπωση ότι συνέβη κάτι ...μαγικό. Η απόδειξη αυτής της ανισότητας ξεκινάει με το να ξεχωρίσουμε ένα παράγοντα $|a_k + b_k|$ από τους p παράγοντες στα αριστερά, να κάνουμε σε αυτόν τριγωνική ανισότητα και να καταλήξουμε στην (3.1) παρακάτω:

$$\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p = \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{p-1} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{p-1} (|a_k| + |b_k|),$$

δηλαδή

$$\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{p-1} |a_k| + \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{p-1} |b_k|. \quad (3.1)$$

Παρατηρήστε ότι αυτό που έχουμε πετύχει στην τελευταία ανισότητα είναι να «ρίξουμε» τον εκθέτη από p σε $p - 1$. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Hölder χρησιμοποιώντας για εκθέτη στη Hölder το $p/(p - 1)$, ώστε να Ξανα-ανεβάσουμε τους εκθέτες $p - 1$ στην (3.1) σε p .

Λέμε ότι η ανισότητα (3.1) βρίσκεται σε *preflop* κατάσταση. Ενώ η μετάβαση από τον μειωμένο εκθέτη $p - 1$ Ξανά στον p ονομάζεται *flop* (ή λέμε ότι «εφαρμόζουμε το flop»).

Εφαρμόζοντας λοιπόν την Hölder στο δεύτερο μέρος της (3.1) θα πάρουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p &\leq \left(\sum_{k=1}^n (|a_k + b_k|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^{\left(\frac{p}{p-1}\right)'} \right)^{1/\left(\frac{p}{p-1}\right)'} \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^n (|a_k + b_k|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^{\left(\frac{p}{p-1}\right)'} \right)^{1/\left(\frac{p}{p-1}\right)'} \end{aligned}$$

όπου με τόνο συμβολίσαμε τον δυϊκό εκθέτη του $p/(p - 1)$ (δηλαδή

$$\frac{1}{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{\left(\frac{p}{p-1}\right)'} = 1.$$

Διαιρώντας τώρα με τον κοινό παράγοντα του δεύτερου μέρους θα πάρουμε την ανισότητα Minkowski.

Το θέμα μας εδώ δεν είναι η ανισότητα αυτή καθαυτή αλλά η τεχνική του flop. Στο επόμενο βλέπουμε ακόμα ένα παράδειγμα.

3.3 Η ανισότητα του Hardy

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.1. Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f στο $[0, \infty)$ ισχύει

$$\int_0^T \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \right)^2 dx \leq 4 \int_0^T f^2(x) dx.$$

Επιπλέον, η σταθερά 4 είναι βέλτιστη.

Απόδειξη: Ελέγχουμε πρώτα ότι η σταθερά 4 είναι βέλτιστη. Πράγ-

ματι, για $f(x) = x^\alpha$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \right)^2 dx &= \int_0^T \left(\frac{1}{x} \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^x \right)^2 dx \\ &= \int_0^T \frac{1}{(\alpha+1)^2} x^{2\alpha} dx \\ &= \frac{1}{(\alpha+1)^2} \frac{T^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}. \end{aligned}$$

Επίσης

$$\int_0^T (x^\alpha)^2 dx = \frac{T^{2\alpha+1}}{2\alpha+1},$$

με $\alpha > -1/2$. Άρα αν υπάρχει $C > 0$ ώστε να ισχύει η ανισότητα του Hardy θα πρέπει για κάθε $\alpha > -1/2$ να ισχύει

$$\frac{1}{(\alpha+1)^2(2\alpha+1)} \leq \frac{C}{2\alpha+1},$$

δηλαδή $(\alpha+1)^{-2} \leq C$. Αφήνοντας το α να πλησιάζει το $-1/2$ από δεξιά προκύπτει $C \geq 4$. Άρα αν υπάρχει τέτοια σταθερά C δεν γίνεται να είναι μικρότερη του 4.

Για να αποδείξουμε τώρα την ανισότητα, αναζητούμε μια preflor κατάσταση. Θέλουμε δηλαδή να φράξουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^T \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \right)^2 dx$$

από μια ανάλογη έκφραση αλλά με εκθέτη μικρότερο του 2. Παρατηρούμε ότι η ολοκλήρωση κατά παράγοντες είναι μια διαδικασία που μειώνει τους εκθέτες! Πριν εφαρμόσουμε την ολοκλήρωση κατά παράγοντες παρατηρούμε ότι αν $\int_0^T |f(u)|^2 du = \infty$ η ανισότητα Hardy ισχύει. Οπότε υποθέτουμε ότι $\int_0^T |f(u)|^2 du < \infty$. Τώρα έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \right)^2 dx &= \int_0^T \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x f(u) du \right)^2 dx \\ &= \int_0^T \left(-\frac{1}{x} \right)' \left(\int_0^x f(u) du \right)^2 dx \\ &= -\frac{1}{x} \left(\int_0^x f(u) du \right)^2 \Big|_{x=0}^{x=T} + \int_0^T \frac{1}{x} 2 \int_0^x f(u) du \cdot f(x) dx \\ &= 2 \int_0^T \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \right) \cdot f(x) dx - \frac{1}{T} \left(\int_0^T f(u) du \right)^2, \end{aligned}$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1} \left(\int_0^x f(u) du \right)^2 = 0$, αφού

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x f(u) du \right| &\leq \left(\int_0^x 1^2 du \right)^{1/2} \left(\int_0^x f^2(u) du \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{x} \left(\int_0^x f^2(u) du \right)^{1/2} \end{aligned}$$

άρα

$$\frac{1}{x} \left(\int_0^x f(u) du \right)^2 \leq \left(\int_0^x f^2(u) du \right)^{1/2} \rightarrow 0,$$

για $x \rightarrow 0$. Άρα

$$\int_0^T \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \right)^2 dx \leq 2 \int_0^T \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \right) f(x) dx, \quad (3.2)$$

μια p-reflor ανισότητα, αφού έχουμε μετάπτωση του εκθέτη από 2 σε 1. Οπότε τώρα εφαρμόζουμε το flop:

$$\leq 2 \left(\int_0^T \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^T f^2(x) dx \right)^{1/2},$$

άρα

$$\left(\int_0^T \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq 2 \left(\int_0^T f^2(x) dx \right)^{1/2},$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

3.4 Η διακριτή ανισότητα Hardy

Θα μπορούσαμε άραγε στην ανισότητα Carleman (η οποία αποδείχθηκε στην Πρόταση 2.2.1 σελίδα 13)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_1 \dots a_k)^{1/k} \leq e \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

να αντικαταστήσουμε τον γεωμετρικό μέσο σε αριθμητικό (στο τετράγωνο); Η ανισότητα Hardy μας υποψιάζει ότι θα μπορούσε να ισχύει

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq C \sum_{n=1}^N a_n^2.$$

Θα δούμε ότι αυτή η «διακριτή ανισότητα Hardy» ισχύει με $C = 4$.

Θα θέλαμε να αποδείξουμε μια *preflor* ανισότητα της μορφής

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq 2 \sum_{n=1}^N \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} a_n,$$

σε αναλογία με την *preflor* ανισότητας της συναρτησιακής Hardy (δείτε σχέση (3.2)).

Αν θέσουμε $A_n = (a_1 + \dots + a_n)/n$, τότε θέλουμε να ισχύει η

$$\sum_{n=1}^N A_n^2 \leq 2 \sum_{n=1}^N A_n a_n,$$

η οποία ισχύει αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^N (A_n^2 - 2a_n A_n) \leq 0.$$

Όμως

$$\begin{aligned} A_n^2 - 2a_n A_n &= A_n^2 - 2A_n(nA_n - (n-1)A_{n-1}) \\ &= A_n^2 - 2nA_n^2 + 2(n-1)A_n A_{n-1} \\ &= (1-2n)A_n^2 + 2(n-1)A_n A_{n-1} \end{aligned}$$

και εφαρμόζοντας την $2xy \leq x^2 + y^2$

$$\begin{aligned} &\leq (1-2n)A_n^2 + (n-1)(A_n^2 + A_{n-1}^2) \\ &\leq (n-1)A_{n-1}^2 - nA_n^2, \end{aligned}$$

δηλαδή η τελευταία σειρά φράσσεται από μια τηλεσκοπική! Άρα

$$\sum_{n=1}^N (A_n^2 - 2a_n A_n) \leq \sum_{n=1}^N ((n-1)A_{n-1}^2 - nA_n^2) = -NA_N^2 < 0.$$

Συνεπώς πράγματι ισχύει η *preflor*, και τώρα εφαρμόζουμε το *flor*:

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq 2 \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \right)^{1/2},$$

άρα

$$\left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \right)^{1/2} \leq 2 \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \right)^{1/2}.$$

Άσκηση: Αποδείξτε την p -ανισότητα Hardy: για $p > 1$ και $f \geq 0$ ισχύει

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x) dx,$$

δείχνοντας πρώτα την preflop ανισότητα

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \frac{p}{p-1} \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^{p-1} f(x) dx,$$

χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Άσκηση: Αποδείξτε την p -διακριτή ανισότητα Hardy: για $p > 1$ και $a_n \geq 0$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^p < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p.$$

3.5 Μια εφαρμογή για προχωρημένους

Θεωρήστε τον τελεστή Schrödinger

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{c}{x^2}$$

στο $(0, \infty)$ με συνοριακή συνθήκη Dirichlet στο 0. Μια φυσιολογική ερώτηση είναι τότε ο H είναι θετικός τελεστής στον $L^2(0, \infty)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\langle \psi, H\psi \rangle \geq 0$ είναι ισοδύναμη με την

$$\int_0^\infty |\psi'(x)|^2 dx \geq c \int_0^\infty \left| \frac{\psi(x)}{x} \right|^2 dx.$$

Άρα η ανισότητα Hardy δίνει θετική απάντηση για $c \geq 1/4$.



Ομιλία 4

Τα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας: ο διπλασιασμός του κύβου

Μιχάλης Ανούσης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
mano@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: -

Ο διπλασιασμός του κύβου είναι ένα από τα μεγάλα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας. Έχει απασχολήσει τους Έλληνες μαθηματικούς από τον 5ο αιώνα π.Χ. Το πρόβλημα αυτό είναι το ακόλουθο: Να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη κύβος με διπλάσιο όγκο από έναν κύβο με γνωστή ακμή. Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε από πολλούς μαθηματικούς και λύθηκε το 1837 από τον Γάλλο μαθηματικό Pierre Laurent Wantzel ο οποίος απέδειξε ότι αυτή η κατασκευή είναι αδύνατη. Η εργασία του έχει τίτλο *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas* και δημοσιεύτηκε στο *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 2, 1837, pp. 366–372.

Στην παρουσίαση αυτή θα περιγράψουμε μια απόδειξη του αποτελέσματος του Wantzel. Η απόδειξη που θα κάνουμε ακολουθεί την απόδειξη που βρίσκεται στο βιβλίο του C. R. Hadlock, *Field theory and its classical problems*, Mathematical Association of America, 1978. Πληροφορίες για τα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας υπάρχουν στα βιβλία της Θεωρίας Galois.

Το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου είναι ισοδύναμο με την κατασκευή με πεπερασμένα βήματα με κανόνα και διαβήτη από δύο σημεία A και B του επιπέδου ενός σημείου C τέτοιου ώστε το AC να είναι ίσο με $\sqrt[3]{2}$ φορές το μήκος του AB . Η κεντρική ιδέα της απόδειξης είναι η ακόλουθη: Σε κάθε σύνολο σημείων του επιπέδου αντιστοιχίζουμε ένα σώμα. Όταν από ένα σύνολο σημείων S κατασκευάζουμε ένα άλλο σημείο A , το σώμα που αντιστοιχεί στο νέο σύνολο σημείων $S \cup \{A\}$ περιέχει το σώμα που αντιστοιχεί στο S και μάλιστα προκύπτει από το σώμα αυτό με ένα συγκεκριμένο τρόπο. Θα δείξουμε ότι αν ξεκινήσουμε από δύο σημεία A και B του επιπέδου, δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε με πεπερασμένα βήματα με κανόνα και διαβήτη ένα σημείο C τέτοιο ώστε το AC να είναι ίσο με $\sqrt[3]{2}$ φορές το μήκος του AB διότι η κατασκευή του νέου σώματος που αντιστοιχεί στο τελικό σύνολο των σημείων δεν είναι επιτρεπτή.

Θα ξεκινήσουμε με μια απλή πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.0.1. Ο $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι ρητός.

Απόδειξη: Έστω ότι ο $\sqrt[3]{2}$ είναι ρητός. Γράφουμε $\sqrt[3]{2} = p/q$ με p, q ακέραιους και p/q ανάγωγο. Έχουμε:

$$\sqrt[3]{2} = p/q \Leftrightarrow 2 = p^3/q^3 \Leftrightarrow 2q^3 = p^3.$$

Άρα ο p είναι ζυγός, $p = 2r$ για κάποιον ακέραιο r . Τότε

$$2q^3 = 8r^3 \Leftrightarrow q^3 = 4r^3$$

και ο q είναι ζυγός, που είναι άτοπο γιατί το p/q είναι ανάγωγο. \square

4.1 Σώματα

Θα δώσουμε τον ορισμό του σώματος και μερικά παραδείγματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1. Έστω ότι το F είναι ένα σύνολο με δύο τουλάχιστον στοιχεία, $0, 1$ και δύο πράξεις, πρόσθεση $(a, b) \mapsto a + b$ και πολλαπλασιασμό $(a, b) \mapsto ab$. Το F είναι σώμα αν ισχύουν οι εξής:

(i) $a + (b + c) = (a + b) + c$, για κάθε $a, b, c \in F$

(ii) για κάθε $a \in F$ ισχύει $a + 0 = 0 + a = a$

(iii) για κάθε $a \in F$ υπάρχει $-a \in F$ ώστε $a + (-a) = (-a) + a = 0$

(iv) $a(bc) = (ab)c$, για κάθε $a, b, c \in F$

(v) $a + b = b + a$ και $ab = ba$, για κάθε $a, b \in F$.

(vi) για κάθε $a \in F$ ισχύει $a1 = 1a = a$

- (vii) για κάθε $a \in F$ με $a \neq 0$ υπάρχει $a^{-1} \in F$ ώστε $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$
- (viii) $a(b + c) = ab + ac$, για κάθε $a, b, c \in F$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 4.1.2. Στα παρακάτω παραδείγματα οι πράξεις είναι η συνήθης πρόσθεση και ο συνήθης πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών.

- (i) \mathbb{Q} .
- (ii) \mathbb{R} .
- (iii) \mathbb{C} .
- (iv) $\{p + q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Q}\}$.
- (v) $\{p + q\sqrt[3]{5} + r\sqrt[3]{5^2} : p, q, r \in \mathbb{Q}\}$.
- (vi) $\{p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} + s\sqrt{6} : p, q, r, s \in \mathbb{Q}\}$.

Όλα τα σώματα που θα αναφερθούν στην παρουσίαση αυτή περιέχονται στο σώμα \mathbb{R} και οι πράξεις τους είναι η συνήθης πρόσθεση και ο συνήθης πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών.

Αν F είναι ένα σώμα που περιέχεται στο \mathbb{R} και S ένα υποσύνολο του \mathbb{R} συμβολίζουμε $F(S)$ το μικρότερο σώμα που περιέχει το F και το S .

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 4.1.3. (i) $\mathbb{Q}(\sqrt{7}) = \mathbb{Q}$.
- (ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{p + q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Q}\}$.
- (iii) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) = \{p + q\sqrt[3]{5} + r\sqrt[3]{5^2} : p, q, r \in \mathbb{Q}\}$.

4.2 Κατασκευάσιμα σημεία

Έστω ότι το E είναι ένα σύνολο σημείων του επιπέδου. Συμβολίζουμε D_E το σύνολο των ευθειών του επιπέδου που διέρχονται (ορίζονται) από δύο σημεία του E και C_E το σύνολο των κύκλων του επιπέδου των οποίων το κέντρο είναι ένα σημείο του E και η ακτίνα τους είναι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων του E .

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2.1. Ένα σημείο του επιπέδου λέγεται κατασκευάσιμο σε ένα βήμα από το E εάν είναι:

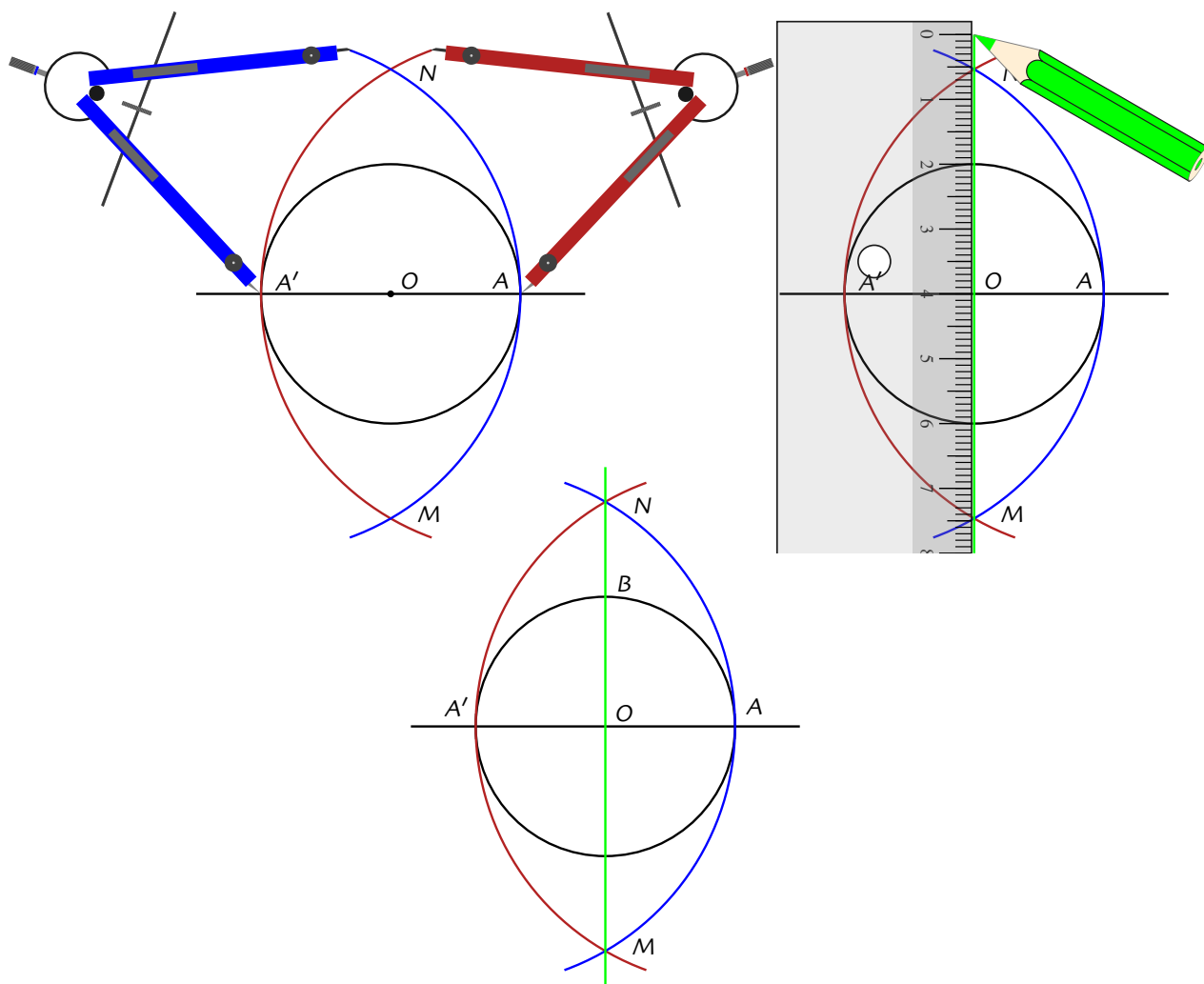
- (i) τομή δύο ευθειών του D_E ,
- (ii) τομή μίας ευθείας του D_E και ενός κύκλου του C_E ,
- (iii) τομή δύο κύκλων του C_E .

