Παρατηρήσεις στην αρχή της τοπικότητας

Παρατήρηση Στην απόδειξη της αρχής της τοπικότητας δεν χρησιμοποιήθηκε ουσιωδώς η ύπαρξη της $f'(\theta_0)$ αλλά το ότι η ύπαρξη αυτής της παραγώγου συνεπάγεται το ότι το κλάσμα $\frac{f(\theta_0-t)-f(\theta_0)}{t}$ είναι φραγμένη συνάρτηση του t σε μια περιοχή του μηδενός.

Άρα αν το προηγούμενο κλάσμα είναι φραγμένο σε μια περιοχή του μηδενός ισχύει η αρχή της τοπικότητας ακόμα και αν $\nexists f'(\theta_0)$.

π.χ. αν f Lipschitz σε μια περιοχή του θ_0: $\exists$ $M>0$ και $\delta>0$ ώστε $\forall$ $\theta \in (\theta_0-\delta, \theta_0+\delta)$ να ισχύει

$|f(\theta)-f(\theta_0)| \le M\,|\theta-\theta_0|$, θέτοντας $t=\theta_0-\theta \in (-\delta,\delta)$

$\Rightarrow |f(\theta_0-t)-f(\theta_0)| \le M\cdot|t| \Rightarrow \left|\frac{f(\theta_0-t)-f(\theta_0)}{t}\right| \le M$

$\forall$ $t\in(-\delta,\delta)$ άρα πάλι ισχύει η αρχή της τοπικότητας.

Πόρισμα (αρχή της τοπικότητας) Αν $f,g \in L^1(\mathbb{T})$ και f,g ταυτίζονται σε ένα ανοικτό διάστημα I τότε

$\forall$ $\theta\in I$ $\quad \lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta) = f(\theta) \iff \lim_{N\to\infty} S_N(g)(\theta)=g(\theta)$

Δηλαδή η σύγκλιση δεν εξαρτάται από τις τιμές της f «μακριά» από το θ (κάτι που δικαιολογεί το όνομα «αρχή τοπικότητας»)

Απόδειξη Η $f-g$ ολοκληρώσιμη ($\in L^1(\mathbb{T})$) και είναι ταυτοτικά μηδέν στο I. Άρα

$(f-g)'(\theta)=0$ $\quad\forall\theta\in I \Rightarrow S_N(f-g)(\theta)\xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

Όμως $S_N(f)(\theta) = S_N(g)(\theta) + \underbrace{\left(S_N(f-g)(\theta)\right)}_{\xrightarrow[N\to\infty]{} 0}$ οπότε

οπότε η $S_N(f)(\theta) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(\theta) \iff$ η $S_N(g)(\theta) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(\theta) = g(\theta)$ $\boxtimes$

Παρατήρηση: Συμβαίνει το $\left|\dfrac{f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)}{t}\right|$ να μην

είναι φραγμένη συνάρτηση σε κατάλληλη περιοχή του μηδενός.
(π.χ. $\simeq \dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$) Όμως α $\displaystyle\int_{(-\delta_0,\delta_0)} \left|\frac{f(\theta_0-t) - f(\theta_0)}{t}\right|$

είναι πεπερασμένο, πάλι ισχύει η αρχή της τοπικότητας.

Θεώρημα (Dini) Αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ κ $\displaystyle\int \left|\frac{f(\theta_0+t) - f(\theta_0)}{t}\right| dt < \infty$

τότε $S_N(f)(\theta_0) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(\theta_0)$ $\boxtimes$

Άλλες συνθήκες που εγγυώνται τη σύγκλιση κατά σημείο

Τα $\sigma_N(f)$, οι Cesaro μέσοι της $S_N(f)$,

συγκλίνουν στην f αν αυτή είναι συνεχής (Θεώρημα Fejer)

Θεώρημα (Hardy) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ κ $|\hat{f}(n)| = O(\frac{1}{n})$
(δηλ. $\exists\, C > 0 : |\hat{f}(n)| \leq C \frac{1}{|n|}$) τότε οι ακολουθίες
$S_N(f)(x)$ κ $\sigma_N(f)(x)$ συγκλίνουν για τα ίδια x
στο ίδιο σημείο.

