Άσκηση 3.4.6 Αποδείξτε ότι $\forall\ 1<p<\infty$ και $\forall\ 1<q<\infty$ με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ισχύει $(B_p^n)^\circ = B_q^n$

Λύση Αν $y\in B_q^n$ θα δείξουμε ότι $y\in (B_p^n)^\circ$. Αλλά

$$\langle x, y\rangle = \sum x_j y_j \overset{\text{Hölder}}{\le} \left(\sum |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum |y_j|^q\right)^{1/q} \le 1$$

Έτσι $B_q^n \subseteq (B_p^n)^\circ$. Αντιστρόφως αν $y\in (B_p^n)^\circ$ θα δείξουμε ότι $y\in B_q^n$ δηλ. $\|y\|_q \le 1$. Αλλά αφού $y\in (B_p^n)^\circ \Rightarrow$ $\langle x, y\rangle \le 1\ \forall x\in B_p^n$. Θέτουμε $x = \left(\frac{|y_j|^{q-1}\operatorname{sgn}(y_j)}{\left(\sum_1^n |y_j|^q\right)^{1/p}}\right)_{j=1}^n$

(για $y\neq 0$)

$x\in B_p^n$ διότι $\|x\|_p^p = \frac{\sum_1^n \left||y_j|^{q-1}\operatorname{sgn}(y_j)\right|^p}{\sum_1^n |y_j|^q} = \frac{\sum_1^n |y_j|^{(q-1)p}}{\sum |y_j|^q}$

αλλά $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \frac{q}{p}+1 = q \Leftrightarrow \frac{q}{p} = q-1 \Leftrightarrow q=(q-1)p$

$=1$. Άρα $x\in B_p^n$ συνεπώς $\langle x, y\rangle \le 1$. Όμως

$$1 \ge \langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n \frac{|y_j|^{q-1}\operatorname{sgn}(y_j)}{\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/p}}\cdot y_j = \frac{\sum_{j=1}^n |y_j|^q}{\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \|y\|_q$$

δηλαδή $\|y\|_q \le 1 \Rightarrow$

άρα για $B_q^n \Rightarrow (B_p^n)^\circ \subseteq B_q^n$. Άρα $(B_p^n)^\circ = B_q^n$

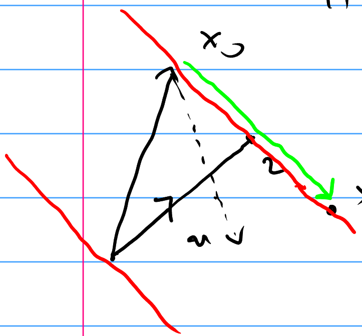
$$(B_p^n)^\circ = B_q^n \Rightarrow \left((B_p^n)^\circ\right)^\circ = (B_q^n)^\circ = B_p^n \quad \blacksquare$$

$$\Rightarrow \boxed{(B_p^n)^{\circ\circ} = B_p^n} \qquad \forall\, 1 < p < \infty$$

Ορισμός Τα σύνολα $K, D \subseteq \mathbb{R}^n$ διαχωρίζονται από το υπερεπίπεδο $H_{u,\lambda}$ αν $K \subseteq H^-_{u\lambda}$ και $D \subseteq H^+_{u,\lambda}$ (ή $K \subseteq H^+_{u\lambda}$ & $D \subseteq H^-_{u\lambda}$)

όπου $H_{u\lambda} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle = \lambda\}$

$u_1x_1 + \dots + u_nx_n = \lambda$



$= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x_0, u\rangle = \langle x, u\rangle\}$

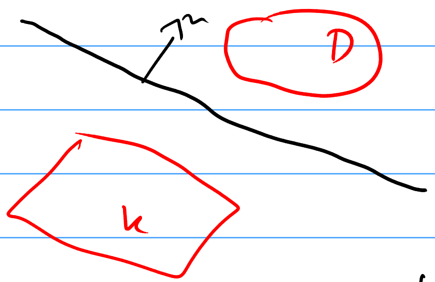
αν $\langle x_0, u\rangle = \lambda$

$= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \underbrace{x - x_0}_{z}, u\rangle = 0\}$

$z \Leftrightarrow x = z + x_0$

$= \{x_0 + z \in \mathbb{R}^n : \langle z, u\rangle = 0\}$

$= x_0 + \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, u\rangle = 0\} = x_0 + H_u$



$H_{u\lambda} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle = \lambda\}$

$K \subseteq H^-_{u\lambda} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle \leq \lambda\}$

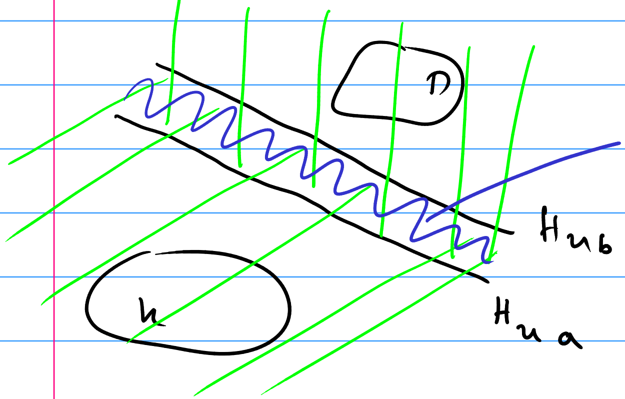
$D \subseteq H^+_{u\lambda} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle \geq \lambda\}$

