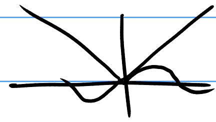
Αθροίσματα Cesàro & Το θεώρημα Fejér

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = \cdots = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}, \qquad \|D_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\text{—}|\,dx \geq C\log N$$

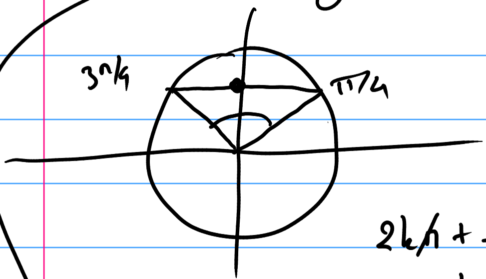
$|\sin t| \leq |t| \quad \forall t$



$$\|D_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin((N+\frac12)x)}{\sin\frac{x}{2}}\right|dx \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\sin((N+\frac12)x)|}{|x|/2}\,dx$$

θέτω $t = (N+\frac12)x$, $dx = \frac{1}{N+\frac12}\,dt$

$$\geq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi(N+\frac12)}\frac{|\sin t|}{|t|/(N+\frac12)}\,\frac{1}{N+\frac12}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi(N+\frac12)}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$$



$$\geq \frac{1}{\pi}\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} + \int_{2\pi+\frac{\pi}{4}}^{2\pi+\frac{3\pi}{4}} + \cdots \int_{2N\pi+\frac{\pi}{4}}^{\boxed{2N\pi+\frac{3\pi}{4}}}\right)|\ |\,dt$$

$2k\cancel{\pi}+\frac{3\cancel{\pi}}{4} \leq 2\cancel{\pi}N+\cancel{\pi} \qquad 2k \leq 2N+1-\frac{3}{4} \qquad 2k \leq 2N+\frac{1}{4}$

$k \leq N+\frac{1}{8}$

$$\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\int_{2k\pi+\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+3\pi/4}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\int_{2k\pi+\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+3\pi/4}\frac{\sqrt{2}/2}{t}\,dt$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sum_{k=0}^{N}\left(\log\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)-\log\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sum_{k=0}^{N}\log\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}+\pi}{2k\pi+\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sum_{k=0}^{N}\log\left(1+\frac{\pi}{2k\pi+\frac{\pi}{4}}\right)$$

[Άσκ: $\frac{t}{1+t} \leq \log(1+t)$]

$$\geq \cdots \geq \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{4}\,\frac{1}{k} = c\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \simeq \tilde{c}\log N.$$

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx} \xrightarrow[N\to\infty]{} f \; ?$$

Θεώρημα Αν $a_n \in \mathbb{C}$ $n=1,2,\dots$ $a_n \to a$

η $\sigma_n = \dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ τότε $\sigma_n \to a$

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Απόδειξη Έστω $\varepsilon>0$. Μπορώ να υποθέσω ότι $a=0$

(αν όχι θέτω $b_n = a_n - a \to 0$

$$\sigma_n(b) = \frac{b_1+\dots+b_n}{n} = \frac{a_1-a+\dots+a_n-a}{n} =$$

$$= \frac{a_1+\dots+a_n}{n} - a \Big)$$

Αφού $a_n \to 0$ $\exists\, n_0 : \forall n \geq n_0$ $|a_n| < \varepsilon/2$

$$\sigma_n = \frac{a_1+\dots+a_n}{n} = \frac{a_1+\dots+a_{n_0}}{n} + \frac{n-n_0}{n}\,\frac{a_{n_0+1}+\dots+a_n}{n-n_0}$$

διαλέγω $n_1 \geq n_0$: $\forall n \geq n_1$ $\left|\dfrac{a_1+\dots+a_{n_0}}{n}\right| < \varepsilon/2$

$\forall\, n \geq n_1$

$$|\sigma_n| \leq \left|\frac{a_1+\dots+a_{n_0}}{n}\right| + \frac{n-n_0}{n}\left|\frac{a_{n_0+1}+\dots+a_n}{n-n_0}\right|$$

$$< \quad \varepsilon/2 \quad + \quad 1 \quad \frac{|a_{n_0+1}|+\dots+|a_n|}{n-n_0}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon/2+\dots+\varepsilon/2}{n-n_0} = \varepsilon$$

Αντίστροφα δεν ισχύει γιατί π.χ.

$$a_n = \overbrace{\underbrace{0,1,0,1,0,1}_{},0}^{},1,\dots$$

$\nexists \lim a_n$

$$\sigma_n = \frac{n/2}{n} = \frac{1}{2} \to 2$$ η άρτιο

$$\sigma_n = \frac{n/2}{n+1} \longrightarrow \frac{1}{2}$$ περιττό

$$\sigma_n \longrightarrow 1/2$$

$\boxtimes$

Ασκηση Βρειτε $a_n \geq 0$ $\sigma_n \longrightarrow 0$ αλλα
$\limsup a_n = +\infty$

Αρα αν το οριο της $S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx}$
υπάρχει για κανοιο x τότε υπαρχει και το
οριο της $\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x)$ υπάρχει

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx} \cdot \chi_{\{-n,\dots,n\}}(k) =$$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^{N} \sum_{n=0}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx} \chi_{\{-n,\dots,n\}}(k) =$$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx} \sum_{n=0}^{N} \chi_{\{-n,\dots,n\}}(k)$$

$$\left(\chi_{\{-n,\dots,n\}}(k) = 1 \iff |k| \leq n \iff \chi_{\{k+1,\dots,N,\ -k-1,\dots,-N\}}(n) = 1 \right.$$

$$\left. \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx} \sum_{n=0}^{N} \chi_{\{k+1,\dots,N,\ -k-1,\dots,-N\}}(n) \right)$$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx} (N+1-|k|) =$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx} \longleftarrow \text{Τριγωνομετρικα πολυωνυμα}$$

$$\sigma_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Θεώρημα Fejér Αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε

$\sigma_n(f)(x) \to f(x)$ ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$

δηλ. $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\left(\sigma_n(f) \rightrightarrows f(x) \right)$ Όταν συμβαίνει τα $\sigma_n(f)$ λέμε ότι η σειρά Fourier ονομάζεται Cesáro αθροίσιμη

Πόρισμα (το Θ. Μοναδικότητας) Αν $f, g \in C(\mathbb{T})$ και $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Απόδ $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ $\forall n$ $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} \sigma_N(f) & = & \sigma_N(g) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f & = & g \end{array}$$

Πόρισμα (Θ. Weierstrass) Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $C(\mathbb{T})$.

Απόδειξη Τα $\sigma_N(f)$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα και $\sigma_N(f) \rightrightarrows f$

δηλ. $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ ∎

Ασκ 4.10 Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι το $C(\mathbb{T})$ είναι πυκνό στον $L^p(\mathbb{T})$ $\forall$ $1 \le p < \infty$ για να δείξετε ότι αν $f \in L^p(\mathbb{T})$ υπάρχουν τριγωνομετρικά πολυώνυμα P_n ώστε

$$\|P_n - f\|_{L^p(\mathbb{T})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$