**Άσκηση 1** Έστω ότι οι $\varphi_n \in L^2(\mathbb{T})$ είναι ο.κ. σύστημα. Αποδείξτε ότι $\varphi_n$ πλήρες $\Leftrightarrow$ οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των $\varphi_n$ είναι πυκνοί στον $L^2(\mathbb{T})$

**Λύση** "$\Rightarrow$" Θέτουμε $F = \{$ πεπερασμένοι γρ. συνδ. των $\varphi_n \} \subseteq L^2(\mathbb{T})$

Πρέπει να δείξουμε ότι $\overline{F} = L^2(\mathbb{T})$. Έστω ότι $f \in L^2(\mathbb{T}) \setminus \overline{F}$. Θεωρούμε $g_\infty = f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f \, \varphi_n \rangle \varphi_n$

η σειρά συγκλίνει λόγω της ανισότητας Bessel διότι

$$\Big\| \sum \langle f \varphi_n \rangle \varphi_n \Big\|_2^2 = \sum_{n \geq 1} |\langle f \, \varphi_n \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 < \infty$$

Η $g \neq 0$ διότι $f \notin \overline{F}$. $g_\infty \perp \varphi_n$ διότι

$$\langle g \; \varphi_k \rangle = \langle f \; \varphi_k \rangle - \Big\langle \sum_1 \langle f \varphi_n \rangle \varphi_n, \; \varphi_k \Big\rangle$$

$$= \langle f \; \varphi_k \rangle - \langle f \; \varphi_k \rangle = 0$$

$\overset{\varphi_n \text{ πλήρες}}{\Longrightarrow}$ $g = 0$ άτοπο

"$\Leftarrow$" Έστω $f \perp \varphi_n$ $\forall n$; πρέπει να δείξω ότι $f = 0$

Αφού $\overline{F} = L^2(\mathbb{T})$ $\exists$ $g_m \in F$ ώστε $g_m \xrightarrow[m \to \infty]{\| \; \|_2} f$

Αλλά τότε

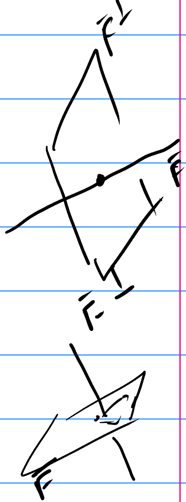
$$\|f\|_2^2 = \langle f \; f \rangle = \langle f, \lim_{m \to \infty} g_m \rangle = \lim_{m \to \infty} \langle f \; g_m \rangle = \lim_m 0 = 0$$

$\Rightarrow \|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$, άρα τα $\varphi_n$ είναι πλήρες σύστημα ∎

**Άσκηση 2** Αν $\varphi_n$ πλήρες ο.κ. σύστημα του $L^2(\mathbb{T})$ τότε κάθε $f$ καθορίζεται πλήρως από τα $(\langle f \; \varphi_n \rangle)_{n=1}^{\infty}$ δηλ. αν $\langle f \; \varphi_n \rangle = \langle g \; \varphi_n \rangle$ $\forall n$ $\Rightarrow f = g$

**Λύση** Αν $\langle f \varphi_n \rangle = \langle g \; \varphi_n \rangle \Rightarrow \langle f - g, \; \varphi_n \rangle = 0$ $\forall n$

$\Rightarrow f - g \perp \varphi_n$ $\forall n$ $\overset{\varphi_n \text{ πλήρες}}{\Longrightarrow}$ $f - g = 0 \Rightarrow f = g$ ∎




**Άσκηση 3** Αν $\varphi_n$ ο.κ. σύστημα στον $L^2(\mathbb{T})$ δείξτε ότι η $g(x_1, \dots, x_N) = \| f - \sum_{k=1}^{N} x_k \varphi_k \|_2$ ελαχιστοποιείται για $x_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ και μόνο σε αυτά.

**Λύση** 1η προσέγγιση $g^2 = \langle f - \sum, f - \sum \rangle = \dots$

$$\dots = \|f\|_2^2 + \sum_{1}^{N} |x_k|^2 - 2 \sum_{k=1}^{N} Re(x_k \langle \varphi_k, f \rangle) \text{ +ΑπΤΙV}$$

2η προσέγγιση $F = \{$πεπερ. γρ. συνδ. των $\varphi_n\}$ τότε $\bar{F} \hookrightarrow L^2(\mathbb{T})$. Έστω $\psi_n$ ο.κ. βάση του $\bar{F}^{\perp}$ ώστε τα $\varphi_n$ & $\psi_n$ να είναι πλήρες ο.κ. σύστημα στον $L^2(\mathbb{T})$

$$g^2(x_1, \dots, x_N) \overset{\text{Parseval}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f - \sum_{k=1}^{N} x_k \varphi_k, \varphi_n \rangle \right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f - \sum_{1}^{N} x_k \varphi_k, \psi_n \rangle \right|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, \varphi_n \rangle - x_n \right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \psi_n \rangle|^2$$

Ελαχιστοποιείται μόνο όταν $\left| \langle f, \varphi_n \rangle - x_n \right| = 0 \Rightarrow$ $x_n = \langle f, \varphi_n \rangle$ ■

**Άσκηση 5.8** Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ & $\int f = 0$ δείξτε ότι

$$\int |f|^2 \le \int |f'|^2$$

**Λύση** Αφού $f \in C^1(\mathbb{T}) \Rightarrow f, f'$ συνεχείς στο $[0, 2\pi]$ άρα $f, f' \in L^2(\mathbb{T})$

$$\int |f|^2 = \|f\|_2^2 \overset{\text{Parseval}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_n \rangle|^2 \qquad e_n(x) = e^{inx}$$

$$\int |f'| = \|f'\|_2^2 \overset{\text{Parseval}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f', e_n \rangle|^2$$

Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $|\langle f, e_n \rangle| \le |\langle f', e_n \rangle| \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Αν $n \neq 0$ τότε $|\langle f, e_n \rangle| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx} dx \right| =$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x) \left( \frac{e^{-inx}}{-in} \right)' dx \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \left. \frac{f(x)\, e^{-inx}}{-in} \right|_{x=0}^{x=2\pi} + \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} f'(x)\, e^{-inx} dx \right|$$

$$= \frac{1}{|n|} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x)\, e^{-inx} dx \right| = \frac{1}{|n|} |\langle f', e_n \rangle|$$

$$\leq |\langle f', e_n \rangle|$$

Αν $n=0$ $|\langle f, e_0 \rangle| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0 f(x)\, dx \right| = 0 \leq |\langle f', e_0 \rangle|$

Ασκηση 6.9 Αν $f \in C^2(\mathbb{T})$ τότε $\sum_n |\hat{f}(n)| < \infty$ $\boxed{\Xi}$

Λύση Πριν δείξαμε ότι $|\langle f, e_n \rangle| = \frac{1}{|n|} |\langle f', e_n \rangle|$ $\forall\, n \neq 0$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{n \neq 0} |\langle f, e_n \rangle| =$$

$$= |\hat{f}(0)| + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} |\langle f', e_n \rangle|$$

(C-S $\sum a_n b_n \leq (\sum a_n^2)^{1/2} (\sum b_n^2)^{1/2}$ $a_n, b_n \geq 0$)

$$\leq |\hat{f}(0)| + \left( \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n \neq 0} |\langle f', e_n \rangle|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq |\hat{f}(0)| + \left( 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}'(n)|^2 - |\hat{f}'(0)|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq |\hat{f}(0)| + \left( 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \|f'\|_2^2 - |\hat{f}'(0)|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

$\boxed{\Xi}$

## Σύγκλιση στον $L^2(\mathbb{T})$

**Θεώρημα** $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ $\quad S_N(f) \xrightarrow[N\to\infty]{\|\cdot\|_2} f$

**Απόδειξη** $\|S_N(f) - f\|_2^2 \overset{\text{Parseval}}{=} \sum_k |(S_N(f) - f)^\wedge(k)|^2$

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx} \qquad \widehat{S_N(f)}(k) = \hat{f}(k)$$

