Η ΘΕΩΡΙΑ L^2

Αν $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int f \bar{g}$ κ το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει από την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\int |f \bar{g}| = \int |f| \, |g| \leq \left(\int |f|^2\right)^{1/2} \left(\int |g|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2 \|g\|_2$$

<u>Ορισμός</u> Οι f, g ονομάζονται μεταξύ τους κάθετες αν

$$\langle f, g \rangle = 0$$

Μια ακολουθία $f_n \in L^2(\mathbb{T})$ ονομάζεται ορθογώνιο σύστημα αν οι f_n είναι ανά δύο κάθετες μεταξύ τους, και ονομάζεται ορθοκανονικό σύστημα αν <u>επιπλέον</u> ισχύει $\|f_n\|_2 = 1 \ \forall n$

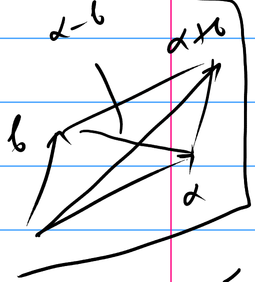
$$\left.\begin{aligned}
&\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle \\
&\langle h, \lambda f + \mu g \rangle = \bar{\lambda} \langle h, f \rangle + \bar{\mu} \langle h, g \rangle \\
&\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle} \\
&\langle f, f \rangle = \int f \bar{f} = \int |f|^2 = \|f\|_2^2 \geq 0
\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &f, g, h \in L^2(\mathbb{T}) \\ &\lambda, \mu \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

<u>Πυθαγόρειο θεώρημα</u> Αν οι φ_n $n = 1 \ldots N$ είναι ορθοκανονικό σύστημα κ $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ τότε

$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n, \sum_{n=1}^{N} b_n \varphi_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{N} a_n \bar{b}_n$$

αν $b_n = a_n \Rightarrow \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\|_2^2 = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2$

Επίσης ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου



$$\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2\|f\|_2^2 + 2\|g\|_2^2$$

Απόδειξη $\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 =$

$$\langle f+g,\ f+g\rangle + \langle f-g,\ f-g\rangle = \langle f, f\rangle + \cancel{\langle f, g\rangle} + \cancel{\langle g, f\rangle} + \langle g, g\rangle$$
$$+ \langle f, f\rangle - \cancel{\langle f, g\rangle} - \cancel{\langle g, f\rangle} + \langle g, g\rangle$$
$$= 2\|f\|_2^2 + 2\|g\|_2^2 \quad \blacksquare$$

Η συνάρτηση $\langle \cdot , \cdot \rangle$ είναι συνεχής και ως προς τα δύο ορίσματά της.
Δηλ. αν $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ & $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} g$

τότε $\langle f_n, g_n\rangle \longrightarrow \langle f, g\rangle$ διότι

$$|\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle| = |\underbrace{\langle f_n, g_n\rangle - \langle f_n, g\rangle} + \underline{\langle f_n, g\rangle} - \langle f, g\rangle|$$

$$= |\langle f_n, g_n - g\rangle + \langle f_n - f, g\rangle| \leq$$

$$\leq |\langle f_n, g_n - g\rangle| + |\langle f_n - f, g\rangle|$$

$$\overset{C-S}{\leq} \|f_n\|_2 \underbrace{\|g_n - g\|_2}_{\downarrow n\to\infty \atop 0} + \underbrace{\|f_n - f\|_2 \|g\|_2}_{\downarrow n\to\infty \atop 0}$$

Η $\|f_n\|_2$ είναι φραγμένη διότι

$$\underline{\|f_n\|_2} \leq \underbrace{\|f_n - f\|_2} + \underline{\|f\|_2}$$

+ + + + άσκηση

$L^2(\mathbb{T})$ $\quad \langle \cdot , \cdot \rangle$ $\quad \langle f, f\rangle^{1/2} = \|f\|_2$

$f = g \iff f(x) = g(x)$ σ.π. στο $\mathbb{T}$

ο $(L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2)$ είναι πλήρης χώρος με νόρμα δηλαδή χώρος Banach, η επειδή η νόρμα παράγεται από το $<\cdot,\cdot>$ είναι χώρος Hilbert.

