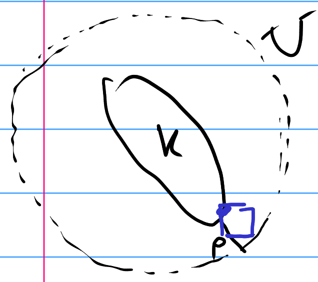
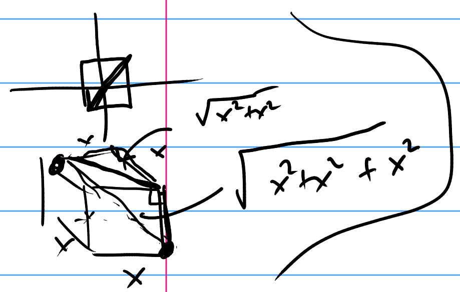
Θεώρημα Αν K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε το K είναι Jordan μετρήσιμο.

Απόδειξη **Ισχυρισμός** Αν $K \subseteq U$, U ανοικτό τότε υπάρχει πολυπαραλληλεπίπεδο A ώστε $K \subseteq A \subseteq U$.



Θέτουμε $\rho = d(K, \mathbb{R}^n \setminus U)$. K συμπαγές, $\mathbb{R}^n \setminus U$ κλειστό, $K \cap (\mathbb{R}^n \setminus U) = \emptyset$. Άρα $\rho > 0$.

Θέτουμε $B_0 = \left[-\frac{\rho}{4\sqrt{n}}, \frac{\rho}{4\sqrt{n}} \right]^n$ μήκος ακμής είναι $2\frac{\rho}{4\sqrt{n}} = \frac{\rho}{2\sqrt{n}}$, $\operatorname{diam} B_0 = \sqrt{\left(\frac{\rho}{2\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{2\sqrt{n}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\rho}{2\sqrt{n}}\right)^2}$



$$= \sqrt{\cancel{n} \cdot \frac{\rho^2}{4\cancel{n}}} = \frac{\rho}{2} < \rho$$

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} \operatorname{int}(x + B_0)$$

K συμπαγές άρα $\exists\, x_1, \dots, x_N \in K$ ώστε

$$\left[K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \operatorname{int}(x_j + B_0) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} (x_j + B_0) = A \subseteq U \right]$$

το K είναι σώμα άρα $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$. Αν $x \in \operatorname{int}(K)$ θέτω $\tilde{K} = K - x$, $0 \in \operatorname{int}(\tilde{K})$. Έστω $\varepsilon > 0$ τότε $\underline{(1-\varepsilon)\tilde{K}} \subseteq \underline{\operatorname{int}(\tilde{K})}$ (Πρόταση 3.1.16 (iii) $0 \in \operatorname{int}(K)$ $\forall\, \lambda > 0$ $\lambda < 1$ $\lambda K \subseteq \operatorname{int} K$)

από τον ισχυρισμό υπάρχει πολυπαραλληλεπίπεδο A_0 ώστε $(1-\varepsilon)\tilde{K} \subseteq A_0 \subseteq \operatorname{int}(\tilde{K}) \subseteq \tilde{K}$

$$A_0 \subseteq \tilde{K} \subseteq \frac{1}{1-\varepsilon} A_0$$

$$x + A_0 \subseteq K \subseteq x + \frac{1}{1-\varepsilon} A_0$$

Άρα $0 \leq \inf\{vol(B) \ B \text{ πολυ} \supseteq K\} - \sup\{vol(A) \ A \text{ πολυ} \subseteq K\}$

$$\leq vol\left(x + \frac{1}{1-\varepsilon}A_0\right) - vol(x + A_0) =$$

$$= vol\left(\frac{1}{1-\varepsilon}A_0\right) - vol(A_0) =$$

$$= \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^n vol(A_0) - vol(A_0) =$$

$$= \left(\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^n - 1\right) vol(A_0)$$

Το $\tilde{K}$ είναι φραγμένο σύνολο άρα $\exists$ $M > 0$ ώστε $\tilde{K} \subseteq [-M, M]^n \Rightarrow A_0 \subseteq \tilde{K} \subseteq [-M, M]^n$

$$\Rightarrow vol(A_0) \leq (2M)^n$$

$$\leq \left(\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^n - 1\right)(2M)^n$$

$\varepsilon \to 0^+ \Rightarrow \inf\{|B| \ B \text{ πολυ} \supseteq K\} = \sup\{|A| \ A \text{ πολυ} \subseteq K\}$

$\Rightarrow K$ Jordan μετρήσιμο ∎

Ιδιότητες όγκου

Πρόταση Για σύνολα που έχουν όγκο ισχύουν

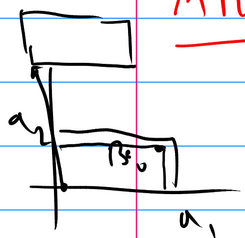
(i) αν $K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow vol(K_1) \leq vol(K_2)$

