Ακολουθίες & Σειρές

Αντώνης Τσολομύτης

Σάμος, 2012–2022

$$\sum \lim_{n\to\infty} a_n \quad \limsup \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Α. Τσολομύτης, Σάμος, 2012–2022.
http://myria.math.aegean.gr/~atsol
Direct link: http://myria.math.aegean.gr/r/seq

Στον Κώστα

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Προαπαιτούμενα

Στο κεφάλαιο αυτό συγκεντρώνουμε υλικό που είναι απαραίτητο για την μελέτη των ακολουθιών και των σειρών. Δεν είναι απαραίτητο να διαβαστεί όλο πριν ξεκινήσει κανείς το Κεφάλαιο 1, αλλά μπορεί να ανατρέχει σε αυτό κάθε φορά που θα το χρειαστεί.

1.1 Επαγωγή

Υποθέτουμε ότι το σύνολο των Φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ είναι γνωστό. Επαγωγή ονομάζουμε την εξής ιδιότητα: Αν ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ έχει τις ιδιότητες

$$1 \in A \quad \text{και για κάθε} \quad n \in A \quad \text{ισχύει } n+1 \in A$$

τότε αναγκαστικά $A = \mathbb{N}$. Αυτό είναι πιστευτό διότι, αφού $1 \in A$ από την παραπάνω ιδιότητα (αν $n \in A$, τότε $n+1 \in A$), τότε $2 = 1 + 1 \in A$. Επαναλαμβάνοντας συμπεραίνουμε $3 = 2 + 1 \in A$, και μετά $4 = 3 + 1 \in A$ κλπ. Γράψαμε ότι είναι «πιστευτό» διότι αποτελεί αξίωμα ότι σε αυτή την περίπτωση $A = \mathbb{N}$ μια και δεν μπορούμε να κάνουμε άπειρο πλήθος ελέγχων. Πολλά βιβλία παρουσιάζουν ως αξίωμα άλλες ισοδύναμες με αυτή προτάσεις και στη συνέχεια αποδεικνύουν την ιδιότητα της επαγωγής. Συχνά, παρουσιάζεται ως αξίωμα η αρχή της καλής διάταξης για το $\mathbb{N}$: *κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο*. Η αρχή της καλής διάταξης αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμη με την επαγωγή. Για λεπτομέρειες μπορεί κανείς να ανατρέξει στο [5].

Η Επαγωγή χρησιμοποιείται συνήθως με την εξής μορφή. Αν ένας ισχυρισμός (μια πρόταση) εξαρτάται από το n, για παράδειγμα η πρόταση

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

για να αποδειξουμε ότι ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \text{ισχύει ότι } 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \right\}.$$

Αν δείξουμε ότι $1 \in A$ και όποτε $n \in A$ τότε $n+1 \in A$ θα έχουμε αποδείξει με την Επαγωγή ότι $A = \mathbb{N}$ που σημαίνει ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι για να αποδείξουμε την παραπάνω κάνουμε τους εξής δύο ελέγχους:

(i) ελέγχουμε αν $1 \in A$: $1 = \frac{1}{2}1(1+1)$ το οποίο είναι αληθές.

(ii) υποθέτουμε ότι ισχύει $n \in A$ (ονομάζεται «επαγωγική υπόθεση»), δηλαδή ότι ισχύει

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

και πρέπει να αποδείξουμε ότι $n+1 \in A$, δηλαδή ότι

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Πράγματι, από την επαγωγική υπόθεση θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) &= \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{2}n + 1\right) \\ &= (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

1.1.1 *Η ανισότητα Bernoulli*

Στη συνέχεια σε διάφορα σημεία θα χρειαστούμε μια πολύ στοιχειώδη αλλά ταυτόχρονα σημαντική ανισότητα:

ΛΗΜΜΑ 1.1.1 (Ανισότητα Bernoulli). *Για κάθε $\theta > -1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$(1+\theta)^n \geq 1 + n\theta.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν είτε $\theta = 0$ είτε $n = 1$.

Απόδειξη: Αν $\theta = 0$ η ανισότητα είναι προφανής (ως ισότητα). Έστω ότι $\theta \neq 0$. Για $n = 1$ προφανώς ισχύει ως ισότητα. Για $n = 2$ έχουμε

$$(1+\theta)^2 = 1 + 2\theta + \theta^2 > 1 + 2\theta.$$

Ας υποθέσουμε ότι $(1+\theta)^n > 1 + n\theta$. Τότε

$$\begin{aligned}(1+\theta)^{n+1} &= (1+\theta)(1+\theta)^n > (1+\theta)(1+n\theta) = 1 + (n+1)\theta + n\theta^2 \\ &> 1 + (n+1)\theta,\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την επαγωγή. □

1.2 Το διωνυμικό ανάπτυγμα

Γενίκευση των γνωστών ταυτοτήτων

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

και

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

αποτελεί η ταυτότητα, γνωστή ως *διωνυμικό ανάπτυγμα*: για κάθε a, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

όπου

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ και εξ' ορισμού $0! = 1$.

Η απόδειξη αυτής της ταυτοότητας γίνεται με επαγωγή στο n: Για $n = 1$ το άθροισμα ισούται με

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1 b^{1-1} = a + b,$$

διότι

$$\binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} = 1 \quad \text{και} \quad \binom{1}{1} = \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1.$$

Προχωράμε με το επαγωγικό βήμα. Υποθέτουμε ότι ισχύει η

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{(n+1)-k}.$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση έχουμε:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{(n+1)-k}\end{aligned}$$

θέτοντας $s = k+1$ και γράφοντας ξεχωριστά τον $s = n+1$ όρο στο πρώτο και τον $k = 0$ όρο στο δεύτερο,

$$= a^{n+1} + \sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s-1}a^s b^{(n+1)-s} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{(n+1)-k} + b^{n+1}$$

μετονομάζοντας το s σε k και βάζοντας μαζί τα δύο αθροίσματα, καταλήγουμε στην

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{(n+1)-k} + b^{n+1}.$$

Όμως, επειδή $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$ θα ισχύει

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\,\frac{k+n-k+1}{k((n+1)-k)} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\,\frac{n+1}{k((n+1)-k)} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Άρα, επειδή $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n+1}{0} = 1$,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{(n+1)-k} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{(n+1)-k},\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την επαγωγή.

1.3 Η τριγωνική ανισότητα

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3.1. *Για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει η τριγωνική ανισότητα*

$$\big||x| - |y|\big| \le |x \pm y| \le |x| + |y|.$$

Απόδειξη: Η δεξιά ανισότητα προκύπτει από την ιδιότητα $\pm a \le |a|$:

$$\pm 2xy \le |2xy| = 2|x|\,|y|$$

προσθέτουμε και στα δύο μέλη τους $x^2 = |x|^2$ και $y^2 = |y|^2$:

$$x^2 \pm 2xy + y^2 \le |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2$$

άρα

$$|x \pm y|^2 \le (|x| + |y|)^2,$$

οπότε $|x \pm y| \le |x| + |y|$.

Για την ανισότητα στα αριστερά,

$$|x| = |(x \pm y) \mp y| \le |x \pm y| + |y|$$

άρα $|x| - |y| \le |x \pm y|$. Ομοίως,

$$|y| = |(x \pm y) \mp x| \le |x \pm y| + |x|$$

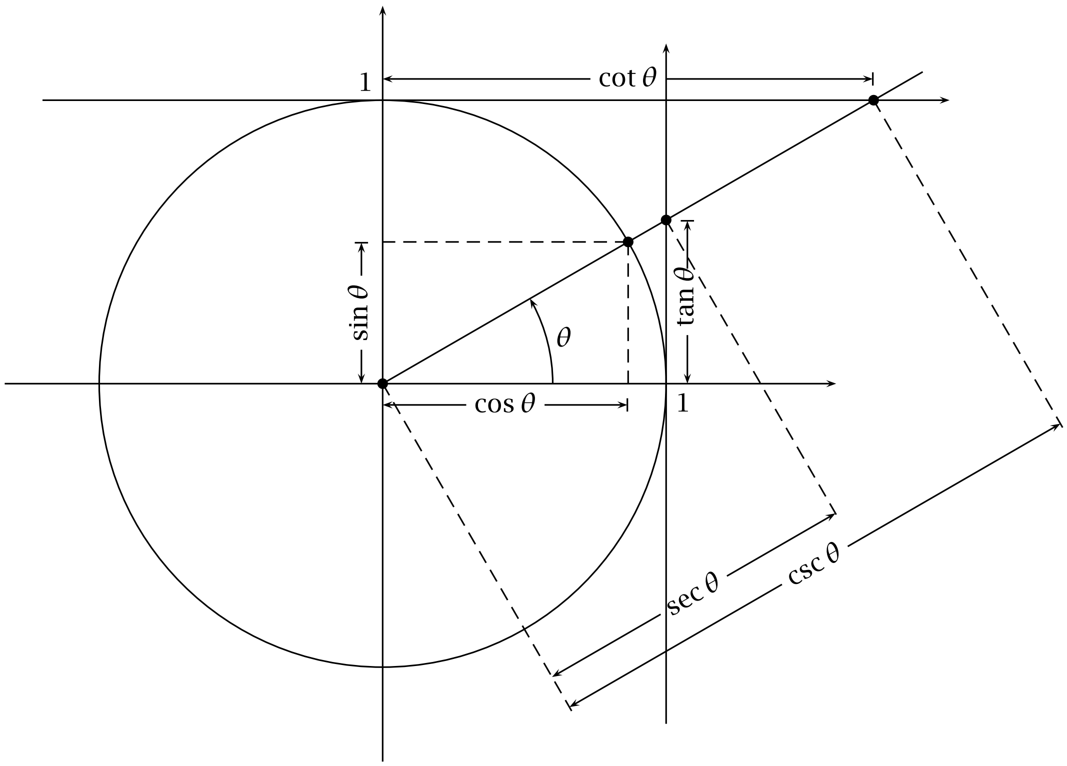
άρα $|y| - |x| \le |x \pm y|$. Δηλαδή

$$\pm(|x| - |y|) \le |x \pm y|$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

1.4 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και βασικές ανισότητες

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται στο παρακάτω σχήμα. Τη γωνία θ τη μετράμε σε ακτίνια, δηλαδή η ορθή γωνία είναι είναι $\pi/2 \simeq 1{,}57079$ και ολόκληρος ο κύκλος είναι $2\pi \simeq 6{,}28318$.



Επειδή ο κύκλος έχει ακτίνα 1, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

ταυτότητα που ονομάζεται «βασική τριγωνομετρική ταυτότητα».

Είναι χρήσιμο να απομνημονεύσουμε την παραπάνω ταυτότητα μαζί με την

$$cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta).$$

Από αυτές προκύπτουν διάφορες ταυτότητες όπως

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta.$$

Και επειδή $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$ και $\cot\theta = \cos\theta/\sin\theta$ προκύπτουν οι

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}, \quad \cot(2\theta) = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}.$$

Οι ποσότητες $\sec\theta$ και $\csc\theta$ ονομάζονται τέμνουσα (secant) και συντέμνουσα (cosecant), και ισχύει

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}.$$

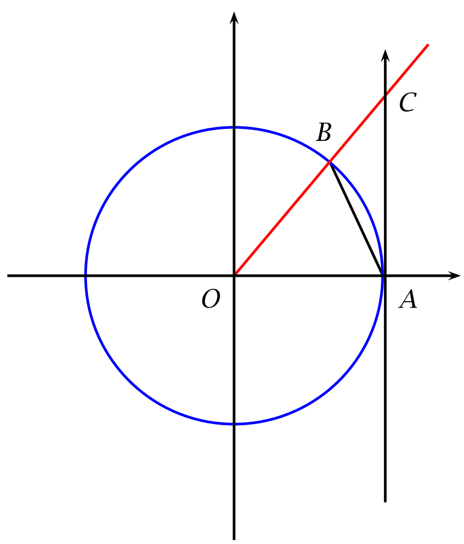
Επίσης ισχύουν οι σχέσεις

$$
\begin{aligned}
\sin(\theta \pm \varphi) &= \sin\theta\cos\varphi \pm \cos\theta\sin\varphi \\
\cos(\theta \pm \varphi) &= \cos\theta\cos\varphi \mp \sin\theta\sin\varphi \\
\tan(\theta \pm \varphi) &= \frac{\tan\theta \pm \tan\varphi}{1 \mp \tan\theta\tan\varphi} \\
\cot(\theta \pm \varphi) &= \frac{\cot\theta\cot\varphi \mp 1}{\cot\theta \pm \cot\varphi} \\
\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi) &= \sin^2\theta - \sin^2\varphi \\
\cos(\theta+\varphi)\cos(\theta-\varphi) &= \cos^2\theta - \sin^2\varphi.
\end{aligned}
$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4.1. *Για κάθε* $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ *και* $\theta \neq 0$ *ισχύει*

$$\cos\theta \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1.$$

Απόδειξη: Η ανισότητα προκύπτει εύκολα από τον τριγωνομετρικό κύκλο: αν ονομάσουμε O το κέντρο του κύκλου ακτίνας $OA = 1$, όπου A στον x-άξονα, C το σημείο που η γωνία θ τέμνει τον άξονα των εφαπτομένων, και B το σημείο που η OC τέμνει τον κύκλο (δείτε σχήμα),



τότε φανερά το εμβαδόν του τριγώνου $\widehat{OAB}$ είναι μικρότερο του εμβαδού του κυκλικού τομέα $O\widehat{AB}$, το οποίο με τη σειρά του είναι μικρότερο του εμβαδού του τριγώνου $O\widehat{AC}$. Δηλαδή

$$\frac{1}{2}|\sin\theta| < \frac{1}{2}|\theta| < \frac{1}{2}|\tan\theta|. \tag{1.1}$$

Αν $\theta \in (0, \pi/2]$ τότε όλες οι παραπάνω ποσότητες είναι θετικές, και άρα

$$\sin\theta \leq \theta \leq \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Συνεπώς

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1 \quad \text{και} \quad \cos\theta \leq \frac{\sin\theta}{\theta},$$

δηλαδή η ζητούμενη.

Αν τώρα $\theta \in [-\pi/2, 0)]$ η (1.1) γίνεται

$$-\sin\theta < -\theta < -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Άρα

$$\frac{-\sin\theta}{-\theta} \leq 1 \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1,$$

και

$$\cos\theta \leq \frac{-\sin\theta}{-\theta} = \frac{\sin\theta}{\theta}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.4.2. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *ισχύει* $|\sin x| \leq |x|$.

Απόδειξη: Αν $|x| \leq 1$ τότε η ανισότητα ισχύει από την Πρόταση 1.4.1, διότι $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, αφού $\pi/2 > 1$. Αν $|x| \geq 1$ η ζητούμενη ανισότητα ισχύει προφανώς, αφού πάντα $|\sin x| \leq 1$. □

Μέρος I

Ακολουθίες

Κεφάλαιο 2

Γενικά περί ακολουθιών

2.1 Ακολουθίες και υπακολουθίες

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.1. Κάθε συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$, όπου το A είναι άπειρο σύνολο, λέγεται *ακολουθία πραγματικών αριθμών* ή απλά *ακολουθία*.

