Οι δύο όψεις του Fields Medal

Το «Fields Medal» είναι ένα βραβείο που απονέμεται το πολύ σε τέσσερεις μαθηματικούς οι οποίοι δεν πρέπει να έχουν υπερβεί το τεσσαρακοστό έτος της ηλικίας τους. Η απονομή γίνεται σε κάθε «International Congress» της Διεθνούς Μαθηματικής Ένωσης από το 1936 και σε τακτά διαστήματα (ανά τέσσερα χρόνια) από το 1950. Το βραβείο θέσπισε ο καναδός μαθηματικός John Charles Fields, με σκοπό την αναγνώριση και την υποστήριξη νέων ερευνητών μαθηματικών με σημαντική συνεισφορά στα Μαθηματικά.

Το Fields Medal θεωρείται το «Nobel» των Μαθηματικών, χωρίς βέβαια η ταύτιση να είναι απόλυτη, αφού ο περιορισμός του ορίου ηλικίας τηρείται αυστηρά.

Το μετάλλιο που απονέμεται εικονίζει στην πρώτη όψη του τον Αρχιμήδη και γύρω γύρω γράφει στα λατινικά TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI, δηλαδή «Υπέρβαλε εαυτόν και κατάκτησε τον κόσμο». Στα δεξιά της κεφαλής γράφει ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ (κεφαλή), ενώ στα αριστερά έχει τα αρχικά του καλλιτέχνη που σχεδίασε το μετάλλιο R(obert) T(ait) M(cKenzie) και τη χρονολογία στα λατινικά MCNXXXIII —αντί για το σωστό MCMXXXIII ή 1936. Στη δεύτερη όψη του εικονίζει μια σφαίρα εγγεγραμμένη σε κύλινδρο (θέμα από τον Αρχιμήδη), μπροστά από αυτή δάφνες και μπροστά από τις δάφνες γράφει CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNA TRIBUERE, δηλαδή «(Το) απονέμουν για έξοχα γραπτά οι μαθηματικοί που συναθροίστηκαν από όλον τον κόσμο». Τέλος, το όνομα του μαθηματικού που βραβεύεται χαράσσεται στην παράπλευρη επιφάνεια κάθε μεταλλίου.

TRANSIRE
SUUM
PECTUS
MUNDOQUE
POTIRI

(Manilius, Astronomica 4.392)

Έτος	Βραβευθέντες Μαθηματικοί
1936	Lars Ahlfors, Jesse Douglas
1950	Laurent Schwartz, Atle Selberg
1954	Kunihiko Kodaira, Jean-Pierre Serre
1958	Klaus Roth, Rene Thom
1962	Lars Hörmander, John Milnor
1966	Michael F. Atiyah, Paul J. Cohen, Alexander Grothendieck, Stephen Smale
1970	Alan Baker, Heisuke Hironaka, Sergei P. Novikov, John G. Thompson
1974	Enrico Bombieri, David Mumford
1978	Pierre Deligne, Charles Fefferman, Grigory Margulis, Daniel Quillen
1982	Alain Connes, William Thurston, Shing-Tung Yau
1986	Simon Donaldson, Gerd Faltings, Michael Freedman
1990	Vladimir Drinfeld, Vaughan F. R. Jones, Shigefumi Mori, Edward Witten
1994	Efim I. Zelmanov, Pierre -Louis Lions, Jean Bourgain, Jean-Christophe Yoccoz
1998	Richard E. Borcherds, Timothy W. Gowers, Maxim Kontsevich, Curtis T. McMullen
2002	Laurent Lafforgue, Vladimir Voevodsky

Άσκηση 8 Δείξτε επαγωγικά ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$\frac{n!}{n^n} > \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}},$$

όπου με $n!$ εννοούμε το γινόμενο $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$, το οποίο διαβάζουμε «$n$ παραγοντικό».

Άσκηση 9 Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε επαγωγή για να δείξετε ότι $(2n-1)(2n+1) < (2n)^2$.)

Άσκηση 10 Δείξτε με επαγωγή την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ισχύει

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Λυτές Ασκήσεις

Άσκηση 11 Βρείτε το σφάλμα στο ακόλουθο επιχείρημα που «αποδεικνύει» ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους.

