Πρόταση Αν K, L κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \operatorname{int}(K)$, $0 \in \operatorname{int}(L)$ και $\lambda > 0$ ισχύουν τα εξής

(i) $(\lambda K)^\circ = \frac{1}{\lambda} K^\circ$ (ii) $K \subseteq L \iff K^\circ \supseteq L^\circ$

(iii) $\forall$ αντιστρέψιμο $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$(TK)^\circ = (T^t)^{-1}(K^\circ)$$

Απόδειξη (i) $y \in (\lambda K)^\circ \iff \langle \lambda x, y \rangle \leq 1 \ \forall x \in K$

$\iff \langle x, \lambda y \rangle \leq 1 \iff \lambda y \in K^\circ \iff y \in \frac{1}{\lambda} K^\circ$

(ii) Έστω $y \in L^\circ \Rightarrow \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall x \in L \supseteq K \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall x \in K \Rightarrow y \in K^\circ$

Αντιστρόφως: αν $L^\circ \subseteq K^\circ \Rightarrow (L^\circ)^\circ \supseteq (K^\circ)^\circ$

$\Rightarrow L \supseteq K$

(iii) $y \in (TK)^\circ \iff \langle Tx, y \rangle \leq 1 \ \forall x \in K$

$\iff \langle x, T^t y \rangle \leq 1 \ \forall x \in K \iff$

$\iff T^t y \in K^\circ \iff y \in (T^t)^{-1}(K^\circ)$

$\boxtimes$

Ασκ 3.5.11 K, L κεντρικά συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ δείξτε ότι

$\|x\|_K \leq M \|x\|_L \iff K \supseteq \frac{1}{M} L \iff \|x\|_{K^\circ} \geq \frac{1}{M} \|x\|_{L^\circ}$

Λύση Έστω ότι $x \in \frac{1}{M} L \Rightarrow Mx \in L \Rightarrow$

$\Rightarrow \|Mx\|_L \leq 1 \Rightarrow M \|x\|_L \leq 1 \Rightarrow \|x\|_K \leq 1 \Rightarrow x \in K$

άρα $\frac{1}{M} L \subseteq K$

Αντίστροφα αν $x = 0$ η $\|x\|_K \leq M \|x\|_L$ είναι αληθής αν $x \neq 0 \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_L} \right\|_L = 1 \Rightarrow \frac{x}{\|x\|_L} \in L \Rightarrow \frac{1}{M}\frac{x}{\|x\|_L} \in \frac{1}{M} L$

$\Rightarrow \frac{x}{M\|x\|_L} \in K \Rightarrow \left\| \frac{x}{M\|x\|_L} \right\|_K \leq 1 \Rightarrow \|x\|_K \leq M \|x\|_L$

Για την 2η ισοδυναμία: η $K \supseteq \frac{1}{M} L \iff K^\circ \subseteq M L^\circ$

θέλουμε $K^\circ \subseteq M L^\circ \iff \|x\|_{K^\circ} \geq \frac{1}{M} \|x\|_{L^\circ}$

$\Updownarrow$

$L^\circ \supseteq \frac{1}{M} K^\circ$ ---- άσκηση

∎

Άσκηση 3.5.2 Αν K κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και F υπόχωρος στο $\mathbb{R}^n$ διάστασης $k = 1 \ldots n$ δείξτε ότι $(K \cap F)^\circ = P_F(K^\circ)$

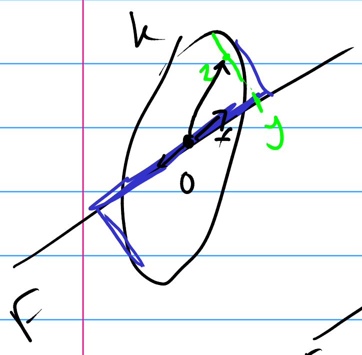
Λύση Αρκεί να δείξουμε ότι $(K \cap F) = \left(P_F(K^\circ)\right)^\circ$