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2.2. Ένα σημείο του επιπέδου λέγεται κατασκευάσιμο σε n βήματα από το E εάν υπάρχουν σημεία P_1, P_2, \dots, P_n του επιπέδου ώστε $P = P_n$ και το P_j είναι κατασκευάσιμο σε ένα βήμα από το $E \cup \{P_j, j < i\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2.3. Ένα σημείο του επιπέδου P λέγεται κατασκευάσιμο από το E εάν υπάρχει n ώστε το P είναι κατασκευάσιμο σε n βήματα από το E .

Αν A, B είναι δύο σημεία του επιπέδου θα συμβολίζουμε $D(A, B)$ την ευθεία που διέρχεται από τα A, B . Αν A, B, C είναι σημεία του επιπέδου θα συμβολίζουμε $C(A, BC)$ τον κύκλο κέντρου A και ακτίνας BC .

Δίνονται δύο σημεία στο επίπεδο O, A . Κατασκευάζουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα (O, A, B) ως εξής:

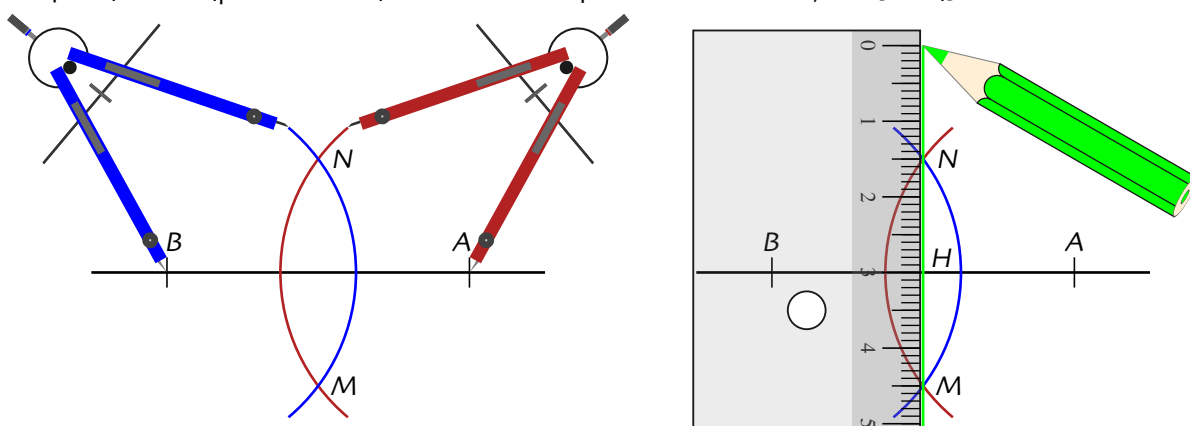


Θεωρούμε τον κύκλο $C(O, OA)$ με κέντρο O και ακτίνα OA . Συμβολίζουμε A' το σημείο τομής του κύκλου $C(O, OA)$ και της ευθείας OA . Θεωρούμε τον κύκλο $C(A, AA')$ με κέντρο A και ακτίνα AA' και τον κύκλο $C(A', AA')$ με κέντρο A' και ακτίνα AA' . Συμβολίζουμε M και N τα σημεία τομής των κύκλων $C(A, AA')$ και $C(A', AA')$. Θεωρούμε την ευθεία

$D(M, N)$ που ορίζεται από τα σημεία M και N . Συμβολίζουμε B ένα σημείο τομής της ευθείας $D(M, N)$ και του κύκλου $C(O, OA)$. Τότε η ευθεία $D(O, A)$ είναι κάθετη στην ευθεία $D(O, B)$ και το μήκος του OA είναι ίσο με το μήκος του OB . Άρα οι ευθείες $D(O, A)$ και $D(O, B)$ και τα ευθύγραμμα τμήματα OA και OB αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα.

Θα συμβολίζουμε (O, A, B) το ορθοκανονικό σύστημα που κατασκευάστηκε όπως παραπάνω από τα σημεία O, A .

Θεωρούμε τρία σημεία A, B, M του επιπέδου. Κατασκευάζουμε την προβολή του σημείου M στην ευθεία που ορίζεται από τα A, B ως εξής:



Θεωρούμε τον κύκλο $C(A, AM)$ με κέντρο A και ακτίνα AM και τον κύκλο $C(B, BM)$ με κέντρο B και ακτίνα BM . Συμβολίζουμε N το άλλο σημείο τομής των κύκλων $C(A, AM), C(B, BM)$. Θεωρούμε την ευθεία $D(M, N)$ που ορίζεται από τα σημεία M και N . Συμβολίζουμε H το σημείο τομής των ευθειών $D(M, N)$ και $D(A, B)$. Το H είναι η προβολή του σημείου M στην ευθεία $D(A, B)$ που ορίζεται από τα A, B .

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2.4. Έστω S ένα σύνολο σημείων του επιπέδου με δύο τουλάχιστον σημεία O, A . Ένα σημείο είναι κατασκευάσιμο από το S αν και μόνον αν οι συντεταγμένες του ως προς το ορθοκανονικό σύστημα (O, A, B) είναι κατασκευάσιμες.

4.3 Σώματα και κατασκευάσιμα σημεία

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3.1. Έστω ότι το S είναι ένα σύνολο σημείων του επιπέδου με δύο τουλάχιστον σημεία O, A . Αντιστοιχίζουμε στο S ένα σώμα ως εξής: Το σώμα αυτό παράγεται από το \mathbb{Q} και τις συντεταγμένες των σημείων του S ως προς το ορθοκανονικό σύστημα (O, A, B) .

Παρατηρούμε ότι αν S είναι ένα σύνολο σημείων του επιπέδου με αντίστοιχο σώμα F και P είναι ένα σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες

(p, q) , τότε προκύπτει από την Πρόταση 4.2.4 ότι το σώμα που αντιστοιχεί στο σύνολο $S \cup \{P\}$ είναι το $F(\{(p, q)\})$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 4.3.2. (i) Αν O, A είναι δύο σημεία του επιπέδου τότε το σώμα που αντιστοιχεί στο σύνολο σημείων $\{O, A\}$ είναι το \mathbb{Q} .

(ii) Αν O, A είναι δύο σημεία του επιπέδου και B είναι τέτοιο ώστε το (O, A, B) να είναι το ορθοκανονικό σύστημα που κατασκευάστηκε από τα O, A τότε το σώμα που αντιστοιχεί στο σύνολο σημείων $\{O, A, B\}$ είναι το \mathbb{Q} .

(iii) Αν O, A είναι δύο σημεία του επιπέδου, (O, A, B) είναι το ορθοκανονικό σύστημα που κατασκευάστηκε από τα O, A και C το σημείο ώστε το $OACB$ να είναι τετράγωνο τότε το σώμα που αντιστοιχεί στο σύνολο σημείων $\{O, A, B, C\}$ είναι το \mathbb{Q} .

(iv) Αν $\{O, A, B, C\}$ είναι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα και το σημείο D είναι η τομή του κύκλου $C(O, OC)$ και της ευθείας $D(O, A)$, τότε το σώμα που αντιστοιχεί στο σύνολο σημείων $\{O, A, B, C, D\}$ είναι το $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.3.3. Έστω ότι το S είναι ένα σύνολο σημείων του επιπέδου. Θεωρούμε δυο σημεία O και A στο S και το ορθοκανονικό σύστημα (O, A, B) όπως παραπάνω. Έστω ότι το F είναι το αντίστοιχο σώμα του συνόλου S . Η εξίσωση μιας ευθείας που ορίζεται από δύο σημεία του S είναι της μορφής

$$ax + by + c = 0$$

με $a, b, c \in F$. Η εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο ένα σημείο του S και ακτίνα την απόσταση μεταξύ δύο σημείων του S είναι της μορφής:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

με $a, b, c \in F$.

Απόδειξη: Αν $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ είναι σημεία του S , τότε η ευθεία που ορίζουν έχει εξίσωση

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$$

και άρα είναι της μορφής

$$ax + by + c = 0$$

με $a, b, c \in F$. Η εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα την απόσταση δύο σημείων (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

και άρα είναι της μορφής:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

με $a, b, c \in F$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.3.4. Έστω ότι το E είναι ένα σύνολο σημείων με αντίστοιχο σώμα F . Εάν P είναι ένα σημείο με συντεταγμένες (p, q) κατασκευάσιμο σε ένα βήμα από το E , τότε $F(\{p, q\}) = F$ ή $F(\{p, q\}) = F(\sqrt{r})$ για κάποιο $r \in F$ με $\sqrt{r} \notin F$. Σε αυτή την περίπτωση,

$$F(\sqrt{r}) = \{a + b\sqrt{r} : a, b \in F\}.$$

Απόδειξη: Αν το P είναι η τομή δύο ευθειών του D_E , τότε οι συντεταγμένες του (p, q) ικανοποιούν τις

$$ax + by + c = 0$$

$$a'x + b'y + c' = 0$$

με $a, b, c, a', b', c' \in F$ και άρα $F(\{p, q\}) = F$.

Αν το P είναι η τομή μίας ευθείας του D_E και ενός κύκλου του C_E τότε οι συντεταγμένες του (p, q) ικανοποιούν τις

$$ax + by + c = 0$$

$$x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$$

με $a, b, c, a', b', c' \in F$.

Υποθέτουμε ότι $a \neq 0$ (με όμοιο τρόπο χειριζόμαστε την περίπτωση που $a = 0$ και $b \neq 0$). Τότε

$$p = -(bq + c)/a$$

και

$$(-(bq + c)/a)^2 + q^2 + a'(-(bq + c)/a) + b'q + c' = 0.$$

Αν r είναι η διακρίνουσα, έχουμε τις εξής περιπτώσεις: Αν $r < 0$ η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες και η ευθεία και ο κύκλος δεν τέμνονται. Αν $\sqrt{r} \in F$, τότε $q \in F$. Επίσης $p = -(bq + c)/a \in F$ και άρα $F(\{p, q\}) = F$. Αν $\sqrt{r} \notin F$, τότε $q \in F(\sqrt{r})$. Επίσης $p = -(bq + c)/a \in F(\sqrt{r})$ και άρα $F(\{p, q\}) = F(\sqrt{r})$.

Αν το P είναι η τομή δύο κύκλων του C_E τότε οι συντεταγμένες του (p, q) ικανοποιούν τις

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$$

με $a, b, c, a', b', c' \in F$. Δηλαδή ικανοποιούν το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\(a - a')x + (b - b')y + c - c' &= 0,\end{aligned}$$

και άρα αναγόμεσθε στην προηγούμενη περίπτωση. \square

Από τα προηγούμενα προκύπτει το ακόλουθο:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3.5. Έστω ότι το E είναι ένα σύνολο σημείων με αντίστοιχο σώμα F . Εάν P είναι ένα σημείο με συντεταγμένες (p, q) κατασκευάσιμο από το E , τότε υπάρχουν σώματα F_0, F_1, \dots, F_m ώστε

(i) $F_0 = F$

(ii) $F_i \subseteq \mathbb{R}$ για κάθε i και $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_m$

(iii) $F_{i+1} = F_i(\sqrt{r_i})$ για κάποιο $r_i \in F_i$ με $\sqrt{r_i} \notin F_i$

(iv) $p, q \in F_m$.

\square

4.4 Διπλασιασμός του κύβου

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.4.1. Έστω ότι το F είναι ένα σώμα που περιέχει το \mathbb{Q} και περιέχεται στο \mathbb{R} , και $r \in F$ με $\sqrt{r} \notin F$. Εάν $\sqrt[3]{2} \in F(\sqrt{r})$ τότε $\sqrt[3]{2} \in F$.

Απόδειξη: Έστω ότι ισχύει $\sqrt[3]{2} \in F(\sqrt{r})$. Τότε $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{r}$ με $a, b \in F$. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $(a + b\sqrt{r})^3 = 2$ τότε και $(a - b\sqrt{r})^3 = 2$. Έχουμε

$$(a + b\sqrt{r})^3 = 2$$

αν και μόνο αν

$$a^3 + 3a^2b\sqrt{r} + 3ab^2\sqrt{r}^2 + b^3\sqrt{r}^3 = 2$$

αν και μόνο αν

$$a^3 + 3ab^2r + (3a^2b + b^3r)\sqrt{r} = 2.$$

Επειδή $\sqrt{r} \notin F$ συνεπάγεται $(3a^2b + b^3r) = 0$. Άρα

$$\begin{aligned}(a - b\sqrt{r})^3 &= a^3 - 3a^2b\sqrt{r} + 3ab^2\sqrt{r}^2 - b^3\sqrt{r}^3 \\ &= a^3 + 3ab^2r - (3a^2b + b^3r)\sqrt{r} \\ &= 2.\end{aligned}$$

Η x^3 είναι γνησίως αύξουσα και άρα $1 - 1$. Άρα $(a + b\sqrt{r})^3 = (a - b\sqrt{r})^3$ οπότε $a + b\sqrt{r} = a - b\sqrt{r}$ συνεπώς $b = 0$, από όπου προκύπτει ότι $\sqrt[3]{2} = a \in F$. \square

Από το επόμενο θεώρημα προκύπτει ότι ο διπλασιασμός του κύβου είναι αδύνατον να λυθεί με κανόνα και διαβήτη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.4.2. *Ο $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι κατασκευάσιμος.*

Απόδειξη: Θέτουμε $F = \mathbb{Q}$. Αν ο $\sqrt[3]{2}$ είναι κατασκευάσιμος, τότε από το Θεώρημα 4.3.5 και τις Προτάσεις 4.3.4 και 4.4.1 προκύπτει ότι $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$. Αυτό είναι άτοπο γιατί είδαμε στην Πρόταση 4.0.1 ότι ο $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι ρητός. Άρα ο $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι κατασκευάσιμος. \square

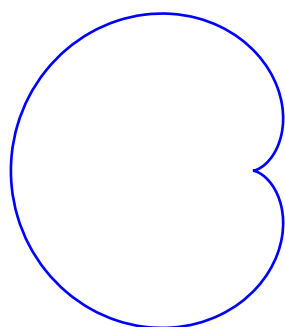
Ομιλία 5

Μια μαθηματική συνταγή για μια «καρδιά»

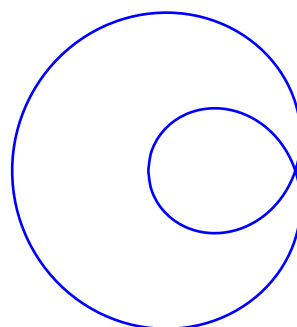
Χαράλαμπος Τσιχλιάς

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
tsichlias@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: Ευκλείδεια γεωμετρία,
τριγωνομετρία, πολικές
συντεταγμένες



$$r = 2a(1 - \cos \theta)$$



$$r = b - 2a \cos \theta$$

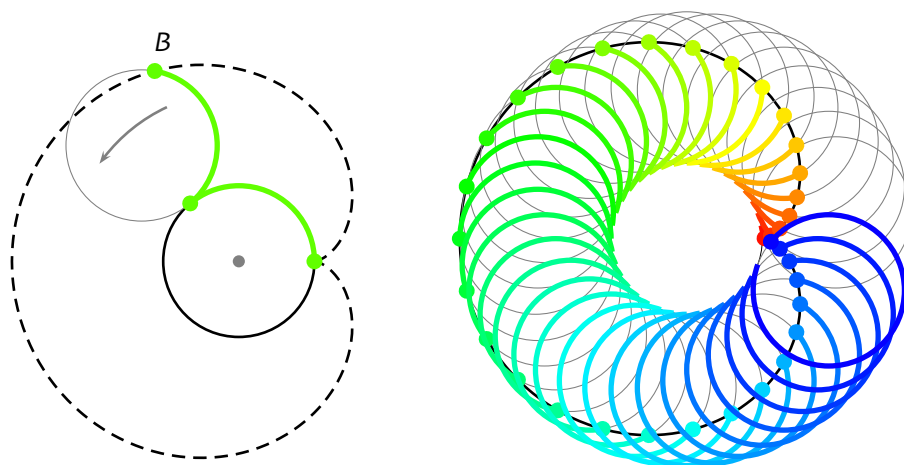
Σχήμα 5.1: Καρδιοειδές και Κοχλιοειδής

Η ονομασία καρδιοειδές cardioid εισήχθη το 1741 από τον Ιταλό μαθηματικό Johann Castillon λόγω του σχήματος καρδιάς. Πολύ νωρίτερα

το 1708 το μήκος του καρδιοειδούς υπολογίστηκε από τον Philippe de la Hire Γάλλο μαθηματικό και αστρονόμο. Το καρδιοειδές όμως πρωτοσυναντάται το 1650 ως ειδική περίπτωση της καμπύλης Limaçon of Pascal (κοχλιοειδής) (Σχήμα 5.1) η κατασκευή της οποίας οφείλετε στον Γάλλο μαθηματικό Étienne Pascal.