> Αρκεί να δείξουμε ότι όλα τα υποσύνολα που περιέχουν n φυσικούς αριθμούς είναι μονοσύνολα. Για $n = 1$ ο ισχυρισμός είναι σωστός, γιατί, αν ένα σύνολο περιέχει $n = 1$ στοιχεία, τότε είναι μονοσύνολο. Έστω ότι ο ισχυρισμός μας ισχύει για όλα τα υποσύνολα των φυσικών αριθμών με n στοιχεία. Θεωρούμε το σύνολο A, το οποίο έστω ότι περιέχει $n+1$ στοιχεία. Ας υποθέσουμε ότι
>
> $$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\}.$$
>
> Θεωρούμε δύο υποσύνολα του A, τα
>
> $$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$$
>
> και
>
> $$A_2 = \{x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\},$$
>
> για τα οποία προφανώς ισχύει $A_1 \cup A_2 = A$.

Άσκηση 19 Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

και, αν $0 < b < a$, τότε

$$nb^{n-1} \le \frac{a^n - b^n}{a-b} \le na^{n-1}.$$

Άσκηση 20 (Ανισότητα Weierstraß) Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$ ισχύει

Weierstraß= Βάιερστρας

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \ge 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Άσκηση 21* Έστω ότι $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ και $x_1x_2\ldots x_n = 1$. Δείξτε ότι $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \ge n$. Επίσης, δείξτε ότι, αν $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$, τότε $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$. (Υπόδειξη: Για $n = 2$ παρατηρήστε ότι $x_1 + x_2 - 2 = (x_1 - 1)(1 - x_2)$.)

Άσκηση 22* Δείξτε ότι για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ ισχύει

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

(Υπόδειξη: Για την ανισότητα στα δεξιά χρησιμοποιήστε την άσκηση 21 για τα $y_i = x_i/\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$. Για την ανισότητα στα αριστερά χρησιμοποιήστε την ανισότητα στα δεξιά για τα $y_i = 1/x_i$.)

Άσκηση 23 Αποδείξτε με επαγωγή και χωρίς χρήση της άσκησης 22 την ανισότητα

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Άσκηση 24 Αποδείξτε με επαγωγή ότι

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Άσκηση 25 Αποδείξτε με επαγωγή ότι το 3 διαιρεί το $n^3 + 2n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 26 Αποδείξτε με επαγωγή ότι το 5 διαιρεί το $n^5 - n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμος 3.1.1 *Λέμε ότι ο αριθμός m διαιρεί τον n, και γράφουμε $m|n$, όταν υπάρχει $p \in \mathbb{N}$, ώστε $p \cdot m = n$. Σε αυτή την περίπτωση, ο m λέγεται διαιρέτης του n και ο p λέγεται πηλίκο της διαίρεσης του n διά m.*

Είναι φανερό ότι, αν ο p είναι πηλίκο της διαίρεσης $n \div m$, τότε είναι και ο p διαιρέτης του n, δηλαδή $p|n$ με πηλίκο τον αριθμό m.

Τις περιπτώσεις όπου ένας αριθμός m δεν διαιρεί τον n (και γράφουμε $m \nmid n$) τις περιγράφει πλήρως το ακόλουθο θεώρημα:

Θεωρημα 3.1.2 (ευκλείδειας διαίρεσης) *Έστω ότι οι m και n είναι ακέραιοι αριθμοί με $m > 0$. Τότε υπάρχουν $q \in \mathbb{Z}$ και $r \in \mathbb{N}$ με $0 \leq r < m$, ώστε*

$$n = qm + r. \tag{3.3}$$

Τα q και r είναι μοναδικά (καθορίζονται πλήρως από τα n και m). (Ο αριθμός r λέγεται υπόλοιπο της διαίρεσης του n διά m.)

Για την απόδειξη του θεωρήματος της ευκλείδειας διαίρεσης χρειαζόμαστε ένα λήμμα.

Λημμα 3.1.3 *Κάθε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει μέγιστο στοιχείο.*

Απόδειξη: Έστω A ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και έστω B το σύνολο

$$B = \{n \in \mathbb{N}, \text{ ώστε } A \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\}\}.$$

Αφού το A είναι φραγμένο, θα υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $k \leq n_0$ για κάθε $k \in A$. Άρα $A \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n_0\}$, δηλαδή $n_0 \in B \neq \varnothing$. Επομένως, από την ιδιότητα της καλής διάταξης του $\mathbb{N}$ συμπεραίνουμε ότι το B έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το $N \in B$. Έτσι $A \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ και $A \nsubseteq \{1, 2, \ldots, N-1\}$. Άρα $N \in A$ (αλλιώς $A \subseteq \{1, 2, \ldots, N-1\}$), συνεπώς, αν $m \in A$, τότε $m \in \{1, 2, \ldots, N\}$, και ως εκ τούτου $m \leq N$. Κατά συνέπεια, το N είναι άνω φράγμα του A και, αφού $N \in A$, το N είναι μέγιστο. □

