Το θεώρημα Fejér

Θεώρημα Αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε $\sigma_n(f) \rightrightarrows f$

$$\sigma_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x)$$

Πυρήνας Fejér: $K_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(x)$, D_n πυρήνας Dirichlet

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

$$f * K_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} f * D_n(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x) = \sigma_N(f)(x)$$

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{N} \sin((n+\tfrac{1}{2})x)$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{N} 2\sin((n+\tfrac{1}{2})x)\sin\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{N} \left(\cos(nx) - \cos((n+1)x)\right) =$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} \left(\cos(0x) - \cancel{\cos(1x)} + \cancel{\cos(1x)} - \cancel{\cos(2x)} + \dots + \dots + \cancel{\cos(Nx)} - \cos((N+1)x)\right)$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{1 - \cos((N+1)x)}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{N+1} \frac{\cancel{2}\sin^2(\frac{N+1}{2}x)}{\cancel{2}\sin^2\frac{x}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{K_N(x) = \frac{1}{N+1} \cdot \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2} \geq 0$$

$$\boxed{K_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikx}}$$

Ορισμός Μια ακολουθία συναρτήσεων $k_n \in L^1(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$, ονομάζεται **καλός πυρήνας** αν

① $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n = 1$ $\forall n$ ② $\exists M \in \mathbb{R}$: $\|k_n\|_1 \le M$ $\forall n$

③ $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει $\int_{|x|\ge\varepsilon} |k_n(x)|\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} |k_n| + \int_{\varepsilon}^{\pi} |k_n|\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Λήμμα Ο Πυρήνας του Fejér είναι καλός.

Απόδειξη $\|K_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_N| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(x)\,dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(x)\, e^{-i0x}\,dx = \hat{K}_N(0) = 1$$

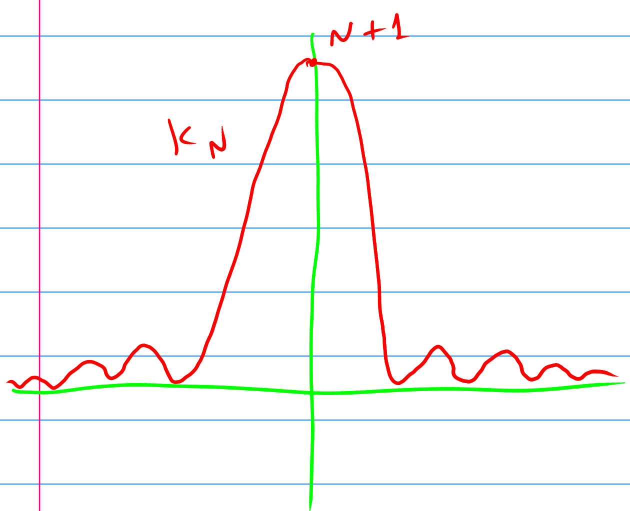
Φανερά $K_N(x) \le \frac{1}{(N+1)\sin^2\frac{x}{2}}$ Άρα

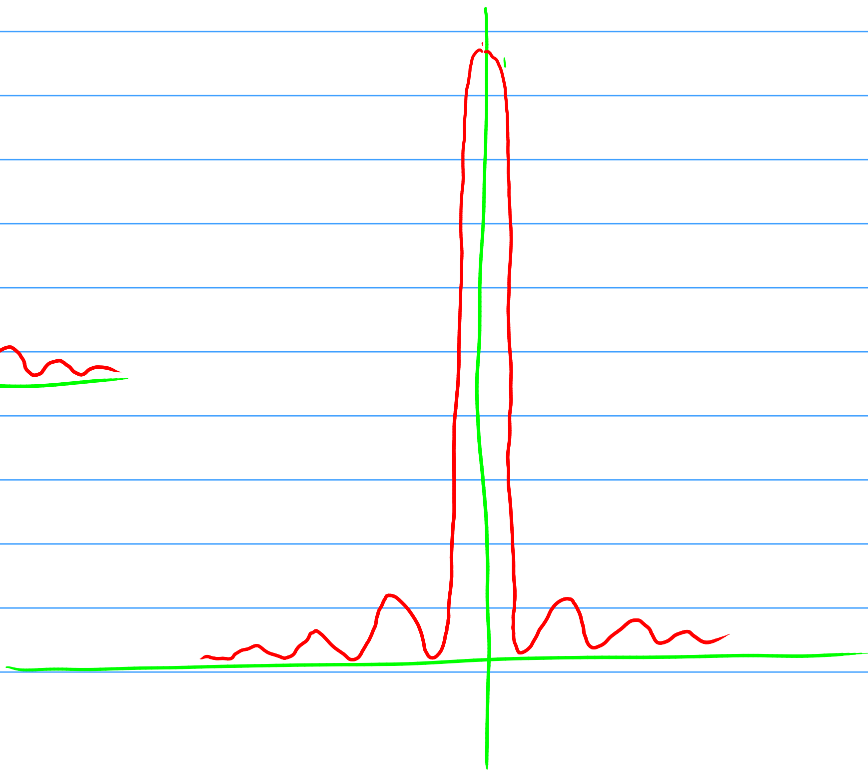
$$\int_{|x|\ge\varepsilon} |K_N(x)|\,dx \le \frac{1}{N+1}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{N+1}\left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}\right)\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2}{N+1}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\,dx = \frac{2}{N+1}\left(-2\cot\frac{x}{2}\right)\Big|_{\varepsilon}^{\pi}$$