5.1 Ορισμοί του Καρδιοειδούς

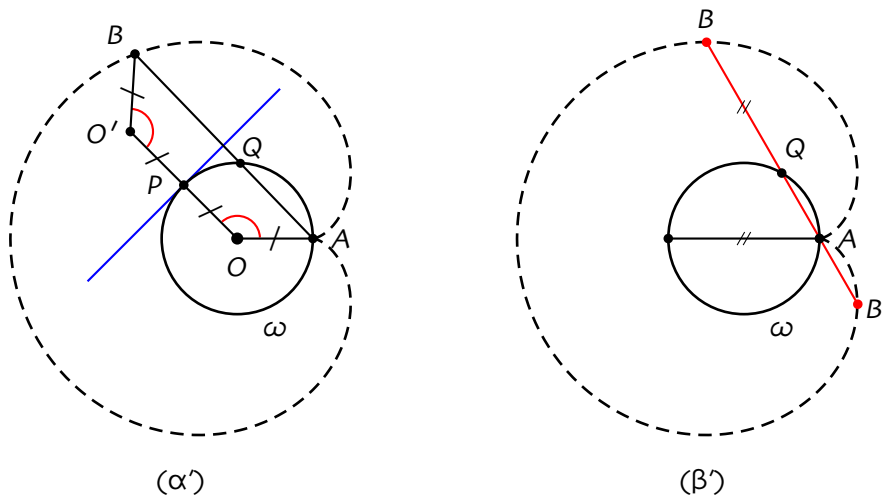
ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1.1. Έστω ότι ω είναι ένας σταθερός κύκλος κέντρου O και διαμέτρου 1 και ω' είναι κύκλος διαμέτρου 1 ο οποίος κυλάει πάνω στον ω χωρίς ολίσθηση (Σχήμα 5.2). Την τροχιά που διαγράφει ένα σταθερό σημείο B του ω' την ονομάζουμε καρδιοειδές.



Σχήμα 5.2: Μηχανική κατασκευή καρδιοειδούς

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1.2. Έστω ότι ω είναι ένας κύκλος κέντρου O , διαμέτρου 1, A ένα σταθερό σημείο του ω και P ένα κινούμενο σημείο του ω . Έστω ότι το O' είναι το συμμετρικό του O ως προς το P και το B είναι η αντανάκλαση του A ως προς την μεσοκάθετο του OO' (Σχήμα 5.3α'). Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων B είναι το καρδιοειδές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1.3. Έστω ότι ω είναι ένας κύκλος κέντρου O , διαμέτρου 1, A ένα σταθερό σημείο του ω , και Q ένα κινούμενο σημείο του ω . Έστω ότι το B είναι σημείο στην ευθεία AQ ώστε $BQ = 1$ (Σχήμα 5.3β'). Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων B είναι το καρδιοειδές.



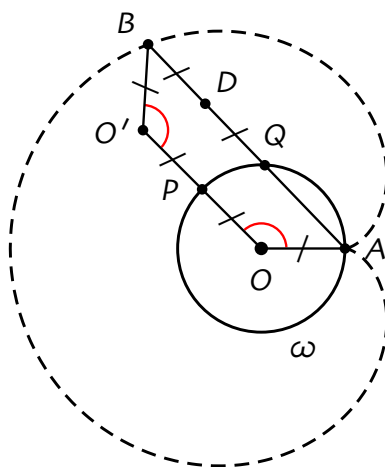
Σχήμα 5.3

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.1.4. Οι παραπάνω ορισμοί για το καρδιοειδές είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη: (Ορισμός 5.1.1 \Rightarrow Ορισμός 5.1.2) Στον πρώτο ορισμό έστω ότι το A είναι το αρχικό σημείο επαφής των κύκλων ω και ω' , O' το κέντρο του κύκλου ω' , P το σημείο επαφής των κύκλων ω και ω' κατά την κίνηση του ω' και B το σημείο του καρδιοειδούς του πρώτου ορισμού. Είναι $B\hat{O}'P = P\hat{O}A$ (αφού τα τόξα \widehat{PB} του κύκλου $(O', O'B)$ και \widehat{PA} του κύκλου (O, OA) είναι ίσα) και $O'B = OA$ (Σχήμα 5.3α'), οπότε εύκολα προκύπτει ότι το σημείο B του πρώτου ορισμού και το σημείο B του δεύτερου ορισμού ταυτίζονται.

(Ορισμός 5.1.2 \Rightarrow Ορισμός 5.1.3) Στο Σχήμα 5.3α' είναι $B\hat{O}'P = P\hat{O}A$ και $OA = OP = O'P = O'B$ οπότε τα τρίγωνα $O\hat{A}P$ και $O'\hat{P}B$ είναι ίσα άρα το τρίγωνο $P\hat{A}B$ είναι ισοσκελές και συνεπώς $O\hat{A}B = O'\hat{B}A$ και αφού $OA = O'B$ προκύπτει ότι $AB \parallel O'O$. Είναι $OQ = O'B$ και $AB \parallel O'O$ οπότε το τετράπλευρο $O'BQO$ είναι είτε παραλληλόγραμμο είτε ισοσκελές τραπέζιο. Η τελευταία περίπτωση απορρίπτεται, αφού $Q \neq A$. Οπότε έχουμε $BQ = OO' = 1$, οπότε το σημείο B ταυτίζεται με το σημείο B του τρίτου ορισμού (Σχήμα 5.3β').

(Ορισμός 5.1.3 \Rightarrow Ορισμός 5.1.1) Έστω ότι το P είναι τέτοιο που το \overrightarrow{OP} είναι ομόρροπο του \overrightarrow{AB} (οπότε $OO' \parallel QB$) και $|\overrightarrow{OP}| = 1/2$. Έστω ότι το O' είναι το συμμετρικό του O ως προς το P . Τότε $O'O = BQ = 1$, οπότε το τετράπλευρο $OO'BQ$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα $O'B = OQ = 1/2$ (Σχήμα 5.4). Επίσης, αφού $O'B = OA$ έχουμε ότι το $OO'BA$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και συνεπώς $A\hat{O}P = P\hat{O}'B$. Άρα το σημείο B ταυτίζεται με το σημείο B του πρώτου ορισμού

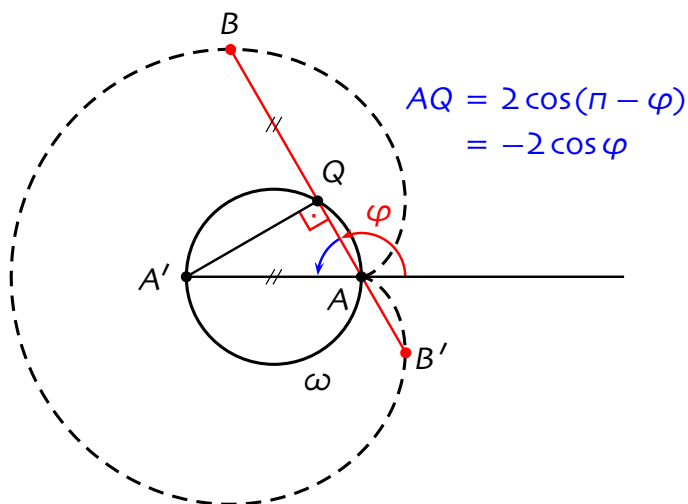


Σχήμα 5.4

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.1.5. Σε πολικές συντεταγμένες το καρδιοειδές δίνεται από την σχέση (Σχήμα 5.5)

$$r = 1 - \cos \varphi.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.1.6. Στο Σχήμα 5.6 το τμήμα AP διχοτομεί τη γωνία $O\hat{A}Q$. Πράγματι, η AP είναι η διαγώνιος του ρόμβου με κορυφές τα σημεία A , O , P και του σημείου τομής των AQ και PT .



Σχήμα 5.5

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες συνδέονται με τις πολικές μέσω των σχέ-

σεων

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi,$$

και η σχέση $r = 1 - \cos \varphi$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφεται

$$(x^2 + y^2)^2 + 2x(x^2 + y^2) - y^2 = 0.$$

Οπότε σε καρτεσιανές συντεταγμένες το καρδιοειδές δίνεται από τη σχέση

$$(x^2 + y^2)^2 + 2x(x^2 + y^2) - y^2 = 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.1.7. Η εφαπτόμενη (ε) στο καρδιοειδές στο σημείο B είναι κάθετη στο BP .

Απόδειξη: Έστω ότι η TP είναι παράλληλη στη OA . Είναι $\varphi = \widehat{AOP} = \widehat{TPO'}$ και

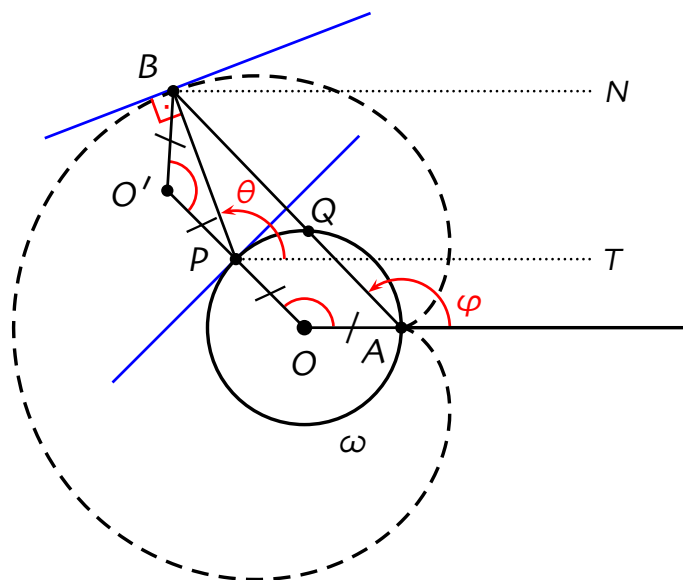
$$\widehat{OAP} = \widehat{BPO'} = \frac{\widehat{OAB}}{2} = \frac{\pi - \varphi}{2}$$

άρα

$$\widehat{\theta} = \widehat{TPO'} - \widehat{BPO'} = \varphi - \frac{\pi - \varphi}{2} = \frac{3\varphi - \pi}{2}.$$

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της BP είναι

$$\lambda_{BP} = \tan \frac{3\varphi - \pi}{2} = -\tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\varphi}{2} \right) = -\cot(3\varphi/2).$$



Σχήμα 5.6

Το σημείο B έχει συντεταγμένες

$$x(\varphi) = r \cos \varphi = (1 - \cos \varphi) \cos \varphi = \cos \varphi - \cos^2 \varphi$$

και

$$y(\varphi) = r \sin \varphi = (1 - \cos \varphi) \sin \varphi = \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin(2\varphi).$$

Οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος ταχύτητας

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi} \right) = (-(\sin \varphi - \sin(2\varphi)), \cos \varphi - \cos(2\varphi))$$

Άρα

$$\lambda_{\varepsilon} = -\frac{\cos \varphi - \cos(2\varphi)}{\sin \varphi - \sin(2\varphi)}.$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες διαφοράς ημιτόνων και συνημιτόνων, δηλαδή τις

$$\begin{aligned} \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \end{aligned}$$

παίρνουμε ότι

$$\lambda_{\varepsilon} = -\frac{-2 \sin(3\varphi/2) \sin(-\varphi/2)}{2 \cos(3\varphi/2) \sin(-\varphi/2)} = \tan(3\varphi/2).$$

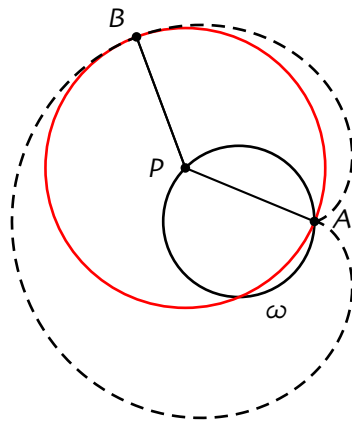
Συνεπώς

$$\lambda_{BP} \lambda_{\varepsilon} = -\cot(3\varphi/2) \tan(3\varphi/2) = -1.$$

Άρα $(\varepsilon) \perp BP$

Στα σημεία που δεν ορίζεται ο ένας από τους δύο συντελεστές διεύθυνσης, ο άλλος είναι μηδέν οπότε πάλι είναι κάθετες.

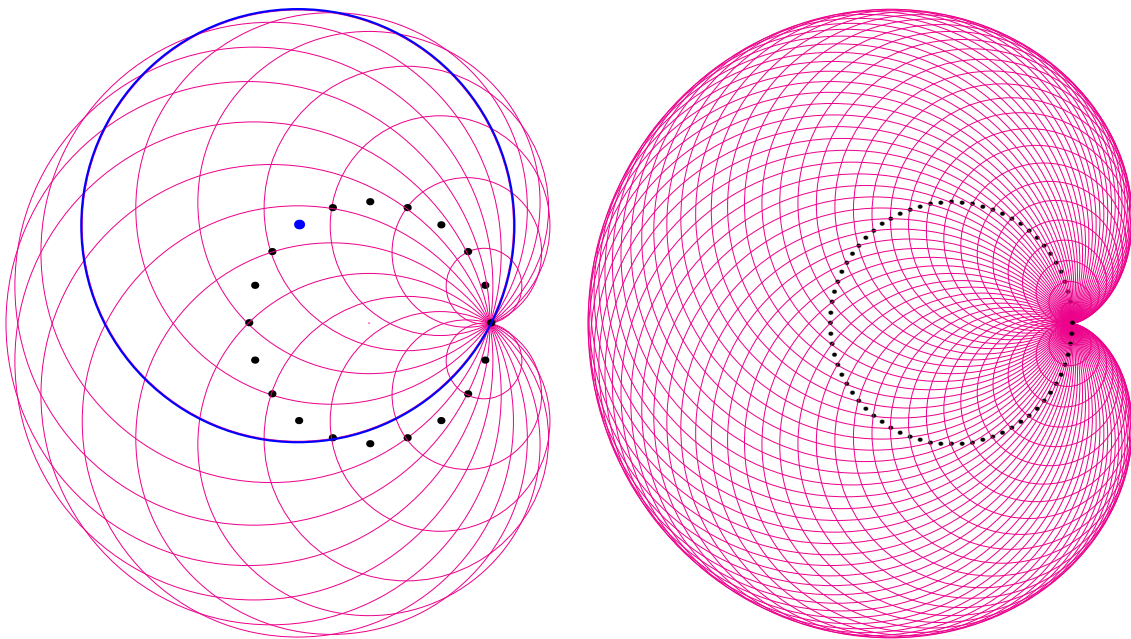
ΠΟΡΙΣΜΑ 5.1.8. Ο κύκλος με κέντρο P και ακτίνα PA εφάπτεται στο καρδιοειδές και διέρχεται από το A . (Σχήμα 5.7)



Σχήμα 5.7

Οπότε έχουμε το ακόλουθο:

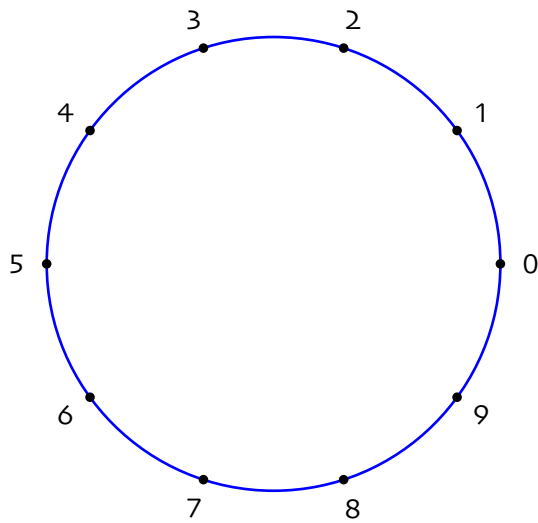
ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1.9. Έστω κύκλος C και σταθερό σημείο A του C , για κάθε σημείο P του C κατασκευάζουμε τον κύκλο C_P με κέντρο P και ακτίνα PA . Η περιβάλλουσα καμπύλη της οικογένειας $\{C_P : P \in C \setminus A\}$ είναι το καρδιοειδές. (Σχήμα 5.8)



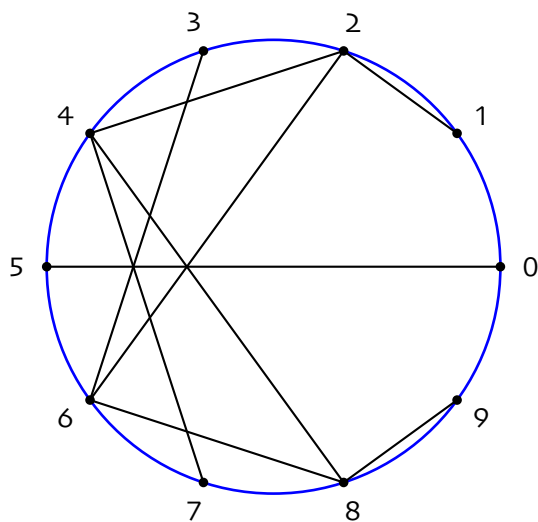
Σχήμα 5.8

5.2 Κατασκευή του Καρδιοειδούς

Έστω ότι ο κύκλος C έχει κέντρο το $\Sigma(1/2, 0)$ και ακτίνα $3/2$. Διαιρούμε την περιφέρεια του C σε 2ν ίσα τόξα θεωρώντας τα σημεία $0, 1, 2, \dots, 2\nu - 1$ όπως στο σχήμα:

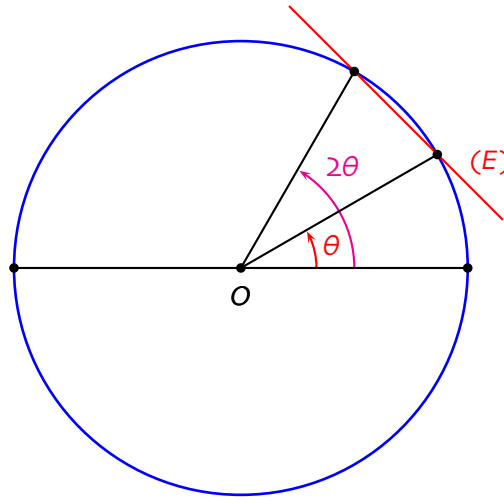


Φέρνουμε τις χορδές $\overline{00}, \overline{12}, \overline{24}, \overline{36}, \overline{48}, \overline{510}, \overline{612}, \overline{714}, \overline{816}, \overline{918}, \overline{1020}, \dots$ (όπου $2\nu \equiv 0, 2\nu + 1 \equiv 1, 2\nu + 2 \equiv 2, 2\nu + 3 \equiv 3, \dots$).



