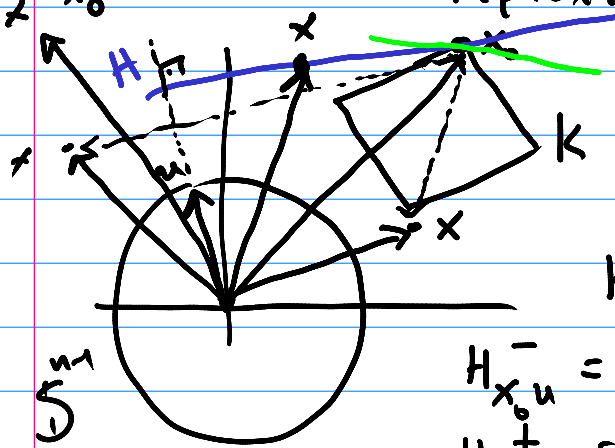
Η συνάρτηση στήριξης

<u>Ορισμός</u> (υπερεπίπεδο στήριξης) K κλειστό κ κυρτό υποσ. του $\mathbb{R}^n$ κ H υπερεπίπεδο ($\dim H = n-1$). Το H λέγεται υπερεπίπεδο στήριξης του K στο $x_0 \in bd(K)$ αν $x_0 \in H$ και το K περιέχεται στον ημίχωρο H^- ή H^+



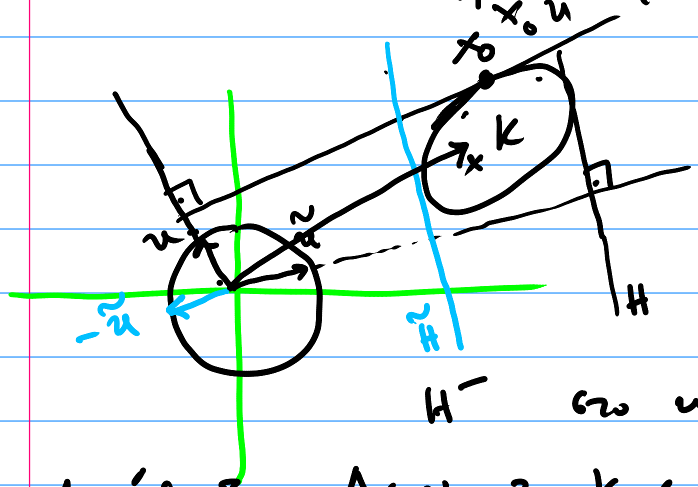
$$H_{x_0 u} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x - x_0 \rangle = 0\}$$

$$H^-_{x_0 u} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x - x_0 \rangle \le 0\}$$

$$H^+_{x_0 u} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x - x_0 \rangle \ge 0\}$$

$$H^-_{x_0 u} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u\ x \rangle \le \langle u\ x_0 \rangle\}$$

$$H^+_{x_0 u} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u\ x \rangle \ge \langle u, x_0 \rangle\}$$



<u>Πρόταση</u> Αν K κυρτό <u>σώμα</u> στον $\mathbb{R}^n$ τότε $\forall u \in S^{n-1}$ $\exists!$ επίπεδο στήριξης H_u του K κάθετο στο H^- στο u σε κάποιο σημείο του $bd(K)$

<u>Απόδειξη</u> Αφού το K συμπαγές κ η $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι συνεχής $\Rightarrow$ η $\langle x, u \rangle$ για $x \in K$ έχει μέγιστη τιμή έστω στο σημείο $x_0 \in K$. $\boxed{x_0 \in bd(K)}$ διότι αν όχι τότε $x_0 \in int(K)$ άρα $\exists\ \delta > 0$ ώστε $B(x_0, \delta) \subseteq K$

$\underline{x_0 + \frac{\delta}{2} u \in B(x_0, \delta) \subseteq K}$, $\langle u\ \underbrace{x_0 + \frac{\delta}{2} u}\rangle = \langle u\ x_0 \rangle + \frac{\delta}{2} \|u\|_2^2$

$= \langle u\ x_0 \rangle + \frac{\delta}{2} > \langle u\ x_0 \rangle$ άτοπο.

$\Rightarrow \langle x\ u \rangle \le \langle x_0\ u \rangle \quad \forall x \in K$

$\Rightarrow K \subseteq H^-_{x_0 u}$ άρα το $H_{x_0 u}$ είναι υπερεπίπεδο στήριξης του K στο x_0

Έστω ότι το $H_{x_1 u}$ είναι ένα άλλο υπερ. στήριξης στο x_1. Αναγκαστικά $\langle x_1, u\rangle = \langle x_0, u\rangle$, αν όχι τότε $\langle x_1, u\rangle < \langle x_0, u\rangle$ ή ανάποδα.

$$x_0 \in H^{+}_{x_1 u} \Rightarrow x_0 \notin H^{-}_{x_1 u} \supseteq K \Rightarrow x_0 \notin K \text{ άτοπο}$$

$$\Rightarrow H_{x_1 u} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x_1, u\rangle = \langle x, u\rangle\} = \{x \in \mathbb{R}^n \ \langle x_0, u\rangle = \langle x, u\rangle\} = H_{x_0 u} \qquad \boxtimes$$

