1.7 ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ (σελ. 17)

Παράδειγμα 1 Θα πρέπει να κάνουμε σαφές ότι η επιλογή των λέξεων «προηγείται» και «έπεται» δεν έγινε απλώς για λόγους αφαίρεσης. Μπορούμε δηλαδή να βρούμε διάφορα παραδείγματα στα οποία η χρήση των λέξεων «μικρότερο» και «μεγαλύτερο» δεν έχουν νόημα. Ας δούμε δύο τέτοια παραδείγματα.

Οι λέξεις σε κάθε λεξικό ακολουθούν μια συγκεκριμένη διάταξη που λέγεται «λεξικογραφική διάταξη». Έτσι στα λεξικά της Ελληνικής γλώσσας η λέξη «μήλο» προηγείται πάντα της λέξης «ψάθα». Αν συμβολίζαμε με $\preccurlyeq$ τη λεξικογραφική διάταξη θα γράφαμε «μήλο $\preccurlyeq$ ψάθα». Αλλά αν θέλαμε να διαβάσουμε την προηγούμενη φράση δεν θα είχε νόημα να πούμε «το μήλο είναι μικρότερο της ψάθας». Αντιθέτως, η φράση «το μήλο προηγείται της ψάθας», μιλώντας για τη λεξικογραφική διάταξη, είναι πλήρως κατανοητή.

Το επόμενο παράδειγμα από τον κόσμο των υπολογιστών έχει δύο στόχους. Ο ένας είναι να δώσει άλλο ένα παράδειγμα όπως το προηγούμενο και ο άλλος είναι να προσπαθήσει να πείσει ότι η έννοια της διάταξης αποκομμένη από τη γνωστή διάταξη των αριθμών δεν είναι άχρηστη θεωρία αλλά απαραίτητη γενίκευσή της, με εφαρμογές έξω από τα Μαθηματικά. Ένας υπολογιστής αποθηκεύει τα δεδομένα σε ένα καινούργιο δίσκο γραμμικά. Δηλαδή, γράφει το πρώτο αρχείο στους πρώτους τομείς του δίσκου και αν πρόκειται να γράψει στο δίσκο ένα δεύτερο αρχείο το γράφει στους επόμενους τομείς. Ας υποθέσουμε ότι ο χρήστης έγραψε στον δίσκο αρκετά αρχεία ώστε ο δίσκος να έχει γεμίσει. Τώρα αρχίζει και σβήνει αρχεία. Συνήθως αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο δίσκος να αποκτήσει κενά σε όλη την έκταση της επιφάνειάς του, αφού ο χρήστης μπορεί να σβήσει το πρώτο, το τρίτο, το πέμπτο, το έβδομο κ.λπ. αρχείο. Έτσι στην επιφάνεια του δίσκου υπάρχουν διάσπαρτα αρχεία και διάσπαρτα κενά. Τώρα ο χρήστης αρχίζει να ξαναγράφει αρχεία. Αλλά αυτή τη φορά ας υποθέσουμε ότι το μέγεθος του πρώτου αρχείου που θέλει να γράψει είναι μεγαλύτερο από το πρώτο κενό που υπάρχει στο δίσκο. Έτσι ο υπολογιστής θα αναγκαστεί να γράψει τμήμα του αρχείου στο πρώτο κενό, και το υπόλοιπο στο δεύτερο κενό, αν χωράει, αλλιώς θα συνεχίσει να γράψει και στο τρίτο κενό μέχρι να γραφτεί όλο το αρχείο.

Με συνηθισμένη χρήση, το πρόβλημα αυτό, εμφανίζεται μόνο στα λειτουργικά συστήματα της MicroSoft, λόγω του κακού σχεδιασμού του συστήματος αρχείων που χρησιμοποιούν. Στα συστήματα Unix και στα παράγωγά τους (GNU-Linux, FreeBSD, MacOsX, QNX κ.λπ.) η ανασυγκρότηση δεν είναι απαραίτητη γιατί το λειτουργικό σύστημα γράφει τα αρχεία στο δίσκο με πολύ πιο εξελιγμένο αλγόριθμο που δεν οδηγεί σε εκτεταμένη κατακερμάτιση.