Θα υπολογίσουμε την εξίσωση της τυχαίας χορδής (E) η οποία θα ενώνει τα σημεία

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos \theta, \frac{3}{2} \sin \theta\right) \text{ και } \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\theta, \frac{3}{2} \sin 2\theta\right).$$



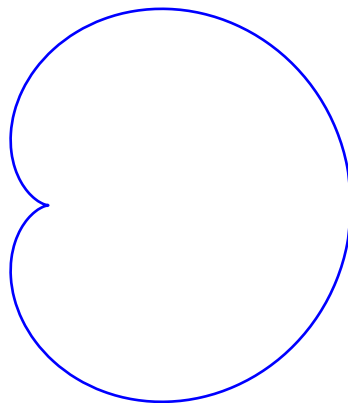
Αυτή έχει εξίσωση την

$$\begin{vmatrix} x - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos \theta\right) & y - \frac{3}{2} \sin \theta \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\theta\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos \theta\right) & \frac{3}{2} \sin 2\theta - \frac{3}{2} \sin \theta \end{vmatrix} = 0$$

ή ισοδύναμα...

$$x \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + y \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) = 0.$$

Για το καρδιοειδές $r = 1 + \cos \varphi$ με σχήμα το



η παραμετρική παράσταση του είναι

$$K(\varphi) = ((1 + \cos \varphi) \cos \varphi, (1 + \cos \varphi) \sin \varphi),$$

το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $K(\varphi)$ είναι το

$$\frac{dK(\varphi)}{d\varphi} = (-(\sin \varphi + \sin(2\varphi)), \cos \varphi + \cos(2\varphi))$$

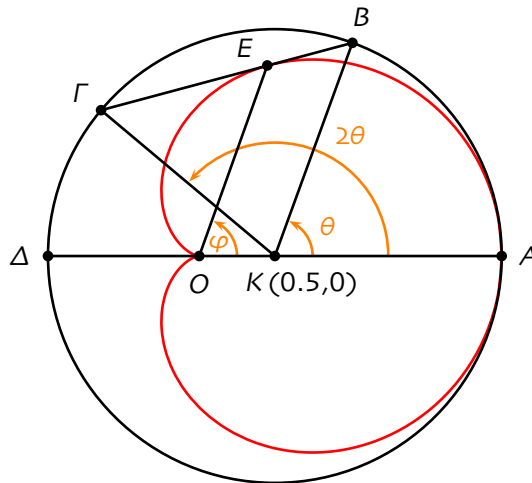
και έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = -\frac{\cos \varphi + \cos(2\varphi)}{\sin \varphi + \sin(2\varphi)}.$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $K(\varphi)$ είναι $y = \lambda x + c$ όπου $c = (1 + \cos \varphi) \sin \varphi - \lambda(1 + \cos \varphi) \cos \varphi$. Αυτή μετά από πράξεις γράφεται ισοδύναμα

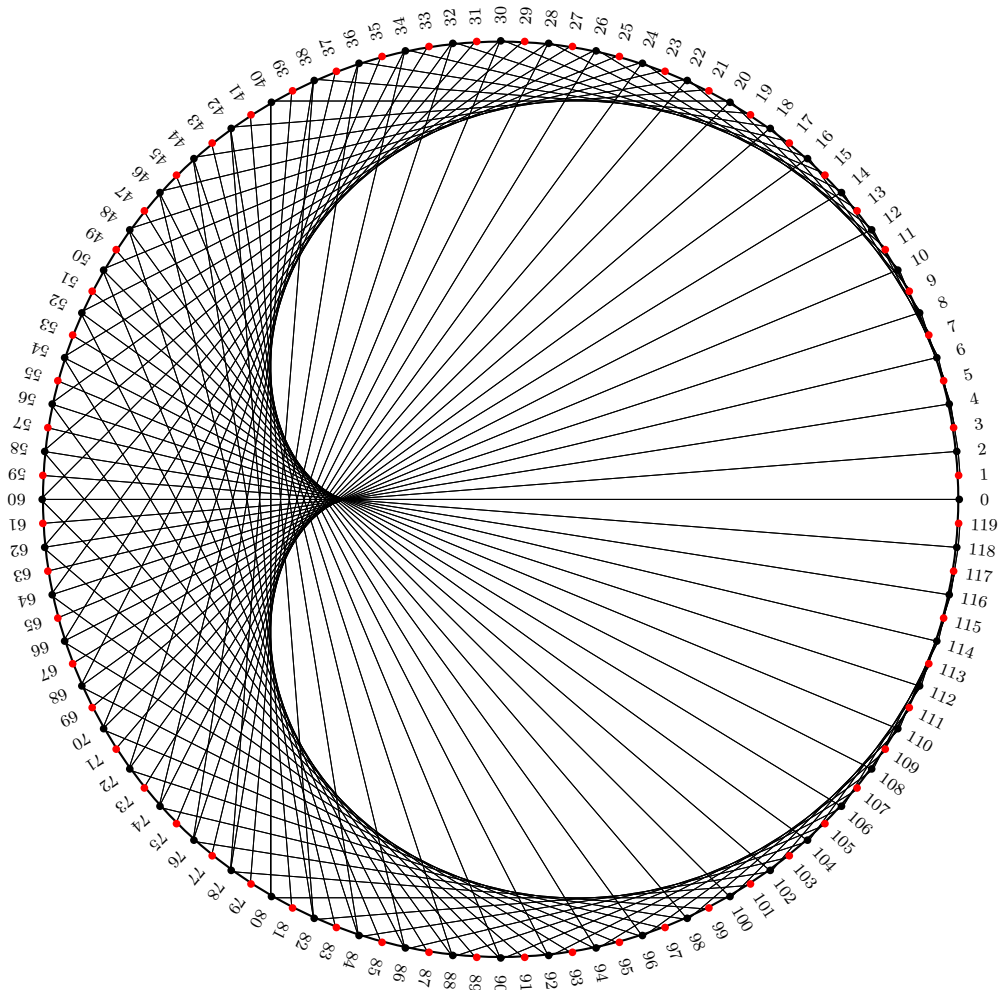
$$x \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) + y \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) - \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) = 0,$$

η οποία ταυτίζεται με την ευθεία (E) για $\varphi = \theta$.



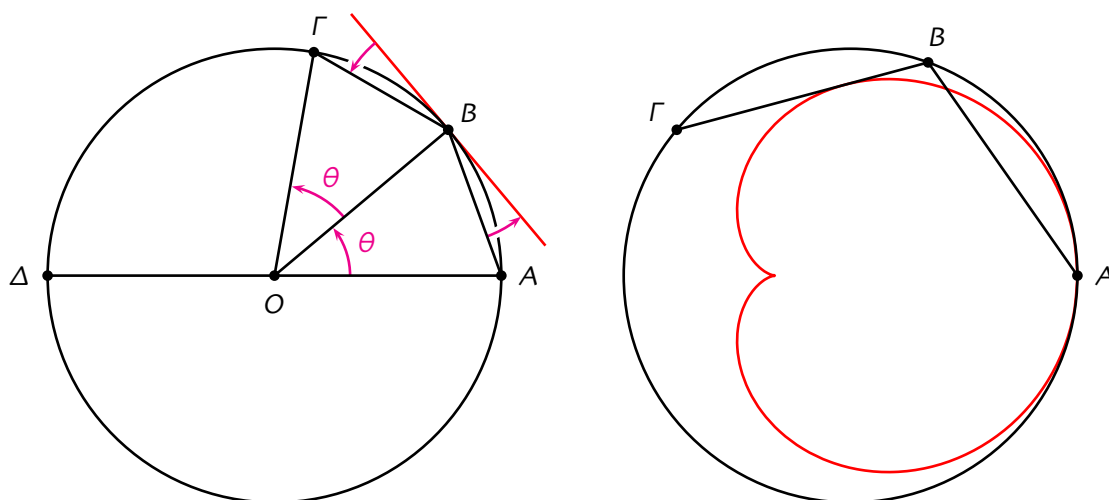
Οπότε το καρδιοειδές εφάπτεται στις χορδές

$$\overline{0, 1}, \overline{2, 2}, \overline{4, 3}, \overline{6, 4}, \overline{8, 5}, \overline{10, 6}, \overline{12, 7}, \overline{14, 8}, \overline{16, 9}, \overline{18, 10}, \overline{20, \dots}$$

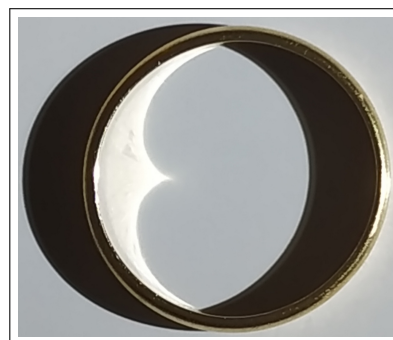


(Στο παραπάνω σχήμα έχουμε διαμερίσει τον κύκλο ανά τρεις μοίρες.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.2.1. Θεωρούμε τον κύκλο C κέντρου $\Sigma(1/2, 0)$ και ακτίνας $3/2$. Έστω ότι τα A και B είναι δύο σημεία του C και Γ η αντανάκλαση του A στον κύκλο C ως προς το σημείο B . Τότε η $B\Gamma$ είναι εφαπτόμενη στο καρδιοειδές $r = 1 + \cos \varphi$.



Άρα το καρδιοειδές είναι η περιβάλλουσα καμπύλη της δέσμης χορδών $B\Gamma$ του κύκλου C που προκύπτουν μέσω αντανάκλασης ενός σταθερού σημείου A του κύκλου C ως προς μεταβλητό σημείο B του C .



Σχήμα 5.9: Το καρδιοειδές όπως σχηματίζεται από τις αντανακλάσεις του φωτός στα τοιχώματα ενός φλιτζανιού πάνω στην επιφάνεια γάλακτος και από τις αντανακλάσεις στην εσωτερική περιφέρεια ενός χρυσού δαχτυλιδιού. Η καλύτερη ανακλαστικότητα του χρυσού παράγει πιο ευδιάκριτη καμπύλη.

Ομιλία 6

Το Θεώρημα Ramsey

Κώστας Τσαπρούνης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
kostas.tsap@gmail.com

Προαπαιτούμενα: Μαθηματική
επαγωγή

*Θερμές ευχαριστίες στον Κωνσταντίνο Καλούδη για τη βοήθειά του στην προ-
ετοιμασία αυτού του κειμένου.*

Ο Frank P. Ramsey (1903–1930) ήταν Βρετανός ακαδημαϊκός. Παρά το σύντομο της ζωής του (πέθανε περίπου 27 ετών, από μετεγχειρητικές επιπλοκές), είχε πολλαπλές συμβολές σε διάφορα πεδία του επιστητού, έχοντας ασχοληθεί με τα μαθηματικά (Θεωρήματα Ramsey), τη φιλοσοφία (μετάφραση του *Tractatus Logico-Philosophicus* του Wittgenstein), καθώς και με τα οικονομικά (εργασίες σχετικά με τη φορολογία και την αποταμίευση, υπό την ενθάρρυνση του Keynes).

Για να εισαγάγουμε το (πεπερασμένο) Θεώρημα Ramsey, θεωρούμε αρχικά το ακόλουθο πρόβλημα, το οποίο είναι γνωστό και ως «*πρόβλημα του πάρτι*»¹:

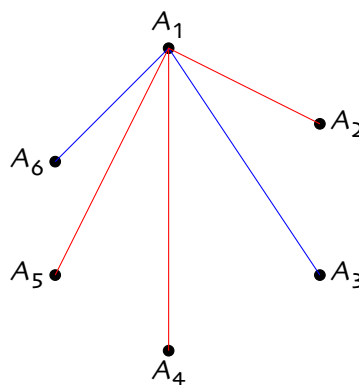
Να δειχθεί ότι σε οποιοδήποτε σύνολο 6 ανθρώπων είτε υπάρχουν 3 γνωστοί μεταξύ τους ή υπάρχουν 3 άγνωστοι μεταξύ τους.

Φυσικά, υπονοείται ότι οι σχέσεις «γνωστοί μεταξύ τους» και «άγνωστοι μεταξύ τους» είναι αμοιβαίες (συμμετρικές). Το παραπάνω πρόβλημα είναι συναφές με τη γνωστή *Αρχή του Περιστερώνα* και, σε γενικές γραμ-

¹Το οποίο, όπως ξέρει οποιοσδήποτε έχει βρεθεί ποτέ σε τέτοια περίπτωση, είναι και το βασικό θέμα που απασχολεί τους ανθρώπους σε ένα πάρτι.

μές, όπως θα δούμε παρακάτω, συνδέεται με την ιδέα της—αναγκαστικής—εμφάνισης μίας κάποιας «τάξης» (με την έννοια του «βαθμού οργάνωσης») σε ένα σύνολο.

Λύση: Έστω A_1, \dots, A_6 οι 6 άνθρωποι, τους οποίους σχεδιάζουμε ως διακριτές κορυφές, ενώνοντας δύο ανθρώπους με μπλε ακμή εάν είναι γνωστοί μεταξύ τους και με κόκκινη ακμή εάν είναι άγνωστοι μεταξύ τους. Έτσι, για παράδειγμα, μια δυνατή κατάσταση είναι η ακόλουθη (έχοντας σχεδιάσει μόνο τις πλευρές που ενώνονται με τον A_1):



Ας εξετάσουμε τον A_1 . Από την Αρχή του Περιστερώνα, ένα εκ των συνόλων:

$$X_\mu = \{1 < i \leq 6 : A_i \text{ γνωστός του } A_1\}$$

$$X_\kappa = \{1 < i \leq 6 : A_i \text{ άγνωστος του } A_1\}$$

πρέπει να έχει τουλάχιστον 3 στοιχεία. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $|X_\kappa| \geq 3$ και, μάλιστα, χάριν παραδείγματος, έστω ότι ο A_1 είναι άγνωστος με τους A_2, A_4, A_5 (όπως ακριβώς δηλαδή συμβαίνει στην κατάσταση που απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα). Εξετάζουμε τώρα αυτούς τους τρεις ανθρώπους (δηλαδή τους A_2, A_4, A_5). Εάν αυτοί είναι όλοι γνωστοί μεταξύ τους, τότε έχουμε άμεσα το ζητούμενο. Εάν όχι, εάν δηλαδή υπάρχουν 2 εξ αυτών των τριών οι οποίοι είναι άγνωστοι μεταξύ τους, τότε αυτοί οι δύο μαζί με τον A_1 φτιάχνουν τριάδα αγνώστων, οπότε πάλι προκύπτει το ζητούμενο. \square

Το παραπάνω φαινόμενο γενικεύεται—κάτι που αποτελεί και το περιεχόμενο του (πεπερασμένου) Θεωρήματος Ramsey. Προς την κατεύθυνση της διατύπωσης αυτού του αποτελέσματος (αλλά και της γενικότερης παρουσίαισης), είναι σκόπιμο να εισαγάγουμε μερικές στοιχειώδεις έννοιες και συμβολισμούς της Θεωρίας Γραφημάτων. Τα γραφήματα αποτελούν μία σημαντική κατηγορία μαθηματικών αντικειμένων τα οποία εμφανίζονται

πολύ συχνά τόσο στα μαθηματικά όσο και την (θεωρητική) πληροφορική. Μεταξύ άλλων, τα γραφήματα είναι χρήσιμα για την αναπαράσταση προβλημάτων όπως το παραπάνω. Εν συντομία, *γράφημα* λέγεται μια δομή της μορφής $G = \langle V, E \rangle$, όπου:

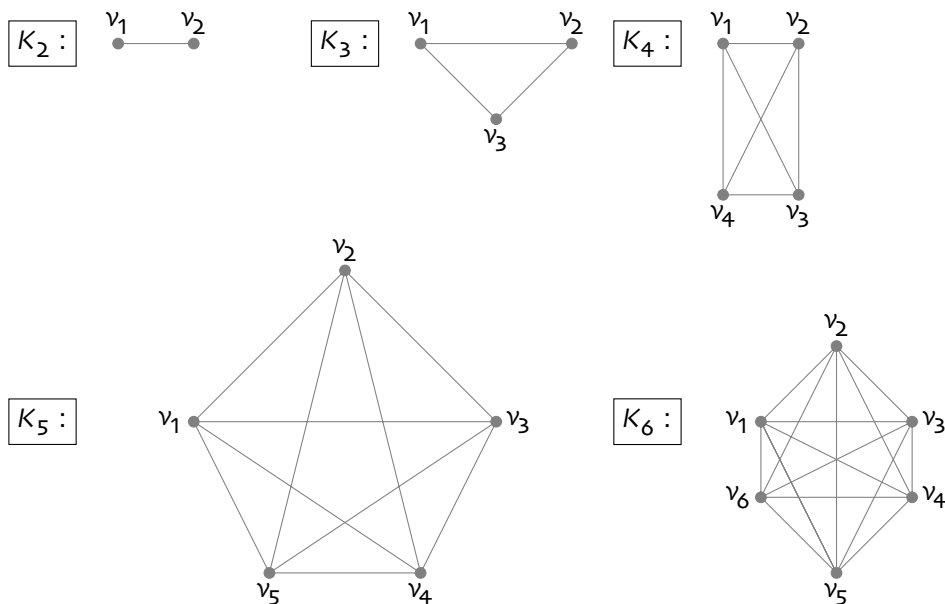
- $V \neq \emptyset$ είναι το σύνολο *κορυφών* του γραφήματος
- $E \subseteq [V]^2$ είναι το σύνολο *πλευρών/ακμών* του γραφήματος,

όπου $[V]^2$ είναι το σύνολο δισυνόλων από το σύνολο κορυφών V .² Με άλλα λόγια:

$$[V]^2 = \{\{x, y\} : x, y \in V \text{ με } x \neq y\}$$

Ένα τέτοιου είδους γράφημα συχνά καλείται *απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα* στη βιβλιογραφία. Στην (ακραία) ειδική περίπτωση όπου $E = \emptyset$, θα λέμε ότι το γράφημα G είναι *εντελώς ασύνδετο*.³

Στο άλλο άκρο (όπου $E = [V]^2$), για κάθε $n \geq 2$, θα συμβολίζουμε με K_n το *πλήρες* γράφημα n κορυφών, το οποίο έχει $\binom{n}{2}$ πλευρές. Για παράδειγμα, για μερικά «μικρά» n , το αντίστοιχο K_n μοιάζει (μέχρις ισομορφισμού) ως εξής:



Στο πλαίσιο της μελέτης μας, μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι χρωματισμοί (πλευρών) γραφημάτων.

²Είναι σαφές ότι ο ορισμός έχει ενδιαφέρον μόνο όταν $|V| \geq 2$.

³Σημειώνεται ότι συγκεκριμένα ο όρος «εντελώς ασύνδετο», ο οποίος ενδεχομένως να μην είναι και η καλύτερη δυνατή επιλογή ως προς την ορολογία, εξυπηρετεί τις ανάγκες αυτού του κειμένου και μόνο—εξ' όσων γνωρίζω, δεν είναι καθιερωμένος όρος στη Θεωρία Γραφημάτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.0.1. Έστω ότι το $G = \langle V, E \rangle$ είναι ένα γράφημα. Μια (οποιαδήποτε) συνάρτηση της μορφής $f : E \rightarrow \{\text{μπλε, κόκκινο}\}$ λέγεται 2-χρωματισμός πλευρών του G . Γενικότερα, k -χρωματισμός πλευρών του G (για $k \geq 2$) λέγεται μια (οποιαδήποτε) συνάρτηση της μορφής $f : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ (όπου, υποθέτουμε ότι το $\{1, \dots, k\}$ είναι το «σύνολο χρωμάτων»).

Φυσικά, η ιδέα του παραπάνω ορισμού είναι ότι «αναθέτουμε χρώμα» (δηλαδή, «χρωματίζουμε») τις πλευρές του G με ένα εκ των 2 (ή εκ των k) διαθέσιμων χρωμάτων. Στα παρακάτω, θα γράφουμε απλά « k -χρωματισμός», με την κατανόηση ότι αναφερόμαστε πάντα σε χρωματισμό πλευρών.

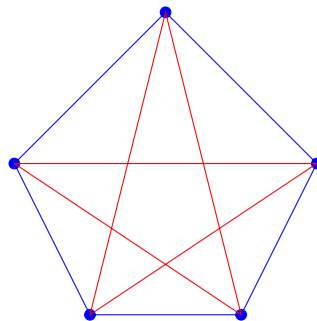
Παρατηρήστε επίσης ότι ο ορισμός αυτός είναι αρκετά «χαλαρός», αφού δεν περιλαμβάνει τον (γενικά δημοφιλή) περιορισμό που απαιτεί να χρωματίζουμε με διαφορετικά χρώματα γειτονικές πλευρές.

Έτσι λοιπόν, δεδομένων των παραπάνω, το «πρόβλημα του πάρτι» μπορεί τώρα να διατυπωθεί ως εξής:

Για κάθε 2-χρωματισμό του K_6 υπάρχει μονοχρωματικό (κόκκινο ή μπλε) K_3 υπογράφημα. Δηλαδή, για κάθε 2-χρωματισμό του πλήρους γραφήματος 6 κορυφών υπάρχει μονοχρωματικό τρίγωνο.

Από μία άλλη σκοπιά, αυτό σημαίνει ότι αν θέλουμε να εγγυηθούμε την ύπαρξη μονοχρωματικού τριγώνου για κάθε 2-χρωματισμό του K_N (αντίστοιχα, την ύπαρξη 3 γνωστών ή 3 αγνώστων σε σύνολο ανθρώπων πληθικότητας N), αρκεί να θεωρήσουμε $N = 6$. Φυσικά, το ίδιο θα ισχύει και για κάθε $N \geq 6$.

Από αυτήν τη σκοπιά, ένα (εύλογο) ερώτημα που προκύπτει είναι το αν $N = 6$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός (μεγαλύτερος ή ίσος του 2) για τον οποίον ισχύει το παραπάνω. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική: παρακάτω δίνουμε αντιπαράδειγμα για $N = 5$, δηλαδή παράδειγμα 2-χρωματισμού του K_5 χωρίς κανένα μονοχρωματικό τρίγωνο.



Έτσι λοιπόν, εισαγάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$R(3, 3)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός $N \geq 2$ ώστε για κάθε 2-χρωματισμό του K_N να υπάρχει είτε μονοχρωματικό μπλε K_3 ή μονοχρωματικό κόκκινο K_3 υπογράφημα.

Η λύση στο «πρόβλημα του πάρτι» έδειξε ότι $R(3, 3) \leq 6$ ενώ το παραπάνω (αντι)παράδειγμα με το K_5 έδειξε ότι $R(3, 3) > 5$, από τα οποία συμπεράναμε τελικά ότι $R(3, 3) = 6$.

Γενικεύοντας, για κάθε φυσικούς αριθμούς $m, n \geq 2$:

$R(m, n)$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός $N \geq 2$ (όταν αυτός υπάρχει) ώστε για κάθε 2-χρωματισμό του K_N να υπάρχει είτε μονοχρωματικό μπλε K_m ή μονοχρωματικό κόκκινο K_n υπογράφημα.

Οι $R(m, n)$ συνήθως λέγονται αριθμοί Ramsey. Ακολουθούν μερικές παρατηρήσεις σχετικά με αυτούς:

- $R(2, 2) = 2$.
- Για κάθε $m, n \geq 2$, όταν αυτοί υπάρχουν, ισχύει ότι $R(m, n) = R(n, m)$ (απλά με «εναλλαγή των ρόλων των χρωμάτων»).
- Έστω $m = 2$. Τότε, για κάθε $n \geq 2$, έχουμε ότι $R(2, n) \leq n$: αυτό διότι, στο K_n , για οποιονδήποτε 2-χρωματισμό, είτε υπάρχει μπλε πλευρά ή όχι.

Από την άλλη, για κάθε $n \geq 2$, έχουμε και ότι $R(2, n) > n - 1$: αυτό διότι, ο 2-χρωματισμός που χρωματίζει ολόκληρο το K_{n-1} κόκκινο, δεν έχει ούτε μπλε πλευρά αλλά ούτε και μονοχρωματικό κόκκινο K_n υπογράφημα.

Άρα, συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $n \geq 2$, ισχύει ότι $R(2, n) = n$.

Παρατηρήστε ότι στον ορισμό του $R(m, n)$ χρησιμοποιούμε τη φράση «όταν αυτός υπάρχει». Α ριγοί, η ύπαρξη των αριθμών $R(m, n)$, για όλα τα $m, n \geq 2$, δεν είναι προφανής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.0.2 (RAMSEY). Για κάθε $m, n \geq 2$, υπάρχει ο $R(m, n)$.

Το θεώρημα αυτό έπεται άμεσα από την επόμενη πρόταση, η απόδειξη της οποίας ακολουθεί αντίστοιχη ιδέα (επιχείρημα) με εκείνη που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση του «προβλήματος του πάρτι».

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.0.3 (ERDÖS & SZEKERES-GLEASON & GREENWOOD). Για κάθε $m, n \geq 3$, αν υπάρχουν οι $R(m-1, n)$ και $R(m, n-1)$, τότε υπάρχει και ο $R(m, n)$ και μάλιστα ισχύει ότι:

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$$

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι, γενικά, ελάχιστοι αριθμοί Ramsey είναι επακριβώς προσδιορισμένοι, κάτι που κάνει το όλο θέμα ακόμα πιο ενδιαφέρον και ελκυστικό. Από την άλλη, έχουμε διαθέσιμα κάποια (άνω και

κάτω) φράγματα. Για παράδειγμα, με χρήση της προηγούμενης πρότασης μπορούμε να δείξουμε ότι, για κάθε $m, n \geq 2$, ισχύει το εξής:

$$R(m, n) \leq 2^{m+n}$$

Σημειώνουμε ωστόσο ότι μόνο «αδρά» γενικά άνω και κάτω φράγματα είναι (μέχρι στιγμής τουλάχιστον) διαθέσιμα, με το πρόβλημα της εύρεσης καλύτερων φραγμάτων (ή του ακριβούς υπολογισμού κάποιων συγκεκριμένων $R(m, n)$ αριθμών) να είναι ανοικτό και, κατά τα φαινόμενα, ιδιαίτερος δύσκολο⁴. Στη συνέχεια παραθέτουμε κάποια (από τα ομολογουμένως λίγα) γνωστά αποτελέσματα:

$$\begin{array}{ll} R(3, 3) = 6 & R(3, 8) = 28 \\ R(3, 4) = 9 & R(3, 9) = 36 \\ R(3, 5) = 14 & R(4, 4) = 18 \\ R(3, 6) = 18 & R(4, 5) = 25 \\ R(3, 7) = 23 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 36 \leq R(4, 6) \leq 41 \\ 49 \leq R(4, 7) \leq 61 \\ 43 \leq R(5, 5) \leq 48 \\ 58 \leq R(5, 6) \leq 87 \\ 102 \leq R(6, 6) \leq 165 \end{array}$$

Το Θεώρημα 6.ο.2 γενικεύεται (πχ, σε χρωματισμούς με περισσότερα από 2 χρώματα) και τελικά προκύπτει το (πεπερασμένο) Θεώρημα Ramsey στην πλήρη του διατύπωση. Για τη διατύπωση αυτή, χρειαζόμαστε τον ακόλουθο συνολοθεωρητικό συμβολισμό.

Έστω (πεπερασμένο ή άπειρο) σύνολο $X \neq \emptyset$ και έστω $r \in \mathbb{N}$ με $1 \leq r \leq |X|$. Συμβολίζουμε με $[X]^r$ το σύνολο όλων των r -υποσυνόλων του X , δηλαδή:

$$[X]^r = \{Y \subseteq X : |Y| = r\}$$

Έστω τώρα ότι $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 1$ (το οποίο σκεφτόμαστε ως το πλήθος των «διαθέσιμων χρωμάτων») και έστω ότι η $f : [X]^r \rightarrow \{1, \dots, k\}$ είναι μια απεικόνιση την οποία, κατ' αντιστοιχία με τα προηγούμενα, ονομάζουμε έναν « k -χρωματισμό των r -υποσυνόλων του X »⁵. Σε αυτήν την κατάσταση, ένα $H \subseteq X$ λέγεται *μονοχρωματικό* για τον χρωματισμό f αν

⁴Εντελώς ενδεικτικά, αναφέρουμε ότι κάποια διαθέσιμα κάτω φράγματα έχουν αποδειχθεί με χρήση *πιθανοτικών μεθόδων*, πχ, από τους Erdős, Spencer, Bollobás.

⁵Ετσι, για παράδειγμα, δεδομένου ενός $N \geq 2$ και του αντίστοιχου πλήρους γραφήματος K_N (με σύνολο κορυφών V), ένας 2-χρωματισμός πλευρών του K_N (στην ορολογία του Ορισμού 6.ο.1) είναι ένας 2-χρωματισμός των 2-υποσυνόλων του V (στη νέα ορολογία).

υπάρχει $i \in \{1, \dots, k\}$ τέτοιο ώστε $f[[H]^r] = \{i\}$, δηλαδή η f είναι σταθερή στα r -υποσύνολα του H (με τιμή i).

Με δεδομένη την παραπάνω ορολογία, ακολουθεί ο λεγόμενος «συμβολισμός του βέλους». Αν k, λ μη μηδενικοί (πεπερασμένοι ή άπειροι) πληθίκοι και $r, k \in \mathbb{N}$ με $r, k \geq 1$, γράφουμε

$$k \rightarrow (\lambda)_k^r$$

το οποίο σημαίνει ότι ισχύει το εξής:

Για κάθε σύνολο X πληθικότητας k και κάθε k -χρωματισμό $f : [X]^r \rightarrow \{1, \dots, k\}$ των r -υποσυνόλων του X , υπάρχει $H \subseteq X$ με $|H| = \lambda$ τέτοιο ώστε H μονοχρωματικό για την f , δηλαδή υπάρχει $i \in \{1, \dots, k\}$ τέτοιο ώστε $f[[H]^r] = \{i\}$.

Έτσι, για παράδειγμα, λόγω του ότι $R(3, 3) = 6$ και $R(4, 4) = 18$, έχουμε ότι ισχύουν τα: $6 \rightarrow (3)_2^2$ και $18 \rightarrow (4)_2^2$. Είμαστε τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε πλήρως το θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.0.4 (ΘΕΩΡΗΜΑ RAMSEY—ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ). Για κάθε $l, r, k \in \mathbb{N}$ με $l, r, k \geq 1$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $N \rightarrow (l)_k^r$.

Δηλαδή, υπό μία έννοια, το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι αν θεωρήσουμε ένα «αρκετά μεγάλο» (ως προς το πλήθος) σύνολο αντικειμένων, τότε αναγκαστικά εμφανίζεται μία κάποια «τάξη» (έναν «βαθμός οργάνωσης») μέσα στο σύνολο αυτό, κάτι που εκφράζεται ακριβώς από την ύπαρξη μονοχρωματικού υποσυνόλου μεγέθους l .

Το θεώρημα γενικεύεται και σε άπειρα σύνολα. Γράφοντας $|\mathbb{N}|$ για τον πληθίκο του συνόλου των φυσικών αριθμών, έχουμε το εξής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.0.5 (ΘΕΩΡΗΜΑ RAMSEY—ΑΠΕΙΡΗ ΜΟΡΦΗ). Για κάθε $r, k \in \mathbb{N}$ με $r, k \geq 1$, ισχύει ότι $|\mathbb{N}| \rightarrow (|\mathbb{N}|)_k^r$.

Για παράδειγμα, για $r = k = 2$, το προηγούμενο λέει ότι αν χρωματίσουμε ζεύγη φυσικών αριθμών με 2 χρώματα, τότε υπάρχει (άπειρο, αριθμήσιμο) $H \subseteq \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε όλα τα ζεύγη του H να έχουν το ίδιο χρώμα.

Δίνουμε τώρα δυο χαρακτηριστικές εφαρμογές της άπειρης μορφής του θεωρήματος, οι οποίες αναδεικνύουν περαιτέρω την ιδέα της εμφάνισης κάποιας μορφής «τάξης» μέσα σε ένα—*a priori* «χαοτικό»—αρχικό σύνολο.

(i) Κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών περιέχει μονότονη υπακολουθία.

Έστω ότι η $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} = (r_0, r_1, \dots, r_n, \dots)$ είναι μια δεδομένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε την $f : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{1, 2, 3\}$ η οποία

ορίζεται ως εξής: για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m < n$,

$$f(\{m, n\}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } r_m < r_n \\ 2, & \text{αν } r_m = r_n \\ 3, & \text{αν } r_n < r_m \end{cases}$$

Από το Θεώρημα 6.0.5, έπεται ότι υπάρχει άπειρο $H \subseteq \mathbb{N}$ το οποίο είναι μονοχρωματικό για την f , δηλαδή υπάρχει «χρώμα» $i \in \{1, 2, 3\}$ ώστε $f(\{m, n\}) = i$, για κάθε $m, n \in H$ (με $m < n$).

Έστω ότι το $\{n_j : j \in \mathbb{N}\}$ είναι μια απαρίθμηση του συνόλου H , δηλαδή $H = \{n_0, n_1, \dots, n_j, \dots\}$. Έχουμε ότι:

- Αν $i = 1$, τότε η υπακολουθία $(r_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν $i = 2$, τότε η υπακολουθία $(r_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ είναι σταθερή.
- Αν $i = 3$, τότε η υπακολουθία $(r_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

(ii) Έστω $G = \langle V, E \rangle$ ένα γράφημα με αριθμήσιμο σύνολο κορυφών. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $V = \mathbb{N}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{1, 2\}$ η οποία ορίζεται ως εξής: για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \neq n$,

$$f(\{m, n\}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \{m, n\} \in E \\ 2, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Δηλαδή, η f είναι ένας 2-χρωματισμός δισυνόλων φυσικών αριθμών, ο οποίος χρωματίζει το δισύνολο $\{m, n\}$ με το «χρώμα 1» αν οι κορυφές m, n συνδέονται με πλευρά στο γράφημα G (ενώ με το «χρώμα 2» αλλιώς).

Από το Θεώρημα 6.0.5, υπάρχει άπειρο $H \subseteq \mathbb{N}$ μονοχρωματικό για την f , το οποίο όμως σημαίνει ότι υπάρχει είτε *άπειρο πλήρες υπογράφημα* του G (αν το H είναι μονοχρωματικό με «χρώμα 1») ή *άπειρο εντελώς ασύνδετο υπογράφημα* του G (αν το H είναι μονοχρωματικό με «χρώμα 2»).

Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι οι Paris & Harrington (1977), θεωρώντας μία κατάλληλη τροποποίηση του (πεπερασμένου) Θεωρήματος Ramsey, έδωσαν ένα παράδειγμα πρότασης σ της αριθμητικής η οποία ισχύει στους γνωστούς φυσικούς αριθμούς αλλά ούτε η σ ούτε και η άρνησή της είναι αποδείξιμες από τα αξιώματα της Peano αριθμητικής (PA).⁶

⁶Υποθέτοντας, φυσικά, ότι η PA είναι συνεπής θεωρία.

Με αφετηρία τα θεωρήματα του Ramsey, στα χρόνια που ακολούθησαν, αποδείχθηκαν διάφορα περαιτέρω αποτελέσματα, δημιουργώντας έτσι ένα πλούσιο σώμα γνώσης το οποίο γέννησε το μαθηματικό πεδίο της *Θεωρίας Ramsey*. Η Θεωρία Ramsey, η οποία συνεχίζει μέχρι τις μέρες μας να αποτελεί ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον και γόνιμο πεδίο έρευνας, έχει εκτός των άλλων και πληθώρα (θεωρητικών) εφαρμογών σε διάφορους μαθηματικούς κλάδους, όπως η Ανάλυση, η Άλγεβρα, η Συνδυαστική, η Θεωρία Συνόλων κ.α.

Τέλος, για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη, αναφέρουμε ότι μια κλασική βιβλιογραφική αναφορά είναι το βιβλίο *Ramsey Theory* των Graham, Rothschild & Spencer (Wiley, 1990).

Ομιλία 7

Μαθηματικά και αβεβαιότητα

Σταύρος Βακερούδης

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
svakeroudis@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: Βασικές γνώσεις
θεωρίας πιθανοτήτων.

Ένα μεγάλο ερώτημα, κυρίως φιλοσοφικού χαρακτήρα, είναι το αν υπάρχει τυχαιότητα (στη φύση, στη ζωή μας ή οπουδήποτε αλλού). Συνήθως, με τον όρο τυχαιότητα (ή αβεβαιότητα), ονομάζουμε οτιδήποτε δεν μπορεί να ερμηνευθεί με τις (κλασικές) ντετερμινιστικές μεθόδους.

Στα Μαθηματικά, υπάρχουν (βασικά) 3 ειδών συστήματα:

(i) Ντετερμινιστικά συστήματα, στα οποία συνδέονται δύο ή περισσό-



τερες μεταβλητές με μια ντετερμινιστική σχέση. Εδώ, μια διαταραχή της μίας μεταβλητής προκαλεί («σχετικά ανάλογη») διαταραχή και της άλλης.

Θεωρήστε για παράδειγμα την $y = x + 3$. Για $x = 2 \Rightarrow y = 5$, για $x = 4 \Rightarrow y = 7$, κλπ.

(ii) Χαοτικά συστήματα, στα οποία συνδέονται δύο ή περισσότερες μεταβλητές με μια σχέση κατά την οποία, μια (έστω απειροελάχιστη) διαταραχή της μίας μεταβλητής, μεταβάλλει κατά απροσδιόριστο τρόπο την άλλη. Ένα παράδειγμα είναι το πέταγμα της πεταλούδας: πετάει μια πεταλούδα στην Ελλάδα και προκαλείται βροχή στην Ιαπωνία κλπ.

(iii) Στοχαστικά συστήματα. Εδώ συνδέονται δύο ή περισσότερες μεταβλητές με μια σχέση στην οποία εμφανίζεται κι ένας τυχαίος παράγοντας (για παράδειγμα το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού). Σε αυτά, ακόμα κι αν η μεταβλητή x πάρει την ίδια τιμή, υπάρχει πιθανότητα η μεταβλητή y να μην πάρει την ίδια τιμή. Αυτό εξαρτάται από την τιμή τη μεταβλητής που εκφράζει την τυχαιότητα.