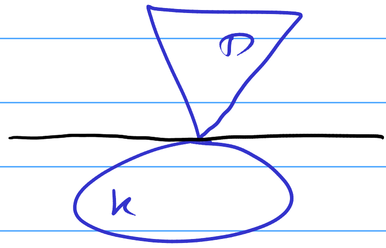
Άρα $\forall\, x \in K \quad \langle x, u\rangle \leq \lambda \leq \langle y, u\rangle \quad \forall y \in D$

Ο διαχωρισμός λέγεται γνήσιος αν

• Ο διαχωρισμός λέγεται γνήσιος αν υπάρχει λωρίδα $\Lambda_{u,a,b} = H^{-}_{ub} \cap H^{+}_{ua}$ $a<b$ που διαχωρίζει τα K και D οπότε

$\forall x \in K \quad \langle x, u\rangle \le a < b \le \langle y, u\rangle \quad \forall y \in D$

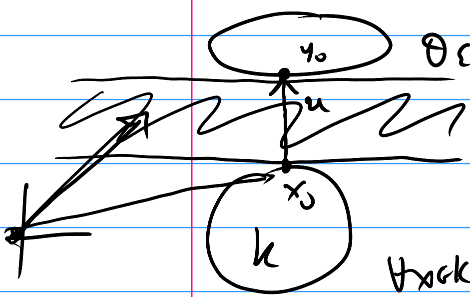




Θεώρημα: Έστω ότι τα K, D κυρτά στον $\mathbb{R}^n$. Αν K συμπαγές και το D κλειστό και $K \cap D = \emptyset$ τότε τα K και D διαχωρίζονται γνήσια.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 1.1.11 των σημειώσεων $\exists\, x_0 \in K$ και $\exists\, y_0 \in D$ ώστε

$d(K,D) = \inf\{\|x-y\|_2 : x \in K,\ y \in D\} = \|x_0 - y_0\|_2 > 0$



Θεωρούμε $u = y_0 - x_0$. Ισχυριζόμαστε ότι η

$\Lambda = \{x : \langle x_0, u\rangle \le \langle x, u\rangle \le \langle y_0, u\rangle\}$

διαχωρίζει τα K, D δηλ.

$\forall x \in K \quad \langle x, u\rangle \le \langle x_0, u\rangle < \langle y_0, u\rangle \le \langle y, u\rangle \quad \forall y \in D$

Αν όχι $\exists\, x_1 \in K \quad \langle x_1, u\rangle > \langle x_0, u\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\langle x_1 - x_0, u\rangle > 0}$ (**)

K κυρτό άρα $[x_0, x_1] \subseteq K$ άρα αν $\lambda \in [0,1]$

$z_\lambda = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \in K$

$$\|y_0 - z_\lambda\|_2^2 = \|(y_0 - x_0) - \lambda(x_1 - x_0)\|_2^2 =$$

$$= \langle \ , \ \rangle = \|y_0 - x_0\|_2^2 + \lambda^2 \|x_1 - x_0\|_2^2 - 2\lambda \langle y_0 - x_0 , x_1 - x_0\rangle$$

$$= \|y_0 - x_0\|_2^2 + \lambda\Big(\lambda \|x_1 - x_0\|_2^2 - 2 \underbrace{\langle \overset{=u}{y_0 - x_0} , x_1 - x_0 \rangle}_{>0 \quad (**)}\Big)$$

$< \|y_0 - x_0\|_2^2$ για λ από δεξιά κοντά στο 0
άτοπο

Ομοίως $\langle y, u\rangle \geq \langle y_0, u\rangle \quad \forall y \in D$ ∎

Πρόταση $\forall$ κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$
ισχύει $(K^\circ)^\circ = K$.

Απόδειξη Φανερά $K \subseteq (K^\circ)^\circ$ διότι αν $x \in K$
τότε $\forall y \in K^\circ$ $\langle x, y\rangle \leq 1 \Rightarrow x \in (K^\circ)^\circ$
$\Rightarrow K \subseteq (K^\circ)^\circ$.

Αντιστρόφως Αν $x \in (K^\circ)^\circ$ και $x \notin K$ τα $\{x\}$ και K
διαχωρίζονται γνησίως άρα $\exists\, u \in \mathbb{R}^n \setminus 0$
ώστε $\langle z, u\rangle \leq \alpha < b \leq \langle x, u\rangle \quad \forall z \in K$
άρα για $\lambda \neq 0$ $\lambda \in (\alpha, b)$ ισχύει

$$\langle z, u\rangle \leq \lambda < \langle x, u\rangle \quad \forall z \in K$$

$$\langle z, \tfrac{u}{\lambda}\rangle \leq 1 < \langle x, \tfrac{u}{\lambda}\rangle \quad \forall z \in K$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$\underbrace{\frac{u}{\lambda} \in K^\circ \qquad \frac{u}{\lambda} \notin K^\circ}$ άτοπο άρα $x \in K$

$(K^\circ)^\circ = K$ ∎