Απόδειξη (του θεωρήματος 3.1.2): Έστω $n > 0$ (η περίπτωση $n \leq 0$ αντιμετωπίζεται ανάλογα). Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{q \in \mathbb{N} \ : \ qm \leq n\}.$$

Φανερά, αν $s \in A$, τότε $s \leq n$ (αλλιώς, αν $n < s$, τότε $n < nm$, αφού $m > 0$, το οποίο με τη σειρά του είναι μικρότερο του $sm < n$, αφού $s \in A$, το οποίο είναι άτοπο). Άρα, το A είναι φραγμένο σύνολο και από το προηγούμενο λήμμα έχει μέγιστο στοιχείο, έστω το $q \in A$. Επομένως $qm \leq n$. Θέτουμε λοιπόν $r = n - qm \geq 0$ και πρέπει να δείξουμε ότι $r < m$. Όμως $q + 1 \notin A$ (αφού το q είναι μέγιστο στο A), οπότε $(q+1)m > n$, δηλαδή $qm + m > n$, και συνεπώς $m > n - qm = r$. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη δείχνοντας ότι τα q και r είναι μοναδικά.

Το εν λόγω σύνολο είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του X, αφού:

(i) αν $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_n x_n$ και $\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_n x_n$ είναι δύο στοιχεία του L, τότε το άθροισμά τους ισούται με

$$(\mu_1 + \nu_1)x_1 + (\mu_2 + \nu_2)x_2 + \cdots + (\mu_n + \nu_n)x_n,$$

δηλαδή είναι και αυτό στοιχείο του L·

(ii) αν $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_n x_n$ είναι στοιχείο του L και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε το γινόμενο $\lambda(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_n x_n)$ είναι ίσο με

$$(\lambda\mu_1)x_1 + (\lambda\mu_2)x_2 + \cdots + (\lambda\mu_n)x_n,$$

δηλαδή είναι και αυτό στοιχείο του L.

~~(iii) περιέχει το μηδενικό διάνυσμα του X (θέστε $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$).~~

Λέμε ότι το L *παράγεται* από τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και γράφουμε

span (σπαν)=παράγω

$$L = \text{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Όταν τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε η διάσταση του L είναι ακριβώς n.

4·5* ΟΜΟΓΕΝΩΣ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ ΟΡΙΖΟΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Οι ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά από ομογενείς σχέσεις τάξης k είναι οι ακολουθίες a_n οι οποίες ικανοποιούν την

$$a_{n+k} = \lambda_1 a_{n+k-1} + \lambda_2 a_{n+k-2} + \cdots + \lambda_k a_n, \tag{4.7}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Έστω

$$L = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ \text{η } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ικανοποιεί την (4.7) και } a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\},$$

δηλαδή το σύνολο των λύσεων της (4.7). Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι, αν a_n και b_n είναι δύο λύσεις, τότε οι ακολουθίες $a_n + b_n$ και λa_n για $\lambda \in \mathbb{R}$ αποτελούν και αυτές λύσεις, δηλαδή ανήκουν στο L. Το σύνολο L με αυτές τις δύο πράξεις είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$ (είναι τετριμμένο να ελέγξει κανείς αν ισχύουν όλες οι ιδιότητες των πράξεων). Θα δείξουμε αρχικά ότι το L έχει τουλάχιστον k γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία.

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$x^k - \lambda_1 x^{k-1} - \lambda_2 x^{k-2} - \cdots - \lambda_{k-1}x - \lambda_k = 0.$$

Τι θα συμβεί όμως αν επενδύσουμε τα χρήματά μας με τη συμφωνία ότι ο τόκος θα καταβάλλεται καθημερινά; Τότε, το ημερήσιο επιτόκιο είναι $r/365$ και το συνολικό ποσό στο τέλος του έτους θα είναι

$$\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365} K$$

(ή $(1+r/366)^{366}K$ για τα δίσεκτα έτη). Και από την προηγούμενη συζήτηση προκύπτει ότι

$$\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365} K > \left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} K > (1+r)K.$$

Έτσι, λοιπόν, είναι λογικό όταν μπορεί κανείς να διαπραγματευθεί τους όρους της επένδυσής του να ζητήσει ακόμα πιο συχνή απόδοση των τόκων (για παράδειγμα ανά λεπτό), ενώ το βέλτιστο θα ήταν να αποδίδονται οι τόκοι «συνεχώς»! Σε αυτή την περίπτωση, το κεφάλαιο στο τέλος ενός έτους θα είναι

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} K,$$

αν το όριο αυτό υπάρχει.

