Απόδειξη του Θ. ισοκατανομής.

(α) $\Rightarrow$ (β) Η $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{|\{n : 1\le n\le N \ \&\ x_n\in[a,b]\}|}{N} = b-a$

γράφεται ισοδύναμα

κλασματικό μέρος

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b]}(\{x_n\}) = \int_0^1 \chi_{[a,b]}(x)\,dx$$

για $0\le a\le b\le 1$.

Άρα η ζητούμενη ισχύει για χαρακτηριστικές συναρτήσεις και συνεπώς από τη γραμμικότητα του lim και του $\int_0^1$ ισχύει για κλιμακωτές συναρτήσεις οι οποίες είναι πυκνές στις συνεχείς (Ανάλυση 2: $\exists\, p_m$ κλιμακωτές που συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f εκεί που η συνάρτηση f ολοκληρώσιμη)

Άρα $\forall \varepsilon>0\ \exists N_0 : \forall N\ge N_0$

$$\left| \int_0^1 p_m(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_m(\{x_n\}) \right| < \varepsilon$$

Αλλά $p_m \rightrightarrows f$ άρα $\exists\, m_0 : \forall m\ge m_0\ |p_m(x)-f(x)|<\varepsilon\ \forall x\in[0,1]$

Άρα

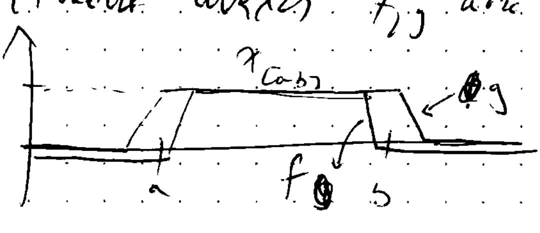
$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \right| \le \left| \int_0^1 f(x) - \int_0^1 p_m \right| + \left| \int_0^1 p_m - \frac{1}{N}\sum p_m(\{x_n\}) \right| + \left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_m(\{x_n\}) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \right|$$

$$\le \int_0^1 |f-p_m| + \varepsilon + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left| p_m(\{x_n\}) - f(\{x_n\}) \right|$$

$$\le \varepsilon\cdot 1 + \varepsilon + \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} \varepsilon = 3\varepsilon$$

(β) $\Rightarrow$ (α) Βρίσκουμε συνεχείς f, g ώστε $f\le \chi_{[a,b]} \le g$

ως εξής



Συγκεκριμένα για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ m(x-a) & a \leq x \leq a+\frac{1}{m} \\ 1 & a+\frac{1}{m} \leq x \leq b-\frac{1}{m} \\ -m(x-b) & b-\frac{1}{m} \leq x \leq b \\ 0 & x \geq b \end{cases} \qquad g_m(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a-\frac{1}{m} \\ m(x-(a-\frac{1}{m})) & a-\frac{1}{m} \leq x \leq a \\ 1 & a \leq x \leq b \\ -m(x-(b+\frac{1}{m})) & b \leq x \leq b+\frac{1}{m} \\ 0 & x \geq b+\frac{1}{m} \end{cases}$$

Οπότε

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_m(\{x_n\}) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b]}(\{x_n\}) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_m(\{x_n\})$$

$$\Rightarrow \liminf_{N\to\infty} (\quad) \leq \liminf_N \leq \limsup_N \leq \limsup_N \frac{1}{N}\sum g_m$$

$$\int_0^1 f_m(x)\,dx \leq \liminf \leq \limsup \leq \int_0^1 g_m(x)\,dx$$

$$(b-a) - \frac{1}{2}\frac{1}{n} \leq \liminf \leq \limsup \leq (b-a) + \frac{1}{2n}$$

$n \to \infty$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b]}(\{x_n\}) = b-a$$

(β) $\Rightarrow$ (γ) προφανές αφού $\int_0^1 e^{i2\pi kx}\,dx =$

$$= \sin(2k\pi x)\Big|_0^1 - i\cos(2k\pi x)\Big|_0^1$$

$$= 0 - i(1-1) = 0$$

(γ) $\Rightarrow$ (β) Από το Θ. Fejer τα τριγ. πολυώνυμα, γρ. συνδυασμοί των e^{inx} είναι (ομοιόμορφα) πυκνά στις συνεχείς 2π-περιοδικές στο $[0, 2\pi]$. Άλλα ζητάς μεταβλητής ($t = \frac{x}{2\pi} \to x = 2\pi t$) οι γραμμικοί συνδυασμοί των $e^{in2\pi t}$ είναι (ομοιομ.) πυκνά στις 1-περιοδικές συνεχείς συναρτήσεις

Η ζητούμενη όμως (το (β)) ισχύει για τις $e^{2\pi i k x}$ αφού $\int_0^1 e^{2\pi i k x} = 0 \longleftarrow \frac{1}{N}\sum e^{2\pi i k x_n}$ λόγω υπόθεσης (γ).

$$\Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_m(\{x_n\}) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^1 p_m$$

αν $p_m \rightrightarrows f$ 1-περιοδική συνεχής)

Συνεπώς (με τριγωνική ανισότητα Άσκ.)

παίρνουμε ότι $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty} f(\{x_n\}) \to \int_0^1 f$

Μια συνεχής συνάρτηση Πουθενά παραγωγίσιμη

Η $\chi_{\mathbb{Q}}$ είναι πουθενά παραγωγίσιμη αλλά είναι και πουθενά συνεχής

Θεώρημα Έστω $0<\alpha<1$. Τότε η σειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\alpha n} e^{i 2^n x}$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ που δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη.

- Παρατήρηση: Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα διότι $\sum 2^{-\alpha n} < \infty$ λόγω $\alpha > 0$ (+ M-test Weierstrass)

Αν ξέραμε μπορούσαμε να παραγωγίσουμε κατά όρο η $\sum_{0}^{\infty} 2^{-\alpha n} i 2^n e^{i 2^n x} = i \sum_{0}^{\infty} 2^{(1-\alpha)n} e^{i 2^n x}$ αποκλίνει

διότι $\alpha < 1$ οπότε $2^{(1-\alpha)n} \to \infty$ και στην ουσία αυτός είναι ο λόγος που το Θ είναι σωστό.