$$= \frac{4}{N+1}\left(-\cot\frac{\pi}{2} + \cot\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{4\cot\frac{\varepsilon}{2}}{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

∎





Θεώρημα Fejér Αν ο k_n είναι καλός πυρήνας τότε αν $f \in C(\mathbb{T})$ ισχύει $f * k_n \rightrightarrows f$.

Απόδειξη Πρέπει να δείξουμε ότι $|(f * k_n - f)(x)| \rightrightarrows 0$

Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Αφού f συνεχής στο $[0, 2\pi]$

$\Rightarrow f$ ομοιόμορφα συνεχής. Άρα $\exists\, \delta > 0$ ώστε

αν $|y| < \delta$ τότε $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$

$\left(|(x-y) - x| = |y| < \delta \right)$

$\int = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}$

$$|f * k_n(x) - f(x)| = \left| \int f(x-y) k_n(y)\,dy - \int f(x) k_n(y)\,dy \right|$$

$$= \left| \int \left(f(x-y) - f(x)\right) k_n(y)\,dy \right| \leq$$

$$\leq \int |f(x-y) - f(x)|\, |k_n(y)|\,dy$$

$$\leq \underbrace{\int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)|\, |k_n(y)|\,dy}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{|y| > \delta} |f(x-y) - f(x)|\, |k_n(y)|\,dy}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I} \leq \varepsilon \int_{|y| \leq \delta} |k_n(y)|\,dy = \varepsilon$$

$$\mathrm{II} \leq \int_{|y| > \delta} \left(|f(x-y)| + |f(x)| \right) |k_n(y)|\,dy$$

$$\leq 2\, \|f\|_\infty \int_{|y| > \delta} |k_n(y)|\,dy \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

άρα $\exists\, n_0 : \forall n \geq n_0$ $\mathrm{II} < \varepsilon$. Συνεπώς

$\forall n \geq n_0$ $\quad |f * k_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{T}$

άρα $\quad f * k_n \rightrightarrows f$ $\quad \blacksquare$

Young: Αν $p, q, r \in [1, \infty]$ κ $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ τότε $\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$

Πόρισμα (Fejér) Αν $1 \le p < \infty$ κ $f \in L^p(\mathbb{T})$ τότε $\|\sigma_n(f) - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Απόδειξη Αν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε μια συνεχή $g \in C(\mathbb{T})$ με $\|f - g\|_p < \varepsilon$ κ τότε

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p \le \|\sigma_n(f) - \sigma_n(g)\|_p + \|\sigma_n(g) - g\|_p + \|g - f\|_p$$

$$\le \|\sigma_n(f-g)\|_p + \|\sigma_n(g) - g\|_p + \|g - f\|_p$$

$$\le \|(f-g) * K_N\|_p + \|\sigma_n(g) - g\|_p + \|g - f\|_p$$

$$\le \underbrace{\|K_N\|_1}_{1} \|f-g\|_p + \|\sigma_n(g) - g\|_p + \|g - f\|_p$$

$$\le 2\|f-g\|_p + \|\sigma_n(g) - g\|_p < 3\varepsilon$$ για n αρκετά μεγάλο

∎

Πόρισμα (Μοναδικότητα) αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ κ $\hat{f}(n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow f = 0$ σ.π.

Απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f \\ \sigma_n(f) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \|f\|_1 = 0$$

$\Rightarrow f = 0$ σ.π.

∎