Ανάλυση Fourier

$L^1(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \int_{\mathbb{R}} |f| < \infty \}$, $L^2(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \int_{\mathbb{R}} |f|^2 < \infty \}$

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f| \qquad \|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \right)^{1/2}$$

$$L^1(\mathbb{T}) = \{ f : [0\ 2\pi] \to \mathbb{C} \quad \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f| < \infty \}$$

$$L^2(\mathbb{T}) = \text{--------} \qquad \|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 \right)^{1/2}$$

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

$$p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e_k(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx}$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)}\, dx, \quad \langle f, f \rangle = \|f\|_2^2$$

Οι e^{ikx} $k \in \mathbb{Z}$ είναι ορθοκανονικό σύστημα

αν $p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx}$ $\quad p_k = \langle p(x)\ e^{ikx} \rangle =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x) e^{-ikx} dx = \hat{p}(k)$$

$$p(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{p}(k) e^{ikx}$$

Είναι σωστό ότι αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ ή $C[0\ 2\pi]$ υπάρχουν α_k ώστε $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{ikx}$;

Σειρά Fourier $\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \sim f$

Θεώρημα Αν $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty$ τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή 2π περιοδική συνάρτηση

<u>Θεώρημα</u> Αν f ολοκληρώσιμη & $\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$ τότε η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση με τους ίδιους συντελεστές Fourier με την f.

<u>Θεώρημα Μοναδικότητας</u> Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ & $x_0 \in [0\ 2\pi]$ σημείο συνέχειας της f αν $\hat{f}(n) = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$ τότε $f(x_0) = 0$.
Άρα αν $\hat{f}(n) = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$ τότε η f είναι 0 σε κάθε σημείο συνέχειάς της.

<u>Συνέπειες</u> ① Αν $f, g \in C(\mathbb{T})$ & $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ τότε $f = g$, διότι $\widehat{(f-g)}(n) = \hat{f}(n) - \hat{g}(n) = 0 \Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow f = g$

② Αν $f \in C(\mathbb{T})$ & $\underline{\sum |\hat{f}(n)| < \infty}$ τότε

η $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$ <u>συγκλίνει ομοιόμορφα</u> στην f

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx} \underset{N \to \infty}{\rightrightarrows} f$$

③ Αν $f \in C^2(\mathbb{T})$ (επειδή $\Rightarrow \sum |\hat{f}(n)| < \infty$)

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx} \underset{N \to \infty}{\rightrightarrows} f$$