(ii) αν $K \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \Rightarrow vol_n(K) = 0$

(iii) $vol_n(\lambda K) = \lambda^n vol(K) \quad \forall \lambda \geq 0$

(iv) $vol(x + K) = vol(K)$

(v) αν $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ πίνακας με $T^t T = Id$ τότε $vol(TK) = vol(K)$



Απόδειξη (v) Αν K είναι παραλληλεπίπεδο

$$K = B = [0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_n]$$

$$\mathrm{vol}(K) = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

$$K = \Big\{ \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j} \; : \; 0 \le \lambda_j \le a_j \Big\}$$

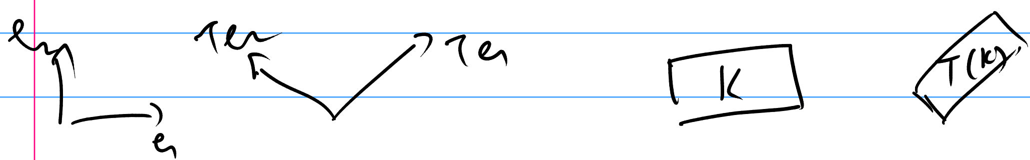
$$T(K) = \Big\{ T\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\Big) \quad 0 \le \lambda_j \le a_j \Big\} = \Big\{ \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j T e_j} \; : \; 0 \le \lambda_j \le a_j \Big\}$$

$$\|Te_j\|_2^2 = \langle Te_j, Te_j \rangle = \langle T^t T e_j, e_j \rangle = \langle e_j, e_j \rangle = \|e_j\|_2^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\|Te_j\|_2 = 1}$$

$i \neq j$ $\quad \langle Te_i, Te_j \rangle = \langle T^t T e_i, e_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = 0$

$Te_1, \dots, Te_n$ μήκους 1 και ορθογώνια

άρα το $T(K)$ είναι παραλληλεπίπεδο με ακμές $a_1 \dots a_n$ άρα $\mathrm{vol}(TK) = a_1 \cdots a_n = \mathrm{vol}(K)$



Ισχύει $\mathrm{vol}(TK) = \mathrm{vol}(K)$ αν K παραλληλεπίπεδο

άρα ισχύει αν K πολυπαραλληλεπίπεδο και παίρνοντας supremum πολυπαραλληλεπιπέδων μέσα στο K το αποτέλεσμα ισχύει γενικά ∎

Πρόταση Αν $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας τότε

$$\mathrm{vol}(TK) = |\det T| \, \mathrm{vol}(K)$$

(αν $T^t T = \mathrm{Id} \Rightarrow \det(T^t T) = \det(\mathrm{Id}) = 1 \Rightarrow \det T^t \det T = 1$

$(\det T)^2 = 1 \Rightarrow \det T = \pm 1$)

<u>Απόδειξη</u> $\forall\ x \in T(K)$ θέτω $y = T^{-1}x \in K$

$$x = Ty$$

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \cdots & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} = \det(T)$$

$$x_1 = \langle Ty, e_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & \cdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} t_{11} y_1 + t_{12} y_2 + \cdots + t_{1n} y_n \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= t_{11} y_1 + t_{12} y_2 + \cdots + t_{1n} y_n$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = t_{11} \qquad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = t_{12} \quad \cdots \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_n} = t_{1n}$$

$$\chi_{TK}(x) = 1 \iff x \in TK \iff T^{-1}x \in K \iff \chi_K(T^{-1}x) = 1$$

άρα $\mathrm{vol}(TK) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{TK}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(T^{-1}x)\, dx$

$$\underset{dx = |\det T|\, dy}{\overset{y = T^{-1}x}{=\!=\!=\!=}} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y)\, |\det T|\, dy = |\det T|\, \mathrm{vol}(K)$$

∎

<u>Άσκηση 4.1.2.</u> Θέτουμε $s(K) = \mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^\circ)$

Δείξτε ότι $\forall\ T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ αντιστρέψιμος πίνακας

$$s(TK) = s(K)$$

<u>Λύση</u> $s(TK) = \mathrm{vol}(TK)\,\mathrm{vol}((TK)^\circ) =$

$$= |\det T|\, \mathrm{vol}(K)\, \mathrm{vol}((T^t)^{-1}(K^\circ))$$

$$= |\det T|\, \underline{\mathrm{vol}(K)}\, |\det((T^t)^{-1})|\, \underline{\mathrm{vol}(K^\circ)}$$

$$= |\det T| \, |\det((T^t)^{-1})| \, s(k)$$

$$\left(\begin{array}{l} \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1 \\ \underbrace{\det A}\ \det(A^{-1}) = 1 \\ \qquad \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} \end{array} \right)$$

$$\cancel{|\det T|} \, \frac{1}{\cancel{|\det T^t|}} \, s(k) = s(k)$$

$\blacksquare$