<u>Ορίζουμε</u> $\quad h_K(u) = \sup\{\langle x, u\rangle : x \in K\}$

$$h_K : S^{n-1} \to \mathbb{R}$$

<u>Πρόταση</u> Αν A, B κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, $\forall \lambda > 0$ ισχύει

$$h_{A+B}(u) = h_A(u) + h_B(u)$$

$$h_{\lambda A}(u) = \lambda h_A(u) \qquad \forall u \in S^{n-1}$$

<u>Απόδειξη</u> $\quad h_{A+B}(u) = \sup\{\langle \alpha+b, u\rangle \ \ \alpha \in A \ b \in B\}$

$$= \sup\{\langle \alpha, u\rangle + \langle b, u\rangle \quad \alpha \in A \ \ b \in B\}$$

$$= \sup\{\langle \alpha, u\rangle \ \ \alpha \in A\} + \sup\{\langle b, u\rangle \ \ b \in B\}$$

$$= h_A(u) + h_B(u)$$

$$\Big(\ \cdots \quad x \in \lambda A \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x}{\lambda}}_{y} \in A \quad \cdots \ \Big)$$

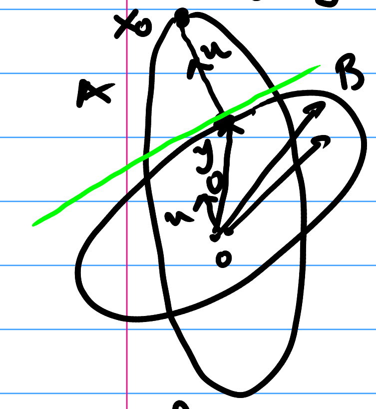
<u>Λήμμα</u> Αν A, B κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$A \subseteq B \Leftrightarrow h_A(u) \le h_B(u) \quad \forall u \in S^{n-1}$$

"$\Rightarrow$" $\quad h_A(u) = \sup\{\langle x, u\rangle : x \in A\} \le \sup\{\langle x, u\rangle : x \in B\} = h_B(u)$

"$\Leftarrow$" Υποθέτουμε $h_A(u) \le h_B(u)$ $\forall u \in S^{n-1}$ και $A \not\subseteq B$

Οπότε $\exists\, x_0 \in A \setminus B$. Θέτω $f(y) = \|y - x_0\|_2$, $y \in B$



$$|f(y) - f(z)| = \big| \|y-x_0\|_2 - \|z-x_0\|_2 \big| \le$$

$$\le \|(y-x_0) - (z-x_0)\|_2 = \|y-z\|_2$$

συνεχής

Έστω ότι στο $y_0 \in B$ η f έχει ελάχιστη τιμή. $x_0 \notin B \Rightarrow \|x_0 - y_0\|_2 > 0$

Θέτω $u = \dfrac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|_2} \in S^{n-1}$ $\leftarrow$

Ισχυρισμός: $\forall y \in B$ ισχύει $\langle y, u\rangle \le \langle y_0, u\rangle$

[αν όχι $\exists\, y \in B$ $\langle y, u\rangle > \langle y_0, u\rangle \Leftrightarrow \langle y-y_0, u\rangle > 0$

$\left.\begin{array}{l} y \ne y_0 \quad y, y_0 \in B \\ B \text{ κυρτό} \end{array}\right\}$ $(1-\lambda)y_0 + \lambda y = y_0 + \lambda(y-y_0) \in B$ $\forall \lambda \in [0,1]$

$\forall \lambda \in (0,1)$

$$\|x_0 - (y_0 + \lambda(y-y_0))\|_2^2 = \langle x_0 - (y_0 + \lambda(y-y_0)), x_0 - (\ )\rangle$$

$$= \langle (x_0-y_0) - \lambda(y-y_0), (x_0-y_0) - \lambda(y-y_0)\rangle =$$

$$= \|x_0-y_0\|_2^2 + \lambda^2\|y-y_0\|_2^2 - 2\lambda\langle x_0-y_0, y-y_0\rangle =$$

$$= \|x_0-y_0\|_2^2 + \lambda\Big(\underbrace{\lambda\|y-y_0\|_2^2}_{\to 0} - \underbrace{2\|x_0-y_0\|_2\langle u, y-y_0\rangle}_{+}\Big)$$

$< \|x_0-y_0\|_2^2$ για $\lambda \to 0^+$ άτοπο]

Άρα $\boxed{\langle y, u\rangle \le \langle y_0, u\rangle}$ $\forall y \in B \Rightarrow$

$h_B(u) = \sup\{\langle y, u\rangle : y \in B\} \le \langle y_0, u\rangle < \langle x_0, u\rangle$

$\le h_A(u)$

$\updownarrow$ από τον ορισμό του u έχουμε

$\Leftrightarrow \langle x_0 - y_0, u\rangle > 0$

$\Leftrightarrow \left\langle x_0 - y_0, \dfrac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|_2}\right\rangle > 0$

$\Leftrightarrow \|x_0-y_0\|_2 > 0$ ✓ αφού $x_0 \ne y_0$ άτοπο

Συνεπώς $A \subseteq B$. $\blacksquare$

Λήμμα $\forall$ A, B, K κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ο κανόνας διαγραφής, δηλ.

(i) αν $A + K = B + K \Rightarrow A = B$

(ii) αν $\underline{A+K} \subseteq \underline{B+K} \Rightarrow A \subseteq B$

Απόδειξη (i) $A+K = B+K \Rightarrow h_{A+K}(u) = h_{B+K}(u)$

$\Rightarrow h_A(u) + \cancel{h_K}(u) = h_B(u) + \cancel{h_K}(u) \Rightarrow$

$h_A(u) = h_B(u)$ $\forall u \in S^{n-1}$ $\Rightarrow \left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow A = B$

(ii) ομοίως. $\blacksquare$