Η ανισότητα Brunn-Minkowski

Η ανισότητα P-L μας έλεγε ότι αν $f,g,h:\mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ και για κάποιο $0<\lambda<1$ ισχύει

$$h((1-\lambda)x+\lambda y) \geq (f(x))^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} \quad \forall x \, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

τότε
$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{\lambda} \qquad \text{P-L}$$

<u>Θεώρημα</u> (πολλαπλασιαστική μορφή της Brunn-Minkowski)
Αν S, T μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\mathrm{vol}((1-\lambda)S+\lambda T) \geq \mathrm{vol}(S)^{1-\lambda}\,\mathrm{vol}(T)^{\lambda} \quad (\forall \lambda \in [0,1])$$

<u>Απόδειξη</u> Θέτουμε $R=(1-\lambda)S+\lambda T$

$\chi_S, \chi_T, \chi_R : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$

για $\lambda \in (0,1)$

Ισχύει $\chi_R((1-\lambda)x+\lambda y) \geq \chi_S(x)^{1-\lambda}\,\chi_T(y)^{\lambda}$ (*)

αν $\chi_S(x)=0$ ή $\chi_T(y)=0$ η (*) ισχύει προφανώς

αν $\chi_S(x)\neq 0$ & $\chi_T(y)\neq 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x\in S \\ y\in T\end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1-\lambda)x+\lambda y \in (1-\lambda)S+\lambda T = R \Rightarrow \chi_R((1-\lambda)x+\lambda y)=1$

οπότε πάλι ισχύει η (*)

Από την P-L $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\chi_R \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_S\right)^{1-\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_T\right)^{\lambda}$$

$$\mathrm{vol}_n(R) \geq \mathrm{vol}(S)^{1-\lambda}\,\mathrm{vol}(T)^{\lambda}$$ ∎

<u>Θεώρημα</u> (προσθετική μορφή της Brunn-Minkowski)
Αν S, T μη κενά συμπαγή $\subseteq \mathbb{R}^n$ τότε
$$\mathrm{vol}(S+T)^{1/n} \geq \mathrm{vol}(S)^{1/n} + \mathrm{vol}(T)^{1/n}$$

Αν τα S κ T είναι κυρτά σύνολα τότε το "$=$" ισχύει αν κ μόνο αν ένα από τα S, T είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

<u>Απόδειξη</u> (Η περίπτωση της ισότητας παραλείπεται)

(Για απλοποίηση του συμβολισμού θα γράφουμε $|A|$ αντί για $vol(A)$)

Αν $|S| = 0$ τότε αν $x_0 \in S$ $\quad (S \neq \emptyset)$

τότε $S + T \supseteq x_0 + T \Rightarrow vol(S+T) \geq vol(x_0 + T) = vol(T)$

$$|S+T|^{1/n} \geq |T|^{1/n} = |S|^{1/n} + |T|^{1/n}$$

Ομοίως αν $|T| = 0$

Υποθέτω τώρα ότι $|S| \neq 0$ & $|T| \neq 0$

Θέτω $K = \frac{1}{|S|^{1/n}} S$ & $L = \frac{1}{|T|^{1/n}} \cdot T$

$vol(\lambda K) = \lambda^n vol(K)$

$$|K| = \left| \frac{1}{|S|^{1/n}} S \right| = \frac{1}{|S|} |S| = 1 \quad \text{όμοια } |L| = 1$$

Θέτω $\lambda = \frac{|T|^{1/n}}{|S|^{1/n} + |T|^{1/n}} \in (0,1) \quad 1 - \lambda = \frac{|S|^{1/n}}{|S|^{1/n} + |T|^{1/n}}$

Από την πολλαπλασιαστική μορφή της B-M ισχύει

$$\left| \frac{\cancel{|S|^{1/n}}}{|S|^{1/n} + |T|^{1/n}} \cdot \frac{1}{\cancel{|S|^{1/n}}} S + \frac{\cancel{|T|^{1/n}}}{|S|^{1/n} + |T|^{1/n}} \cdot \frac{1}{\cancel{|T|^{1/n}}} T \right| \geq |K|^{1-\lambda} |L|^{\lambda} = 1$$

$$\left| \frac{1}{|S|^{1/n} + |T|^{1/n}} \cdot (S + T) \right| \geq 1$$

$$\left(\frac{1}{|S|^{1/n} + |T|^{1/n}} \right)^n |S+T| \geq 1$$

$$|S+T| \geq \left(|S|^{1/n} + |T|^{1/n} \right)^n$$

$$|S+T|^{1/n} \geq |S|^{1/n} + |T|^{1/n} \qquad \boxtimes$$

Άσκηση 6.2.1 Αποδείξτε ότι η πολλαπλασιαστική μορφή της B–M είναι ισοδύναμη με την αθροιστική μορφή της.

Λύση "⇒" (είναι το προηγούμενο θεώρημα)

"⇐" Υποθέτουμε $\boxed{|K+L|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |L|^{1/n}}$

$$|(1-\lambda)K + \lambda L|^{1/n} \geq |(1-\lambda)K|^{1/n} + |\lambda L|^{1/n} = (1-\lambda)|K|^{1/n} + \lambda |L|^{1/n}$$

$$\underset{\text{μέσων}}{\overset{\text{ανισ. A-Γ}}{\geq}} \left(|K|^{1/n}\right)^{1-\lambda} \left(|L|^{1/n}\right)^{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(1-\lambda)K + \lambda L|^{1/n} \geq \left(|K|^{1-\lambda}\right)^{\frac{1}{n}} \left(|L|^{\lambda}\right)^{1/n}$$

$$\boxed{|(1-\lambda)K + \lambda L| \geq |K|^{1-\lambda} |L|^{\lambda}} \qquad \boxtimes$$

Ασκ 6.2.2 Αποδείξτε ότι η

$$\det^{1/n} : \{A \ n\times n \text{ πίνακες } \det A \geq 0\} \longrightarrow [0, \infty)$$

ικανοποιεί την $(\det(A+B))^{1/n} \geq (\det(A))^{1/n} + (\det(B))^{1/n}$

δηλ η $\det^{1/n}$ είναι κοίλη.

Λύση $\left(\mathrm{vol}_n(A(K)) = |\det A| \, \mathrm{vol}_n(K) \right)$

Θέτω $K = A(B_2^n)$ $\quad L = B(B_2^n)$

Από από την ανισότητα B–M ισχύει

$$|K+L|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |L|^{1/n}$$

$$|A(B_2^n)+B(B_2^n)|^{\frac{1}{n}} \geq |A(B_2^n)|^{\frac{1}{n}} + |B(B_2^n)|^{\frac{1}{n}}$$

$$|(A+B)(B_2^n)|^{1/n} \geq \text{—— // ——}$$

$$\det(A+B)^{1/n} \, |B_2^n|^{1/n} \geq (\det A)^{1/n} \, \underline{|B_2^n|}^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{1/n} \, \underline{|B_2^n|}^{\frac{1}{n}}$$

$$\det(A+B)^{1/n} \geq (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}$$

Ασκ 6.2.3 & 6.2.4 αφήνονται σε εσάς
(απλή εφαρμογή — γενίκευση των προηγούμενων)