$\langle S_N(f), e_k \rangle$ //

για $k = -N, \dots, 0, \dots, N$

αν $|k| > N$ $\quad \widehat{S_N(f)}(k) = 0$

$$\|S_N(f) - f\|_2^2 = \sum_k |\widehat{S_N(f)}(k) - \hat{f}(k)|^2 =$$

$$= \sum_{|k|>N} |\hat{f}(k)|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

διότι $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 < \infty$ αφού είναι $= \|f\|_2^2$ (γιατί $f \in L^2(\mathbb{T})$) ∎

$\exists\ f \in L^1(\mathbb{T})$ ώστε $S_N(f) \overset{\|\ \|_1}{\not\longrightarrow} f$

$\exists\ f \in L^\infty(\mathbb{T})$ ώστε $S_N(f) \overset{\|\ \|_\infty}{\not\longrightarrow} f$

$\exists\ f$ και $x_0 \in \mathbb{T}$ $\quad S_N(f)(x_0) \underset{N\to\infty}{\not\longrightarrow} f(x_0)$

**Θεώρημα** (αρχή τοπικότητας) Έστω ότι $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ ώστε να υπάρχει η $f'(\theta_0)$

τότε $\quad S_N(f)(\theta_0) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(\theta_0)$

**Απόδειξη** Ορίζουμε

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)}{t} & 0 < |t| < \pi \\ -f'(\theta_0) & t = 0 \end{cases}$$

Η $F$ είναι φραγμένη σε μια περιοχή του $0$

διότι $\exists\, \delta_0 > 0 \ \forall\, t \in (-\delta_0, \delta_0) \quad |F(t) - (-f'(\theta_0))| \leq 1 (=\varepsilon)$

$$|F(t)| \leq |F(t) - (-f'(\theta_0))| + |-f'(\theta_0)|$$
$$\leq 1 + |f'(\theta_0)| \qquad \forall\, t \in (-\delta_0, \delta_0)$$

$\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$

Επίσης η $F$ στο $[-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta)$ είναι ολοκλ. $\forall \delta > 0$

διότι
$$\int_{|t|>\delta} |F| = \int_{|t|\geq\delta} \left| \frac{f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)}{t} \right| dt \leq \frac{1}{\delta} \int |f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)|$$
$$\leq \frac{1}{\delta} \int (|f(\theta_0 - t)| + |f(\theta_0)|)\, dt =$$
$$= \frac{1}{\delta} (\|f\|_1 + 2\pi |f(\theta_0)|) \underset{\text{Αφού } f \in L^1(\mathbb{T})}{<} \infty$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F| \leq \int_{|t|<\delta} |F| + \int_{|t|\geq\delta} |F| \leq (1 + |f'(\theta_0)|)\, 2\delta + \ldots < \infty$$

Έχουμε
$$S_N(f) - f(\theta_0) = f * D_N(\theta_0) - f(\theta_0) =$$
$$= \int f(\theta_0 - t) D_N(t)\, dt - \int f(\theta_0) D_N(t)\, dt =$$
$$= \int (f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)) D_N(t)\, dt =$$
$$= \int F(t) \cdot t \cdot D_N(t)\, dt =$$
$$= \int F(t)\, t\, \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}}\, dt = \int F(t) \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \sin\left(\left(N + \tfrac{1}{2}\right)t\right)$$
$$= \int F(t) \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \left( \sin(Nt) \cos \frac{t}{2} + \cos(Nt) \sin \frac{t}{2} \right) dt$$
$$= \int \underbrace{\left( F(t) \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2} \right)}_{\in L^1(\mathbb{T})} \sin(Nt)\, dt + \int \underbrace{(F(t)\, t)}_{\in L^1(\mathbb{T})} \cos(Nt)\, dt$$

διότι $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t)\, t| \leq$
$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|\, dt\ \pi$
$\leq \|F\|_1 \cdot \pi < \infty$

$\longrightarrow 0 + 0$ Riemann-Lebesgue
Λήμμα

Άσκηση 1.38

Λυμένη στον πίνακα