Έτσι, οδηγούμαστε φυσιολογικά στη μελέτη της ακολουθίας $(1+x/n)^n$ και της συμπεριφοράς της όταν το n γίνεται πολύ μεγάλο (τείνει στο άπειρο). Ας ξεκινήσουμε δείχνοντας ότι η ακολουθία αυτή πράγματι συγκλίνει. Θα δείξουμε ότι είναι αύξουσα (για $x > 0$) και άνω φραγμένη. Ως εκ τούτου, η σύγκλισή της θα προκύψει από την πρόταση 4.1.6.

Λημμα 5.2.1 *Για $x > 0$ η ακολουθία $(1 + x/n)^n$ είναι αύξουσα.*

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε το διωνυμικό ανάπτυγμα για τις ποσότητες $(1 + x/n)^n$ και $(1 + x/(n + 1))^{n+1}$. Έτσι, η διαφορά

$$(1 + x/(n + 1))^{n+1} - (1 + x/n)^n$$

υπολογίζεται να είναι

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right)x^k.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \geq 0$$

για κάθε $0 < k \leq n$. Αυτό ελέγχεται εύκολα, διότι η εν λόγω ανισότητα ανάγεται στην

$$\binom{n}{k}\frac{1}{(n+1)^k}\left(\frac{n+1}{n-k+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^k\right) \geq 0.$$

Τώρα η διαφορά στην παρένθεση είναι μη αρνητική, ενώ ο έλεγχος είναι απλή επαγωγή ως προς k και αφήνεται ως άσκηση (άσκηση 3). □

Λήμμα 5.2.2 *Για $x > 0$ η ακολουθία $(1 + x/n)^n$ είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό k_0, ώστε $0 < x/k_0 < 1$ (για παράδειγμα, ο $k_0 = [x] + 1$ είναι κατάλληλος). Τότε

$$\left(1 + \frac{x}{k_0 n}\right)^n = \left(\frac{k_0 n + x}{k_0 n}\right)^n = \left(\frac{k_0 n + x - x}{k_0 n + x}\right)^{-n} = \left(1 - \frac{x}{k_0 n + x}\right)^{-n}.$$

Από την ανισότητα Bernoulli ($(1 + \theta)^n \geq 1 + n\theta$ για $\theta > -1$ και $n \in \mathbb{N}$· δες άσκηση 2.7, σελίδα 41), η τελευταία ποσότητα είναι μικρότερη από την

$$\left(1 - \frac{nx}{k_0 n + x}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{x}{k_0 + \frac{x}{n}}\right)^{-1} \leq \left(1 - \frac{x}{k_0}\right)^{-1}.$$

Έτσι, φτάσαμε στην

$$\left(1 + \frac{x}{k_0 n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{x}{k_0}\right)^{-1}. \tag{5.6}$$

Από τη μονοτονία της $(1 + x/n)^n$ και την (5.6) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα ισχύει

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{k_0 n}\right)^{k_0 n} \leq \left(1 - \frac{x}{k_0}\right)^{-k_0}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Άρα, λοιπόν, με βάση την πρόταση 4.1.6 δείξαμε ότι η ακολουθία $(1+x/n)^n$ για $x > 0$ συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό. Ας ονομάσουμε το όριο αυτό $E(x)$ (θα εξαρτάται ενδεχομένως από το x). Η E είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο το θετικών αριθμών στο $\mathbb{R}$. Θα επεκτείνουμε τώρα την E σε όλο το $\mathbb{R}$.

Αν $x = 0$, η ακολουθία είναι σταθερά ίση με 1, οπότε συγκλίνει στο $1 =: E(0)$. Αν $x < 0$, τότε παρατηρούμε ότι

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \bigg/ \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n.$$

Επειδή ο παρονομαστής συγκλίνει (αφού $-x > 0$), αρκεί να δείξουμε ότι συγκλίνει ο αριθμητής (βέβαια απαιτείται ο παρονομαστής να μη συγκλίνει στο μηδέν, αλλά αυτό είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Bernoulli). Θα δείξουμε ότι ο αριθμητής συγκλίνει στο 1.

Φανερά, από την ανισότητα Bernoulli (άσκηση 2.7, σελίδα 41) για $n > x$

$$\left(1 - x^2/n^2\right)^n \geq 1 - x^2/n \to 1.$$

Αλλά για $n > x$ θα ισχύει τετριμμένα $(1-x^2/n^2)^n \leq 1$, και συνεπώς δείξαμε το ζητούμενο. Έτσι, η συνάρτηση $E(x)$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ ως το όριο της ακολουθίας $(1 + x/n)^n$. Η ιδιότητα που μας οδηγεί στην κατανόηση αυτής της συνάρτησης περιγράφεται στην ακόλουθη πρόταση: