Η ανισότητα Prekopa–Leindler

Στο σημερινό μάθημα θα υποθέτουμε

(i) Οι συναρτήσεις που εμφανίζονται παρακάτω είναι όλες μετρήσιμες

(ii) Σε οποιοδήποτε πολλαπλό ολοκλήρωμα στα παρακάτω μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης

(iii) Το μέτρο ενός μετρήσιμου υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ ισούται με το supremum του μέτρου συμπαγών υποσυνόλων.

π.χ. $\mu((2,5)) = 5-2 = 3$

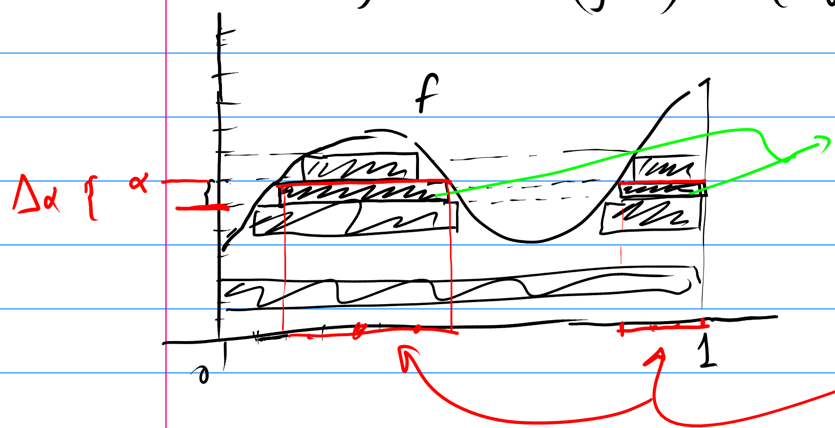
$$\sup \mu\left(\left[2+\tfrac{1}{n},\, 5-\tfrac{1}{n}\right]\right) = \sup\left(\left(5-\tfrac{1}{n}\right)-\left(2+\tfrac{1}{n}\right)\right) = \sup\left(3-\tfrac{2}{n}\right) = 3$$

Θεώρημα (Prekopa–Leindler) Έστω ότι οι $f, g, h \geq 0$ ολοκληρώσιμες $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $0 < \lambda < 1$.

Αν ισχύει
$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (f(x))^{1-\lambda} (g(y))^{\lambda} \quad (*)$$
τότε
$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx\right)^{\lambda} \qquad (P-L)$$

Παρατήρηση Αν θέσω $k(x) = f(x)^{1-\lambda} g(x)^{\lambda}$ τότε
$$\int h = \int f^{1-\lambda} g^{\lambda} \underset{p=\frac{1}{1-\lambda},\ q=\frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}{\overset{\text{Hölder}}{\leq}} \left(\int (f^{1-\lambda})^{\frac{1}{1-\lambda}}\right)^{1-\lambda} \cdot \left(\int (g^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{\lambda}$$

$$\Rightarrow \int k \leq \left(\int f\right)^{1-\lambda} \left(\int g\right)^{\lambda}.$$



$$\Delta\alpha \cdot \mu(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\})$$

$$\int f = \int \mu(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\})\,d\alpha$$

Λήμμα Αν $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ μετρήσιμη τότε

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^\infty \mu(\{x \in \mathbb{R} \; f(x) \geq t\})\,dt$$

Απόδειξη Θέτουμε $A_t = \{x \in \mathbb{R} \; f(x) \geq t\}$ $\forall \, t \geq 0$

Παρατηρούμε ότι $\chi_{[0, f(x)]}(t) = 1 \iff 0 \leq t \leq f(x) \iff$

$\iff x \in A_t \iff \chi_{A_t}(x) = 1$ συνεπώς

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{f(x)} 1\,dt\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \chi_{[0\; f(x)]}(t)\,dt\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0\; f(x)]}(t)\,dx\,dt = \int_0^\infty \boxed{\int_{\mathbb{R}} \chi_{A_t}(x)\,dx}\,dt$$

$$= \int_0^\infty \mu(A_t)\,dt = \int_0^\infty \mu(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\})\,dt \quad \blacksquare$$

Απόδειξη P-L Επαγωγή στη διάσταση του $\mathbb{R}^n$

$n = 1$ **Ισχυρισμός** Αν R, S, T μετρήσιμα $\subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και $0 < \lambda < 1$ ώστε $R \supseteq (1-\lambda)S + \lambda T$ **Τότε**

$$\mu(R) \geq (1-\lambda)\mu(S) + \lambda \mu(T)$$

$$(\iff |R| \geq (1-\lambda)|S| + \lambda|T|)$$

$[\; R \supseteq (1-\lambda)S + \lambda T \Rightarrow |R| \geq |(1-\lambda)S + \lambda T|$