Για τις ακολουθίες δεν χρησιμοποιούμε το γράμμα f, αλλά γράμματα όπως a, b, c, x, y, z, α, β, γ κλπ. Επίσης αντί να γράφουμε $a(n)$ για την τιμή της a στο $n \in \mathbb{N}$ γράφουμε a_n. Αν θέλουμε να αναφερθούμε σε μια ακολουθία, *δεν* γράφουμε «η ακολουθία $a : A \to \mathbb{R}$» αλλά «η ακολουθία $(a_n)_{n\in A}$». Αν $A = \mathbb{N}$ εκτός από «η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$» μπορεί να γράψουμε και $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Αν δεν υπάρχει λόγος να δηλώσουμε το πεδίο ορισμού γράφουμε «η ακολουθία (a_n)». Τέλος αν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης, για απλοποίηση του συμβολισμού, γράφουμε ακόμα και «η ακολουθία a_n» παραλείποντας και τις παρενθέσεις. Συχνά (αλλά όχι πάντα) το πεδίο ορισμού θα είναι όλο το σύνολο $\mathbb{N}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.2. Η συνάρτηση $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n = \frac{1}{n}$ είναι μια ακολουθία. Έχουμε $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, κλπ. Μια άλλη είναι η ακολουθία $b_n = n!$ όπου $b_1 = 1$, $b_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2$, $b_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $b_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, κλπ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.3. Οι αριθμοί a_n, δηλαδή οι τιμές της ακολουθίας $(a_n)_{n\in A}$ για κάθε $n \in A$ λέγονται *όροι* της ακολουθίας. Ο όρος a_n (δηλαδή η τιμή της ακολουθίας στο n) ονομάζεται *n-στός όρος* ή *γενικός όρος* της ακολουθίας $(a_n)_{n\in A}$. Το σύνολο $\{a_n : n \in A\}$ ονομάζεται *σύνολο των όρων της ακολουθίας*, ενώ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ κάθε σύνολο της μορφής $\{a_n : n \in A \text{ και } n \geq m\}$ ονομάζεται *τελικό τμήμα της ακολουθίας*.

Μια ακολουθία ορίζεται είτε με έναν τύπο για τον n-στό της όρο (όπως $a_n = 1/n$) είτε αναδρομικά (για παράδειγμα $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = a_n/2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) είτε με άλλο τρόπο με τον οποίο καθορίζονται με ακρίβεια όλοι οι όροι της και όχι με την παράθεση λίγων όρων. Με το τελευταίο εννοούμε ότι δεν έχει νόημα η φράση

$$\text{«θεωρούμε την ακολουθία } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\text{»}$$

διότι δεν είναι σαφές αν πρόκειται για την ακολουθία με τύπο $1/n$ ή για την ακολουθία με τύπο

$$\frac{1}{n} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

οι οποίες διαφέρουν από τον πέμπτο όρο και μετά ή κάποια άλλη που ξεκινάει με αυτούς τους όρους.

Αν περιορίσουμε μια ακολουθία σε ένα άπειρο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της τότε ο περιορισμός αυτός λέγεται *υπακολουθία* της αρχικής ακολουθίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.4. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία a_n είναι ορισμένη για κάθε $n \in A \subseteq \mathbb{N}$. Αν B άπειρο υποσύνολο του A τότε η ακολουθία $a_n|_{n\in B}$ ονομάζεται *υπακολουθία* της a_n.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.5. Θεωρήστε την ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$. Αν αντί για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ χρησιμοποιήσουμε μόνο τους άρτιους n θα πάρουμε μια υπακολουθία της αρχικής. Αυτή η υπακολουθία είναι η a_n με n άρτιο. Επειδή κάθε άρτιος είναι της μορφής $2n$ για $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να πούμε ότι αυτή η υπακολουθία είναι η $a_{2n} = \frac{1}{2n}$. Έτσι ενώ η a_n έχει όρους τους

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \ldots$$

η υπακολουθία a_{2n} έχει τους όρους

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.6. Θεωρούμε ένα (σταθερό) $m \in \mathbb{N}$ και μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ορίζουμε την ακολουθία $b_n = a_{m+n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η b_n είναι υπακολουθία της a_n, αφού φανερά

$$b_n = a_n \,\big|_{\{n\in\mathbb{N}\,:\,n>m\}}.$$

Παρατηρώντας ότι το σύνολο των όρων της b_n είναι το σύνολο

$$\{a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, \ldots\}$$

συμπεραίνουμε ότι κάθε τελικό τμήμα της a_n είναι υπακολουθία της!

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.7. Δυο ακολουθίες $(a_n)_{n\in A}$ και $(b_n)_{n\in B}$ λέγονται ίσες αν $A = B$ και $a_n = b_n$ για κάθε $n \in A$.

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 2.1.1. Περιγράψτε τις υπακολουθίες των «άρτιων όρων» των ακολουθιών

$$n!, \qquad (-1)^n.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.1.2. Δείξτε ότι η φράση

«θεωρούμε την ακολουθία $41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, \ldots$»

δεν αναφέρεται απαραίτητα σε μια υπακολουθία των πρώτων φυσικών αριθμών εξετάζοντας τους όρους της $a_n = n^2 - n + 41$ μέχρι τον τεσσαρακοστό πρώτο όρο.

Ομοίως ελέγξτε ότι η ακολουθία $b_n = n^2 - 79n + 1601$ παράγει πρώτους αριθμούς μέχρι τον ογδοηκοστό όρο, αλλά $b_{81} = 1763 = 41 \cdot 43$.

ΑΣΚΗΣΗ 2.1.3. Αν a_n είναι το πλήθος όλων των διαγωνίων ενός κυρτού n-γώνου, δείξτε επαγωγικά ότι $a_n = (n^2 - 3n)/2$.

2.2 Πράξεις ακολουθιών

Αν δυο ακολουθίες a_n και b_n ορίζονται για κάθε $n \in A \subseteq \mathbb{N}$ ορίζοναι και όλες οι πράξεις μεταξύ τους με τον αναμενόμενο τρόπο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.1. Η ακολουθία s_n όπου $s_n = a_n + b_n$ για κάθε $n \in A$ ονομάζεται *άθροισμα* των ακολουθιών a_n και b_n. Η ακολουθία $d_n = a_n - b_n$ ονομάζεται *διαφορά* των ακολουθιών a_n και b_n. Η ακολουθία $p_n = a_n b_n$ για κάθε $n \in A$ ονομάζεται *γινόμενο* των ακολουθιών a_n και b_n.

Αν $a_n = 1/n^3$ και $b_n = n^2$ τότε

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= \frac{1}{n^3} + n^2 = \frac{1+n^5}{n^3} \\ a_n - b_n &= \frac{1}{n^3} - n^2 = \frac{1-n^5}{n^3} \\ a_n b_n &= \frac{1}{n^3} \cdot n^2 = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ειδικά για το πηλίκο δύο ακολουθιών θα πρέπει να προσέξουμε ώστε η ακολουθία στον διαιρέτη να μην έχει μηδενικούς όρους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.2. Αν οι a_n και b_n είναι ακολουθίες με $n \in A \subseteq \mathbb{N}$ και επιπλέον $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in A$, τότε η ακολουθία $q_n = a_n/b_n$ ονομάζεται πηλίκο των ακολουθιών a_n και b_n.

Αν $a_n = 1/n^3$ και $b_n = n^2$ όπως παραπάνω, τότε ισχύει $b_n = n^2 \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε ορίζεται το πηλίκο: $a_n/b_n = 1/n^5$.

Τέλος ορίζεται και η σύνθεση ακολουθιών ως εξής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.3. Αν η k_n είναι μια ακολουθία $k_n : A \to B$ όπου A, $B \subseteq \mathbb{N}$ και x_n μια ακολουθία με πεδίο ορισμού το B, τότε ορίζεται η ακολουθία $c_n = x_{k_n}$ η οποία ονομάζεται *σύνθεση* των ακολουθιών k_n και x_n.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.2.4. Αν για την ακολουθία k_n του προηγούμενου ορισμού ισχύει

$$k_1 < k_2 < k_3 < \dots,$$

δηλαδή $k_n < k_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σύνθεση με την x_n είναι μια υπακολουθία της x_n. Πράγματι, αυτό είναι φανερό, αφού

$$x_{k_n} = x_n \,\big|_{\{k_n : n \in \mathbb{N}\}} .$$

Αυτό ισχύει και αντίστροφα: έστω ότι η $y_n = x_n|_B$ μια υπακολουθία της x_n. Το σύνολο B γράφεται στη μορφή $B = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ με $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$, αφού το B έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το k_1, και στη συνέχεια το $B \setminus \{k_1\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το k_2, και ούτω καθ' εξής (εδώ χρησιμοποιήσαμε την καλή διάταξη του $\mathbb{N}$).

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τις ακολουθίες $k_n = n^2 \in \mathbb{N}$ και $x_n = 1/n$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N}$. Η σύνθεσή τους είναι η ακολουθία $c_n = x_{k_n} = x_{n^2}$. Δηλαδή πρόκειται για υπακολουθία της x_n: η x_n έχει όρους

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \dots$$

ενώ η $c_n = x_{n^2}$ έχει όρους

$$\frac{1}{1^2} = \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \dots$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.2.5. Αν θεωρήσουμε μια $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η οποία δεν ικανοποιεί την $k_1 < k_2 < \dots$ τότε δεν είναι απαραίτητο η x_{k_n} να είναι υπακολουθία της x_n. Για παράδειγμα, θεωρούμε την $k_1 = 2$, $k_2 = 1 < k_1$, $k_n = n$ για κάθε $n \geq 3$ και την ακολουθία $x_n = 1/n$. Το πεδίο τιμών της $c_n = x_{k_n}$ είναι το ίδιο με αυτό της x_n. Έτσι αν ισχύει $c_n = x_n|_B$ για κάποιο $B \subseteq \mathbb{N}$, ο μόνος τρόπος να ανήκει το $1/2$ στο πεδίο τιμών της c_n είναι να ισχύει $2 \in B$ (αφού η x_n ισούται με $1/2$ μόνο για $n = 2$). Αλλά τότε θα έπρεπε να ισχύει $c_2 = x_2$ το οποίο είναι ψευδές, αφού

$$c_2 = x_{k_2} = x_1 = 1 \neq \frac{1}{2} = x_2.$$

2.3 Εφαρμογές και παραδείγματα

Πολλές φορές, παρόλο που η παράθεση πεπερασμένου πλήθους όρων δεν μπορεί να ορίσει μια ακολουθία, όπως είδαμε στην Ενότητα 2.1, ορίζουμε ακολουθίες ως αθροίσματα, για παράδειγμα της μορφής $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, στο οποίο εμφανίζονται πεπερασμένο πλήθος όρων. Τέτοιες εκφράσεις όμως είναι σαφείς από τον γενικό προσθετέο που φαίνεται στον τελευταίο όρο της έκφρασης. Δηλαδή ο υπολογισμός της x_n απαιτεί να προσθέσουμε όλα τα κλάσματα $1/k$ για $k \in \mathbb{N}$ και $k \leq n$. Έτσι για να καταλάβουμε μέχρι ποιο κλάσμα προσθέτουμε κάθε φορά *κοιτάμε τον τελευταίο όρο του αθροίσματος.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.1. Γράψτε τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Για να βρούμε τον πρώτο όρο κοιτάμε με τι ισούται το $1/n$ όταν $n = 1$. Επειδή αυτό ισούται με $1/1 = 1$ συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα θα σταματήσει στο 1, δηλαδή $x_1 = 1$. Για να βρούμε τον x_2 παρατηρούμε ότι το $1/n$ ισούται με $1/2$ όταν $n = 2$ άρα το άθροισμα θα σταματήσει στο $1/2$, δηλαδή $x_2 = 1 + 1/2$. Ομοίως $x_3 = 1 + 1/2 + 1/3$.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου μας δίνεται μια ακολουθία η οποία ορίζεται αναδρομικά, για παράδειγμα $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = 2 + a_n/3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και πρέπει να βρούμε τον n-στο όρο της, a_n ως συνάρτηση του n. Στις απλούστερες αυτών των προβλημάτων η εξίσωση που προκύπτει όταν αντικαταστήσουμε τόσο την a_n όσο και την a_{n+1} με x, η οποία ονομάζεται «εξίσωση αναδρομής», έχει λύση. Τότε ακολουθούμε το τέχνασμα που παρουσιάζεται στα παρακάτω παραδείγματα. Μια γενικότερη θεωρία των γραμμικών αναδρομικών ακολουθιών παρουσιάζεται στο βιβλίο [5].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.2. Βρείτε τον γενικό όρο της ακολουθίας που ορίζεται αναδρομικά θέτοντας $a_1 = 4$ και $a_{n+1} = 2 + a_n/3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Σχηματίζουμε την εξίσωση αναδρομής $x = 2 + x/3$ η οποία έχει μοναδική λύση την $x = 3$. Στη συνέχεια αφαιρούμε τον αριθμό 3 και από τα δύο μέλη του αναδρομικού τύπου:

$$a_{n+1} - 3 = \left(2 + \frac{a_n}{3}\right) - 3 = \frac{1}{3}(a_n - 3).$$

Έτσι,

$$a_n - 3 = \frac{1}{3}(a_{n-1} - 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (a_{n-2} - 3) = \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (a_1 - 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

(Ο σωστός εκθέτης στην προτελευταία ισότητα είναι πράγματι $n - 1$: το βρίσκουμε παρατηρώντας ότι ο εκθέτης του κλάσματος

$1/3$ σε κάθε ισότητα αθροίζεται στο n όταν του προστεθεί ο δείκτης του όρου της ακολουθίας που είναι στην παρένθεση (για παράδειγμα $2 + (n-2) = n$).)

Άρα ο γενικός όρος της a_n είναι $a_n = 3 + (1/3)^{n-1}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.3. Βρείτε τον γενικό όρο της a_n με $a_1 = 5$ και $a_{n+1} = 5 - \frac{6}{a_n}$.

Η εξίσωση αναδρομής $x = 5 - 6/x$ έχει δύο λύσεις, τις 2 και 3. Αφαιρούμε από την αναδρομική εξίσωση της ακολουθίας τόσο τον 2 όσο και τον 3. Αφαιρώντας τον 2 μετά από πράξεις παίρνουμε

$$a_{n+1} - 2 = \frac{3}{a_n}(a_n - 2),$$

και αφαιρώντας το 3,

$$a_{n+1} - 3 = \frac{2}{a_n}(a_n - 3).$$

Τώρα θέλουμε να διαιρέσουμε κατά μέλη, αλλά για να το κάνουμε αυτό πρέπει να γνωρίζουμε ότι κανένας όρος της a_n δεν ισούται με 3. Αυτό όμως προκύπτει άμεσα από την τελευταία. Αν $a_{n+1} = 3$ για κάποιο n τότε $a_n = 3$. Δηλαδή αν κάποιος όρος της ακολουθίας ισούται με 3 τότε ισούται με 3 και ο προηγούμενος. Επαγωγικά θα καταλήξουμε σε άτοπο, αφού $a_1 = 5 \neq 3$.

Διαιρώντας λοιπόν κατά μέλη οδηγούμαστε στην

$$\frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} - 3} = \frac{3}{2}\frac{a_n - 2}{a_n - 3}.$$

Άρα,

$$\frac{a_n - 2}{a_n - 3} = \frac{3}{2}\frac{a_{n-1} - 2}{a_{n-1} - 3} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{a_{n-2} - 2}{a_{n-2} - 3} = \cdots = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \frac{a_1 - 2}{a_1 - 3} = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Λύνοντας ως προς a_n (αφαιρούμε αριθμητές από παρονομαστές!) παίρνουμε αμέσως

$$a_n = 2 + \frac{3^n}{3^n - 2^n}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3.4. Βρείτε τον γενικό όρο της a_n με $a_1 = 5$ και $a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$.

Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση αναδρομής $x = (4x-9)/(x-2)$ είναι ισοδύναμη με την $(x-3)^2 = 0$ δηλαδή έχει *διπλή ρίζα* το 3. Σε αυτές τις περιπτώσεις κάνουμε το εξής τέχνασμα: πρώτα αφαιρούμε τη διπλή ρίζα για να καταλήξουμε στη σχέση

$$a_{n+1} - 3 = \frac{a_n - 3}{a_n - 2}.$$

Τώρα αντιστρέφουμε τους όρους:

$$\frac{1}{a_{n+1}-3} = \frac{a_n - 2}{a_n - 3} = \frac{a_n - 3 + 1}{a_n - 3} = 1 + \frac{1}{a_n - 3}.$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{a_n - 3} = 1 + \frac{1}{a_{n-1} - 3} = 2 + \frac{1}{a_{n-2} - 3} = n - 1 + \frac{1}{a_1 - 3} = n - \frac{1}{2}.$$

Αντιστρέφοντας τους όρους της εξίσωσης και λύνοντας ως προς a_n παίρνουμε

$$a_n = 3 + \frac{2}{2n-1}.$$

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 2.3.1. Γράψτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2},$$

και της

$$b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.3.2. Βρείτε τον τύπο της υπακολουθίας των περιττών όρων των ακολουθιών:

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \qquad b_n = \cos(n\pi), \qquad c_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.3.3. Θεωρήστε την ακολουθία $a_n = \log n$. Βρείτε τους τύπους των υπακολουθιών

$$a_{n^2}, \qquad a_{n^m}, \qquad a_{2^n}, \qquad a_{n!}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.3.4. Βρείτε τους γενικούς τύπους των ακολουθιών a_n, b_n και c_n που ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

(i) $a_{n+1} = 3 + \frac{1}{2}a_n, \quad a_1 = 2,$

(ii) $b_{n+1} = 3 - \frac{2}{b_n}, \quad b_1 = 3,$

(iii) $c_{n+1} = \frac{3c_n - 1}{4c_n + 7}, \quad c_1 = \frac{3}{4}.$

ΑΣΚΗΣΗ 2.3.5. Δίνονται δυο δοχεία όγκου $2a$ λίτρων το καθένα, το δοχείο A και το δοχείο B. Το A περιέχει a λίτρα καθαρής αιθανόλης (οινόπνευμα) και το B περιέχει a λίτρα νερού. Λέμε ότι εκτελέσαμε μία πράξη όταν (μετά από ανακάτεμα του A) αδειάσουμε το μισό περιεχόμενο του A στο B και στη συνέχεια (μετά από ανακάτεμα του B) αδειάσουμε το μισό περιεχόμενο του B πίσω στο A. Να υπολογιστεί η ποσότητα αιθανόλης στο δοχείο B μετά από άπειρο πλήθος πράξεων καθώς και ο συνολικός όγκος του περιεχομένου του B. (Υπόδειξη: η απάντηση *δεν* είναι ότι το B θα περιέχει τη μισή ποσότητα αιθανόλης.)

Αποδείξτε όμως ότι η περιεκτικότητα του B σε αιθανόλη μετά από άπειρο πλήθος πράξεων θα είναι 50%.

Κεφάλαιο 3

Μονότονες ακολουθίες

3.1 Ορισμοί και ιδιότητες

Ας θεωρήσουμε την ακολουθία με γενικό όρο $a_n = (n-1)/n$. Παρατηρούμε ότι

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = a_n.$$

Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n < a_{n+1}$. Για μια ακολουθία a_n με αυτή την ιδιότητα λέμε ότι η a_n είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.1.

- Μια ακολουθία a_n λέγεται *γνησίως αύξουσα*, και γράφουμε $a_n\nearrow$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n < a_{n+1}$.
- Μια ακολουθία a_n λέγεται *αύξουσα*, και γράφουμε $a_n\nearrow$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n \leq a_{n+1}$.
- Μια ακολουθία a_n λέγεται *γνησίως φθίνουσα*, και γράφουμε $a_n\searrow$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n > a_{n+1}$.
- Μια ακολουθία a_n λέγεται *φθίνουσα*, και γράφουμε $a_n\searrow$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n \geq a_{n+1}$.
- Μια ακολουθία a_n λέγεται *γνησίως μονότονη* αν είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα.
- Μια ακολουθία a_n λέγεται *μονότονη* αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα.

Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι μια γνήσια μονότονη ακολουθία είναι και μονότονη· μια γνήσια αύξουσα είναι και αύξουσα, αφού αν $a_n < a_{n+1}$ τότε $a_n \leq a_{n+1}$ και ομοίως για τις γνήσια φθίνουσες. Το αντίστροφο δεν είναι βεβαίως σωστό, αφού για παράδειγμα μια σταθερή ακολουθία $a_n = 3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι και αύξουσα και φθίνουσα αλλά δεν είναι ούτε γνήσια αύξουσα ούτε γνήσια φθίνουσα.

Συχνά για να εξετάσουμε τη μονοτονία μιας ακολουθίας a_n εξετάζουμε αν οι διαφορές $a_{n+1} - a_n$ έχουν το ίδιο πρόσημο για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{n+1} - a_n \geq 0$ τότε η a_n είναι αύξουσα, και ομοίως για τις άλλες περιπτώσεις. Αν μας ενδιαφέρει απλά ο έλεγχος της μονοτονίας (και όχι απαραίτητα το είδος της) μπορούμε να εξετάσουμε αν το γινόμενο $(a_{n+2} - a_{n+1})(a_{n+1} - a_n)$ έχει σταθερό πρόσημο για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν αυτό συμβαίνει, φανερά η ακολουθία είναι μονότονη, αφού σε αυτή την περίπτωση κανένας παράγοντας $(a_{n+2} - a_{n+1})$ δεν μπορεί να αλλάζει πρόσημο σε σχέση με τον $(a_{n+1} - a_n)$.

Επιπλέον για θετικές ακολουθίες a_n μπορούμε να εξετάζουμε αν ο λόγος a_{n+1}/a_n είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 1 ή μικρότερος ή ίσος του 1. Φανερά αν $a_{n+1}/a_n \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η ακολουθία είναι αύξουσα, ενώ αν $a_{n+1}/a_n \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η ακολουθία είναι φθίνουσα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.2. *Αν η ακολουθία a_n είναι μονότονη τότε κάθε υπακολουθία της έχει την ίδια μονοτονία με την a_n.*

Απόδειξη: Έστω ότι η $c_n = a_{k_n}$ είναι υπακολουθία της a_n με $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $k_1 < k_2 < \ldots$, δηλαδή η k_n είναι γνήσια αύξουσα. Υποθέτουμε ότι η a_n είναι άυξουσα. Φανερά ισχύει

$$c_n = a_{k_n} \leq a_{k_n+1} \leq a_{k_n+2} \leq \ldots \leq a_{k_{n+1}} = c_{n+1},$$

οπότε και η c_n είναι αύξουσα. Ομοίως αν η a_n έχει οποιοδήποτε άλλο είδος μονοτονίας. □

Δεν είναι βεβαίως αλήθεια ότι κάθε ακολουθία είναι μονότονη. Για παράδειγμα, η ακολουθία $a_n = (-1)^n/n$ δεν είναι αύξουσα, αφού $a_3 = -1/3 < 1/2 = a_2$ αλλά ούτε και φθίνουσα, αφού $a_1 = -1 < 1/2 = a_2$. Παρατηρούμε όμως ότι η υπακολουθία των αρτίων όρων της $a_{2n} = 1/(2n)$ είναι φθίνουσα (και των περιττών της όρων είναι αύξουσα). Βλέπουμε δηλαδή ότι παρόλο που η ίδια η a_n δεν έχει κανένα είδος μονοτονίας, εν τούτοις έχει τουλάχιστον μια μονότονη υπακολουθία. Αυτό είναι ένα γενικό φαινόμενο και διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1.3. *Κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει μια μονότονη υπακολουθία.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο των *σημείων κορυφής* της ακολουθίας a_n:

$$A = \{k \in \mathbb{N} : a_k \geq a_n \text{ για κάθε } n \geq k\}.$$

Αν το A είναι άπειρο σύνολο, έστω ότι περιέχει τα στοιχεία

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots.$$

Αφού το k_n είναι σημείο κορυφής (δηλαδή στοιχείο του A) και $k_{n+1} > k_n$ συμπεραίνουμε ότι $a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς η a_{k_n} είναι φθίνουσα.

Αν σε αντίθετη περίπτωση το σύνολο A είναι πεπερασμένο. Έστω ότι m είναι το μεγαλύτερο στοιχείο του. Τότε το $k_1 := m+1$ δεν ανήκει το A οπότε υπάρχει $k_2 > k_1$ ώστε $a_{k_1} < a_{k_2}$. Αλλά τώρα $k_2 > k_1 = m+1$ οπότε $k_2 \notin A$. Έτσι υπάρχει $k_3 > k_2$ ώστε $a_{k_2} < a_{k_3}$. Επαγωγικά, αν έχουμε ορίσει τον a_{k_n} για $k_n > k_{n-1} \ldots > k_1 = m+1$ ισχύει $k_n \notin A$, οπότε υπάρχει $k_{n+1} > k_n$ ώστε $a_{k_n} < a_{k_{n+1}}$. Επαγωγικά λοιπόν, ορίζεται η υπακολουθία a_{k_n} η οποία από την κατασκευή της είναι γνησίως αύξουσα.

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση η a_n έχει μια μονότονη υπακολουθία. □

3.2 Εφαρμογές και παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.1. Ελέγξτε ως προς τη μονοτονία την ακολουθία $a_n = (n^2-1)/(2n)$.

Ελέγχουμε με απλές πράξεις ότι

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n^2+n+1}{2n(n+1)} > 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς η a_n είναι γνησίως αύξουσα.

Άλλος τρόπος:

$$a_n = \frac{n^2-1}{2n} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} = a_{n+1}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.2. Ελέγξτε ως προς τη μονοτονία την ακολουθία a_n με $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$.

Ο έλεγχος γίνεται εύκολα με επαγωγή: για $n = 1$ ισχύει

$$a_2 = \sqrt{1+a_1} = \sqrt{2} > 1 = a_1.$$

Υποθέτοντας ότι $a_{n+1} > a_n$, έχουμε

$$a_{n+2} = \sqrt{1+a_{n+1}} > \sqrt{1+a_n} = a_{n+1}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.3. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $a_n = (1+1/n)^n$ είναι γνησίως αύξουσα χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli στην ακολουθία $(1-1/n^2)^n$.

Σύμφωνα με την υπόδειξη

$$1-\frac{1}{n}<\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

άρα για κάθε $n \geq 2$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}}=\frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1},$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 3.2.1. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι ακολουθίες

$$a_n=3n+2 \qquad a_n=\frac{n+4}{n^2+1}$$

$$a_n=\frac{n}{2^n} \qquad a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}$$

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \qquad a_n=\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)(n+2)$$

$$a_n=2^{n+2}\sin\frac{\theta}{2^n},\ \text{με } 0<\theta<\pi/2 \qquad a_n=\frac{(2n)!\sqrt{n}}{(n!)^2 2^{2n+1}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.2.2. Αποδείξτε ότι αν $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, τότε ισχύει $k_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Κεφάλαιο 4

Φραγμένες ακολουθίες

4.1 Ορισμοί και ιδιότητες

Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = (n-1)/n$. Παρατηρούμε ότι $a_n = 1 - 1/n$. Έτσι κανένας όρος της ακολουθίας δεν είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό 1. Δηλαδή $a_n = 1 - 1/n \leq 1$. Για αυτή την ακολουθία λέμε ότι είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό 1 ή ότι το 1 είναι ένα άνω φράγμα της ακολουθίας. Παρατηρήστε ότι, αφού $a_n \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ άρα $a_n \leq 2$ και $a_n \leq \sqrt{3}$ και γενικώς $a_n \leq M$ για κάθε $M \geq 1$. Έτσι το άνω φράγμα μιας ακολουθίας δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο αλλά αν μια ακολουθία έχει ένα άνω φράγμα τότε κάθε μεγαλύτερος από αυτό αριθμός είναι και αυτός άνω φράγμα της ακολουθίας. Για αυτό λέμε «ένα άνω φράγμα» και όχι «το άνω φράγμα» της a_n. Γενικότερα δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1.

- Μια ακολουθία a_n λέγεται *άνω φραγμένη* αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το M λέγεται (ένα) άνω φράγμα της a_n.
- Μια ακολουθία a_n λέγεται *κάτω φραγμένη* αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \geq m$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το m λέγεται (ένα) κάτω φράγμα της a_n.
- Μια ακολουθία a_n λέγεται *φραγμένη* αν είναι και άνω και κάτω φραγμένη· δηλαδή, αν υπάρχουν M, $m \in \mathbb{R}$ ώστε $m \leq a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- Μια ακολουθία a_n λέγεται *απολύτως φραγμένη* αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Φανερά από τον ορισμό, αν η a_n είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό M τότε και κάθε υπακολουθία της a_n είναι άνω φραγμένη από τον ίδιο αριθμό M. Ομοίως, αν η a_n είναι κάτω φραγμένη από τον αριθμό m τότε και κάθε υπακολουθία της a_n είναι κάτω φραγμένη από τον ίδιο αριθμό m.

Αν ο αριθμός b *δεν είναι* άνω φράγμα της ακολουθίας a_n, αυτό σημαίνει ότι *δεν είναι* όλοι οι όροι της ακολουθίας μικρότεροι του b. Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος a_{n_0}, για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $b < a_{n_0}$.

Ομοίως, αν ο αριθμός c *δεν είναι* κάτω φράγμα της ακολουθίας a_n, αυτό σημαίνει ότι *δεν είναι* όλοι οι όροι της ακολουθίας μεγαλύτεροι του c. Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος a_{n_0}, για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $a_{n_0} < c$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.1.2. Μια ακολουθία a_n που είναι φθίνουσα είναι άνω φραγμένη, αφού φανερά $a_n \leq a_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ομοίως μια αύξουσα ακολουθία a_n είναι κάτω φραγμένη, αφού $a_n \geq a_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1.3. *Μια ακολουθία a_n είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι απολύτως φραγμένη.*

Απόδειξη: Αν η a_n είναι απολύτως φραγμένη, τότε υπάρχει ένας αριθμός $M \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $-M \leq a_n \leq M$ και άρα η a_n είναι φραγμένη.

Αν η a_n είναι φραγμένη, τότε υπάρχουν αριθμοί $m, M \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $m \leq a_n \leq M$. Θέτουμε $K = \max\{|m|, |M|\}$. Τότε ισχύουν τα εξής:

$$a_n \leq M \leq |M| \leq \max\{|m|, |M|\} = K,$$

και

$$a_n \geq m \geq -|m| \geq -\max\{|m|, |M|\} = -K.$$

Συνεπώς $-K \leq a_n \leq K$, δηλαδή $|a_n| \leq K$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Όπως είπαμε και νωρίτερα τα φράγματα δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα. Αλλά δύο συγκεκριμένα φράγματα είναι ιδιαίτερα σημαντικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.4. Το *ελάχιστο άνω φράγμα* μιας άνω φραγμένης ακολουθίας $(a_n)_{n\in A}$ συμβολίζεται με $\sup a_n$ ή $\sup_n a_n$ ή $\sup_{n\in A} a_n$ και εκτός από ελάχιστο άνω φράγμα, ονομάζεται *άνω πέρας* ή *supremum* της a_n.

Το *μέγιστο κάτω φράγμα* μιας κάτω φραγμένης ακολουθίας $(a_n)_{n\in A}$, συμβολίζεται με $\inf a_n$ ή $\inf_n a_n$ ή $\inf_{n\in A} a_n$ και εκτός από μέγιστο κάτω φράγμα, ονομάζεται *κάτω πέρας* ή *infimum* της a_n.

Πολύ σημαντική είναι η παρακάτω ιδιότητα που μας επιτρέπει να χειριζόμαστε αυτά τα ιδιαίτερα φράγματα, και χρησιμοποιείται συστηματικά όποτε και όπου αυτά εμφανίζονται.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.1.5.

- Αν το s είναι το άνω πέρας μιας ακολουθίας a_n, δηλαδή το ελάχιστο άνω φράγμα της a_n, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ το $s - \varepsilon$, ως μικρότερο του ελαχίστου άνω φράγματος s, δεν είναι άνω φράγμα της ακολουθίας! Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $s - \varepsilon < a_{n_0}$.
- Αν το i είναι το κάτω πέρας μιας ακολουθίας a_n, δηλαδή το μέγιστο κάτω φράγμα της a_n, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ το $i + \varepsilon$, ως μεγαλύτερο του μεγίστου κάτω φράγματος i, δεν είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας! Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{n_0} < i + \varepsilon$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.1.6. Αν μια ακολουθία a_n δεν είναι άνω φραγμένη, τότε θεωρούμε ότι το άνω πέρας της είναι το $+\infty$. Γράφουμε $\sup a_n = +\infty$. Ομοίως, αν δεν είναι κάτω φραγμένη θεωρούμε ότι το κάτω πέρας της είναι το $-\infty$, και γράφουμε $\inf a_n = -\infty$. Σε αυτές τις περιπτώσεις, φανερά δεν ισχύει η Παρατήρηση 4.1.5, αφού πάντα $-\infty < a_n < +\infty$.

4.2 Εφαρμογές και παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.1. Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες $a_n = (3n^2 - 1)/(2n^2 + 1)$, $b_n = (3n^2 + 1)/(2n^2 - 1)$, $c_n = (3n^2 + 1)/(n^2 - 3)$ για $n \geq 2$, και $d_n = (3n^2 + 1)/(n^2 - n - 1)$ για $n \geq 2$, είναι φραγμένες.

Φανερά και οι τέσσερις ακολουθίες είναι θετικές οπότε μένει να αποδειχθεί ότι είναι άνω φραγμένες. Για αυτό προσπαθούμε να μεγαλώσουμε τις ακολουθίες απλοποιώντας τες αλλά χωρίς να αλλάξουμε την τάξη μεγέθους αριθμητή και παρονομαστή. Έτσι έχουμε:

$$a_n = \frac{3n^2 - 1}{2n^2 + 1} \leq \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2},$$

συνεπώς η a_n είναι άνω φραγμένη από το $3/2$.

Για τη b_n δεν μπορούμε να κάνουμε ακριβώς το ίδιο τέχνασμα για το άνω φράγμα, διότι το να διαγράψουμε το $+1$ από τον αριθμητή ή το -1 από τον παρονομαστή δεν μεγαλώνει, αλλά μικραίνει το κλάσμα. Μπορούμε όμως να μεγαλώσουμε το $+1$ του αριθμητή σε $+n^2$ και να μικρύνουμε το -1 του παρονομαστή με $-n^2$, αλλαγές που δεν αλλάζουν την τάξη μεγέθους των όρων του κλάσματος:

$$b_n = \frac{3n^2 + 1}{2n^2 - 1} \leq \frac{3n^2 + n^2}{2n^2 - n^2} = 4.$$

Για τη c_n δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε το -3 του παρονομαστή με $-n^2$ όπως κάναμε στην b_n διότι θα μηδενιστεί ο παρονομαστής. Μπορούμε όμως να ελέγξουμε ότι $3 < n^2/3$ για κάθε $n \geq 3$. Έτσι για $n \geq 3$

$$c_n = \frac{3n^2+1}{n^2-3} \leq \frac{3n^2+n^2}{n^2-\frac{1}{3}n^2} = \frac{4n^2}{\frac{2}{3}n^2} = 6.$$

Η ακολουθία όμως ορίζεται για $n \geq 2$. Άρα για να βρούμε ένα άνω φράγμα πρέπει να ελέγξουμε μήπως το c_2 είναι μεγαλύτερος του 6. Πράγματι $c_2 = 13$. Άρα

$$c_n \leq \max\{6, 13\} = 13.$$

Τέλος για την d_n αναζητούμε n_0 ώστε $n+1 \leq n^2/2$ για κάθε $n \geq n_0$ ώστε να απλοποιήσουμε τον παρονομαστή χρησιμοποιώντας ότι $n^2 - n - 1 = n^2 - (n+1) \geq n^2 - n^2/2 = n^2/2$. Η $n+1 \leq n^2/2$ είναι ισοδύναμη με την $n^2 - 2n - 2 \geq 0$ η οποία είναι αληθής για κάθε $n \geq 3$ (η εξίσωση $x^2 - 2x - 2 = 0$ είναι θετική για κάθε $x > 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}7320508$). Οπότε για κάθε $n \geq 3$,

$$d_n = \frac{3n^2+1}{n^2-n-1} \leq \frac{3n^2+n^2}{n^2-\frac{1}{2}n^2} = 8.$$

Επειδή τώρα $d_2 = 13$ συμπεραίνουμε ότι $d_n \leq \max\{13, 8\} = 13$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.2. Αποδείξτε ότι η ακολουθία a_n με $a_1 = 8$ και $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ είναι άνω φραγμένη από το 8. Δείξτε ότι αν ο a_1 δοθεί να είναι μικότερος από τη μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης αναδρομής $x = \sqrt{2+x}$ τότε το ίδιο ισχύει και για τον γενικό όρο της a_n. Τέλος αποδείξτε ότι αν $r > 0$ τότε κάθε ακολουθία με $a_1 > 0$ και αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = \sqrt{r + a_n}$ είναι άνω φραγμένη από το $\max\{a_1, \rho\}$ όπου ρ η μέγιστη ρίζα της εξίσωσης αναδρομής $x = \sqrt{r + x}$.

Πράγματι, για $n = 1$ ισχύει $a_1 = 8 \leq 8$. Υποθέτουμε ότι $a_n \leq 8$. Τότε

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2+8} \leq \sqrt{16} = 4 \leq 8,$$

ολοκληρώνοντας την επαγωγή.

Η εξίσωση αναδρομής έχει μεγαλύτερη ρίζα τον αριθμό $x = 2$. Αν $a_1 \leq 2$ και υποθέσουμε ότι $a_n \leq 2$ τότε

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2,$$

ολοκληρώνοντας την επαγωγή.

Τέλος, αν θέσουμε $M = \max\{a_1, \rho\}$ φανερά $a_1 \leq M$. Και αν υποθέσουμε ότι $a_n \leq M$ τότε

$$a_{n+1} = \sqrt{r + a_n} \leq \sqrt{r + M} \leq M,$$

αφού η τελευταία είναι ισοδύναμη με την $M^2 - M - r \geq 0$ η οποία είναι αληθής αφού το M είναι μεγαλύτερο ή ίσο με τη μέγιστη ρίζα ρ της $x^2 - x - r = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.3. Αποδείξτε (με κατάλληλη χρήση της ανισότητας Bernoulli ότι η ακολουθία $(1 + 1/2n)^n$ είναι άνω φραγμένη από το 2 και στη συνέχεια αποδείξτε ότι η $(1+1/n)^n$ είναι άνω φραγμένη από το 4.

Έχουμε

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{n}{2n+1}\right)} = \frac{2n+1}{n+1} \leq 2.$$

Από το Παράδειγμα 3.2.3 η ακολουθία $(1 + 1/n)^n$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n\right)^2 \leq 2^2 = 4.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.4. Αποδείξτε ότι αν a_n αύξουσα ακολουθία και $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ η ακολουθία a_n βρίσκεται τελικά στο διάστημα $(s - \varepsilon, s]$.

Χρησιμοποιούμε την Παρατήρηση 4.1.5: το $s - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα της ακολουθίας a_n άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq s$. Αφού η a_n είναι αύξουσα, για κάθε $n \geq n_0$ συμπεραίνουμε ότι $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$, δηλαδή το ζητούμενο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2.5. Αποδείξτε ότι η $a_n = (n^2 + \sin(n\pi/2))/(n+1)$ δεν είναι άνω φραγμένη.

Έχουμε

$$\frac{n^2 + \sin(n\pi/2)}{n+1} \geq \frac{n^2 - 1}{n+1} = n - 1,$$

η οποία φανερά δεν είναι άνω φραγμένη.

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 4.2.1. Να εξετάσετε αν είναι φραγμένες οι παρακάτω ακολουθίες:

$$a_n = \frac{5\sin(3n)}{4n} \qquad a_n = \frac{n+1000}{n+100}$$

$$a_n = (-5)^{-n} \qquad a_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

$$a_n = \frac{n}{3^n} \qquad a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$$

$$a_n = \frac{n+5}{2^n} \qquad a_n = \frac{n^2+2n+4}{n^3+2}$$

$$a_n = \frac{n^2\cos(n\pi)+n\sin(n+1)}{n^2+n+1}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \qquad a_n = \sqrt{n^2+n} - n$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.2.2. Να εξεταστούν ως προς το φράγμα οι ακολουθίες

$$a_n = \sqrt{n+a} - \sqrt{n+b} \text{ με } a,\ b \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n+2}, \quad \text{για } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.2.3. Να εξεταστεί ως προς το φράγμα η ακολουθία a_n με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = \frac{5a_n+6}{2a_n+1}.$$

(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.)

ΑΣΚΗΣΗ 4.2.4. Για κάθε $p > 0$ θέτουμε

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 1$ η ακολουθία s_n είναι φραγμένη, αποδεικνύοντας (με επαγωγή) ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leq \frac{p}{p-1} - \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Επιπλέον για κάθε $p > 0$ ισχύει

$$n^{1-p} \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}.$$

Ειδικά για $p = 1$, αποδείξτε με επαγωγή ότι ισχύει

$$\frac{1}{2}\log n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n.$$

Συμπεράνετε ότι για $0 < p \leq 1$ η s_N δεν είναι φραγμένη. (Υπόδειξη: η περίπτωση $0 < p < 1$ είναι εύκολη αν όλα τα κλάσματα του αθροίσματος αντικατασταθούν από το μικρότερο από αυτά. Αν όμως γίνει επαγωγικά, θα χρειαστεί η παρατήρηση ότι $(n+1)^p n^{1-p} \geq n^p n^{1-p} = n$.)

ΑΣΚΗΣΗ 4.2.5. Θεωρήστε μια αύξουσα ακολουθία a_n για την οποία υπάρχει $c > 0$ ώστε $a_{2n} - a_n \leq cn$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία a_n/n είναι άνω φραγμένη. (Υπόδειξη: για κάθε ακέραιο k βρείτε πρώτα n ώστε $2^{n-1} < k \leq 2^n$. Επειδή η a_n είναι αύξουσα ισχύει $a_k \leq a_{2^n}$. Τώρα εφαρμόστε την υπόθεση.)

Κεφάλαιο 5

Σύγκλιση ακολουθιών

5.1 Μηδενικές ακολουθίες

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ κάθε διάστημα της μορφής (a, b) ώστε $x \in (a, b)$ ονομάζεται μια *ανοικτή περιοχή του* x ή απλά *περιοχή* του x. Στα ακόλουθα θα χρησιμοποιήσουμε περιοχές ειδικού τύπου. Συγκεκριμένα παίρνουμε ένα θετικό αριθμό $\varepsilon > 0$ και σχηματίζουμε την περιοχή $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ του x. Το x για αυτή την περιοχή ονομάζεται *κέντρο* της περιοχής και το ε ακτίνα της περιοχής. Περιοχές της μορφής $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ συμβολίζονται και με $\varpi(x, \varepsilon)$. Φανερά, αν $x = 0$ τότε $\varpi(0, \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Παρατηρούμε επίσης ότι $y \in \varpi(x, \varepsilon)$ αν και μόνο αν $x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$ και ισοδύναμα $|y - x| < \varepsilon$. Με άλλα λόγια

$$\varpi(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \varepsilon\}.$$

Αν δοθεί ένα x και μια περιοχή του $\varpi(x, \varepsilon)$, λέμε ότι μια ακολουθία a_n περιέχεται *τελικά* σε αυτή την περιοχή αν υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \in \varpi(x, \varepsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Για παράδειγμα, ας πάρουμε $x = 0$ και $a_n = 1/n$. Βλέπουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ αν θέλουμε να ισχύει $a_n \in \varpi(0, \varepsilon)$ θα πρέπει $-\varepsilon < 1/n < \varepsilon$ ισοδύναμα $n > 1/\varepsilon$. Άρα, αν θέσουμε $n_0 = [1/\varepsilon] + 1 \in \mathbb{N}$, αν $n \geq n_0 > 1/\varepsilon$ τότε $a_n = 1/n \in \varpi(0, \varepsilon)$. Έτσι, για κάθε $\varepsilon > 0$ η ακολουθία $a_n = 1/n$ βρίσκεται τελικά στην περιοχή $\varpi(0, \varepsilon)$. Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι η ακολουθία a_n είναι μηδενική ή ότι έχει όριο το μηδέν ή ότι συγκλίνει στο μηδέν:

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1.1. Λέμε ότι μια ακολουθία a_n *συγκλίνει στο μηδέν* ή ότι είναι *μηδενική* ή ότι *έχει όριο το μηδέν* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n| < \varepsilon$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $a_n \to 0$ ή $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ή απλούστερα $\lim a_n = 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.1.2. Στον παραπάνω ορισμό είτε γράψουμε $|a_n| < \varepsilon$, είτε γράψουμε $|a_n| \le \varepsilon$ το νόημα του ορισμού δεν αλλάζει:

- Αν $|a_n| < \varepsilon$ τότε προφανώς $|a_n| \le \varepsilon$.

- Αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω ορισμό με $\le$ αντί για $<$ και για $\varepsilon/2$ τότε θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \ge n_0$ να ισχύει $|a_n| \le \varepsilon/2$ και συνεπώς $|a_n| < \varepsilon$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1.3. Η ακολουθία $a_n = \frac{n\sin(\pi n/4)+1}{n^2+1}$ είναι μηδενική. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$|a_n| = \frac{|n\sin(\pi n/4) + 1|}{n^2+1} \le \frac{|n\sin(\pi n/4)| + 1}{n^2+1} \le \frac{n+1}{n^2+1} \le \frac{n+n}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

Έτσι αν $\varepsilon > 0$ και θέλουμε να ισχύει $|a_n| < \varepsilon$, αρκεί να απαιτήσουμε $2/n < \varepsilon$ ισοδύναμα $n > 2/\varepsilon$. Άρα αν θέσουμε $n_0 = [2/\varepsilon] + 1$ τότε αν $n \ge n_0 > 2/\varepsilon$ θα έχουμε $|a_n| \le 2/n < \varepsilon$. Συνεπώς η a_n είναι μηδενική.

Παρατηρήστε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα μεγαλώσαμε το κλάσμα αλλά *χωρίς* να μεταβάλουμε την τάξη του n ούτε στον αριθμητή ούτε στον παρονομαστή. Αυτή την τεχνική θα τη χρησιμοποιούμε τακτικά.