Αν αυτό συνεχιστεί, και ο χρήστης συνεχίζει να σβήνει και να γράφει αρχεία (που ισοδυναμεί με τη συνηθισμένη χρήση του υπολογιστή) μετά από λίγο καιρό τα αρχεία στο δίσκο του υπολογιστή θα είναι κατακερματισμένα.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την πτώση της απόδοσης του συστήματος αφού για να ανοίξει ο χρήστης ένα αρχείο το οποίο έχει γραφτεί σε διάφορα τμήματα του δίσκου, ο υπολογιστής θα πρέπει να ψάξει στο δίσκο πολλές φορές, μια για κάθε κομμάτι του αρχείου. Η λύση για την αποκατάσταση του προβλήματος είναι να γίνει «ανασυγκρότηση» του δίσκου. Πρόκειται για έναν αλγόριθμο που προσπαθεί να ξαναφέρει τον δίσκο στην κατάσταση όπου κάθε αρχείο είναι γραμμένο σε ένα συνεχόμενο κομμάτι του δίσκου. Αυτό το κάνει μετακινώντας το δεύτερο αρχείο ώστε να δημιουργήσει χώρο για το πρώτο, στον οποίο χώρο θα μεταφέρει τα κομμάτια του πρώτου αρχείου που είναι γραμμένα σε άλλα σημεία του δίσκου. Αλλά πιο είναι το πρώτο αρχείο; Εκείνο που είναι μεγαλύτερο σε μέγεθος ή εκείνο που ξεκινάει νωρίτερα στο δίσκο; Ή μήπως εκείνο που είναι κομμένο σε λιγότερα κομμάτια; Είναι σαφές ότι ο προγραμματιστής πρέπει να αποφασίσει για τη διάταξη των αρχείων πριν προχωρήσει στην υλοποίηση του αλγορίθμου. Δεν θα μπούμε σε λεπτομέρειες της ανασυγκρότησης. Απλώς θέλαμε να δείξουμε ότι η έννοια της διάταξης στην πράξη, ξεφεύγει από το πλαίσιο της γνωστής διάταξης των αριθμών.

Παράδειγμα 2 (άνω και κάτω φράγμα, μέγιστο, ελάχιστο, supremum και infimum) Θεωρούμε το σύνολο των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ χωρίς το ίδιο το $\mathbb{N}$, δηλαδή το σύνολο $X = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\mathbb{N}\}$. Σε αυτό ορίζουμε τη διάταξη με τη σχέση του περιέχεσθαι. Δηλαδή, για $A, B \in X$ γράφουμε $A \preccurlyeq B$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$. Τότε

1. το σύνολο
$$Y = \Big\{\{2k \,:\, k \in \mathbb{N}\}\Big\}$$
είναι το μονοσύνολο με μοναδικό στοιχείο το σύνολο των αρτίων φυσικών αριθμών. Ως μονοσύνολο είναι φραγμένο. Ένα άνω φράγμα του είναι το στοιχείο $B = \{1\} \cup \{2k \,:\, k \in \mathbb{N}\}$. Αυτό είναι σωστό διότι κάθε στοιχείο του Y (δηλαδή το $\{2k \,:\, k \in \mathbb{N}\}$, αφού το Y δεν έχει άλλο στοιχείο) προηγείται του B. Το B όμως δεν είναι το ελάχιστο άνω φράγμα. Το ελάχιστο άνω φράγμα είναι το ίδιο το $\{2k \,:\, k \in \mathbb{N}\}$. Αυτό είναι ταυτόχρονα και μέγιστο. Δηλαδή έχουμε:
$$\sup Y = \max Y = \{2k \,:\, k \in \mathbb{N}\}.$$

2. το σύνολο
$$Y = \Big\{\{n, n+2\} \,:\, n \in \mathbb{N}\Big\}$$
δεν είναι φραγμένο. Αυτό ισχύει γιατί αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $M \in X$ ώστε $\{n, n+2\} \preccurlyeq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αυτό θα σημαίνει ότι $\{n, n+2\} \subseteq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $n \in M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $M = \mathbb{N}$. Αλλά τότε $M \notin X$, το οποίο είναι άτοπο.