αν ξέραμε ότι $|(1-\lambda)S + \lambda T| \overset{?}{\geq} |(1-\lambda)S| + |\lambda T|$

τότε $|R| \geq |(1-\lambda)S| + |\lambda T| = (1-\lambda)|S| + \lambda|T|$

Άρα μένει να δειχθεί αν S, T μετρήσιμα ισχύει

$$|S + T| \geq |S| + |T|$$

Αρκεί να το δείξω για S, T συμπαγή (από (iii) εσωτερική κανονικότητα του Lebesgue) Θέτω $s = \max S$ $\quad t = \min T$

$0 \in S - s \subseteq (-\infty, 0]$ $\qquad 0 \in T - t \subseteq [0, \infty)$

$(x \geq t \Rightarrow x - t \geq 0)$

$S - s \subseteq (S - s) + (T - t)$ γιατί $0 \in T - t$

$T - t \subseteq (S - s) + (T - t)$ γιατί $0 \in S - s$

$\Rightarrow (S - s) \cup (T - t) \subseteq (S - s) + (T - t)$

$$|(S - s) + (T - t)| \geq |(S - s) \cup (T - t)| = |S - s| + |T - t|$$

$$|(S + T) - (s + t)| \geq |S - s| + |T - t|$$

$$\Rightarrow |S + T| \geq |S| + |T|$$

$$\{z \in \mathbb{R} \; h(z) \geq t\} \supseteq (1-\lambda)\{x : f(x) \geq t\} + \lambda \{y : g(y) \geq t\}$$

Ισχύει

διότι πρέπει να δείξω ότι $(1-\lambda)x + \lambda y \in \{z : h(z) \geq t\}$

όταν $f(x) \geq t$ & $g(y) \geq t$

$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} \geq t^{1-\lambda} t^{\lambda} = t$

$$|\{z \in \mathbb{R} \; h(z) \geq t\}| \geq (1-\lambda)\,|\{x : f(x) \geq t\}| + \lambda\,|\{y : g(y) \geq t\}|$$

$$\int | \qquad | \, dt \geq (1-\lambda) \int | \qquad | \, dt + \lambda \int | \qquad | \, dt$$

$$\int h \geq (1-\lambda) \int f + \lambda \int g \underset{\text{Α-Γ μέσων}}{\geq} \left(\int f\right)^{1-\lambda} \left(\int g\right)^{\lambda}$$

(Α-Γ μέσων $\quad (1-\lambda)\alpha + \lambda b \geq \alpha^{1-\lambda} b^{\lambda} \quad \alpha, b \geq 0 \quad \lambda \in [0,1]$)

Υποθέτουμε ότι ισχύει η P-L για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις υποθέσεις της P-L

Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad h((1-\lambda)x+\lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}$

$\forall\, t \in \mathbb{R}$ ορίζω τις

$$f_t, g_t, h_t : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} \quad \begin{cases} f_t(x) = f((t,x)) \\ g_t(x) = g(t,x) \\ h_t(x) = h(t,x) \end{cases}$$

Αν $t = (1-\lambda)t_1 + \lambda t_2$ τότε

$$h_t(\underbrace{(1-\lambda)x+\lambda y}_{\mathbb{R}^{n-1}}) = h(t, (1-\lambda)x+\lambda y) =$$

$$= h((1-\lambda)t_1+\lambda t_2, (1-\lambda)x+\lambda y) =$$

$$= h((1-\lambda)\underbrace{(t_1,x)}_{\mathbb{R}^n} + \lambda \underbrace{(t_2,y)}_{\mathbb{R}^n})$$

$$\geq f(t_1,x)^{1-\lambda} g(t_2,y)^{\lambda} = f_{t_1}(x)^{1-\lambda} g_{t_2}(y)^{\lambda}$$

Επαγ. υπόθεση $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_t(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{t_1}(x)\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{t_2}(y)\right)^{\lambda} \\ &\text{για } t = (1-\lambda)t_1 + \lambda t_2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Θέτουμε $F(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_t(x)dx$, $G(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_t(y)dy$

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_t(x)dx$$

(1) $$H((1-\lambda)t_1+\lambda t_2) \geq (F(t_1))^{1-\lambda}(G(t_2))^{\lambda}$$

άρα ισχύει η υπόθεση P-L για $n=1$

άρα $$\int_{\mathbb{R}} H(t)dt \geq \left(\int_{\mathbb{R}} F(t)dt\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} G(t)dt\right)^{\lambda}$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_t(x)\,dx\,dt \geq \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_t(x)dx\,dt\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_t(x)dx\right)^{\lambda}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h(t,x)\, dx\, dt \geq \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t,x)\, dx\, dt \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(t,x)\, dx\, dt \right)^{\lambda}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g \right)^{\lambda} \qquad \blacksquare$$