Συνέλιξη συναρτήσεων $f * g$ και συντελεστές Fourier

f, g μηδενίζονται στο $\mathbb{R} \setminus [-R, R]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$f*g(x) = \int_{-R}^{R} f(y)\, g(x-y)\, dy$ παρατηρούμε ότι αν $|x| > 2R$ κ $|y| < R \Rightarrow |x-y| > R \Rightarrow g(x-y) = 0$. Η $f*g$ έχει συμπαγή φορέα $f*g\big|_{\mathbb{R}\setminus[-2R,\, 2R]} = 0$

<u>Θεώρημα</u> Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ολοκληρώσιμες τότε η $f*g$ ορίζεται σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ κ $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$

Αν f, g 2π-περιοδικές ορίζουμε

$$f*g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

1. Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ τότε $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ κ η $f*g$ ορίζεται σ.π.
2. Αν $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ κ $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε ορίζεται η $f*g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ κ $f*g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Επιπλέον η $f*g$ είναι ομ. συνεχής.
3. $f*g = g*f$ κ $f*g$ 2π-περιοδική.
4. $f*(\lambda g + \mu h) = \lambda (f*g) + \mu (f*h)$
   $(\lambda f + \mu g) * h = \lambda (f*h) + \mu (g*h)$

<u>Θεώρημα</u> $\forall f, g \in L^1(\mathbb{T})$ ισχύει $\widehat{(f*g)}(n) = \hat{f}(n)\, \hat{g}(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

<u>Απόδειξη</u> $\widehat{f*g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f*g)(x)\, e^{-inx}\, dx =$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,g(x-y)\,dy \; e^{-inx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underline{f(y)}\, g(x-y)\, e^{-inx}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\underbrace{x-y}_{t})\, e^{-inx}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\, e^{-in(t+y)}\,dt\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y) \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\, e^{-int}\,dt}\, e^{-iny}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\, e^{-iny}\,dy \cdot \hat{g}(n) = \hat{f}(n)\cdot\hat{g}(n) \quad \blacksquare$$

<u>Ασκ 4.2</u> Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g \in C^1(\mathbb{T})$ δείξτε ότι $f*g \in C^1(\mathbb{T})$ κ $(f*g)' = f*g'$.

<u>Λύση</u> $(f*g)'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(f*g)(x_0+h)-(f*g)(x_0)}{h}$ αρκεί

να δείξουμε ότι

$$\left| \underline{(f*g')(x_0)} - \frac{(f*g)(x_0+h)-(f*g)(x_0)}{h} \right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$\lim\limits_{h\to 0}$

$$\left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\, g'(x_0-y)\,dy - \frac{1}{h}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\big(g(x_0+h-y)-g(x_0-y)\big)\,dy \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\left[g'(x_0-y) - \frac{g(x_0-y+h)-g(x_0-y)}{h} \right] dy \right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(y)| \underbrace{\left| \text{— // —} \right|}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} dy = I(h)$$

$\lim\limits_{h\to 0}$

Για να χρησιμοποιήσουμε το Θ Κ Σ πρέπει να βρούμε συνάρτηση G

$$|f(y)| \left| g'(x_0-y) - \frac{g(x_0-y+h)-g(x_0-y)}{h} \right| \le G(y) \;\&\; \int G < \infty$$

Άρα $g \in C^1(\mathbb{T}) \Rightarrow g'$ συνεχής στο $[0, 2\pi]$ άρα $\exists M>0$ ώστε $|g'(z)| \le M$ $\forall z$. Αν εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. για την g στο $[x_0-y, x_0-y+h]$ $\exists \xi \in (x_0-y, x_0-y+h)$ ώστε

$$\left|\frac{g(x_0-y+h)-g(x_0-y)}{h}\right| = |g'(\xi)| \le M$$

συνεπώς

$$|f(y)|\left|g'(x_0-y) - \frac{g(x_0-y+h)-g(x_0-y)}{h}\right| \le$$

$$\le |f(y)|\left(|g'(x_0-y)| + |g'(\xi)|\right) \le 2M|f(y)| = G(y)$$

$$\int_0^{2\pi} G = 2M\int_0^{2\pi}|f| < \infty,$$ άρα $f \in L^1(\mathbb{T})$ ∎

Πυρήνας Dirichlet

Αν $f \in C^2(\mathbb{T})$ τότε $S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx} \rightrightarrows f$

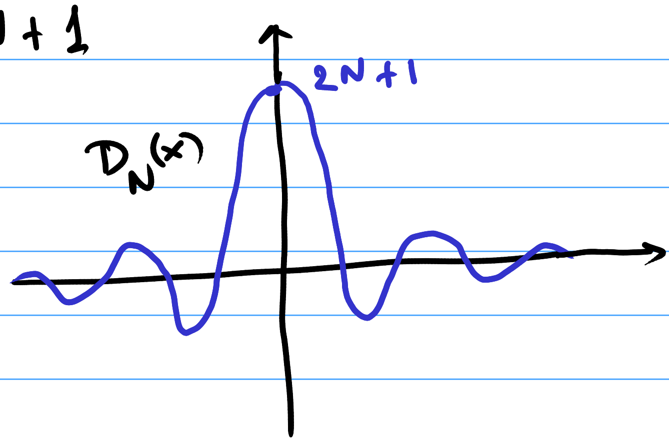
Θα μελετήσουμε τη κατά σημείο ισχύ $S_N f(x) \longrightarrow f(x)$

$$\boxed{D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}} = \sum_{n=-N}^{N} (e^{ix})^n = \dots = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}$$

(Άσκηση $\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{B-A}{2}$)

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 0} D_N(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{(N+\frac{1}{2})x}\,\frac{x/2}{\sin\frac{x}{2}}\,(2N+1)$

$$= 2N+1$$



Πρόταση: Οι $S_N f(x)$ και $(f * D_N)(x)$ έχουν ίδιους συντελεστές Fourier

<u>Απόδ.</u> Οι συντελεστές Fourier της $S_N(f)(x) = \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx}$ είναι τα $\hat{f}(n)$ για $|n| \leq N$ αλλιώς αν $|n| > N$ είναι 0

$$\widehat{f * D_N}(n) = \hat{f}(n) \cdot \hat{D}_N(n) = \begin{cases} \hat{f}(n) \cdot 1 & \text{αν } |n| \leq N \\ 0 & |n| > N \end{cases} \quad \boxtimes$$

Από το Θ μοναδικότητας αν f <u>συνεχής</u> τότε

$$f * D_N = S_N(f)$$

$$f * D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) D_N(x-y)\,dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \sum_{-N}^{N} e^{ik(x-y)}\,dy$$

$$= \sum_{-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iky}\,dy \cdot e^{ikx} =$$

$$= \sum_{-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx} = S_N(f)(x) \quad \boxtimes$$

$\exists\, f \in C(\mathbb{T})$ ώστε $S_N(f) \not\to f$ για κάθε $x \in [0, 2\pi]$

$$\|D_N\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_N(x)|\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin \frac{x}{2}} \right| dx$$

$$\geq C \log N \quad (\text{για κάποιο } C > 0)$$

$\exists\, f \in L^1(\mathbb{T})$ $S_N f(x) \not\to f(x)$ $\forall x \in [0, 2\pi]$

Carleson αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ τότε $S_N(f)(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(x)$ σ.π.