   Παρατηρήστε ότι αν αφαιρέσουμε ένα στοιχείο από το Y, αυτό θα είναι φραγμένο. Για παράδειγμα, το
$$Y = \Big\{\{n, n+2\} \,:\, n \in \mathbb{N}\Big\} \setminus \Big\{\{1, 3\}\Big\}$$
έχει άνω φράγμα το $M = \mathbb{N} \setminus \{1\} \in X$.

3. το σύνολο
$$Y = \Big\{\{2k \,:\, k \leq n\} \,:\, n \in \mathbb{N}\Big\}$$
δηλαδή το σύνολο
$$\Big\{\{2\}, \{2, 4\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 6, 8\}, \ldots\Big\}$$
είναι άνω φραγμένο από το στοιχείο $M = \{2k \,:\, k \in \mathbb{N}\} \in X$. Το M είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Y, δηλαδή είναι το supremum του Y, αλλά το Y δεν έχει μέγιστο στοιχείο (αφού $M \notin Y$).

3.1α′ *διαιρετότητα* (σελ. 48)

Μετά την απόδειξη του θεωρήματος 3.1.2:

Παρατήρηση 3 Πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα ότι το υπόλοιπο μιας διαίρεσης πρέπει να είναι πάντα θετικό ή μηδέν και ποτέ αρνητικό. Ως εκ τούτου, ενώ η διαίρεση 14 δια 3 έχει πηλίκο 4 και υπόλοιπο 2 ($14 = 4 \cdot 3 + 2$), η διαίρεση -14 δια 3 έχει πηλίκο -5 και υπόλοιπο 1: $-14 = (-5) \cdot 3 + 1$.

4.1 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ (σελ. 74)

Μετά τον Ορισμό 4.1.4:

Παρατήρηση 4 Μπορείτε να σκεφτόσαστε τη σύγκλιση ως ένα παιχνίδι με δύο παίκτες Α και Β ως εξής: Ο παίκτης Α ζητάει από τον παίκτη Β να του πει πόσο κοντά θα ήθελε να πλησιάσουν οι όροι της ακολουθίας a_n στο ℓ. Ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης Β του λέει ότι θα ήθελε να βεβαιωθεί ότι οι όροι της ακολουθίας μπορούν να πλησιάσουν το ℓ σε απόσταση μικτότερη από $1/100$. Τότε ο παίκτης Α καλείται να βρει μετά από ποιόν δείκτη n_0 όλοι οι όροι τη ακολουθίας απέχουν από το όριο λιγότερο από $1/100$. Ο παίκτης Α κερδίζει αν μπορεί να βρίσκει *πάντα* το κατάλληλο n_0 ανεξάρτητα από το πόσο μικρή απόσταση του ζητάει ο Β. Όταν λοιπόν, ό,τι απόσταση και να ζητήσει ο Β ο Α είναι σε θέση να βρεί από ποιον όρο (n_0) και μετά ικανοποιείται η απαίτηση του αντιπάλου παίκτη, τότε ο Α κερδίζει, δηλαδή η ακολουθία a_n συγκλίνει πράγματι στο ℓ.

Ομοίως μπορούμε να σκεφτούμε και την άρνηση, δηλαδή πότε μια ακολουθία a_n *δεν* συγκλίνει στο ℓ. Αυτό συμβαίνει όταν ο παίκτης Α δεν μπορεί να κερδίσει. Δηλαδή όταν ο Β δώσει στον Α τέτοιον μικρό αριθμό ε που να είναι ανέφικτο για τον Α να βρεί n_0 πέραν του οποίου όλοι οι όροι της ακολουθίας να απέχουν από το ℓ λιγότερο του ε. Σε αυτή την περίπτωση ο Β δίνει έναν μικρό αριθμό ε και ό,τι n_0 και να σκεφτεί ο Α υπάρχει ένας όρος της ακολουθίας a_n με $n \geq n_0$ ώστε $|a_n - \ell| > \varepsilon$. Συμπαιρένουμε λοιπόν ότι $a_n \not\to \ell$ *αν και μόνο αν υπάρχει* $\varepsilon > 0$ *ώστε για κάθε* n_0 *υπάρχει* $n \geq n_0$ *που ικανοποιεί την* $|a_n - \ell| > \varepsilon$