Το θεώρημα ισοκατανομής του Weyl

Ορισμός $\forall x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε το κλασματικό του μέρος να είναι η ποσότητα $\{x\} = x - [x]$ όπου $[x]$ το ακέραιο μέρος $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$

Προφανώς $\{x\} \in [0,1)$

Ορισμός Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $0 \leq x_n \leq 1$ την $n \in \mathbb{N}$ λέγεται ισοκατανεμημένη αν για οποιουσδήποτε αριθμούς $0 \leq a \leq b \leq 1$ ισχύει

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\left|\{n : 1 \leq n \leq N \ \& \ x_n \in [a,b]\}\right|}{N} = b - a$$

Αν $x_n \in \mathbb{R}$ την λέμε ισοκατανεμημένη mod 1 αν η $\{x_n\}$ είναι ισοκατανεμημένη στο $[0, 1]$.

Άσκηση Η x_n με όρους τα

$$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, \frac{1}{6}, \dots$$

είναι ισοκατανεμημένη στο $[0,1]$

Λύση Για να φτάσουμε στο κλάσμα $\frac{1}{n}$ έχουμε περάσει $n-1$ μηδενικά ή $n-2$ ομάδες ομώνυμων κλασμάτων. Οι ομάδες αυτών των ομώνυμων κλασμάτων είναι οι

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{1}, \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}_{2}, \dots\dots \underbrace{\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}}_{(n-2)}$$

, που στο πλήθος είναι $1 + 2 + \dots + (n-2)$ κλάσματα. Συνεπώς το $\frac{1}{n}$

βρίσκεται στη θέση

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{τα μηδενικά}}}{(n-1)} + \underbrace{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}_{\substack{\text{οι ομάδες} \\ \text{ομώνυμων κλασμάτων} \\ \text{μέχρι το } \le \frac{n-2}{n-1}}} + \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{τα } \frac{1}{n}\ \frac{2}{n}\ \cdots\ \frac{k}{n}}}{k}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} + k$$

Θέτουμε $\gamma = b - a$. Για να ισχύει $a \le \frac{k}{n} \le b$

$\iff na \le k \le nb$ άρα αυτά είναι τουλάχιστον

$[nb - na]$ ή το πολύ $[nb - na] + 1$

$ = [n\gamma] \qquad\qquad = [n\gamma] + 1$

Αν $a_n = \dfrac{|\{x_n : n \le N : x_n \in [a,b]\}|}{N}$ τότε

$$\frac{[\gamma] + [2\gamma] + \dots + [(n-1)\gamma]}{N} \le a_n \le \frac{[\gamma] + \dots + [(n-1)\gamma] + k + n}{N}$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{1 + 2 + \dots + (n-1)}{N} \le a_n \le \gamma \frac{1 + 2 + \dots + (n-1)}{N} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{k+n}{N}}$$

$$\gamma \underset{\substack{\swarrow \\ 1}}{\frac{\frac{(n-1)n}{2}}{\frac{(n-1)(n-2)}{2} + k}} \le a_n \le \gamma \frac{\frac{(n-1)n}{2}}{\frac{(n-1)(n-2)}{2} + k} + \frac{k+n}{N}$$

$$\Rightarrow a_n \longrightarrow \gamma$$

Το ίδιο ισχύει αν το N είναι τέτοιο που η N-οστή θέση είναι το μηδενικό πριν το $\frac{1}{n}$. Τότε διαφέρει κατά μία μονάδα από $\frac{(n-1)n}{2}$ η το αποτέλεσμα δεν αλλάζει

$\blacksquare$

Ασκ Φτιάξτε μια ακολουθία πυκνή στο $[0,1]$ αλλά να μην είναι ισοκατανεμημένη

(Υπόδ. Χρησιμοποιείστε τους ρητούς με πολλά μηδενικά ανάμεσά τους)

Θεώρημα ① (Weyl) Αν α άρρητος η ακολουθία $n\alpha \bmod 1 = \{n\alpha\}$ είναι ισοκατανεμημένη στο $[0,1]$

Θεώρημα ② (Ισοκατανομής του Weyl) Έστω ότι $x_n \in \mathbb{R}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(α) Η x_n είναι ισοκατανεμημένη mod 1 στο $[0,1]$

(β) $\forall$ συνεχής 1-περιοδική συνάρτηση f ισχύει

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$$

(γ) $\forall\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ $\quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi k x_n} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

Απόδειξη του Θ① Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi k n\alpha} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 .$$

Αλλά

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{i2\pi k n\alpha} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(e^{i2\pi k\alpha}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{N}\,\frac{e^{i2\pi k\alpha} - e^{i2\pi k\alpha(N+1)}}{1-e^{i2\pi k\alpha}}$$

‖ υπόψιν όρο ότι

$1-e^{i2\pi k\alpha} \neq 0$, Αλλά $e^{i2\pi k\alpha} = 1 \Leftrightarrow 2\pi k\alpha = 2\pi m$ για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$. Αλλά αυτό $\Leftrightarrow \alpha = m/k \in \mathbb{Q}$

άτοπο αφού $\alpha \notin \mathbb{Q}$

Τα εκθετικά είναι φραγμένες συναρτήσεις άρα $\longrightarrow 0$ ∎

Απόδειξη του Θ(2)

Η σχέση

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{n : 1 \le n \le N \ \& \ x_n \in [a,b]\}|}{N} = b - a$$

γράφεται ισοδύναμα

κλασματικό μέρος

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b]}(\{x_n\}) = \int_0^1 \chi_{[a,b]}(x)\,dx \quad \text{για} \quad 0 \le a \le b \le 1$$

Άρα η ζητούμενη ισχύει για χαρακτηριστικές και λόγω της γραμμικότητας του $\lim$ και του $\int_0^1$ ισχύει και για κλιμακωτές $p_m = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \chi_{[a_k, b_k]}$

Από Ανάλυση 2 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, p_m$ ώστε $|p_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x$ άρα

$$\left| \int_0^1 f - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \right| \le \left| \int_0^1 f - \int_0^1 p_m \right| + \left| \int_0^1 p_m - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_m(\{x_n\}) \right| + \left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_m(\{x_n\}) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \right|$$

$$\le \int_0^1 |f - p_m| + \left| \qquad \right| + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left|(p_m - f)(\{x_n\})\right|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \varepsilon = 3\varepsilon \qquad \blacksquare$$