<u>Λήμμα</u> Αν $\varphi_n \in L^2(\mathbb{T})$ είναι ο.κ. σύνολο και $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ $(a_n \in \mathbb{C})$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$ συγκλίνει στο $L^2(\mathbb{T})$

<u>Απόδειξη</u> Αφού ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι πλήρης αρκεί να δείξουμε ότι η $F_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n$ είναι ακολουθία Cauchy. Αν $M < N$ τότε

$$\|F_N - F_M\|_2^2 = \Big\| \sum_{n=M+1}^{N} a_n \varphi_n \Big\|_2^2 \overset{\text{Πυθαγόρειο}}{=} \sum_{n=M+1}^{N} |a_n|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 - \sum_{n=1}^{M} |a_n|^2 .$$ Αλλά η $\sum_{1}^{\infty} |a_n|^2$ είναι συγκλίνουσα άρα τα μερικά αθροίσματα είναι Cauchy. άρα η F_N είναι Cauchy $\boxtimes$

Οι συναρτήσεις $e_n(x) = e^{inx}$ $n \in \mathbb{Z}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο στο $L^2(\mathbb{T})$

$$\left(\text{Έχουμε δει ότι } <e_n\ e_m> = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = m \\ 0 & \text{αν } n \neq m \end{cases} \right)$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \int f\, \bar{e}_n = <f, e_n>$$

η το μερικό άθροισμα Fourier είναι

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e_n = \sum_{n=-N}^{N} <f\ e_n> e_n$$

$$\left(x = (3,5,7) \in \mathbb{R}^3 \quad x = 3e_1 + 5e_2 + 7e_3 = <x\ e_1> e_1 + <x\ e_2> e_2 + <x\ e_3> e_3 \right)$$

<u>Θεώρημα</u> (ανισότητα Bessel) Αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ και οι φ_k $k=1 \ldots N$ αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα τότε αν $g = \sum_{k=1}^{N} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$ τότε

$$\|g\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{N} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_2 \quad (*)$$

$\Big\{ \Big(x=(3,5,7) \quad \varphi_1 = e_1 \quad \varphi_2 = e_2 \quad g = \langle x e_1 \rangle e_1 + \langle x e_2 \rangle e_2 = 3e_1 + 5e_2 = (3,5,0)$

$\sqrt{3^2+5^2+0^2} \leq \sqrt{3^2+5^2+7^2} \Big)$

Ειδικότερα αν $\varphi_k = e^{ikx} = e_k$ τότε

$$\| S_N(f) \|_2 \leq \| f \|_2$$

<u>Απόδειξη</u> $0 \leq \|f-g\|_2^2 = \langle f-g, f-g \rangle = \|f\|_2^2 - \langle f g \rangle - \langle g f \rangle + \|g\|_2^2$

$$= \|f\|_2^2 - \langle f, \sum_{k=1}^{N} \langle f \varphi_k \rangle \varphi_k \rangle - \langle \sum_{k=1}^{N} \langle f \varphi_k \rangle \varphi_k, f \rangle + \sum_{k=1}^{N} |\langle f \varphi_k \rangle|^2 =$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} \overline{\langle f \varphi_k \rangle} \langle f \varphi_k \rangle - \sum_1^N \langle f \varphi_k \rangle \langle \varphi_k f \rangle + \sum_1^N |\langle f \varphi_k \rangle|^2$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum_1^N |\langle f \varphi_k \rangle|^2 - \cancel{\sum_1^N |\langle f \varphi_k \rangle|^2} + \cancel{\sum_1^N |\langle f \varphi_k \rangle|^2}$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum_1^N |\langle f \varphi_k \rangle|^2$$

$$\Rightarrow \sum_1^N |\langle f \varphi_k \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \quad \blacksquare$$

<u>Ορισμός</u> Ένα ορθογώνιο σύστημα φ_n λέγεται πλήρες αν η μόνη συνάρτηση ορθογώνια σε όλες τις φ_n είναι η μηδενική.