Θεωρήστε για παράδειγμα την $y = x + 3 + \omega$, όπου $\omega \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$, και παίρνει κάθε τιμή με πιθανότητα $1/6$. Το ω δηλαδή είναι το αποτέλεσμα της ρίψεως ενός δίκαιου όπλευρου ζαριού. Για $x = 2 \Rightarrow y = 6$, με πιθανότητα $1/6$ (αν $\omega = 1$), $y = 7$, με πιθανότητα $1/6$ (αν $\omega = 2$), κλπ.

Για $x = 4 \Rightarrow y = 12$, με πιθανότητα $1/6$ (αν $\omega = 5$), κλπ.

Τα τελευταία (Στοχαστικά συστήματα) είναι αυτά που μας ενδιαφέρουν σε αυτό το άρθρο. Σ' αυτήν την περίπτωση, οι ερωτήσεις που έχει νόημα να θέσει κάποιος δεν είναι ποια είναι η τιμή μιας (τυχαίας) μεταβλητής, αλλά ερωτήσεις του τύπου ποια είναι η πιθανότητα να πάρει κάποια τιμή, ποια είναι η μέση τιμή της, κα.

Το ενδιαφέρον των Στοχαστικών Μαθηματικών προκύπτει αφενός από τη Μαθηματική οπτική ως Ανάλυση (Στοχαστική Ανάλυση) αλλά και όσον αφορά στις εφαρμογές.

Τα κίνητρα μελέτης των Στοχαστικών Μαθηματικών είναι εφαρμογές σε

- Οικονομικά-Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά
- Βιολογία, Υπολογιστική Βιολογία
- Φυσική, Μετεωρολογία, κλπ.

7.1 Κίνηση Brown

Η Κίνηση Brown είναι ένα πολύ σημαντικό μαθηματικό αντικείμενο με θεωρητικό ενδιαφέρον αλλά και σημαντικό «εργαλείο» στοχαστικής μοντελοποίησης. Αναφέρθηκε πρώτα το 1828 από το βοτανολόγο Brown που μελετούσε την (τυχαία) κίνηση ατόμων αερίου σε κάποιο δοχείο. Εξ' ου και το όνομα.

Εν συνεχεία (1900), χρησιμοποιήθηκε από το Γάλλο Bachelier για να μοντελοποιήσει την τιμή μετοχών στο Χρηματιστήριο Αξιών του Παρισιού. Το 1905, τη χρησιμοποίησε και ο Einstein για τη μελέτη κίνησης σωματιδίων.

Τα πρώτα σημαντικά αποτελέσματα γράφονται γύρω στο 1923 από τον Wiener, γι' αυτό και σε πολλά βιβλία αναφέρεται και ως Κίνηση Wiener.

Κατόπιν, ο Lévy (1939, 1948) εξελίσσει κατά πολύ τις μελέτες, για να έρθει λίγο αργότερα ο Itô ώστε να φτάσουμε στη Στοχαστική Ανάλυση με πολλές επεκτάσεις που αποτελούν αντικείμενο μελέτης μέχρι σήμερα, με όλο και περισσότερα ανοικτά πεδία.

7.1.1 Τυχαίος περίπατος

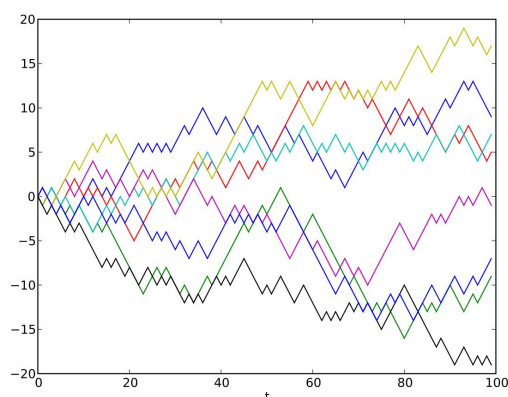
Με τον όρο «τυχαίος περίπατος» εννοούμε την εξέλιξη (μετά από n βήματα, ή την εξέλιξη στο χρόνο) της πορείας μας όταν κάνουμε τυχαία ένα βήμα μπροστά ή πίσω με ίση πιθανότητα $1/2$ (αλλιώς, μπορούμε να το σκεφτούμε σαν το κεφάλαιό μας μετά από n ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος, όπου κάθε φορά κερδίζουμε ή χάνουμε 1 χρηματική μονάδα με πιθανότητα $1/2$).

Θεωρούμε λοιπόν (με το μαθηματικό φορμαλισμό) τον τυχαίο περίπατο (αρχόμενος από το 0):

$$X_n = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

όπου οι $Y_i, i = 1, \dots, n$ είναι ανεξάρτητες ισοκατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(Y_i = -1) = 1/2$.

Εδώ, X_n είναι η θέση μας (ή το κεφάλαιό μας) μετά από n βήματα (ρίψεις του νομίσματος), και $Y_i, i = 1, 2, \dots$ είναι το κάθε τυχαίο βήμα μπροστά (+1) ή πίσω (-1) (το κέρδος/ζημιά μας στην κάθε ρίψη του νομίσματος). Στο Σχήμα 7.1 παρουσιάζονται 8 τέτοιες πραγματοποιήσεις 100 βημάτων (για παράδειγμα, τελική θέση 8 ατόμων μετά από 100 βήματα ή τελικό κεφάλαιο 8 παικτών μετά από 100 στοιχήματα).



Σχήμα 7.1: Οκτώ (τυχαίες) πραγματοποιήσεις του παραπάνω τυχαίου περιπάτου (για παράδειγμα, η θέση μετά από βήματα ή το συνολικό κεφάλαιο).

7.1.2 Κίνηση Brown: Διαισθητική προσέγγιση και Μαθηματικός Ορισμός.

Για τη συνεχή περίπτωση σκεφτόμαστε ως εξής: σε κάθε Δt κάνουμε βήμα Δx . Με $n_t = \lfloor t/\Delta t \rfloor$, έχουμε:

$$X_t = (\Delta x) \sum_{i=1}^{n_t} Y_i.$$

Παίρνουμε: $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ και προκύπτει Στοχαστική Ανέλιξη συνεχούς χρόνου (δείτε Σχήμα 7.2).

Ο μαθηματικός ορισμός, είναι ο εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.1.1. Η Στοχαστική Ανέλιξη (συνεχούς χρόνου) $(B_t, t \geq 0)$ ονομάζεται Κίνηση Brown αν ισχύουν τα παρακάτω:

- (i) $B_0 = 0$ (σ' αυτή την περίπτωση ονομάζεται *τυπική*).
- (ii) Για κάθε $t > 0$, ισχύει $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, (ακολουθεί κανονική κατανομή όπου οι τιμές της συγκεντρώνονται γύρω από τη μέση της τιμή 0)
- (iii) (Ανεξάρτητες προσαιξήσεις:) για κάθε $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$, οι

$$B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

είναι ανεξάρτητες, (δηλαδή, σε ανεξάρτητα χρονικά διαστήματα, το πόσο θα αυξηθεί ή θα μειωθεί, είναι ανεξάρτητες ποσότητες).

- (iv) (Στάσιμες προσαιξήσεις:) για κάθε $s, t > 0$ οι $B_{t+s} - B_t$ και $B_s - B_0$ έχουν την ίδια κατανομή, (δηλαδή, σε χρονικά διαστήματα ίσου μήκους, η μέση αύξηση ή μείωση τους είναι ίδια).



Σχήμα 7.2: 1 (τυχαία) πραγματοποίηση της μονοδιάστατης Κίνησης Brown.

(v) οι τροχιές $(B_t, t \geq 0)$ είναι σχεδόν βεβαίως συνεχείς.

Η Κίνηση Brown υπάρχει (Wiener 1923) και είναι μοναδική (υπό την έννοια ότι δυο Κινήσεις Brown ακολουθούν την ίδια κατανομή).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7.1.2. Οι τροχιές $(B_t, t \geq 0)$ είναι σ.β. *πουθενά παραγωγίσιμες*.

Κατασκευάσαμε λοιπόν μια τροχιά που είναι σ.β. συνεχής αλλά *πουθενά παραγωγίσιμη*. Αυτό, διαισθητικά σημαίνει, ότι αφού δεν ορίζεται σ.β. *πουθενά* η παράγωγος, έχουμε μια τροχιά που «κάνει παντού γωνίες»!

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η Στοχαστική Ανάλυση που έχει ως αντικείμενο τέτοια μαθηματικά αντικείμενα, είναι η Ανάλυση του μη-παραγωγισίμου.

Κάποιες πρώτες ιδιότητες:

- (i) Αποδεικνύεται, ότι όταν Ξεκινάει η Κίνηση Brown γίνεται σχεδόν βεβαίως αμέσως και θετική και αρνητική.
- (ii) Η $(B_t, t \geq 0)$ είναι Μαρκοβιανή Ανέλιξη, δηλαδή, αν γνωρίζουμε πληροφορίες από το παρελθόν μέχρι κάποια χρονική στιγμή, το τι θα συμβεί στο μέλλον, εξαρτάται μόνο από την τελευταία χρονική στιγμή. Με μαθηματικούς όρους:

$$\mathbb{P}[B_{t+s} \in \mathcal{D} | B_u, 0 \leq u \leq t] = \mathbb{P}[B_{t+s} \in \mathcal{D} | B_t],$$

όπου \mathcal{D} οποιοδήποτε μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R} .

- (iii) Η $(B_t, t \geq 0)$ είναι F_t -martingale ως προς F_t (το σύνολο των πληροφοριών μέχρι τη χρονική στιγμή t). Ο όρος martingale σημαίνει (στα

αγγλικά) χαλινάρι αλόγου και προέκυψε από εφαρμογές σε παιχνίδια στοιχήματος. Μια ανέλιξη είναι F_t -martingale αν (μαζί με 2 άλλες προϋποθέσεις) όταν γνωρίζουμε πληροφορίες μέχρι κάποια χρονική στιγμή, η μελλοντική τιμή της ανέλιξης, θα έχει μέση τιμή την τιμή της ανέλιξης την τελευταία χρονική στιγμή. Με μαθηματικούς όρους:

- $(B_t)_{t \geq 0}$ προσαρμοσμένη στην F_t (δηλαδή, αν γνωρίζουμε πληροφορίες μέχρι οποιαδήποτε χρονική στιγμή, γνωρίζουμε και την τιμή της ανέλιξης αυτήν τη χρονική στιγμή)
- $\mathbb{E}[|B_t|] < \infty$, για κάθε t ,
- $\mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s] = B_s$, για κάθε $s < t$.

Άλλα martingales της Κίνησης Brown (ως προς F_t) είναι τα εξής (άσκηση): $B_t^2 - t$, $\exp\{\lambda B_t - \lambda^2 t/2\}$.

(iv) ΠΡΟΣΟΧΗ: Η Μαρκοβιανή ιδιότητα και η ιδιότητα martingale δεν είναι το ίδιο. Η Κίνηση Brown πάντως, ικανοποιεί και τις δύο.

Κάποιες επιπλέον πολύ σημαντικές ιδιότητες της Κίνησης Brown δίνονται παρακάτω:

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.1.3. (i) *Μετατόπιση*: για κάθε $s > 0$ η $(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$ είναι τυπική Κίνηση Brown ανεξάρτητη από τη σ -άλγεβρα $\sigma(B_u, u \leq s)$ που παράγεται από την Κίνηση Brown μέχρι τη χρονική στιγμή s .

(ii) *Συμμετρία*: η $(-B_t, t \geq 0)$ είναι Κίνηση Brown.

(iii) *Scaling*: για κάθε $c > 0$, η $(cB_{t/c^2}, t \geq 0)$ είναι Κίνηση Brown. Ουσιαστικά αυτή η ιδιότητα μας λέει ότι όσο κι αν κάνουμε zoom ή unzoom στην τροχιά, θα βλέπουμε πάντα μια Κίνηση Brown.

(iv) *Αντιστροφή χρόνου*: η X_t με $X_0 = 0$ και $(X_t = tB_{1/t}, t > 0)$ είναι Κίνηση Brown.

(v) Με $t \in [0, 1]$ η $B_{1-t} - B_1$ είναι Κίνηση Brown στο $[0, 1]$.

(vi) *Αναστροφή χρόνου*: δοθέντος σταθερού u οι $(B_s, s \geq 0)$ και $(B_u - B_s, s \geq 0)$ έχουν την ίδια κατανομή.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7.1.4. Η Κίνηση Brown έχει άπειρη κύμανση σε κάποιο διάστημα $[0, t]$ για κάθε $t > 0$ (η κύμανση προκύπτει ως το άθροισμα διαφορών διαδοχικών τιμών της Κίνησης Brown σε σημεία λεπτής διαμέρισης του διαστήματος).

Η Κίνηση Brown έχει τετραγωνική διακύμανση σε κάποιο διάστημα $[0, t]$ για κάθε $t > 0$ ίση με t (η τετραγωνική κύμανση προκύπτει ως το άθροισμα των παραπάνω διαφορών στο τετράγωνο).

7.1.3 Κίνηση Brown σε υψηλότερες διαστάσεις.

Παρακάτω, σημειώνουμε κάποιες διαφοροποιήσεις της Κίνησης Brown στις διαστάσεις 1, 2 και 3.

- (i) Η μονοδιάστατη Κίνηση Brown (δείτε Σχήμα7.1), έχει $\sup_{s \geq 0} B_s = +\infty$ $\inf_{s \geq 0} B_s = -\infty$. Συνεπώς, το σύνολο των φορών που θα περνάει από το 0 είναι μη-φραγμένο. Αυτό, γιατί, όσο μεγάλη τιμή κι αν πάρει, θα υπάρχει πάντα κάποια μελλοντική στιγμή που θα την υπερβεί ενώ ταυτόχρονα, όσο μικρή τιμή κι αν πάρει, θα υπάρχει πάντα κάποια μελλοντική στιγμή που πάρει ακόμα μικρότερη τιμή.

Αυτό σημαίνει ότι σ.β. θα επισκέπτεται όλα τα σημεία στο \mathbb{R} (παίρνει δηλαδή όλες τις τιμές στο \mathbb{R}) και θα επανέρχεται σε όλα επ' άπειρον.

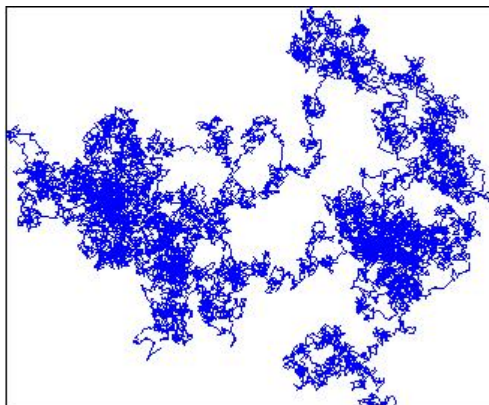
- (ii) Η δισδιάστατη Κίνηση Brown, έχει δύο συνιστώσες, όπου η καθεμιά είναι μια ανεξάρτητη μονοδιάστατη Κίνηση Brown (δείτε Σχήμα7.3). Αποδεικνύεται ότι αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο στο επίπεδο και σφαίρα με κέντρο το σημείο και ακτίνα $\varepsilon > 0$, η δισδιάστατη Κίνηση Brown θα την επισκεφθεί σ.β. και μάλιστα θα επανέλθει στη σφαίρα άπειρες φορές. Παράλληλα όμως, δεν επισκέπτεται σ.β. κανένα σημείο στο επίπεδο, εκτός από το σημείο εκκίνησής της! (Έχουμε δηλαδή ένα «πολύ περίεργο» μαθηματικό αντικείμενο που σε βάθος χρόνου θα γεμίσει όλο το επίπεδο, χωρίς όμως να έχει επισκεφθεί κανένα σημείο εκτός από το σημείο εκκίνησης). Η δισδιάστατη Κίνηση Brown έχει πολύ ενδιαφέρον και από μαθηματικής πλευράς αλλά και λόγω της πληθώρας εφαρμογών που βρίσκει. Γι' αυτό αποτελεί αντικείμενο μελέτης πολλών ερευνητών τα τελευταία αρκετά χρόνια.

- (iii) Η τρισδιάστατη Κίνηση Brown, έχει τρεις συνιστώσες, όπου η καθεμιά είναι μία ανεξάρτητη μονοδιάστατη Κίνηση Brown. Αποδεικνύεται ότι, αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο στο χώρο και σφαίρα με κέντρο αυτό και ακτίνα $\varepsilon > 0$, τότε η τρισδιάστατη Κίνηση Brown θα την επισκεφθεί με θετική πιθανότητα. Παράλληλα όμως, δεν επισκέπτεται σ.β. κανένα σημείο στο χώρο, εκτός από το σημείο εκκίνησής της!

- (iv) Συνολικά, βλέπουμε ότι ουσιαστικά, όσο πηγαίνουμε σε υψηλότερη διάσταση, χάνεται κάποια ιδιότητα σχετικά με την επαναληπτικότητα της Κίνησης Brown.

7.1.4 Η ανάγκη ορισμού του Στοχαστικού Ολοκληρώματος.

Η ανάγκη εισαγωγής του Στοχαστικού Ολοκληρώματος προέκυψε ως φυσική ανάγκη στη στοχαστική μοντελοποίηση αλλά και ως φυσικό μα-



Σχήμα 7.3: Μια (τυχαία) πραγματοποίηση της δισδιάστατης Κίνησης Brown.

θηματικό ερώτημα. Αφού η Κίνηση Brown είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο που έχει τροχιά σ.β. πουθενά παραγωγίσιμη, μήπως θα μπορούσαμε να ορίσουμε/μελετήσουμε κάτι αντίστροφο; Αυτό το αντίστροφο ακριβώς είναι το στοχαστικό ολοκλήρωμα (κατά Itô ή άλλα).

Όταν γύρω στο 1900 ο Bachelier μελετούσε την (τυχαία) εξέλιξη των τιμών των μετοχών στο Χρηματιστήριο Αξιών του Παρισιού, σκέφτηκε να χρησιμοποιήσει την Κίνηση Brown ως μοντέλο για την τιμή τους.

Έστω ότι η W_t είναι η τιμή μιας μετοχής. Άρα, ο Bachelier θεώρησε ότι $W_t = B_t$. Όμως, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η Κίνηση Brown γίνεται αμέσως αρνητική (και θετική). Ακόμα κι αν θεωρήσουμε ότι ξεκινά από θετική τιμή, κάποια στιγμή (αργά ή γρήγορα) είναι σίγουρο ότι θα γίνει αρνητική. Αυτό δημιουργεί πρόβλημα καθώς η τιμή μιας μετοχής δεν μπορεί να είναι αρνητική.