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 5.1.1. Δείξτε με τη βοήθεια του ορισμού ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές.

$$a_n = \frac{1}{2n^3} \qquad a_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{5}}{n^2} \qquad a_n = \frac{5+\sin(n\pi/5)}{n^2+n+1}$$

$$a_n = \frac{\sin n + \cos(3n)}{n^2} \qquad a_n = \tfrac{1}{n^s} \text{ όπου } s \in \mathbb{Q}_+$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.1.2. Αποδείξτε με τη βοήθεια του ορισμού ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές.

$$\frac{n-1}{n^2-1}, \quad \frac{n-1}{n^2+1}, \quad \frac{8n^2-1}{2n^3+3}, \quad \frac{8n^2+1}{2n^3-3} \quad \frac{\sin(\sqrt{n}\pi)+\cos(\sqrt[4]{n}\pi)}{n},$$

$$\frac{n^{11/6}+n^{9/5}+n^{7/4}+n^{5/3}+n^{3/2}+1}{n^2-n+1}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.1.3. Αποδείξτε ότι αν μια ακολουθία a_n είναι φθίνουσα και μηδενική τότε $a_n \ge 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

5.2 Ιδιότητες μηδενικών ακολουθιών

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.2.1. *Για κάθε ακολουθία a_n ισχύει*

$$\lim a_n = 0 \qquad \textit{αν και μόνο αν} \qquad \lim |a_n| = 0.$$

Απόδειξη: Έστω ότι $\lim a_n = 0$ και έστω ότι μας δόθηκε ένα $\varepsilon > 0$. Τότε επειδή μπορούμε να βρούμε n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n| < \varepsilon$ συνεπάγεται ότι $\big||a_n|\big| < \varepsilon$, και συνεπώς $\lim |a_n| = 0$.

Αντίστροφα, αν $\lim |a_n| = 0$ και μας έχει δοθεί ένα $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\big||a_n|\big| < \varepsilon$, οπότε επειδή $\big||a_n|\big| = |a_n|$, συμπεραίνουμε ότι $|a_n| < \varepsilon$, και άρα $\lim a_n = 0$. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.2.2. *Για κάθε ακολουθία a_n αν $\lim a_n = 0$ τότε η a_n είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για $\varepsilon = 1$. Οπότε θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n| < 1$. Δηλαδή ο αριθμός 1 αποτελεί άνω φράγμα για την ακολουθία $|a_n|$ αλλά όχι για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, αλλά μόνο για τα n που είναι μεγαλύτερα ή ίσα με το n_0. Θέτουμε τώρα

$$M = \max\{1, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|\}$$

ώστε να είμαστε σίγουροι ότι

$$|a_n| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι, η ακολουθία a_n είναι απολύτως φραγμένη και άρα φραγμένη. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.2.3. *Για κάθε ακολουθία a_n, κάθε ακολουθία b_n και κάθε λ, $\mu \in \mathbb{R}$ αν $\lim a_n = \lim b_n = 0$ τότε $\lim(\lambda a_n \pm \mu b_n) = 0$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\lambda \neq 0 \neq \mu$, και έστω ότι μας δόθηκε ένα $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης στο μηδέν για τις ακολουθίες a_n και b_n χρησιμοποιώντας για «ε» τα $\varepsilon/2|\lambda| > 0$ και $\varepsilon/2|\mu| > 0$ αντίστοιχα. Έτσι βρίσκουμε ένα $n_1 \in \mathbb{N}$ για την a_n και ένα n_2 για την b_n ώστε να ισχύουν τα εξής:

$$\text{για κάθε } n \geq n_1 \text{ ισχύει } |a_n| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \tag{5.1}$$

και

$$\text{για κάθε } n \geq n_2 \text{ ισχύει } |b_n| < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}. \tag{5.2}$$

Θέτοντας $n_0 = \max\{n_0, n_1\}$, αν $n \geq n_0$ θα ισχύουν ταυτόχρονα και η (5.1) και η (5.2). Οπότε για $n \geq n_0$ θα έχουμε

$$|\lambda a_n \pm \mu b_n| \leq |\lambda a_n| + |\mu b_n| = |\lambda|\,|a_n| + |\mu|\,|b_n| < |\lambda|\frac{\varepsilon}{2|\lambda|} + |\mu|\frac{\varepsilon}{2|\mu|} = \varepsilon,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.2.4. *Για κάθε ακολουθία* a_n *και κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$ *αν* $\lim a_n = 0$ *τότε* $\lim(\lambda a_n) = 0$.

Απόδειξη: Άμεσο από την προηγούμενη ιδιότητα για $\mu = 0$. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.2.5. *Για κάθε ακολουθία* a_n *και κάθε ακολουθία* b_n *θέτουμε*

$$x_n = \max\{a_n, b_n\} \quad \textit{και} \quad y_n = \min\{a_n, b_n\}.$$

Αν $\lim a_n = 0$ *και* $\lim b_n = 0$ *τότε* $\lim x_n = 0$ *και* $\lim y_n = 0$.

Απόδειξη: Προκύπτει αμέσως από τις προηγούμενες ιδιότητες και τις σχέσεις

$$\max\{t, s\} = \frac{t + s + |t - s|}{2} \quad \text{και} \quad \min\{t, s\} = \frac{t + s - |t - s|}{2}.$$ □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.2.6. *Για κάθε ακολουθία* a_n *και κάθε ακολουθία* b_n *αν* $\lim a_n = 0$ *και η* b_n *είναι φραγμένη, τότε* $\lim(a_n b_n) = 0$.

Απόδειξη: Έστω ότι μας δόθηκε ένα $\varepsilon > 0$, και έστω ότι για τον αριθμό M ισχύει $|b_n| \le M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης της a_n στο 0 για $\varepsilon/M > 0$ οπότε θα υπάρχει ένα n_0 στο $\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ να ισχύει $|a_n| < \varepsilon/M$. Οπότε, αν $n \ge n_0$ θα έχουμε

$$|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Συνεπώς $\lim(a_n b_n) = 0$. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.2.7. *Για κάθε ακολουθία* a_n *και για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *αν* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *τότε* $\lim_{n\to\infty} a_{n\pm k} = 0$.

Απόδειξη: Έστω ότι $\lim a_n = 0$. Αν για $n \ge n_0$ ισχύει $|a_n| < \varepsilon$ επειδή θα είναι $n + k \ge n \ge n_0$, θα ισχύει και η $|a_{n+k}| < \varepsilon$. Οπότε $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = 0$.

Για την $\lim a_{n-k} = 0$ απλά θέτουμε $n_1 = n_0 + k$, και αν $n \ge n_1$ θα ισχύει $n - k \ge n_1 - k \ge n_0$, οπότε $|a_{n-k}| < \varepsilon$, και άρα $\lim_{n\to\infty} a_{n-k} = 0$. □

Γενικότερα έχουμε την εξής:

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.2.8. *Αν η ακολουθία* a_n *είναι μηδενική κάθε υπακολουθία της είναι μηδενική.*

Απόδειξη: Έστω ότι $\lim a_n = 0$ και έστω ότι η k_n είναι μια γνησίως αύξουσα υπακολουθία φυσικών αριθμών. Αν $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ να ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Αλλά από την Άσκηση 3.2.2. ισχύει $k_n \ge n$, οπότε αν $n \ge n_0$ συνεπάγεται $k_n \ge k_{n_0} \ge n_0$ οπότε $|a_{k_n} - \ell| < \varepsilon$. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.2.9. *Για κάθε ακολουθία* a_n *και κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *αν* $\lim a_n = 0$ *τότε* $\lim \sqrt[k]{|a_n|} = 0$.

Απόδειξη: Αν μας δοθεί $\varepsilon > 0$, εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης της a_n για ε^k. Έτσι θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ θα έχουμε $|a_n| < \varepsilon^k$ οπότε $|\sqrt[k]{|a_n|}| = \sqrt[k]{|a_n|} < \varepsilon$. Δηλαδή $\lim \sqrt[k]{|a_n|} = 0$. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.2.10 (Κριτήριο σύγκρισης). *Για κάθε ακολουθία* a_n *και κάθε ακολουθία* b_n *αν* $0 \leq a_n \leq b_n$ *για κάθε* $n \geq n_1$, *και* $\lim b_n = 0$ *τότε* $\lim a_n = 0$.

Απόδειξη: Για $\varepsilon > 0$ έστω $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει $b_n < \varepsilon$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, οπότε αν $n \geq n_0$ θα έχουμε

$$-\varepsilon < 0 \leq a_n \leq b_n < \varepsilon,$$

συνεπώς $|a_n| < \varepsilon$. Δηλαδή $\lim a_n = 0$. □

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5.2.11. *Για κάθε* $\lambda \in (0,1)$ *ισχύει* $\lambda^n \to 0$.

Απόδειξη: Επειδή $\lambda \in (0,1)$ θα ισχύει $1/\lambda > 1$. Θέτουμε $\theta = (1/\lambda) - 1 > 0$, οπότε $1/\lambda = 1 + \theta$. Με τη βοήθεια της ανισότητας Bernoulli (υποενότητα 1.1.1) έχουμε

$$\frac{1}{\lambda^n} = (1+\theta)^n \geq 1 + n\theta,$$

και έτσι

$$0 < \lambda^n \leq \frac{1}{1+n\theta}.$$

Η τελευταία ακολουθία είναι μηδενική άρα και η λ^n. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.2.12 (Κριτήριο λόγου). *Έστω ότι για μια ακολουθία με μη μηδενικούς όρους* a_n *υπάρχει ένα* $n_0 \in \mathbb{N}$ *και ένα* $0 \leq \lambda < 1$, *ώστε για κάθε* $n \geq n_0$ *να ισχύει*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \lambda.$$

Τότε $\lim a_n = 0$.

Απόδειξη: Αν $n \geq n_0 + 1$ θα έχουμε

$$\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}}\right| \ldots \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leq \lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \ldots \lambda \tag{5.3}$$

Παρατηρούμε ότι επειδή ο δείκτης n στον αριθμητή του τελευταίου κλάσματος μπορεί να γραφτεί και ως $n_0 + (n - n_0)$, στο αριστερό σκέλος της ανισότητας το πλήθος των κλασμάτων είναι

$n - n_0$. Άρα τόσα είναι και τα λ στο δεξιό σκέλος. Δηλαδή η (5.3) μπορεί να γραφτεί ως

$$\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}}\right| \cdots \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leq \lambda^{n-n_0} = \lambda^{-n_0} \cdot \lambda^n. \tag{5.4}$$

Όμως στο αριστερό σκέλος της (5.4) έχουμε διαγραφές: κάθε αριθμητής διαγράφεται με τον παρονομαστή του επόμενου κλάσματος. Συνεπώς θα διαγραφούν όλοι οι όροι εκτός από τον παρονομαστή του πρώτου κλάσματος και τον αριθμητή του τελευταίου. Έτσι η (5.4) γίνεται:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n_0}}\right| \leq \lambda^{-n_0} \cdot \lambda^n,$$

και ισοδύναμα $|a_n| \leq (\lambda^{-n_0}|a_{n_0}|)\lambda^n$, για κάθε $n \geq n_0 + 1$. Επειδή $\lambda \in (0,1)$ ισχύει $\lim \lambda^n = 0$ (Εφαρμογή 5.2.11), οπότε επειδή η ποσότητα $\lambda^{-n_0}|a_{n_0}|$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη του n), θα ισχύει $\lim(\lambda^{-n_0}|a_{n_0}|)\lambda^n = 0$. Και έτσι $\lim a_n = 0$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2.13. Ποιο είναι το λάθος στην παρακάτω «απόδειξη»;

> $1/3^n \to 0$ διότι
>
> $$\left|\frac{1/3^{n+1}}{1/3^n}\right| = \frac{1}{3} < 1$$
>
> για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.2.14 (Κριτήριο ρίζας). *Έστω ότι για μια ακολουθία a_n υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \ell < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε $\lim a_n = 0$.*

Απόδειξη: Αυτό είναι φανερό, διότι θα ισχύει $|a_n| \leq \ell^n$, και από την Εφαρμογή 5.2.11 ισχύει $\ell^n \to 0$. □

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 5.2.1. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = n \sin \frac{1}{n^2}$$

είναι μηδενική, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $|\sin x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.2.2. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$$

είναι μηδενική, δείχνοντας πρώτα με επαγωγή ότι $a_n < 1/\sqrt{3n}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.2.3. Αν $\lim a_n = 0$ δείξτε ότι $\lim \dfrac{a_n}{1+a_n} = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.2.4. Δίνονται οι ακολουθίες $a_n > 0$ και $b_n > 0$ για τις οποίες ισχύει $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Δείξτε ότι

$$\lim \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} = 0.$$

5.3 Συγκλίνουσες ακολουθίες

Μια ακολουθία a_n θα λέγεται *συγκλίνουσα* με όριο τον αριθμό ℓ αν η ακολουθία $a_n - \ell$ είναι μηδενική. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.3.1. Λέμε ότι μια ακολουθία a_n *συγκλίνει στον αριθμό* ℓ ή ότι *έχει όριο τον αριθμό* ℓ ή ότι *τείνει στο* ℓ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.3.2. Παρατηρήστε ότι στον παραπάνω ορισμό είτε γράψουμε $|a_n - \ell| < \varepsilon$, είτε γράψουμε $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$ η ουσία του ορισμού δεν αλλάζει:

- Αν $|a_n - \ell| < \varepsilon$ τότε προφανώς $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$.
- Αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω ορισμό με $\leq$ αντί για $<$ και για $\varepsilon/2$, τότε θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - \ell| \leq \varepsilon/2$ και συνεπώς $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.3.3. Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή στην ανισότητα $|a_n - \ell| < \varepsilon$ και προσθέτοντας ℓ, ο ορισμός του $\lim a_n = \ell$ λέει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

ή ισοδύναμα $a_n \in \varpi(\ell, \varepsilon)$.

Η παρακάτω πρόταση λέει ότι δεν γίνεται μια ακολουθία να συγκλίνει σε δύο διαφορετικούς αριθμούς.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.3.4. *Το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό.*

Απόδειξη: Έστω ότι $a_n \to \ell_1$, $a_n \to \ell_2$ και $\ell_1 \neq \ell_2$. Θέτουμε $\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2|/3 > 0$ οπότε θα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_n - \ell_1| < \varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \quad \text{για κάθε} \quad n \geq n_1$$

και

$$|a_n - \ell_2| < \varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \quad \text{για κάθε} \quad n \geq n_2.$$

Αλλά τότε για κάθε $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= \big|(a_n - \ell_2) - (a_n - \ell_1)\big| \\ &\leq |a_n - \ell_2| + |a_n - \ell_1| < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} + \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} = \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.3.5. *Αν $a_n \to \ell$ και a_{k_n} υπακολουθία της a_n τότε $a_{k_n} \to \ell$.*

Απόδειξη: Αφού αν η $a_n - \ell$ είναι μηδενική, είναι μηδενική και η $a_{k_n} - \ell$ από την Ιδιότητα 5.2.8. □

5.4 Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.4.1. *Για κάθε ακολουθία a_n και $\ell \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\lim a_n = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim(-a_n) = -\ell.$$

Απόδειξη: Επειδή $|a_n - \ell| = |(-a_n) - (-\ell)|$ όποτε ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon$ θα ισχύει και $|(-a_n) - (-\ell)| < \varepsilon$. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.4.2. *Για κάθε ακολουθία a_n και $\ell \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\lim a_n = \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \lim |a_n| = |\ell|.$$

Απόδειξη: Επειδή από την τριγωνική ανισότητα ισχύει $\big||a_n| - |\ell|\big| \leq |a_n - \ell|$, αν για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon$ τότε $\big||a_n| - |\ell|\big| < \varepsilon$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.4.3. *Για κάθε ακολουθία a_n και $\ell \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\lim a_n = \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \text{η } a_n \text{ είναι φραγμένη.}$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης της ακολουθίας a_n για $\varepsilon = 1$. Έτσι θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - \ell| < 1$. Από την τριγωνική ανισότητα, θα έχουμε ότι

$$|a_n| - |\ell| \leq \big||a_n| - |\ell|\big| \leq |a_n - \ell| < 1,$$

Συνεπώς για κάθε $n \geq n_0$ θα ισχύει $|a_n| \leq 1 + |\ell|$. Θέτουμε τώρα

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |\ell|\},$$

οπότε $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.4.4. *Για κάθε ακολουθία a_n και $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ισχύει*

$$\lim a_n = \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \text{υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} \text{ ώστε για κάθε } n \geq n_0 \\ \text{τα } a_n \text{ και } \ell \text{ είναι ομόσημοι.} \end{cases}$$

Απόδειξη: Έστω ότι $\ell > 0$. Αφού $a_n \to \ell$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό της σύγκλισης για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε λοιπόν τον ορισμό για $\varepsilon = \ell/2 > 0$. Έτσι θα υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - \ell| < \ell/2$. Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή προκύπτει ότι $-\ell/2 < a_n - \ell$ οπότε $\ell/2 < a_n$. Δηλαδή για κάθε $n \geq n_0$ οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί.

