Εφαρμογές της Brunn-Minkowski

① Η ισοπεριμετρική ανισότητα

② Το λήμμα του Borel

B-M: Αν S, T μη κενά συμπαγή $\subseteq \mathbb{R}^n$ τότε

$$|S+T|^{1/n} \geq |S|^{1/n} + |T|^{1/n}$$

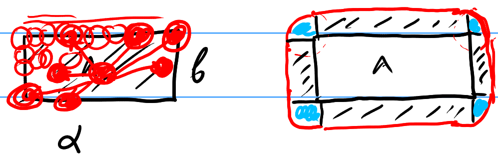
$$|(1-\lambda)S + \lambda T| \geq |S|^{1-\lambda} |T|^{\lambda} \qquad \lambda \in [0,1]$$

Ορισμός Έστω ότι το $A \neq \emptyset$ συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}^n$ που έχει όγκο. Το εμβαδόν επιφανείας του A ορίζεται να είναι ίσο με το όριο

$$\partial A = \lim_{t \to 0^+} \frac{vol(A + tB_2^n) - vol(A)}{t}$$

έχοντας το όριο αυτό υπάρχει

Π.χ.



$vol(A + tB_2^n) - vol(A) =$
$= 2at + 2b \cdot t + \pi t^2$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{2at + 2bt + \pi t^2}{t} = \lim_{t \to 0^+} \left(2a + 2b + \pi t \right) = 2a + 2b$$

Λήμμα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ το οποίο έχει εμβαδόν επιφανείας τότε $\forall\, r > 0$ $\quad \partial(rA) = r^{n-1} \partial A$

Απόδειξη

$$\partial(rA) = \lim_{t \to 0^+} \frac{|rA + tB_2^n| - |rA|}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{r^n |A + \frac{t}{r} B_2^n| - r^n |A|}{t} =$$

$$= r^n \frac{1}{r} \lim_{t \to 0^+} \frac{|A + \frac{t}{r} B_2^n| - |A|}{\frac{t}{r}} = r^{n-1} \partial A \quad \blacksquare$$

Θεώρημα. Αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ που έχει όγκο η εμβαδόν επιφανειας ικανοποιεί την $\underline{vol_n(B_2^n) = vol_n(A)}$ τότε

$$\partial A \geq \partial B_2^n$$

Απόδειξη. $\partial A = \lim_{t \to 0^+} \frac{|A + tB_2^n| - |A|}{t} \geq$

$$\overset{\text{(≥)}}{} \lim_{t \to 0^+} \frac{(|A|^{1/n} + |tB_2^n|^{\frac{1}{n}})^n - |A|}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{(|A|^{1/n} + t\,|B_2^n|^{1/n})^n - |A|}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{n(|A|^{1/n} + t|B_2^n|^{1/n})^{n-1}\,|B_2^n|^{1/n}}{1} =$$

$$= n\,|A|^{\frac{n-1}{n}}\,|B_2^n|^{1/n} = n\,|B_2^n|$$

$$\Rightarrow \partial A \geq n\,|B_2^n| \quad (1)$$

$$\partial B_2^n = \lim_{t \to 0^+} \frac{|B_2^n + tB_2^n| - |B_2^n|}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{|(1+t)B_2^n| - |B_2^n|}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{(1+t)^n\,|B_2^n| - |B_2^n|}{t} = |B_2^n| \lim_{t \to 0^+} \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$= n\,|B_2^n|$. Από την (1) $\partial A \geq \partial B_2^n$

εφόσον $|A| = |B_2^n|$ $\blacksquare$

Θεώρημα (Ισοπεριμετρική ανισότητα) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ που έχει όγκο η εμβαδόν επιφανείας. Αν

$$\partial A = \partial(rB_2^n) \Rightarrow vol(A) \leq vol(rB_2^n)$$

Απόδειξη Το σύνολο $\frac{|rB_2^n|^{1/n}}{|A|^{1/n}}\cdot A$ έχει ίσο όγκο με το $|rB_2^n|$, διότι $\left|\frac{|rB_2^n|^{1/n}}{|A|^{1/n}}\cdot A\right| =$

$$= |rB_2^n| \left|\frac{1}{|A|^{1/n}} A\right| = |rB_2^n| \frac{1}{\cancel{|A|}} \cancel{|A|} = |rB_2^n|$$