Στη συνέχεια, παρατηρήθηκε ότι ουσιαστικά δεν ήταν η τιμή της μετοχής που πραγματικά ενδιέφερε αλλά η μεταβολή της τιμής της $dW_t = W_{t+dt} - W_t$ δηλαδή το κέρδος/ζημιά και μάλιστα η σχετική μεταβολή $(dW_t)/W_t$. Συνεπώς, μοντελοποιήθηκε η τελευταία ποσότητα με χρήση της Κίνησης Brown, δηλαδή:

$$\frac{dW_t}{W_t} = \sigma dB_t \Rightarrow dW_t = \sigma W_t dB_t,$$

όπου σ είναι μια σταθερά που δείχνει πόση αβεβαιότητα/τυχειότητα υπάρχει. Η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$W_t = x + \sigma \int_0^t W_s dB_s,$$

όπου x είναι μια σταθερά. Το φυσιολογικό ερώτημα τώρα είναι, αφού η

Κίνηση Brown είναι σ.β. πουθενά παραγωγίσιμη, ποιο είναι το νόημα της παραπάνω εξίσωσης και ποιο συγκεκριμένα του ολοκληρώματος;

Η απάντηση δόθηκε από τον Ιάπωνα Kiyoshi Itô με τον ορισμό του Στοχαστικού Ολοκληρώματος (τέτοιο είναι ακριβώς το παραπάνω ολοκλήρωμα). Χωρίς να μπούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες, για πληρότητα του κειμένου, αναφέρουμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι η

$$W_t = xe^{Bt}e^{-t/2}.$$

Η θεωρία της Στοχαστικής Ανάλυσης επεκτάθηκε έκτοτε με μελέτη ανάλογων εξισώσεων (Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις), εξέλιξη της θεωρίας αλλά και πολλές εφαρμογές και επεκτάσεις στην κλασική Ανάλυση.



Ομιλία 8

Η Χρυσή Τομή στη Μουσική: Η Τέχνη της Φούγκας και η ακολουθία Fibonacci

Ανδρέας Παπασαλούρος

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
andrapas@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: -

8.1 Εισαγωγή

Στην παρουσίαση αυτή γίνεται μια εισαγωγή στο μουσικό ύφος της πολυφωνίας και διερευνάται η σχέση του με τα Μαθηματικά. Παρουσιάζεται συνοπτικά ένα από τα σημαντικότερα έργα πολυφωνικής μουσικής, Η Τέχνη της Φούγκας του Γιόχαν Σεμπάστιαν Μπαχ και μελετάται το έργο μέσα από την έκταση των μερών που το αποτελούν. Από την παραπάνω μελέτη προκύπτει ότι η δομή του έργου βασίζεται στη Χρυσή Τομή και στην ακολουθία Fibonacci.

8.1.1 Ομοφωνία και Πολυφωνία

Ομοφωνικό και πολυφωνικό μουσικό ύφος

Σύνθετες μουσικές δομές δημιουργούνται από τη συνήχηση περισσότερων από μιας φωνών. Δύο είναι οι βασικές προσεγγίσεις για την οργάνω-

νωση των ταυτόχρονων ήχων: το ομοφωνικό και το πολυφωνικό ύφος.



δεσμός

- Στο ομοφωνικό ύφος κυριαρχεί μια μελωδία και οι φωνές συνδυάζονται κάθετα, μέσω της *αρμονίας*: The Beatles, *Because*.

Η αρμονία είναι μια τεχνική οργάνωσης των ήχων σε κάθετες συνηχήσεις με καθορισμένες αποστάσεις (διαστήματα) μεταξύ των ήχων που ακούγονται ταυτόχρονα (συγχορδίες). Πέρα από την κύρια μελωδία, οι υπόλοιπες φωνές, για παράδειγμα άλλα όργανα, κινούνται με οδηγό τον σχηματισμό συγχορδιών και όχι αυτόνομα. Η σύγχρονη μουσική ακολουθεί κυρίως το *ομοφωνικό ύφος*, καθώς κυριαρχεί μια βασική μελωδία η οποία συνοδεύεται από κατάλληλη αρμονία.



δεσμός

- Στο πολυφωνικό ύφος οι φωνές κινούνται *ανεξάρτητα* ακολουθώντας συγκεκριμένους *κανόνες*: Orlando di Lasso, *Oculus non vidit*.

Από την κίνηση των φωνών προκύπτουν ενδιαφέρουσες συνηχήσεις οι οποίες όμως δεν βασίζονται στην οριζόντια λογική των συγχορδιών, όπως στο ομοφωνικό ύφος. Το πολυφωνικό ύφος βασίζεται συχνά στους αρχαίους *τρόπους*, ενώ το ομοφωνικό κυρίως στηρίζεται στον *μείζονα* και τον *ελάσσονα* τρόπο (ματζόρε και μινόρε), χωρίς και εδώ να αποκλείονται οι τρόποι.

8.2 Πολυφωνική Μουσική

Οι απαρχές της πολυφωνίας βρίσκονται περίπου στις αρχές της δεύτερης χιλιετίας μ.Χ. Το ύφος εξελίχτηκε μέσα στους αιώνες ενώ συναντάται ακόμη και στη μουσική της κλασικής περιόδου (για παράδειγμα σε κάποια έργα του Μότσαρτ και του Μπετόβεν) αλλά και στη σύγχρονη λόγια και, σπανιότερα, στην pop μουσική: Simon & Garfunkel, *Scarborough Fair*.



δεσμός

Η πολυφωνία επίσης συναντάται και στην παραδοσιακή μουσική, ακόμη και στην Ελλάδα, για παράδειγμα στην περιοχή της Ηπείρου.

8.2.1 Πολυφωνία και αντίστιξη

Η θεωρία, οι κανόνες και οι τεχνικές πολυφωνικής μουσικής σύνθεσης έχουν παγιωθεί σε ένα σύστημα που ονομάζεται *αντίστιξη* (contrapunctus).

- Η αντίστιξη αναπτύχθηκε κυρίως κατά την εποχή της *Αναγέννησης*.
- Παγιώθηκε σε ένα αυστηρό σύστημα μουσικής σύνθεσης από τον Johann Joseph Fux το 1725 με το έργο *Gradus ad Parnassum*.
- Οι κανόνες της αντίστιξης καθορίζουν τους τρόπους με τους οποίους επιτρέπεται να κινείται κάθε φωνή σε σχέση με τις υπόλοιπες.

8.2.2 Μορφές πολυφωνικής σύνθεσης

Στη μακρά πορεία της εξέλιξης της πολυφωνίας, αναπτύχθηκαν πολλές μορφές, δηλαδή είδη πολυφωνικών μουσικών συνθέσεων. Οι πιο χαρακτηριστικές μορφές πολυφωνικής σύνθεσης περιγράφονται στη συνέχεια.

Κανόννας

Η κυκλική επανάληψη μιας μελωδίας (θέμα). Η δεύτερη φωνή είναι όμοια (μίμηση) με το θέμα (με κάποια χρονική απόσταση): *Frère Jacques*

Ένας κανόννας είναι δυνατόν να αποτελείται από δύο ή από περισσότερες φωνές, οπότε μιλάμε για δίφωνο, τρίφωνο, τετράφωνο κλπ κανόνα. Η μίμηση στην περίπτωση του κανόνα είναι ακριβής, δηλαδή κάθε φωνή τραγουδά (ή παίζει) ακριβώς την ίδια μελωδία.



Δεξιός

Πασσακάλια

Η κυκλική επανάληψη μιας μελωδίας στο μπάσο (επίμονο βάσιμο) με παραλλαγές (αρμονικά ή αντιστικτικά) στις ανώτερες φωνές. Παραδείγματα αυτής της μορφής:

- Γ. Σ. Μπαχ, *Πασσακάλια και Φούγκα σε Ντο ελάσσονα*.
- Επίμονο βάσιμο στη Jazz: H. Hancock, *Canteloup Island*.



Δεξιός



Δεξιός

8.2.3 Η φούγκα (φυγή)

Η φούγκα είναι ίσως η πιο εξελιγμένη μορφή πολυφωνικής γραφής. Βασίζεται σε ένα ή περισσότερα θέματα (μελωδίες) οι οποίες εμπλέκονται αντιστικτικά με βάση συγκεκριμένους κανόνες οι οποίοι καθορίζουν τη δομή της φούγκας. Βασίζεται στην αντιστικτική μίμηση ενός ή περισσότερων θεμάτων.

Βασική δομή της φούγκας φαίνεται στην Εικόνα 8.1.

Πηγή: Wikipedia

Φωνή	Έκθεση	Επεισόδιο	Αντέκθεση	Ανάπτυξη	Επανάθεση			
1	ΑΠΑΝΤΗΣΗ Codetta	Αντίθεμα 1	Αντίθεμα 2	Αντίθεμα 1	ΘΕΜΑ			
2	ΘΕΜΑ	Αντίθεμα 1	Αντίθεμα 2	Επεισόδιο	Εκθεση			
3		ΘΕΜΑ	ΘΕΜΑ	Αντίθεμα 2	Αντίθεμα 1			
...				Επεισόδιο	Εκθεση			
				...	Κορύνα			
					Έκθεση			
Τονικότητα	Τονική	Δεσπόζουσα >>>	Τονική	>>>	Δεσπ. ή Σχετ. Μείζ	Διάφορες κλίμακες	Δεσπόζουσα	Τονική
Σχηματική, απλουστευμένη απόδοση της τυπικής μορφής της φούγκας								

Εικόνα 8.1: Ενδεικτική δομή φούγκας

Παράδειγμα: Γ. Σ. Μπαχ, *Η Τέχνη της Φούγκας*, Contrapunctus I.



Δεξιός

Στοιχεία της φούγκας

Βασικά στοιχεία της φούγκας είναι:

Θέμα Το θέμα αποτελεί τη βασική μελωδία μιας φούγκας. Το θέμα επαναλαμβάνεται σε διαφορετικές φωνές (μίμηση) σε διαφορετικά χρονικά σημεία μέσα στο έργο.

Απάντηση Μίμηση του θέματος σε διάστημα 5ης (για παράδειγμα Ντο–Σολ).

Αντίθεμα Μια δεύτερη μελωδία που συνδυάζεται αντιστικτικά με το θέμα. Το αντίθεμα ακούγεται παράλληλα με το θέμα.

Μέρη της φούγκας

Τα παραπάνω στοιχεία εμφανίζονται σε συγκεκριμένα μέρη του έργου, καθορίζοντας έτσι τη δομή μιας φούγκας. Τα βασικά μέρη είναι:

Έκθεση Η εισαγωγή του θέματος σε όλες τις φωνές διαδοχικά. Η έκθεση πραγματοποιείται στην αρχή του έργου, αλλά και σε ενδιάμεσα σημεία του έργου.

Επεισόδιο Τμήματα (μοτίβα) του θέματος που περνάνε από τη μία φωνή στην άλλη. Στα επεισόδια δεν έχουμε την ολοκληρωμένη εμφάνιση ενός θέματος αλλά με κάποια έννοια με αυτά προάγεται η εξέλιξη του έργου.

Μεσαία είσοδος Είσοδος του θέματος σε μία φωνή στη μέση του κομματιού. Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε μίμηση του θέματος, οπότε δεν μπορούμε να μιλήσουμε για έκθεση.

Επανεκθεση Επανεκτέλεση της έκθεσης στο τέλος του κομματιού.

8.3 Μορφές μίμησης και η μαθηματική τους αναπαράσταση

Από μαθηματική σκοπιά, ένα θέμα και γενικότερα μια μελωδία μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση f , όπου $f(t)$ είναι το τονικό ύψος, δηλαδή η νότα της μελωδίας σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t . Κατά την αντιστικτική μίμηση, μια δεύτερη μελωδία μιμείται την πρώτη και μπορεί επίσης να αναπαρασταθεί από μια συνάρτηση g . Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν μερικές βασικές μορφές μίμησης και για κάθε μορφή θα

δοθεί η μορφή της συνάρτησης g σε σχέση με την f . Τα παρακάτω εμφανίζονται στην μορφή του κανόνα, αλλά και σε πιο σύνθετες αντιστικτικές μορφές όπως η φούγκα.

8.3.1 Απλή μίμηση – Κανόνας

Στην περίπτωση της απλής μίμησης, η δεύτερη φωνή είναι όμοια με το θέμα. Η συνάρτηση f παριστάνει το θέμα ενώ η g παριστάνει την αντιστικτική μίμηση του θέματος. Η δεύτερη φωνή πάντα εμφανίζεται με κάποια χρονική υστέρηση a σε σχέση με το θέμα. Επιπλέον, η δεύτερη φωνή συχνά ξεκινάει, σε σχέση με το θέμα, σε διάστημα οκτάβας, καθαρής τέταρτης, πέμπτης ή από την ίδια νότα με το θέμα (μίμηση σε ταυτοφωνία).

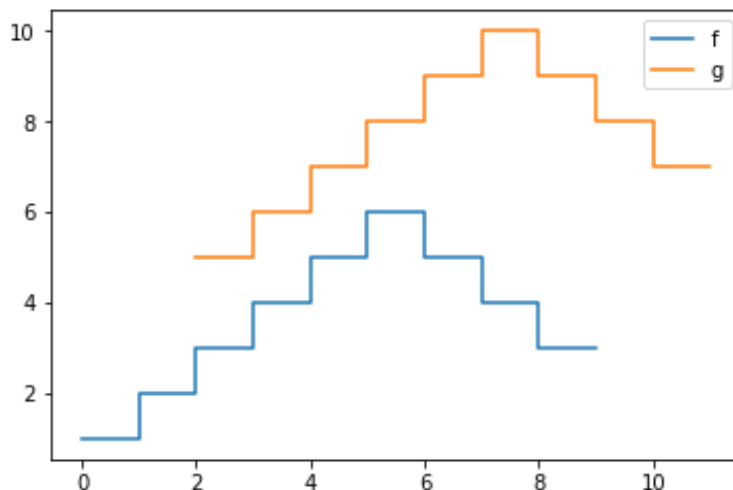
Στην περίπτωση της μορφής του κανόνα, όπου έχουμε την κυκλική επανάληψη του θέματος και της μίμησης, οι δύο συναρτήσεις f και g είναι περιοδικές με την ίδια περίοδο, T .

Με βάση τα παραπάνω, οι συναρτήσεις f και g για την απλή μίμηση έχουν μεταξύ τους τη σχέση:

$$g(t) = f(t - a) + K$$

όπου K είναι η διαφορά στο τονικό ύψος (ταυτοφωνία, διάστημα πέμπτης κλπ). Στην Εικόνα 8.2 δίνεται σε γραφική μορφή η σχέση των συναρτήσεων των φωνών για $a = 2$ και $k = 4$.

Παράδειγμα μίμησης αυτής της μορφής είναι Ο κανόνας του Pachelbel [2].



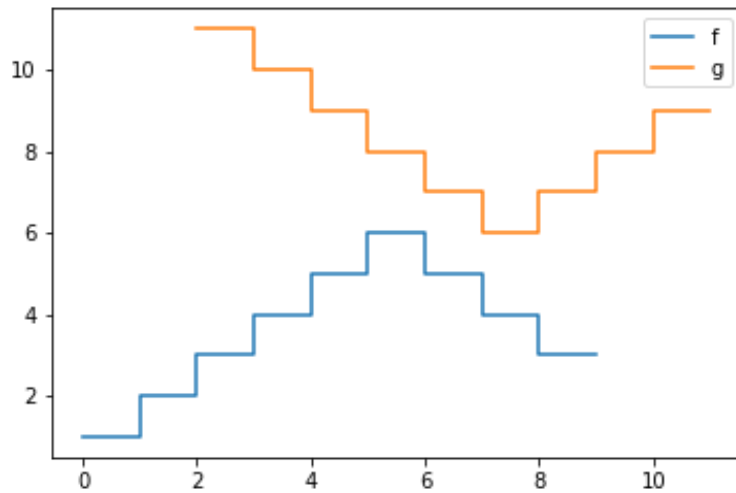
Εικόνα 8.2: Απλή μίμηση

8.3.2 Αναστροφή (ανάστροφος ή κανόνας-καθρέπτης)

Η δεύτερη φωνή είναι αντιστροφή της πρώτης, δηλαδή όποτε η μελωδία της πρώτης φωνής έχει ανιόν διάστημα, η μελωδία της δεύτερης εμφανίζει το ίδιο κατιόν διάστημα. Και πάλι, υπάρχει χρονική υστέρηση a για τη δεύτερη φωνή καθώς και η κατακόρυφη απόσταση K :

$$g(t) = -f(t - a) + K$$

Στην Εικόνα 8.3 δίνεται η γραφική παράσταση δύο ενδεικτικών f και g στην περίπτωση της αναστροφής μίμησης.



Εικόνα 8.3: Μίμηση με αναστροφή



δεξιός

Παράδειγμα: *Η Τέχνη της Φούγκας*, Contrapuntus III.

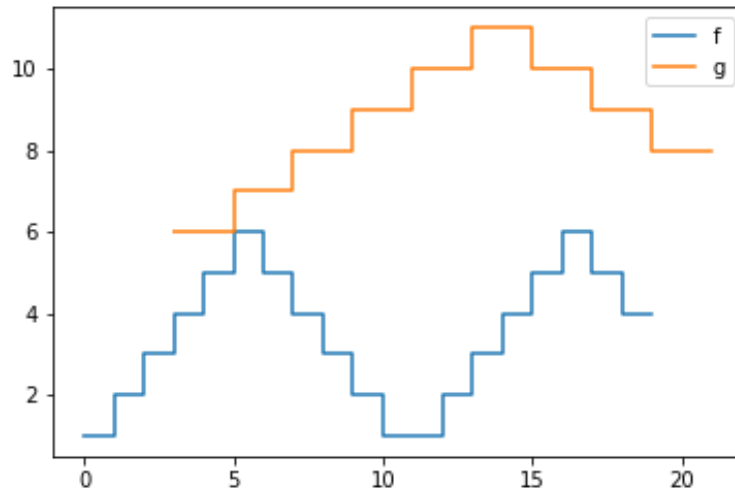
8.3.3 Μίμηση με ρυθμική συστολή ή διαστολή του θέματος

Εδώ η διάρκεια των φθόγγων της δεύτερης φωνής διαστέλλεται ή συστέλλεται χρονικά κατά έναν παράγοντα b . Για παράδειγμα, έχουμε $b = 2$ για διπλασιασμό της διάρκειας της δεύτερης φωνής (βλέπε για παράδειγμα Εικόνα 8.4).

$$g(t) = f(bt - a)$$

Παράδειγμα ρυθμικής διαστολή θέματος ($b = 2$) δίνεται στην Εικόνα 8.4.

Επίσης, παράδειγμα μίμησης με ρυθμική διαστολή με αναστροφή του θέματος αποτελεί το Contrapunctus 7 από την *Τέχνη της Φούγκας* του



Εικόνα 8.4: Μίμηση με χρονική διαστολή

Γ. Σ. Μπαχ, έργο που θα συζητηθεί εκτενέστερα στη συνέχεια (βλέπε και Εικόνα 8.5).