Αν τώρα $\ell < 0$, από την Ιδιότητα 5.4.1 θα ισχύει ότι $-a_n \to -\ell > 0$ οπότε από το προηγούμενο θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ η $-a_n$ θα είναι θετική, οπότε η a_n θα είναι αρνητική. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.4.5. *Έστω ότι οι ακολουθίες a_n και b_n συγκλίνουν στα ℓ_1 και ℓ_2 αντίστοιχα, και λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Τότε*

$$\lim(\lambda a_n \pm \mu b_n) = \lambda\ell_1 \pm \mu\ell_2.$$

Απόδειξη: Έστω ότι μας δόθηκε ένα $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης των ακολουθιών a_n και b_n για $\varepsilon/2(1 + |\lambda|)$ και $\varepsilon/2(1 + |\mu|)$ αντίστοιχα:

- θα υπάρχει ένα $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει
$$|a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |\lambda|)},$$
- θα υπάρχει ένα $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_2$ να ισχύει
$$|b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |\mu|)}.$$

Οπότε θέτοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, αν $n \geq n_0$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} |(\lambda a_n \pm \mu b_n) - (\lambda\ell_1 \pm \mu\ell_2)| &= |\lambda(a_n - \ell_1) \pm \mu(b_n - \ell_2)| \\ &\leq |\lambda|\,|a_n - \ell_1| + |\mu|\,|b_n - \ell_2| \\ &< |\lambda|\frac{\varepsilon}{2(1 + |\lambda|)} + |\mu|\frac{\varepsilon}{2(1 + |\mu|)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{|\lambda|}{1 + |\lambda|} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{|\mu|}{1 + |\mu|} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.4.6. *Έστω ότι οι ακολουθίες* a_n *και* b_n *συγκλίνουν στα* ℓ_1 *και* ℓ_2 *αντίστοιχα. Θέτουμε*

$$x_n = \max\{a_n, b_n\} \quad \textit{και} \quad y_n = \min\{a_n, b_n\}.$$

Τότε $\lim x_n = \max\{\ell_1, \ell_2\}$ *και* $\lim y_n = \min\{\ell_1, \ell_2\}$.

Απόδειξη: Όπως και στην αντίστοιχη ιδιότητα για τις μηδενικές ακολουθίες η απόδειξη είναι άμεση από τις σχέσεις

$$\max\{t, s\} = \frac{t+s+|t-s|}{2} \quad \text{και} \quad \min\{t, s\} = \frac{t+s-|t-s|}{2}. \qquad \square$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.4.7. *Έστω ότι οι ακολουθίες* a_n *και* b_n *συγκλίνουν στα* ℓ_1 *και* ℓ_2 *αντίστοιχα. Τότε*

$$\lim(a_n b_n) = \ell_1 \ell_2.$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $\ell_2 \neq 0$ *τότε υπάρχει* $n_1 \in \mathbb{N}$ *ώστε για κάθε* $n \geq n_1$ *ισχύει* $b_n \neq 0$ *και*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \ell_1 \ell_2| &= \big|(a_n b_n - b_n \ell_1) + (b_n \ell_1 - \ell_1 \ell_2)\big| && (5.5)\\ &= \big|b_n(a_n - \ell_1) + \ell_1(b_n - \ell_2)\big| && (5.6)\\ &\leq |b_n|\,|a_n - \ell_1| + |\ell_1||b_n - \ell_2|. && (5.7) \end{aligned}$$

Αφού η b_n συγκλίνει, από την Ιδιότητα 5.4.3 θα είναι και φραγμένη. Άρα θα υπάρχει ένας αριθμός $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|b_n| \leq M$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για την a_n για την ποσότητα $\varepsilon/2M$: θα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει $|a_n - \ell_1| < \varepsilon/2M$. Ομοίως, εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για την b_n για την ποσότητα $\varepsilon/2(1 + |\ell_1|)$: θα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_2$ να ισχύει

$$|b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |\ell_1|)}.$$

Θέτοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, αν $n \geq n_0$ τότε συνεχίζοντας από την (5.7) θα έχουμε

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \ell_1 \ell_2| &\leq |b_n|\,|a_n - \ell_1| + |\ell_1||b_n - \ell_2| \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M} + |\ell_1|\frac{\varepsilon}{2(1 + |\ell_1|)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{|\ell_1|}{1 + |\ell_1|} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνεχίζουμε την απόδειξη για τον λόγο ακολουθιών. Λόγω του προηγουμένου, και επειδή $a_n/b_n = a_n \cdot (1/b_n)$ αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για την ακολουθία $1/b_n$.

Εφαρμόζοντας τον ορισμό της σύγκλισης της b_n για την ποσότητα $|\ell_2|/2$ και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, υπάρχει ένα $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει

$$|\ell_2| - |b_n| \leq \big| |\ell_2| - |b_n| \big| \leq |\ell_2 - b_n| = |b_n - \ell_2| < \frac{|\ell_2|}{2}.$$

Έτσι για κάθε $n \geq n_1$ θα έχουμε

$$|\ell_2| - |b_n| < \frac{|\ell_2|}{2}$$

και συνεπώς

$$|b_n| > \frac{|\ell_2|}{2}.$$

Οπότε από τη μια μεριά έχουμε ότι για $n \geq n_1$ ισχύει $b_n \neq 0$, και άρα ορίζεται το πηλίκο $1/b_n$, και από την άλλη μεριά

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell_2} \right| = \frac{|b_n - \ell_2|}{|b_n|\,|\ell_2|} < \frac{|b_n - \ell_2|}{\frac{|\ell_2|}{2}\,|\ell_2|} = \frac{2}{|\ell_2|^2}\,|b_n - \ell_2|.$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό της σύγκλισης της b_n ξανά, για την ποσότητα $\varepsilon|\ell_2|^2/2$ θα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_2$ να ισχύει $|b_n - \ell_2| < \varepsilon|\ell_2|^2/2$. Επιλέγοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, αν $n \geq n_0$ θα ισχύουν μαζί όλα τα παραπάνω και άρα θα έχουμε

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell_2} \right| \leq \frac{2}{|\ell_2|^2}\,|b_n - \ell_2| < \frac{2}{|\ell_2|^2}\varepsilon|\ell_2|^2/2 = \varepsilon. \qquad \square$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.4.8. *Για κάθε ακολουθία $a_n \geq 0$ και $k \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\lim a_n = \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \lim a_n^k = \ell^k.$$

Απόδειξη: Έστω ότι μας έχει δοθεί ένα $\varepsilon > 0$. Αφού η a_n συγκλίνει θα είναι και φραγμένη, και άρα θα υπάρχει αριθμός $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|a_n| \leq M$. Έτσι θα ισχύει και $|\ell| \leq M$ (γιατί;). Οπότε

$$\begin{aligned}
|a_n^k - \ell^k| &= |a_n - \ell|\,|a_n^{k-1} + a_n^{k-2}\ell + a_n^{k-3}\ell^2 + \ldots + \ell^{k-1}| \\
&\leq |a_n - \ell|\,(|a_n^{k-1}| + |a_n^{k-2}\ell| + |a_n^{k-3}\ell^2| + \ldots + |\ell^{k-1}|) \\
&\leq |a_n - \ell|\,(\underbrace{M^k + M^k + M^k + \ldots + M^k}_{k-\text{όροι}}) \\
&\leq (kM^k)|a_n - \ell| \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Οπότε εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για την ακολουθία a_n για την ποσότητα ε/kM^k, και βρίσκουμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon kM^k$. Έτσι συνεχίζοντας από την (5.8) θα έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$|a_n^k - \ell^k| \leq (kM^k)|a_n - \ell| < (kM^k)\varepsilon kM^k = \varepsilon.$$ □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.4.9. *Για κάθε ακολουθία $a_n \geq 0$ και $k \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\lim a_n = \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\ell}.$$

Απόδειξη: Έστω ότι μας έχει δοθεί ένα $\varepsilon > 0$. Αν $\ell = 0$ τότε εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης της a_n για το ε^k, οπότε βρίσκουμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n| < \varepsilon^k$. Οπότε $|\sqrt[k]{a_n}| < \varepsilon$.

Αν $\ell > 0$ τότε παρατηρούμε ότι

$$\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{\ell}\right| = \frac{|a_n - \ell|}{a_n^{k-1} + a_n^{k-2}\ell + \ldots + \ell^{k-1}} \leq \frac{1}{\ell^{k-1}}|a_n - \ell|.$$

Έτσι, εφαρμόζουμε τον ορισμό σύγκλισης της a_n για την ποσότητα $\varepsilon\ell^{k-1}$. Βρίσκουμε λοιπόν $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να έχουμε

$$\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{\ell}\right| \leq \frac{1}{\ell^{k-1}}|a_n - \ell| < \frac{1}{\ell^{k-1}}\varepsilon\ell^{k-1} = \varepsilon,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.4.10. *Έστω ότι οι ακολουθίες a_n και b_n συγκλίνουν στα ℓ_1 και ℓ_2 αντίστοιχα, και επιπλέον υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει $a_n \leq b_n$. Τότε $\ell_1 \leq \ell_2$.*

Απόδειξη: Αν δεν ισχύει, τότε $\ell_2 < \ell_1$ οπότε η ακολουθία $b_n - a_n \geq 0$ δεν είναι ποτέ ομόσημη με το όριό της $\ell_2 - \ell_1 < 0$ αντιφάσκοντας με την Ιδιότητα 5.4.3. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.4.11 (Ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες). *Έστω ότι οι ακολουθίες a_n, b_n και c_n ικανοποιούν την ανισότητα*

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

και ότι $\lim a_n = \lim c_n = \ell$. Τότε αναγκαστικά $\lim b_n = \ell$.

Απόδειξη: Από την $a_n \leq b_n \leq c_n$ συμπεραίνουμε ότι $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$. Η $c_n - a_n$ είναι συγκλίνουσα με όριο το μηδέν. Άρα και η $b_n - a_n$ είναι συγκλίνουσα με όριο το μηδέν. Συνεπώς η b_n είναι συγκλίνουσα ως άθροισμα συγκλινουσών ($b_n = (b_n - a_n) + a_n$) και $\lim b_n = \lim(b_n - a_n) + \lim a_n = 0 + \ell = \ell$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.4.12 (Οριακό κριτήριο λόγου). *Αν για μια ακολουθία* a_n *με μη μηδενικούς όρους ισχύει* $\lim |a_{n+1}/a_n| < 1$, *τότε* $\lim a_n = 0$.

Απόδειξη: Έστω ότι $\lim |a_{n+1}/a_n| = \ell \in (0, 1)$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για την ποσότητα $(1-\ell)/2 > 0$. Τότε θα υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\big||a_{n+1}/a_n| - \ell\big| < (1-\ell)/2$. Αλλά τότε

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \ell < \frac{1-\ell}{2}$$

από όπου συνεπάγεται ότι

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2} < 1.$$

Δηλαδή για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι $|a_{n+1}/a_n| < (1+\ell)/2 < 1$. Αυτό και η Πρόταση 5.2.12 συνεπάγονται ότι $a_n \to 0$. □

5.5 Κριτήρια σύγκλισης

Ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο αφορά τις ακολουθίες που είναι μονότονες και φραγμένες:

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.5.1. *Αν η ακολουθία* a_n *είναι αύξουσα και άνω φραγμένη τότε είναι και συγκλίνουσα και μάλιστα* $a_n \to \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. *Ομοίως, αν μια ακολουθία* b_n *είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε είναι και συγκλίνουσα, και μάλιστα* $b_n \to \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

Απόδειξη: (Για τις ποσότητες $\sup a_n$ και $\inf a_n$ δείτε τον Ορισμό 4.1.4.) Ας υποθέσουμε ότι η a_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Θέτουμε $s = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Θα δείξουμε ότι $a_n \to s$. Αφού το s είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα της a_n, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το $s - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα της a_n. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $s - \varepsilon < a_{n_0}$. Επειδή η a_n είναι αύξουσα, για κάθε $n \geq n_0$ θα ισχύει $a_{n_0} \leq a_n$, οπότε $s - \varepsilon < a_n$. Αλλά φανερά $a_n \leq s < s + \varepsilon$, αφού το s είναι το άνω πέρας των όρων της. Έτσι καταλήξαμε στο ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon,$$

δηλαδή $|a_n - s| < \varepsilon$. Άρα $a_n \to s$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η b_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Εργαζόμαστε ομοίως: θέτουμε $i = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Αφού το i είναι το *μέγιστο* κάτω φράγμα της a_n, για κάθε $\varepsilon > 0$ το $i + \varepsilon$ δεν είναι κάτω φράγμα της $a - n$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $b_{n_0} < i + \varepsilon$. Επειδή η b_n είναι φθίνουσα, για κάθε $n \geq n_0$ θα ισχύει $b_n \leq b_{n_0}$, οπότε $b_n < i + \varepsilon$. Αλλά φανερά $i - \varepsilon < i \le b_n$. Έτσι καταλήξαμε στο ότι για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει

$$i - \varepsilon < b_n < i + \varepsilon,$$

δηλαδή $|b_n - i| < \varepsilon$. Άρα $b_n \to i$. □

Μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές της παραπάνω πρότασης είναι το ακόλουθο:

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.5.2. *Η ακολουθία*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση από το γεγονός ότι η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα και άνω φραγμένη (Παραδείγματα 3.2.3 και 4.2.3). □

Το όριο της παραπάνω ακολουθίας *δεν είναι* 1, διότι η ακολουθία

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$\lim x_n = \sup x_n \ge x_1 = 2.$$

Το όριο αυτό έχει *εξέχουσα* σημασία για τα Μαθηματικά (μαζί με τους αριθμούς 0, 1, π και τη μιγαδική μονάδα i). Ονομάζεται αριθμός του Euler και συμβολίζεται με e. Ο αριθμός αυτός είναι περίπου

$$e = 2{,}71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,77572\,47093\,69995\ldots$$

Ο αριθμός e (όπως και ο π) είναι άρρητος και υπερβατικός, δηλαδή δεν είναι ρίζα κανενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές (ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αλλά δεν είναι υπερβατικός αφού είναι ρίζα του πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές $x^2 - 2$). Η απόδειξη της υπερβατικότητας του e δεν είναι στους σκοπούς του παρόντος (δείτε στο [14]). Το ότι είναι όμως άρρητος θα το αποδείξουμε στην Ενότητα 5.8.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.5.3. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ακολουθία*

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

είναι συγκλίνουσα.