Αν η $\sigma_N(f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f σε ένα
σύνολο $E \subseteq [0, 2\pi)$ το ίδιο κάνει κ η $S_N(f)(x)$
(η απόδειξη παραλείπεται)

Ρυθμός μείωσης των συντελεστών Fourier

Γνωρίζουμε ήδη

Θεώρημα (Λήμμα Riemann – Lebesgue) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$

τότε $$\lim_{|k| \to +\infty} \hat{f}(k) = 0 \qquad (\text{άσκ } 138) \qquad \blacksquare$$

Θεώρημα (συντελεστές $C^k(\mathbb{T})$ – συναρτήσεων)

Αν $f \in C^k(\mathbb{T})$ τότε $|\hat{f}(n)| = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$

(δηλ) $$\frac{|\hat{f}(n)|}{1/|n|^k} \longrightarrow 0 \iff |n|^k |\hat{f}(n)| \longrightarrow 0$$

Απόδειξη Για $n \neq 0$ κάνοντας k φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες θα πάρουμε ότι

$$\hat{f}(n) = \frac{\widehat{f^{(k)}}(n)}{(in)^k} \qquad \left(\hat{f}(n) = \int f e^{-inx} = \int f \left(\frac{e^{-inx}}{-in}\right)' dx = 0 + \frac{1}{in}\int f' e^{-inx} dx \right)$$

$f^{(k)}$ συνεχής άρα $\in L^1(\mathbb{T})$ οπότε

από το Λ. Riemann – Lebesgue $\widehat{f^{(k)}}(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$|\hat{f}(n)| = \frac{1}{|n|^k} \left|\widehat{f^{(k)}}(n)\right|$$

$$\frac{|\hat{f}(n)|}{1/|n|^k} = \left|\widehat{f^{(k)}}(n)\right| \longrightarrow 0 \qquad \blacksquare$$

Θεώρημα (συντελεστές συναρτήσεων Lipschitz)

Αν $f \in C(\mathbb{T})$ & Lipschitz $\Rightarrow$ $|\hat{f}(n)| = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$

Απόδειξη $$\int f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inx} dx \qquad \underline{x + \frac{\pi}{n} = t}$$

$$= \int f(t)\, e^{-in(t-\frac{\pi}{n})}\, dt = \int f(t)\, e^{-int}\, e^{in\frac{\pi}{n}}\, dt$$

$$= -\int f(t)\, e^{-int}\, dt = -\hat{f}(n).$$ Άρα

$$|\hat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2}\hat{f}(n) - \frac{1}{2}\left(-\hat{f}(n)\right) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \int f(x)\, e^{-inx} - \int f\left(x+\frac{\pi}{n}\right) e^{-inx}\, dx \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2} \left| \int \left(f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right) e^{-inx}\, dx \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2} \int \left| f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{n}\right) \right| \cdot 1 \, dx$$

$$\le \frac{1}{2} \int M \left| x - \left(x+\frac{\pi}{n}\right) \right| dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{M\pi}{|n|}$$ ∎

__Άσκηση__ Αν $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, $M>0$, $\forall x\ \forall y$

Δείξτε ότι $|\hat{f}(n)| = O\left(\frac{1}{|n|^\alpha}\right)$

(λέμε ότι f είναι α-Lipschitz)

__Θεώρημα__ (συνέχεια μονότονων)

Αν f μονότονη στο $(-\pi, \pi)$ τότε $|\hat{f}(n)| = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$

συγκεκριμένα $|\hat{f}(n)| \le \dfrac{|B-A|}{\pi\, |n|}$ όπου

$B = \lim_{x \to \pi^-} f(x)$ και $A = \lim_{x \to -\pi^+} f(x)$ ∎