Πρόταση Οι $e_n(x) = e^{inx}$ $n \in \mathbb{Z}$ αποτελούν πλήρες και ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2(\mathbb{T})$

Απόδειξη Αν $\langle f, e_n \rangle = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, για $f \in L^2(\mathbb{T})$

$\hat{f}(n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\|f\|_1 = \int |f| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)| \cdot 1 \, dx \overset{C\text{-}S}{\leq} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1^2\right)^{1/2}$$

$$\left(\int |f|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2 < \infty$$

$$\left.\begin{array}{l} f \in L^1(\mathbb{T}) \\ \hat{f}(n) = 0 \ \forall n \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{στον } L^1(\mathbb{T})]{\text{Θ. Μοναδικότητας}} f(x) = 0 \text{ σ.π.} \quad \text{δηλ. } f = 0 \quad \boxed{}$$

Άσκηση 1 Δείξτε ότι οι $\varphi_n \in L^2(\mathbb{T})$ πλήρες ορθοκανονικό σύστημα $\Longleftrightarrow$ οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των φ_n είναι πυκνοί στον $L^2(\mathbb{T})$

Άσκηση 2 Αν φ_n ο.κ. πλήρες σύστημα στον $L^2(\mathbb{T})$ τότε κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ καθορίζεται πλήρως από τα $\langle f, \varphi_n \rangle$. Δηλαδή αν $\langle f, \varphi_n \rangle = \langle g, \varphi_n \rangle$ $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε $f = g$

$\langle f - g, \varphi_n \rangle = 0$

Άσκηση 3 Αν φ_n ο.κ. σύστημα πλήρες στον $L^2(\mathbb{T})$

τότε η $\left\| f - \sum_{k=1}^{N} x_k \varphi_k \right\|_2$ ελαχιστοποιείται

όταν $x_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ και μόνο για αυτά.

(Υπόδ. $\|f - \Sigma\|_2 = \langle f - \Sigma, f - \Sigma \rangle$
+ επιχειρήματα)

Θεώρημα (Ταυτότητα Parseval) Αν $(\varphi_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2(\mathbb{T})$ τότε $\forall\, f, g \in L^2(\mathbb{T})$ ισχύει

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n\rangle \overline{\langle g, \varphi_n\rangle} \quad \text{και} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2$$

Ειδικότερα αν $\varphi_n = e_n(x) = e^{inx}$ τότε

$$\langle f, g\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\,\overline{\hat{g}(n)} \quad \text{και} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

Απόδ. Θέτουμε $\tilde{f} = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, \varphi_n\rangle \varphi_n$, $\tilde{g} = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle g, \varphi_n\rangle \varphi_n$

συγκλίνουν από την ανισότητα Bessel

$$\left(\left\| \sum_{-N}^{N} \langle f, \varphi_n\rangle \varphi_n \right\|_2 \leq \|f\| \iff \sum_{-N}^{N} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \right)$$

Άρα $\tilde{f} = f$ $\quad (\langle \tilde{f} - f, \varphi_n\rangle = 0 \quad \forall n)$

ομοίως $\tilde{g} = g$

$$\langle f, g\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n\rangle \varphi_n, \sum_{k=1}^{\infty} \langle g, \varphi_k\rangle \varphi_k \right\rangle \underset{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ συνεχής}}{=}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \left\langle \sum_{1}^{N} \langle f, \varphi_n\rangle \varphi_n, \sum_{1}^{M} \langle g, \varphi_k\rangle \varphi_k \right\rangle$$

$$= \text{—''—} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \langle f, \varphi_n\rangle \overline{\langle g, \varphi_k\rangle} \langle \varphi_n, \varphi_k\rangle$$

$$= \lim_{N, M\to\infty} \sum_{1}^{\min\{N, M\}} \langle f, \varphi_n\rangle \overline{\langle g, \varphi_n\rangle} = \sum_{1}^{\infty} \langle f, \varphi_n\rangle \overline{\langle g, \varphi_n\rangle}$$

∎