Θα αναβάλουμε την απόδειξη αυτού του πορίσματος μέχρι την Ενότητα 5.7, όπου θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το όριο για να ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.5.1 (Bolzano-Weierstraß). *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη: Κάθε ακολουθία έχει μια μονότονη υπακολουθία σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.3, και επειδή η ακολουθία είναι φραγμένη, είναι φραγμένη και αυτή η μονότονη υπακολουθία της. Άρα, από το προηγούμενο θεώρημα συγκλίνει. □

Όταν μια ακολουθία a_n συγκλίνει σε έναν αριθμό ℓ τότε μετά από κάποιο δείκτη οι όροι της είναι «κοντά» στον αριθμό ℓ. Συνεπώς είναι και μεταξύ τους «κοντά». Αυτή η τελευταία ιδιότητα ονομάζεται ιδιότητα Cauchy.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.5.4. Μια ακολουθία a_n ονομάζεται *ακολουθία Cauchy* ή *βασική ακολουθία* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε n, $m \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει ένα ακόμα κριτήριο σύγκλισης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.5.5. *Μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη: Αν υποθέσουμε ότι $a_n \to \ell$ και $\varepsilon > 0$ εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγλισης όχι για το ε αλλά για το $\varepsilon/2$. Έτσι, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon/2$. Άρα, αν n, $m \geq n_0$ τότε ισχύει και η $|a_n - \ell| < \varepsilon/2$ και η $|a_m - \ell| < \varepsilon/2$. Συνεπώς

$$|a_n - a_m| = \big|(a_n - \ell) - (a_m - \ell)\big| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αντίστροφα τώρα, ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία a_n είναι ακολουθία Cauchy. Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 5.5.1, οπότε αποδεικνύουμε πρώτα ότι η a_n είναι φραγμένη: εφαρμόζουμε τον ορισμό της ιδιότητας Cauchy για $\varepsilon = 1 > 0$. Έτσι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε n, $m \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a_m| < 1$. Άρα αυτό ισχύει και για $m = n_0$. Συνεπώς

$$|a_n| - |a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| < 1,$$

και άρα $|a_n| \leq 1 + |a_{n_0}|$ για κάθε $n \geq n_0$. Έτσι

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η a_n είναι φραγμένη.

Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstraß λοιπόν, η a_n έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω ότι αυτή είναι η a_{k_n} όπου k_n γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Ας υποθέσουμε ότι $a_{k_n} \to \ell$. Θα δείξουμε ότι $a_n \to \ell$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της ιδιότητας Cauchy για το $\varepsilon/2 > 0$, οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε n, $m \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. Αλλά τότε, επειδή $k_m \geq m \geq n_0$ (από την Άσκηση 3.2.2.), ισχύει

$$|a_n - a_{k_m}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } n, m \geq n_0. \tag{5.9}$$

Τώρα εφαρμόζουμε τον ορισμό σύγκλισης της a_{k_n} στο ℓ πάλι για το $\varepsilon/2$. Άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\text{για κάθε } m \geq n_1 \text{ να ισχύει } |a_{k_m} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.10}$$

Έτσι, αν $n \geq n_0$ και $m = \max\{n_0, n_1\}$ θα ισχύει και η (5.9) και η (5.10). Άρα

$$\begin{aligned} |a_n - \ell| &= \left|(a_n - a_{k_m}) + (a_{k_m} - \ell)\right| \\ &\leq \left|a_n - a_{k_m}\right| + \left|a_{k_m} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$ □

Ένα άλλο κριτήριο που συχνά είναι χρήσιμη η άρνησή του είναι το ακόλουθο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.5.6. *Μια ακολουθία a_n συγκλίνει στο ℓ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της συγκλίνει και αυτή στο ℓ.*

Απόδειξη: Το ευθύ έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 5.3.5. Το αντίστροφο είναι τετριμμένο, αφού η ίδια η a_n είναι υπακολουθία του εαυτού της. □

Η άρνηση της παραπάνω πρότασης μας δίνει ένα κριτήριο *μη σύγκλισης*: Αν μια ακολουθία έχει δυο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικούς αριθμούς, τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει. Για παράδειγμα, η $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει διότι η υπακολουθία της $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ συγκλίνει στο 1, ενώ η υπακολουθία της $a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$ συγκλίνει στο -1. Ομοίως η ακολουθία $x_n = \sin(7n\pi/8)$ δεν συγκλίνει. Η υπακολουθία της $x_{16n} = \sin(7(2n\pi)) = 0$ συγκλίνει στο μηδέν. Ενώ η υπακολουθία

$$x_{16n+4} = \sin\left(14n\pi + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(14n\pi + 3\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

συγκλίνει στο -1.

5.6 Ακολουθίες με όριο το $+\infty$ ή $-\infty$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.6.1. Για μια ακολουθία a_n λέμε ότι *αποκλίνει στο* $+\infty$ ή ότι *τείνει στο* $+\infty$ όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n > M$. Γράφουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ή $\lim a_n = +\infty$ ή $a_n \to +\infty$.

Συχνά αντί για $+\infty$ γράφουμε απλά ∞.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.6.2. Για μια ακολουθία a_n λέμε ότι *αποκλίνει στο* $-\infty$ ή ότι *τείνει στο* $-\infty$ όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n < -M$. Γράφουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ή $\lim a_n = -\infty$ ή $a_n \to -\infty$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.6.3. Πολλές φορές λέγεται καταχρηστικά ότι η ακολουθία «συγκλίνει στο $+\infty$» αντί «αποκλίνει στο $+\infty$». Ομοίως λέγεται καταχρηστικά ότι η ακολουθία «συγκλίνει στο $-\infty$» αντί «αποκλίνει στο $-\infty$».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6.4. Η ακολουθία $a_n = n^2$ αποκλίνει στο $+\infty$, διότι αν μας δοθεί ένα $M > 0$ θα θέλουμε να ισχύει $n^2 > M$ ισοδύναμα $n > \sqrt{M}$. Οπότε αν θέσουμε $n_0 = [\sqrt{M}] + 1$, τότε για κάθε $n \geq n_0$ θα ισχύει $n \geq n_0 = [\sqrt{M}] + 1 > \sqrt{M}$ οπότε $n^2 > M$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.6.5. *$a_n \to +\infty$ αν, και μόνο αν, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει $a_n > 0$ και $1/a_n \to 0$.*

Ομοίως, $a_n \to -\infty$ αν, και μόνο αν, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει $a_n < 0$ και $1/a_n \to 0$.

Απόδειξη: Έστω ότι $\varepsilon > 0$ και $a_n \to +\infty$. Αν εφαρμόσουμε τον ορισμό για $M = 1/\varepsilon > 0$ τότε θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n > 1/\varepsilon > 0$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $a_n > 0$ και ότι $|1/a_n| = 1/a_n < \varepsilon$, δηλαδή $1/a_n \to 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει $a_n > 0$ και $1/a_n \to 0$. Έστω ότι $M > 0$. Θέτουμε $\varepsilon = 1/M > 0$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης $1/a_n \to 0$: θα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_2$ να ισχύει $|1/a_n| < \varepsilon = 1/M$, οπότε ισοδύναμα $|a_n| > M$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ οπότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n = |a_n| > M$, δηλαδή $a_n \to +\infty$.

Για την περίπτωση $a_n \to -\infty$ εργαζόμαστε ανάλογα. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5.6.6. (α) *Αν $a_n \geq b_n$ και $\lim b_n = +\infty$ τότε $\lim a_n = +\infty$.*

(β) *Αν $a_n \leq b_n$ και $\lim b_n = -\infty$ τότε $\lim a_n = -\infty$.*

Απόδειξη: Αφού $\lim b_n = +\infty$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $b_n > 0$ (Ιδιότητα 5.6.5) άρα και $a_n > 0$. Αλλά τώρα, $0 < 1/a_n < 1/b_n \to 0$. Συνεπώς, ισχύει $0 < 1/a_n \to 0$ (Ιδιότητα 5.2.10), και άρα $a_n \to +\infty$.

Εργαζόμαστε ομοίως για το (β). □

5.7 Η εκθετική συνάρτηση

Σε αυτή την ενότητα θα θεμελιώσουμε την εκθετική συνάρτηση a^x για $a > 0$ και $x \in \mathbb{R}$, και θα αποδείξουμε βασικές ιδιότητες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.7.1. *Η ακολουθία*

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και για κάθε $n > -x$ (άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αν $x > -1$). Επιπλέον είναι και φραγμένη για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Κατά συνέπεια η x_n είναι μια συγκλίνουσα ακολουθία και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

την οποία ονομάζουμε εκθετική συνάρτηση.

Απόδειξη: Αν $n > -x$ τότε οι ποσότητες $1 + x/n$ και $1 + x/(n+1)$ είναι θετικές (αν $x \geq 0$ είναι προφανές και αν $x < 0$ τότε $x/(n+1) > x/n > -1$). Συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{(1 + x/n)^n}{(1 + x/(n+1))^n} \leq 1 + \frac{x}{n+1}.$$

Αλλά μεταφέροντας τον αριθμητή του αριστερού κλάσματος στον παρονομαστή, και εφαρμόζοντας την ανισότητα Bernoulli έχουμε,

$$\frac{(1 + x/n)^n}{(1 + x/(n+1))^n} = \frac{1}{\left(\frac{n^2+n+nx}{n^2+n+nx+x}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^n} \leq \frac{1}{1 - \frac{nx}{(n+1)(n+x)}}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η τελευταία ποσότητα είναι μικρότερη της ζητούμενης $1 + x/(n+1)$ αν και μόνο αν

$$1 \leq 1 + \frac{x}{n+1} - \frac{nx}{(n+1)(n+x)} - \frac{nx^2}{(n+1)^2(n+x)}.$$

Απαλείφοντας τη μονάδα και παραγοντοποιώντας στα δεξιά, η τελευταία είναι ισοδύναμη με την

$$0 \leq \frac{x^2}{(n+1)^2}\frac{1}{n+x},$$

η οποία είναι αληθής αφού $n > -x$. Η προηγούμενη ανισότητα είναι γνήσια εκτός αν $x = 0$ άρα η x_n είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $n > -x$.

Για το φράγμα τώρα, θέτουμε $k_0 = [|x|] + 1 \in \mathbb{N}$. Επειδή η x_n είναι αύξουσα και η $(1 + 1/n)^n$ είναι αύξουσα με όριο το e (Πόρισμα 5.5.2) θα έχουμε:

$$|x_n| \le \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n \le \left(1 + \frac{k_0}{n}\right)^n \le \left(1 + \frac{k_0}{k_0 n}\right)^{k_0 n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{k_0} \le e^{k_0},$$

δηλαδή η x_n είναι φραγμένη. □

Στη συνέχεια θα «ταυτοποιήσουμε» τη συνάρτηση $\exp(x)$ (θα προσπαθήσουμε να την κατανοήσουμε). Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 5.7.1. *Αν η ακολουθία b_n έχει την ιδιότητα $\lim nb_n = 0$ τότε $\lim(1 + b_n)^n = 1$. Αν επιπλέον $\lim a_n = 0$ και το όριο $\lim(1 + a_n)^n$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ τότε $\lim(1 + a_n + b_n)^n = \lim(1 + a_n)^n$.*

Απόδειξη: Από την ταυτότητα διαφοράς δυνάμεων και την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \big|(1 + b_n)^n - 1\big| &= |b_n|\,|(1 + b_n)^{n-1} + (1 + b_n)^{n-2} + \ldots + (1 + b_n) + 1| \\ &\le |b_n|\,\big((1 + |b_n|)^{n-1} + (1 + |b_n|)^{n-2} + \ldots + (1 + |b_n|) + 1\big) \\ &\le |b_n|\, n(1 + |b_n|)^{n-1}. \end{aligned}$$

Αλλά, αφού $nb_n \to 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ να ισχύει $|nb_n| < 1$ δηλαδή $|b_n| < 1/n$. Συνεχίζοντας τις προηγούμενες ανισότητες για $n \ge n_0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\big|(1 + b_n)^n - 1\big| \le |nb_n| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \to 0 \cdot e = 0.$$

Για το δεύτερο ισχυρισμό,

$$|(1 + a_n + b_n)^n - (1 + a_n)^n| = (1 + a_n)^n \left| \left(1 + \frac{b_n}{1 + a_n}\right)^n - 1 \right|.$$

Αλλά η ακολουθία $c_n = b_n/(1 + a_n)$ έχει την ιδιότητα $nc_n \to 0$. Έτσι από το προηγούμενο σκέλος της απόδειξης

$$\lim \left| \left(1 + \frac{b_n}{1 + a_n}\right)^n - 1 \right| = 0.$$

Οπότε $\lim((1+a_n+b_n)^n - (1+a_n)^n) = 0$, και επειδή το όριο $\lim(1+a_n)^n$ υπάρχει από την υπόθεση, υπάρχει και το $\lim(1 + a_n + b_n)^n$ και ισχύει $\lim(1 + a_n + b_n)^n = \lim(1 + a_n)^n$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.7.2. *Η συνάρτηση* exp *έχει τις ιδιότητες:*

(i) $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$ *για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) $\exp(x) > 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$, $\exp(0) = 1$, *και* $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(iii) $\exp(k) = e^k$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$, *όπου* e *ο αριθμός Euler.*

(iv) $(\exp(1/k))^k = e$.

Απόδειξη: Για το (i) έχουμε

$$\begin{aligned}\exp(x)\exp(y) &= \lim\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\right)\\ &= \lim\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n.\end{aligned}$$

Αλλά η $(x+y)/n$ είναι μηδενική, το όριο $(1+(x+y)/n)^n$ υπάρχει, και η $b_n = xy/n^2$ έχει την ιδιότητα $nb_n \to 0$. Συνεπώς, από το προηγούμενο λήμμα το παραπάνω όριο ισούται με το

$$\lim\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n = \exp(x+y).$$

Για το (ii), αν $x \geq 0$ τότε

$$\exp(x) = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \lim\left(1+n\frac{x}{n}\right) = 1+x \geq 1.$$

Επίσης

$$\exp(-x)\exp(x) = \exp(-x+x) = \exp(0) = \lim\left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1.$$

Συνεπώς $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ και αν $x < 0$ τότε $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$.

Για το (iii), επειδή $\exp(-k) = 1/\exp(k)$ αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για $k \in \mathbb{N}$. Αλλά

$$\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1)\exp(1) = e \cdot e = e^2.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με επαγωγή στο k.

Για το (iv) με επαγωγή ισχύει

$$\begin{aligned}\exp(1/k)^k &= \exp\left(\frac{1}{k}\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{k}\right)\cdots\exp\left(\frac{1}{k}\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\ldots+\frac{1}{k}\right) = \exp(1)\\ &= e.\end{aligned}$$ □

Παρατηρήστε ότι το (iv) παραπάνω μας λέει ότι ο αριθμός e έχει k-ρίζα για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε το e^r για κάθε $r \in \mathbb{Q}$:

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.7.3. Για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r = m/n$ με $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την ποσότητα e^r να είναι η $(e^{1/n})^m$ η οποία είναι πραγματικός αριθμός σύμφωνα με τα προηγούμενα.

Είναι λοιπόν φυσιολογικό να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.7.4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την ποσότητα e^x να είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\exp(x) = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 5.7.2 η e^x έχει όλες τις αναμενόμενες ιδιότητες των δυνάμεων, όχι μόνο για ακέραιους εκθέτες αλλά για πραγματικούς εκθέτες.

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας θα δούμε μερικές ακόμα ιδιότητες της e^x και θα ορίσουμε τη γενική εκθετική συνάρτηση a^x με $a > 0$ και $x \in \mathbb{R}$ και την έννοια του λογαρίθμου.