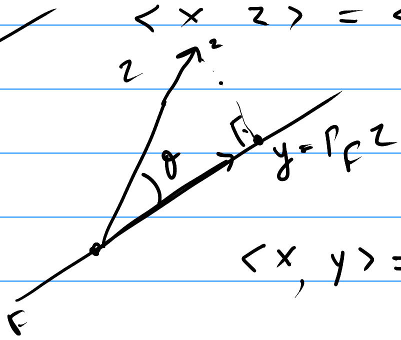
πολικό στον F

πολικό στον $\mathbb{R}^n$

Αν $x \in K \cap F$ θέλω να δείξω ότι $x \in (P_F(K^\circ))^\circ$ δηλ ότι $\langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall \ y \in P_F(K^\circ)$

Έστω λοιπόν ότι $y \in P_F(K^\circ)$ άρα $\exists \ z \in K^\circ$ $y = P_F z$





$\langle x, z \rangle = \langle x, P_F z \rangle$

$\langle x, z \rangle = \|x\|_2 \|z\|_2 \cos\theta$
$= \|x\|_2 \|P_F z\|_2 = \langle x, P_F z \rangle$

$\langle x, y \rangle = \langle x, P_F z \rangle = \langle \underset{K}{x}, \underset{K^\circ}{z} \rangle \leq 1$

$\Rightarrow x \in \left(P_F(K^\circ)\right)^\circ$ δηλ $K \cap F \subseteq \left(P_F(K^\circ)\right)^\circ$

Αντίστροφα αν $x \in \left(P_F(K^\circ)\right)^\circ$ στον F θέλω $x \in K \cap F$

φανερά $x \in F$. Μένει να δείξω ότι $x \in K$

Αν $z \in K^\circ \Rightarrow \langle x, z \rangle = \langle x, P_F z \rangle \leq 1 \Rightarrow x \in (K^\circ)^\circ$

$x \in K$ άρα $x \in K \cap F$

Η έννοια του όγκου

<u>Ορισμός παραλληλεπίπεδο</u> A B ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο των $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times \dots \times [a_n, b_n]$

Ορίζουμε $vol_n(B) = vol(B) = |B| = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$

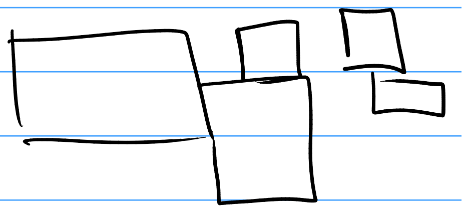
<u>Ορισμός</u> Πολυπαραλληλεπίπεδο ονομάζουμε την πεπερασμένη ένωση παραλληλεπιπέδων με ξένα εσωτερικά.

το A είναι πολυπαραλληλεπίπεδο αν $\exists\, B_1, \dots, B_k$ παραλληλεπίπεδα ώστε $A = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$, ορίζουμε

$$vol_n(A) = \sum_{j=1}^{k} vol_n(B_j)$$

όπου B_j έχουν ξένα εσωτερικά

$$vol_n(A) = vol(A) = |A|$$



<u>Παρατήρηση</u>

$vol_n(x + A) = vol_n(A) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\lambda > 0 \quad vol_n(\lambda A) = \lambda^n vol_n(A)$

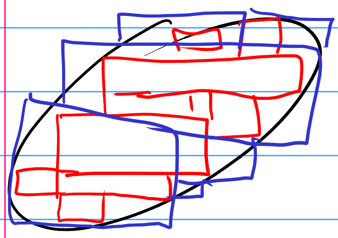
Σταθεροποιούμε ένα σύστημα αξόνων και ορίζουμε τον όγκο ως εξής

<u>Ορισμός</u> Το $K \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται Jordan-μετρήσιμο

αν $\sup\{vol_n(A) : \underset{\text{πολυπαραλ.}}{A \subseteq K}\} = \inf\{vol_n(B) \ \underset{\text{πολυπαρ.}}{B \supseteq K}\}$

Η κοινή τιμή ονομάζεται όγκος του K γράφουμε

$$vol_n(K) = vol(K) = |K|$$

K 

Παρατήρηση Αν $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases}$$

K Jordan μετρήσιμο $\Leftrightarrow$ η χ_K είναι Riemann ολοκληρώσιμη

Στο επόμενο θα δείξουμε ότι κάθε κυρτό σύνολο είναι Jordan μετρήσιμο