Άρα $\left|\frac{|rB_2^n|^{1/n}}{|A|^{1/n}} A\right| = |rB_2^n| = r^n |B_2^n| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^n}\left|\frac{|rB_2^n|^{1/n}}{|A|^{1/n}} A\right| = |B_2^n|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{|rB_2^n|^{1/n}}{r|A|^{1/n}}\cdot A\right| = |B_2^n| \xRightarrow{\text{προηγ. θεωρ.}}$$

$$\Rightarrow \partial\left(\frac{|rB_2^n|^{1/n}}{r|A|^{1/n}} A\right) \geq \partial B_2^n$$

$$\frac{|rB_2^n|^{\frac{n-1}{n}}}{r^{n-1}|A|^{\frac{n-1}{n}}}\partial A \geq \partial B_2^n \Rightarrow$$

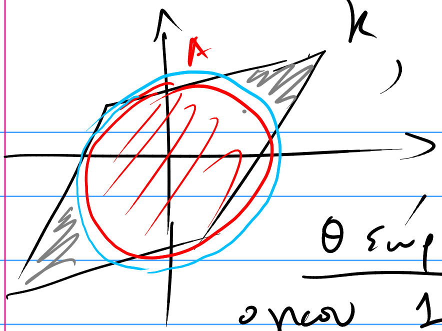
$$\underbrace{\frac{|rB_2^n|^{\frac{n-1}{n}}}{|A|^{\frac{n-1}{n}}} \cancel{\partial A}} \geq r^{n-1}\partial B_2^n = \underbrace{\cancel{\partial(rB_2^n)}}$$

$$|rB_2^n|^{\frac{n-1}{n}} \geq |A|^{\frac{n-1}{n}} \Rightarrow |A| \leq |rB_2^n|$$

∎

Άσκηση 6.3.1) Αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ με όγκο ή εμβαδόν επιφανείας

Δείξτε ότι $\left(\frac{|A|}{|B_2^n|}\right)^{1/n} \leq \left(\frac{\partial A}{\partial B_2^n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$



K, $|K| = 1$

$|A \cap K| > 1/2$

Θεώρημα (Λήμμα του Borel) K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και A κεντρικά συμμετρικό κυρτό κλειστό $\subseteq \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί την $vol_n(K \cap A) =: \delta > 1/2$. Τότε $\forall\, t > 1$ ισχύει

$$vol_n\left(K \cap (tA)^c\right) \leq \delta \cdot \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\frac{t+1}{2}}$$

$$\left(\frac{1-\delta}{\delta} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\delta} - 1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\delta} < 2 \Leftrightarrow \delta > \frac{1}{2} \right)$$

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι

$$A^c \supseteq \frac{2}{t+1} \boxed{(tA)^c} + \frac{t-1}{t+1} A.$$

Αν όχι $\exists\, a \in A$ ώστε $a = \frac{2}{t+1} x + \frac{t-1}{t+1} y$ όπου $x \in (tA)^c$, $y \in A$

$\overset{\text{άσκηση}}{\Longrightarrow}$ $\frac{1}{t} x = \frac{t+1}{2t} \underbrace{a}_{\in A} + \frac{t-1}{2t} \underbrace{(-y)}_{\in A}$ $\Longrightarrow$

A κεντρικά συμμετρικό, $y \in A$ $\Rightarrow -y \in A$

$\Rightarrow \frac{1}{t} x \in A \Rightarrow x \in tA$ άτοπο αφού $x \in (tA)^c$

Άρα $K \cap A^c \supseteq \frac{2}{t+1} K \cap (tA)^c + \frac{t-1}{t+1} K \cap A$

$$|K \cap A^c| \geq \left| \frac{2}{t+1} K \cap (tA)^c + \frac{t-1}{t+1} K \cap A \right|$$

$$1 - \delta \geq |K \cap (tA)^c|^{\frac{2}{t+1}} \, |K \cap A|^{\frac{t-1}{t+1}}$$

$$1 - \delta \geq |K \cap (tA)^c|^{\frac{2}{t+1}} \, \delta^{\frac{t-1}{t+1}}$$

άσκηση $\Longrightarrow \dots \Longrightarrow$

$$|K \cap (tA)^c| \leq \delta \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\frac{t+1}{2}}$$

∎

Aue 6.5.1 $K = \mathbb{Z}_2$