Άσκηση 3.3.3 Αποδείξτε ότι αν $\mathcal{E}$ είναι το ελλειψοειδές $\left\{x=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\alpha_j^2} \leq 1\right\}$ τότε $\forall\, u \in S^{n-1}$ ισχύει

$$h_{\mathcal{E}}(u) := \sup\{\langle x, u\rangle : x \in \mathcal{E}\} = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 u_j^2\right)^{1/2}.$$

Λύση

$$h_{\mathcal{E}}(u) = \sup_{x\in\mathcal{E}} \underline{\langle x, u\rangle} = \sup_{\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\alpha_j^2}=1} \underline{\sum_{i=1}^{n} x_i u_i}$$

Πολλαπλασιαστές Lagrange

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i - \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\alpha_j^2} - 1\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \boxed{1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\alpha_j^2} = 0}$$

$$u_i - \lambda \frac{2x_i}{\alpha_i^2} = 0 \Rightarrow u_i = \lambda \frac{2x_i}{\alpha_i^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_i = \frac{\alpha_i^2 u_i}{2\lambda}} \qquad 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j^2} \frac{\alpha_j^4 u_j^2}{4\lambda^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 u_j^2 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 u_j^2}$$

$$x_i = \frac{\alpha_i^2 u_i}{\pm\left(\sum_{1}^{n} \alpha_j^2 u_j^2\right)^{1/2}}$$

Τα ακρότατα είναι

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2 u_i}{\pm\left(\sum_{1}^{n} \alpha_j^2 u_j^2\right)^{1/2}} u_i = \pm \frac{\sum_{1}^{n} \alpha_i^2 u_i^2}{\left(\sum_{1}^{n} \alpha_j^2 u_j^2\right)^{1/2}} =$$

$$= \pm \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 u_i^2\right)^{1/2} \text{ άρα } h_{\mathcal{E}}(u) = \left(\sum_{1}^{n} \alpha_i^2 u_i^2\right)^{1/2}$$

∎

Το πολικό σώμα

Ορισμός Αν K κυρτό σώμα με το μηδέν στο εσωτερικό του θέτουμε

$$K^o = \{ y \in \mathbb{R}^n \quad \langle x \ y \rangle \leq 1 \quad \forall x \in K \}$$

το K^o ονομάζεται πολικό σώμα του K.

Πρόταση Το K^o είναι κυρτό σώμα.

Απόδειξη (i) Το K^o είναι κυρτό σύνολο

Αν $y, z \in K^o$ και $\lambda \in [0, 1]$

Αν $x \in K$ θέλω $\langle x, (1-\lambda) y + \lambda z \rangle \leq 1$

$$(1-\lambda) \langle x \ y \rangle + \lambda \langle x \ z \rangle \leq (1-\lambda) \cdot 1 + \lambda \cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow (1-\lambda) y + \lambda z \in K^o.$$

(ii) K^o σώμα

(α') $\mathrm{int}(K^o) \neq \phi$. K φραγμένο (ως σώμα) άρα $\exists M > 0$ $K \subseteq B_2^n(0, M)$. Αν $y \in B_2^n(0, \frac{1}{M})$ τότε $\forall x \in K \subseteq B_2^n(0 \ M)$

$$\Rightarrow \|x\|_2 \leq M \quad \text{άρα}$$

$$\langle y \ x \rangle \leq \|y\|_2 \|x\|_2 \leq \frac{1}{M} M = 1$$

$$\Rightarrow y \in K^o \Rightarrow B_2^n(0, \tfrac{1}{M}) \subseteq K^o \Rightarrow 0 \in \underbrace{\mathrm{int}(K^o)}_{\neq \phi}$$

(β') K^o φραγμένο.

$$0 \in \mathrm{int}(K) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad B_2^n(0, \varepsilon) \subseteq K$$

Ισχυρισμός $K^o \subseteq B_2^n(0, \frac{1}{\varepsilon})$

Αν $y \in K^o \setminus \{0\}$ $\quad \left\| \frac{\varepsilon y}{\|y\|_2} \right\|_2 = \frac{\varepsilon}{\cancel{\|y\|_2}} \cancel{\|y\|_2} = \varepsilon$

$$\frac{\varepsilon y}{\|y\|_2} \in B_2^n(0, \varepsilon) \subseteq K \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{\varepsilon y}{\|y\|_2} \in K \\ y \in K^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle y, \frac{\varepsilon y}{\|y\|_2} \right\rangle \leq 1 \Rightarrow \varepsilon \frac{\|y\|_2^2}{\cancel{\|y\|_2}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \|y\|_2 \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

$$y \in K^\circ \Rightarrow \|y\|_2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow K^\circ \subseteq B_2^n\left(0, \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

(γ') K° κλειστό.

Αν $\left.\begin{array}{l} y_m \in K^\circ \\ y_m \xrightarrow{\|\cdot\|_2} y \end{array}\right\}$ πρέπει να δείξουμε ότι $y \in K^\circ$.

$$\Rightarrow \underline{\forall x \in K} \quad \langle x, y_m \rangle \leq 1 \Rightarrow \lim_{m \to \infty} \langle x, y_m \rangle \leq 1$$

$$\xrightarrow[\text{συνεχ.}]{\langle \cdot, \cdot \rangle} \langle x, y \rangle \leq 1 \Rightarrow y \in K^\circ \qquad \blacksquare$$

<u>Πρόταση</u> Αν K κυρτό κεντρικά συμμετρικό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε το K° είναι κυρτό κεντρικά συμμετρικό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.

<u>Απόδειξη</u> Αν $\underline{y \in K^\circ}$. $\underline{\text{Έστω } x \in K} \xrightarrow[\text{συμμ.}]{K} \underline{-x \in K}$

$$\Rightarrow \langle y, -x \rangle \leq 1 \Rightarrow \underline{\langle -y, x \rangle \leq 1}$$

$$\Rightarrow -y \in K^\circ \qquad \blacksquare$$