Σελίδα

8.3.4 Καρκινικός (cancrizans) κανόνας

Πρόκειται για μια από τις πιο ενδιαφέρουσες μορφές μίμησης. Η δεύτερη μελωδία κινείται από το τέλος προς την αρχή σε σχέση με το κύριο θέμα, οπότε έχουμε συμμετρία προς τον χρόνο. Η μορφή της συνάρτησης της δεύτερης φωνής είναι

$$g(t) = f(T - t) + K$$

όπου T η περίοδος της συνάρτησης f (διάρκεια του θέματος). Είναι σαφές ότι η g έχει την ίδια περίοδο με την f . Εντυπωσιακό παράδειγμα αποτελεί ο Κανόνας I από το έργο *Μουσική Προσφορά* του Γ. Σ. Μπαχ.



Σελίδα

8.4 Η Χρυσή Τομή

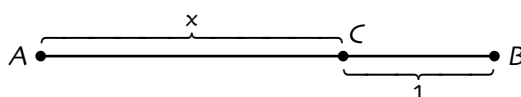
Η Χρυσή Τομή είναι μια μαθηματική έννοια γνωστή από την αρχαιότητα. Πρόκειται για έναν αριθμό ο οποίος θεωρείται έκφραση της αρμονικής αναλογίας στη φύση και στην τέχνη σε τομείς όπως η αρχιτεκτονική, η ζωγραφική, η τυπογραφία ή ακόμη η φωτογραφία και ο κινηματογράφος [1].

Με δεδομένο ένα ευθύγραμμο τμήμα AB ζητείται αυτό να χωριστεί σε δύο τμήματα, AC και CB , ώστε ο λόγος του αρχικού προς το μεγαλύτερο

Contrapunctus 7, a 4. per Augment[ationem] et Diminut[ionem].⁹⁾ ⊖

Εικόνα 8.5: Παράδειγμα μίμησης με ρυθμική διαστολή και με αναστροφή του θέματος (*Η Τέχνη της Φούγκας*, Contrapunctus 7, μέτρα 1–8 [4])

τμήμα να είναι ίσος με τον λόγο του μεγαλύτερου προς το μικρότερο.



Δηλαδή θεωρείται ότι

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}. \quad (8.1)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι το μικρότερο από τα δύο τμήματα στα οποία χωρίσαμε το αρχικό είναι ίσο με 1: $BC = 1$. Επίσης, έστω x το μήκος του μεγαλύτερου ευθύγραμμου τμήματος AB . Τότε η αρχική Εξίσωση 8.1 γίνεται

$$\frac{x+1}{x} = x \quad (8.2)$$

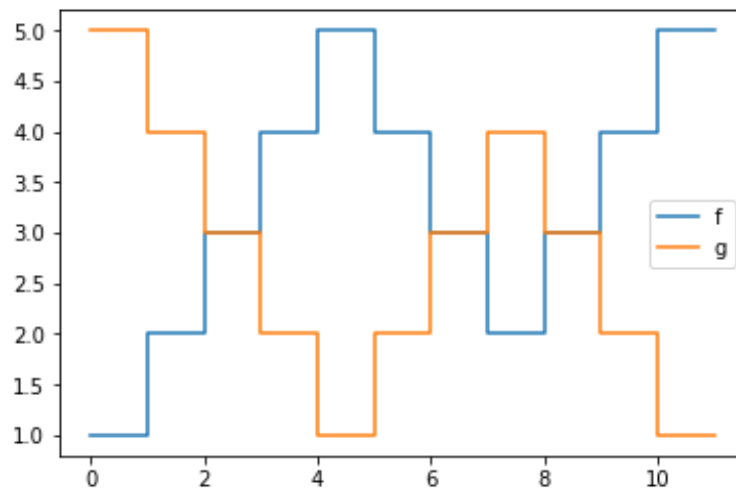
από όπου προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$x^2 = x + 1 \quad \text{ή} \quad x^2 - x - 1 = 0. \quad (8.3)$$

Οι λύσεις της Εξίσωσης 8.3 είναι

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803 \dots, \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi = -\frac{1}{\varphi} \approx -0.61803 \dots$$

Από τις παραπάνω δύο λύσεις, η θετική $\varphi \approx 1.61803$ είναι ο αριθμός της Χρυσής Τομής.



Εικόνα 8.6: Καρκινικός κανόνας

8.4.1 Η ακολουθία Fibonacci και η Χρυσή Τομή

Η Χρυσή Τομή σχετίζεται με την ακολουθία Fibonacci. Πρόκειται για την ακολουθία f_n των ακέραιων αριθμών που ορίζεται ως εξής: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ και

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Οι δέκα πρώτοι όροι της ακολουθίας: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Η ακολουθία σε κλειστή μορφή αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση:

$$f_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

Δεδομένου ότι $|\psi| < 1$, αποδεικνύεται εύκολα ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$$

Με άλλα λόγια, ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας τείνει στον αριθμό της Χρυσής Τομής.

8.4.2 Γενικευμένη ακολουθία Fibonacci

Ονομάζουμε την ακολουθία g_n : $g_0 = a$, $g_1 = b$ (a, b θετικοί ακέραιοι) και

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

γενικευμένη ακολουθία Fibonacci.

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω ακολουθία σε κλειστή μορφή δίνεται από τη σχέση:

$$g_n = \alpha\varphi^n + \beta\psi^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

οπότε για μια τέτοια ακολουθία ισχύει επίσης: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = \varphi$.

8.5 Η Τέχνη της Φούγκας

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται συνοπτικά το έργο του Γ. Σ. Μπαχ *Η Τέχνη της Φούγκας* και αναδεικνύεται η σχέση του έργου με τη Χρυσή Τομή και την ακολουθία Fibonacci.

8.5.1 Γιόχαν Σεμπάστιαν Μπαχ

Συνθέτης του έργου είναι ο Γιόχαν Σεμπάστιαν Μπαχ (1685–1750), Γερμανός συνθέτης της εποχής του μπαρόκ. Ο Μπαχ έγραψε πάνω από 1000 έργα εκκλησιαστικής και κοσμικής μουσικής, τόσο σε πολυφωνικό όσο και σε ομοφωνικό ύφος. Η επιρροή του στην λογία αλλά και στη σύγχρονη pop μουσική και κουλτούρα είναι τεράστια (ενδεικτικά, αναφέρονται 1413 credits στη διεθνή βάση δεδομένων ταινιών IMDb).



Εικόνα 8.7: Γιόχαν Σεμπάστιαν Μπαχ (1685–1750)

8.5.2 Το έργο

Το έργο *Η Τέχνη της Φούγκας* (στα Γερμανικά *Die Kunst der Fuge*, αριθμός καταλόγου έργων του Μπαχ BWV 1080) είναι μια συλλογή από από

φούγκες και κανόνες που συνέθεσε ο Γιόχαν Σεμπάστιαν Μπαχ τη δεκαετία του 1740. Το έργο βασίζεται σε ένα κύριο θέμα, το οποίο αποτελεί το θέμα για όλες τις φούγκες και τους κανόνες που περιέχει. Αποτελείται από 14 φούγκες (contrapunctus) και 4 κανόνες που φέρουν αρίθμηση με λατινικούς χαρακτήρες (βλέπε Πίνακα 8.1). Η τελευταία φούγκα έμεινε ημιτελής, αλλά εικάζεται πως θα είχε μάλλον τη μορφή τετραπλής φούγκας. Είναι άγνωστο για ποιο όργανο γράφτηκε το έργο. Συνήθως εκτελείται από σόλο πιάνο, αλλά υπάρχουν εκτελέσεις από κουαρτέτο εγχόρδων και άλλα οργανικά σύνολα. Εκδόθηκε μετά το θάνατο του Μπαχ, πιθανότατα από τον γιο του, Καρλ Φίλιπ Εμάνουελ, επίσης σημαντικό συνθέτη.

8.5.3 Τα μέρη του έργου

Στο έργο εμφανίζονται τα ακόλουθα είδη φούγκας [4, 5]:

Απλή φούγκα (simple fugue) με ένα θέμα

Διπλή φούγκα (double fugue) με δύο θέματα



Δεσμός

Διπλή φούγκα με τρία θέματα



Δεσμός

Κοντρα-φούγκα (counter fugue) Η πρώτη απάντηση εμφανίζεται αντεστραμμένη.



Δεσμός

Φούγκα-καθρέπτης (mirror fugue) Ολόκληρη η φούγκα επαναλαμβάνεται με τα διαστήματα αντεστραμμένα σε κάθε φωνή. Δίνεται ένα παράδειγμα στο περιθώριο



Δεσμός

και η κατοπτρική της.



Δεσμός

8.5.4 Η δομή του έργου και η Χρυσή Τομή

Οι Sylvestre και Costa [3] ομαδοποίησαν με διαφορετικούς τρόπους τα μέρη του έργου και μέτρησαν τον *συνολικό αριθμό των μέτρων για κάθε ομάδα*.

Παρατήρησαν ότι ο αριθμός των μέτρων συνέπιπτε με αριθμούς της ακολουθίας Fibonacci.

<i>num- ber</i>	<i>BWV classification</i>	<i>Name</i>	<i>type</i>	<i>total bars</i>
1	1080/1	<i>Contrapunctus 1 [I]</i>	simple fugue	78
2	1080/2	<i>Contrapunctus 2 [III]</i>	simple fugue	84
3	1080/3	<i>Contrapunctus 3 [II]</i>	simple fugue	72
4	1080/4	<i>Contrapunctus 4</i>	simple fugue	138
5	1080/5	<i>Contrapunctus 5 [IV]</i>	counter-fugue	90
6	1080/6	<i>Contrapunctus 6 a 4 in stylo francese [VII]</i>	counter-fugue	79
7	1080/7	<i>Contrapunctus 7 a 4 per augment. et diminut. [VIII]</i>	counter-fugue	61
8	1080/8	<i>Contrapunctus 8 a 3 [X]</i>	triple fugue	188
9	1080/9	<i>Contrapunctus 9 a 4 alla duodecima [V]</i>	double fugue	130
	1080/10a	<i>Contrapunctus a 4 [VI]</i>	double fugue	100
10	1080/10	<i>Contrapunctus 10 a 4 alla decima</i>	double fugue	120
11	1080/11	<i>Contrapunctus 11 a 4 [XI]</i>	triple fugue	184
12	1080/12,1 and 2	<i>Contrapunctus inversus 12 a 4 [XIII] and Contrapunctus inversus a 4 [XIII]</i>	mirror fugue	56 (<i>rectus</i>) 56 (<i>inversus</i>)
13	1080/13,1 and 2	<i>Contrapunctus a 3 [XIV] and Contrapunctus inversus a 3 [XIV]</i>	mirror and counter-fugue	71 (<i>rectus</i>) 71 (<i>inversus</i>)
–	1080/14	<i>Canon per augmentationem in contrario motu [XII; XV; App. 1]</i>	canon	109
–	1080/15	<i>Canon alla ottava [IX]</i>	canon	103
–	1080/16	<i>Canon alla decima contrapunto alla terza</i>	canon	82
–	1080/17	<i>Canon alla duodecima in contrapunto alla quinta</i>	canon	78
–	1080/18,1 and 2	<i>Fuga a 2 clav. [App. 2] (rectus), and Alio modo Fuga a 2 clav. (inversus)</i>	fugue for two instruments	71 (<i>rectus</i>) 71 (<i>inversus</i>)
14	1080/19	<i>Fuga a 3 soggetti [App. 3]</i>	(unfinished) triple (possibly quadruple) fugue	239 (ms) 233 (first ed.)

Πίνακας 8.1: Η κατανομή του αριθμού των μέτρων στα μέρη του έργου [3]. Στον πίνακα, οι λατινικοί αριθμοί παριστάνουν την αρίθμηση των μερών στο χειρόγραφο.

8.5.5 Αριθμός μέτρων των *contrapunctus*

Αρχικά, ομαδοποίησαν τις 14 φούγκες (*contrapunctus*) του έργου παίρνοντας ως μία ομάδα τις φούγκες 1–7 και ως δεύτερη ομάδα τις φούγκες 8–14 (βλέπε Πίνακα 8.1). Μέτρησαν τον συνολικό αριθμό μέτρων για τα μέρη κάθε ομάδας και διαπίστωσαν ότι προσεγγίζουν συγκεκριμένους αριθμούς της ακολουθίας Fibonacci.

$$\frac{\sum_{\text{ΦΟΥΓΚΕΣ 8-14}} \text{Αρ. Μέτρων}}{\sum_{\text{ΦΟΥΓΚΕΣ 1-7}} \text{Αρ. Μέτρων}} = \frac{988}{602} = 1.641 \approx \varphi.$$

Ενδεικτικά, οι πλησιέστεροι αριθμοί Fibonacci είναι $f_{15} = 610$, $f_{16} = 987$. Δηλαδή, για παράδειγμα, το άθροισμα των μέτρων για τις φούγκες 8–14

είναι 988, όταν ο δέκατος έκτος αριθμός της ακολουθίας Fibonacci είναι 987.

Η παραπάνω ομαδοποίηση, όπως την πρότειναν οι Sylvestre και Costa, είναι ιεραρχική, με την έννοια ότι περαιτέρω ανάλυση αναδεικνύει επιπλέον ομάδες με αριθμό μέτρων που ακολουθούν τον λόγο της χρυσής τομής προσεγγιστικά. Έτσι, αναλύοντας την ομάδα των *contrapunctus* 1–7 προκύπτει:

$$\frac{\sum_{\text{Φούγκες 1-4}} \text{Αρ. Μέτρων}}{\sum_{\text{Φούγκες 5-7}} \text{Αρ. Μέτρων}} = \frac{372}{230} = 1.617 \approx \varphi.$$

Αριθμοί της γενικευμένης ακολουθίας Fibonacci ($g_0 = 90$, $g_1 = 140$) είναι οι $g_2 = 230$, $g_3 = 370$.

Επίσης, για τις φούγκες 8–14 και 9–13 βρέθηκε ότι:

$$\frac{\sum_{\text{Counterpoints 8-14}} \text{Αρ. Μέτρων}}{\sum_{\text{Counterpoints 9-13}} \text{Αρ. Μέτρων}} = \frac{611}{377} = 1.620 \approx \varphi$$

$$f_{14} = 377, f_{15} = 610.$$

8.5.6 Αριθμός μέτρων των κανόνων

Θεωρώντας τους τέσσερις κανόνες του έργου ως μια ομάδα, μέτρησαν τον αριθμό των μέτρων για τους 4 κανόνες:

$$\sum_{\text{Κανόνες}} \text{Αρ. Μέτρων} = 372 \quad (f_{14} = 377)$$

Αντίστοιχοι λόγοι/αριθμοί μέτρων εμφανίζονται αν ομαδοποιηθούν τα μέρη ανάλογα με το είδος της φούγκας (απλή/διπλή/φούγκα-καθρέπτης).

8.6 Συζήτηση

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι ο Μπαχ γνώριζε την ακολουθία Fibonacci και τη σχέση της με τη Χρυσή Τομή. Ο Μπαχ ήταν αρχιμουσικός (κάντορας) στη σχολή του Αγίου Θωμά στη Λειψία. Είχε ενδιαφέρον για τις τεχνικές του χορδίσματος των οργάνων και για τα σχετικά Μαθηματικά. Ενδεικτικά, γνώριζε το έργο του Mersenne για την προσέγγιση της $\sqrt[12]{2}$ για τον *ισομερή συγκερασμό* κατά το χόρδισμα ηλεκτροφόρων μουσικών οργάνων. Μετά το 1730 ο Μπαχ συνδέθηκε με φίλιά με τον Johann Matthias Gesner, καθηγητή στη σχολή του Αγίου Θωμά. Ο Gesner δίδασκε Ελληνική φιλοσοφία με έμφαση στους Πυθαγόρειους. Μέσω του Gesner ο Μπαχ έγινε μέλος της Εταιρείας για την επιστήμη της μουσικής, αφιερωμένης στη σύνδεση της μουσικής, της φιλοσοφίας, των μαθηματικών

και των φυσικών επιστημών. Η Τέχνη της Φούγκας γράφτηκε για την Εταιρεία [3].

Οι αριθμοί Fibonacci ήταν γνωστοί στη Λειψία κατά την εποχή του Μπαχ. Ο Γιοχάνες Κέπλερ στο έργο του *Harmonices Mundi* (1619) αναφέρει τους πρώτους όρους της ακολουθίας Fibonacci (χωρίς αναφορά στον Ιταλό μαθηματικό [1175–1240]), καθώς και την αναδρομική σχέση που τους παράγει. Συνδέει τους αριθμούς με τη Χρυσή Τομή (*proportio divina*). Τα παραπάνω σχετίζονται, για τον Κέπλερ, με την Πυθαγόρεια έννοια της Μουσικής των Σφαιρών. Το 1718 το *Harmonices Mundi* εκδόθηκε στη Λειψία, οπότε είναι πιθανό ο Μπαχ να το γνώριζε είτε μέσω της Εταιρείας είτε λόγω του ενδιαφέροντός του για τη σύνδεση της μουσικής και της επιστήμης.

Εικάζεται ότι η χρήση των αριθμών στο έργο *Η Τέχνη της Φούγκας* αποτελεί έναν μαθηματικό υπαινιγμό με τη μορφή γρίφου. Η χρήση γρίφων στη Μουσική δεν είναι σπάνια. Διάφοροι συνθέτες έχουν ενσωματώσει αινίγματα και γρίφους με τη μορφή αριθμών σε έργα τους, με χαρακτηριστικό παράδειγμα το έργο *Παραλλαγές Enigma* του Edward Elgar (1857–1934).



Σύμφωνα με τα παραπάνω, η Χρυσή Τομή χρησιμοποιείται στην ανάλυση του έργου *Η Τέχνη της Φούγκας* και συγκεκριμένα στην ανάλυση της δομής του έργου και της διάρκειας των μερών του. Μεταγενέστεροι συνθέτες αξιοποίησαν επίσης με ουσιαστικό τρόπο τη σειρά Fibonacci και τη Χρυσή Τομή στη μουσική σύνθεση, όπως οι Debussy, Bartok και Xenakis.

Αναφορές

- [1] Richard A. Dunlap, *The golden ratio and Fibonacci numbers*, World Scientific 1997.
- [2] Tony Phillips, *Math in the Musical Offering*, <http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-canons>
- [3] L. Sylvestre and M. Costa, *The Mathematical Architecture of Bach's "The Art of Fugue"*, *Il Saggiatore Musicale*, (2):175–195, 2010.
- [4] Πέτρος Βούβαρης, *Εισαγωγή στη Μορφολογική Ανάλυση της Τονικής Μουσικής*, Κάλλιππος 2015.
- [5] Μαρία Μπαρμπάκη, *Σημειώσεις του μαθήματος Μουσική Ι*, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2014.



<http://myria.math.aegean.gr/psag/>