5.7.1 Μελέτη της εκθετικής συνάρτησης

Σε αυτή την υποενότητα θα θεωρήσουμε γνωστή την έννοια της συνέχειας συνάρτησης, το ότι η αντίστροφη συνεχούς είναι συνεχής και το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.7.5. *Η e^x είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη: Φανερά

$$\lim_{x\to x_0} e^x = \lim_{x\to x_0} (e^{x-x_0} e^{x_0}) = e^{x_0} \lim_{x-x_0\to 0} e^{x-x_0}.$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_{t\to 0} e^t = 1$. Επειδή

$$|e^t - 1| = \lim_{n\to\infty} \left| \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n - 1 \right|$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\begin{aligned} |e^t - 1| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n - 1 \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{t}{n} \left| \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n-2} + \ldots + \left(1 + \frac{t}{n}\right) + 1 \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{t}{n} \left(\left(1 + \frac{|t|}{n}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{|t|}{n}\right)^{n-2} + \ldots + \left(1 + \frac{|t|}{n}\right) + 1 \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + t \left(1 + \frac{|t|}{n}\right)^{n-1} . \end{aligned}$$

Άρα αν υποθέσουμε ότι $|t| < 1$ θα ισχύει

$$|e^t - 1| \leq \frac{\varepsilon}{2} + t \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + te.$$

Συνεπώς αν θέσουμε $\delta = \min\{1, \varepsilon/2e\}$, αν $0 < t < \delta$ θα συμπεράνουμε ότι $|e^t - 1| < \varepsilon$ δηλαδή το ζητούμενο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.7.6. *Η e^x είναι γνησίως αύξουσα και επί του* $(0, \infty)$

Απόδειξη: Αν $x < y$ τότε $e^y = e^x e^{y-x}$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $e^{y-x} > 1$. Αλλά

$$e^{y-x} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{y-x}{n}\right)^n \geq 1 + y - x > 1$$

από την ανισότητα Bernoulli.

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής και τη συνέχεια τα e^x αρκεί να αποδείξουμε ότι η e^x παίρνει οσοδήποτε μεγάλες και οσοδήποτε μικρές θετικές τιμές. Αυτό προκύπτει αμέσως: η e^x παίρνει οσοδήποτε μεγάλες τιμές, αφού

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης παίρνει οσοδήποτε μικρές θετικές τιμές, αφού $e^{-x} = 1/e^x$ και από το προηγούμενο η e^x μπορεί να πάρει οσοδήποτε μεγάλες τιμές. □

Έτσι η εκθετική συνάρτηση $e^x : \mathbb{R} \mapsto (0, +\infty)$ είναι 1-1 (αφού είναι γνησίως αύξουσα) και επί και συνεπώς αντιστρέφεται. Η αντίστροφή της ονομάζεται λογάριθμος και συμβολίζεται με $\log(x) : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$. Φανερά θα ισχύει $e^{\log x} = x$ για κάθε $x > 0$ και $\log(e^x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η $\log(x)$ ως αντίστροφη της εκθετικής είναι και αυτή γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί του $\mathbb{R}$.

Επίσης σύμφωνα με τα προηγούμενα εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν οι ανισότητες:

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.7.7. *Ισχύουν οι ανισότητες*

$$e^x \geq 1 + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad e^x \leq \frac{1}{1-x} \text{ για κάθε } x < 1.$$

Επίσης ισχύουν οι

$$1 - \frac{1}{x} < \log x \leq x - 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Απόδειξη: Η $e^x \geq 1 + x$ είναι άμεση από τον ορισμό της e^x και την ανισότητα Bernoulli. Άρα $e^{-x} \geq 1 + (-x)$ συνεπώς, αν $x < 1$ παίρνουμε ότι $e^x \geq 1/(1-x)$.

Για τις ανισότητες του λογαρίθμου, επειδή $e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συνεπάγεται $e^{x-1} \geq x$ και αφού η log είναι αύξουσα $\log(e^{x-1}) \geq \log x$, δηλαδή $\log x \leq x - 1$.

Λογαριθμίζοντας την $e^x \geq 1/(1-x)$ παίρνουμε $x \geq \log(1/(1-x))$ και αντικαθιστώντας με t την ποσότητα $1/(1-x)$ παίρνουμε τη ζητούμενη ανισότητα. Παρατηρούμε ότι η συνθήκη $x < 1$ ισοδυναμεί με $t > 0$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.7.8. Για κάθε $a > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$a^x = e^{x \log a}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο ορισμός αυτός έχει όλες τις αναμενόμενες ιδιότητες: για παράδειγμα $a^n = a \cdot a \cdots a$ με n παράγοντες διότι

$$e^{nt} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{nt}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{nt}{nk}\right)^{nk},$$

διότι η τελευταία είναι υπακολουθία της προηγούμενης! Συνεπώς

$$e^{nt} = \lim_{k\to\infty} \left(\left(1 + \frac{t}{k}\right)^k\right)^n = (e^t)^n.$$

Άρα

$$a^n = e^{n \log a} = (e^{\log a})^n = e^{\log a} e^{\log a} \cdots e^{\log a} = a \cdot a \cdots a$$

με n παράγοντες.

Ή $(e^x)^y = e^{y \log e^x} = e^{yx} = e^{xy}$, οπότε και

$$(a^x)^y = e^{y \log a^x} = e^{y \log e^{x \log a}} = e^{yx \log a} = a^{xy}.$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται όλες οι ιδιότητες της εκθετικής a^x. Η συνάρτηση αυτή για $a > 0$ και $a \neq 1$ εύκολα βλέπουμε ότι είναι και αυτή γνήσια μονότονη (άρα 1-1), συνεχής και επί του $(0, \infty)$. Οπότε αντιστρέφεται και την αντίστροφή της την ονομάζουμε λογάριθμο με βάση το a και γράφουμε $\log_a$. Προφανώς ισχύει $\log_a a^x = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $a^{\log_a x} = x$ για κάθε $x > 0$. Ως αντίστροφη της a^x για $0 < a \neq 1$, ο λογάριθμος με βάση a είναι συνεχής συνάρτηση, με την ίδια μονοτονία με την a^x, 1-1 και επί του $\mathbb{R}$.

Όλες οι αλγεβρικές ιδιότητές τόσο της εκθετικής όσο και του λογάριθμου προκύπτουν εύκολα και αφήνονται ως απλή άσκηση.

Κλείνουμε αυτή την ενότητα παρατηρώντας ότι $(e^{(\log a)/n})^n = e^{\log a} = a$, δηλαδή κάθε θετικός αριθμός a έχει n-στη ρίζα τον αριθμό $a^{1/n} = e^{(\log a)/n}$.

*5.8 Ο e είναι άρρητος

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι ισχύει ο τύπος

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

Κάτι πιο ισχυρό ισχύει εδώ, δηλαδή υπάρχει ανάλογη με αυτήν περιγραφή για την ποσότητα e^x για καθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά αυτό θα το δούμε όταν θα ασχοληθούμε με σειρές (Ενότητα 10.2).

Για να αποδείξουμε τον παραπάνω τύπο, αναπτύσσουμε με το διωνυμικό ανάπτυγμα το $(1+1/n)^n$:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1+\frac{n!}{1!(n-1)!}\frac{1}{n}+\frac{n!}{2!(n-1)!}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n!}{n!0!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots \\
&\qquad \ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots \\
&\qquad \ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} =: s_n.
\end{aligned}$$

Η s_n είναι φανερά (γνησίως) αύξουσα (αφού $s_{n+1}=s_n+1/(n+1)!>s_n$) και είναι και άνω φραγμένη, διότι $2^n \le n!$ για κάθε $n\ge 4$ οπότε

$$s_n \le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^n} \le 3-\frac{1}{2^3} < 3.$$

Άρα η s_n είναι συγκλίνουσα (ως αύξουσα και άνω φραγμένη), οπότε παίρνοντας όρια βρίσκουμε ότι

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \lim s_n.$$

Για την αντίστροφη, από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι αν σταθεροποιήσουμε ένα $k<n$ τότε ισχύει

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots \\
\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),
\end{aligned}$$

για κάθε $n \ge k$. Αφήνοντας το n να πάει στο άπειρο συμπεραίνουμε ότι $e \ge s_k$, αφού όλες οι προηγούμενες παρενθέσεις συγκλίνουν στο 1 καθώς $n\to\infty$ με το k *σταθερό*. Αφήνοντας τώρα το k να πάει στο άπειρο βρίσκουμε $e \ge \lim_{k\to\infty} s_k$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο e είναι ρητός, και έστω ότι $e=k/m$ με $k,\ m\in\mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι $m\ge 2$, αφού $2<e<3$. Θεωρούμε τον αριθμό

$$x = m!(e-s_m) = m!\left(\frac{k}{m}-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{m!}\right)\right).$$

Φανερά $x>0$ (αφού $e>s_m$). Επίσης επιμερίζοντας το $m!$ στην παραπάνω συμπαιρένουμε αμέσως ότι $x\in\mathbb{N}$. Άρα θα καταλήξουμε σε άτοπο αν αποδείξουμε ότι $x<1$, αφού ανάμεσα στο 0 και στο 1 δεν υπάρχουν φυσικοί ακέραιοι. Έχουμε

$$\begin{aligned} x &= m!\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)-s_m\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} m!\left(\frac{1}{(m+1)!}+\frac{1}{(m+2)!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\ldots\right. \\ &\qquad\qquad \left.\ldots+\frac{1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+(n-m))}\right) \\ &\le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-m}}\right) \le \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n-m+1}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα ο e είναι άρρητος.

5.9 Βασικά όρια

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9.1. *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| < 1$ ισχύει $\lambda^n \to 0$.*

Απόδειξη: Για $\lambda = 0$ είναι προφανές. Για $0 < \lambda < 1$ είναι η Εφαρμογή 5.2.11. Για $-1 < \lambda < 0$ ισχύει

$$|\lambda^n| = |\lambda|^n \to 0,$$

αφού $0 < |\lambda| < 1$. Άρα $\lambda^n \to 0$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9.2. *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 1$ ισχύει $\lambda^n \to +\infty$, ενώ για $\lambda \le -1$ η λ^n δεν συγκλίνει.*

Απόδειξη: Αν $\lambda > 1$ τότε $0 < 1/\lambda < 1$ συνεπώς $(1/\lambda)^n \to 0$. Αλλά $(1/\lambda)^n = 1/\lambda^n$ άρα $\lambda^n \to +\infty$ από την Ιδιότητα 5.6.5.

Αν $\lambda = -1$ η λ^n δεν συγκλίνει, αφού $\lambda^{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$ ενώ $\lambda^{2n+1} = (-1)^{2n}(-1) = -1 \to -1 \ne 1$.

Αν $\lambda < -1$ η $\lambda^{2n} = (\lambda^2)^n \to +\infty$, αφού $\lambda^2 > 1$ ενώ $\lambda^{2n+1} = \lambda(\lambda^{2n}) \to -\infty$, αφού $\lambda < 0$ και $\lambda^{2n} \to +\infty$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9.3. *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| < 1$ ισχύει $n\lambda^n \to 0$. Επιπλέον, για κάθε $p > 0$ ισχύει $n^p\lambda^n \to 0$.*

Απόδειξη: $1/|\lambda| > 1$ άρα υπάρχει $\theta > 0$ ώστε $|\lambda|^{-1} = 1 + \theta$. Επιπλέον

$$(1+\theta)^n > \frac{n(n-1)}{2}\theta^2$$

από το διωνυμικό ανάπτυγμα ($(1+\theta)^n = 1 + n\theta + (n(n-1)\theta^2)/2 + \cdots + \theta^n$). Έτσι

$$n\lambda^n = \frac{n}{(1+\theta)^n} < \frac{2n}{n(n-1)\theta^2} = \frac{2}{(n-1)\theta} \to 0.$$

Τέλος, για $p > 0$ ισχύει

$$|n^p \lambda^n| = (n(|\lambda|^{1/p})^n)^p \to 0^p = 0,$$

αφού $|\lambda|^{1/p} < 1$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9.4. *Για κάθε $a > 0$ ισχύει $\sqrt[n]{a} \to 1$.*

Απόδειξη: Αν $a \geq 1$ τότε $\sqrt[n]{a} \geq 1$. Θέτουμε $v_n = \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0$, οπότε $a = (1 + v_n)^n$. Από την ανισότητα Bernoulli

$$a = (1 + v_n)^n \geq 1 + n v_n$$

και λύνοντας ως προς v_n:

$$0 \leq v_n \leq \frac{a-1}{n}.$$

Η τελευταία ακολουθία είναι μηδενική, οπότε από την Πρόταση 5.4.11, $\lim v_n = 0$. Έτσι

$$\sqrt[n]{a} = 1 + v_n \to 1 + 0 = 1.$$ □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9.5. $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $\sqrt[n]{n} = (\sqrt[2n]{n})^2$, και δείχνουμε πρώτα ότι $\lim \sqrt[2n]{n} = 1$ ακολουθώντας την ίδια απόδειξη με την Πρόταση 5.9.4: θέτουμε $v_n = \sqrt[2n]{n} - 1 \geq 0$ οπότε

$$\sqrt{n} = (1 + v_n)^n \geq 1 + n v_n,$$

και λύνοντας ως προς v_n,

$$0 \leq v_n \leq \frac{\sqrt{n} - 1}{n}.$$

Η τελευταία ακολουθία είναι μηδενική (γιατί;), οπότε (από την Πρόταση 5.4.11) $\lim v_n = 0$. Συνεπώς

$$\sqrt[2n]{n} = 1 + v_n \to 1 + 0 = 1.$$

Τέλος, από την Ιδιότητα 5.4.8,

$$\lim \sqrt[n]{n} = \lim\left(\sqrt[2n]{n}\right)^2 = \left(\lim \sqrt[2n]{n}\right)^2 = 1^2 = 1.$$ □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9.6. *Αν $a_n \to \ell > 0$, τότε $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.*

Απόδειξη: Από τον ορισμό της σύγκλισης (για $\varepsilon = \ell/2 > 0$), υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{R}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε

$$|a_n - \ell| < \frac{\ell}{2}.$$

Συνεπώς
$$\frac{\ell}{2} < a_n < \frac{3\ell}{2},$$
και άρα,
$$\sqrt[n]{\ell/2} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{3\ell/2}.$$
Από την Πρόταση 5.9.4 οι ακολουθίες $\sqrt[n]{\ell/2}$ και $\sqrt[n]{3\ell/2}$ συγκλίνουν στο 1, και άρα από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συγκλίνει στο 1 και η $\sqrt[n]{a_n}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9.7. *Αν $p \in \mathbb{R}$, $a_n \to 0$ και $a_n > -1$ τότε $(1 + a_n)^p \to 1$.*

Απόδειξη: Ανάλογα αν $a_n \geq 0$ ή $a_n \leq 0$ ισχύει $1 \leq (1+a_n)^p \leq (1+a_n)^{[p]+1}$ ή $(1 + a_n)^{[p]} \leq (1 + a_n)^p \leq 1$ αντίστοιχα. Στις παραστάσεις με τον ακέραιο εκθέτη χρησιμοποιούμε το διωνυμικό ανάπτυγμα και παίρνουμε όρια για $a_n \to 0$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9.8. *Αν $a_n \to 0$ τότε $\lim_{n\to\infty} \cos a_n = 1$.*

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες, έχουμε
$$\begin{aligned} |\cos a_n - 1| = |\cos a_n - \cos 0| &= \left| -2\sin\left(\frac{a_n+0}{2}\right)\sin\left(\frac{a_n-0}{2}\right)\right| \\ &= 2\sin^2(a_n/2) \leq \frac{1}{2}a_n^2. \end{aligned}$$
Παίρνοντας όρια προκύπτει το ζητούμενο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9.9. *Αν $a_n \to 0$ και $a_n \neq 0$ τότε*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα
$$\cos\theta \leq \left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right| \leq 1$$
που ισχύει για κάθε $0 < \theta < \pi/2$.

Η a_n τείνει στο 0 οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < a_n < \pi/2$ για κάθε $n \geq n_0$ άρα για αυτά τα n ισχύει
$$\cos a_n \leq \left|\frac{\sin a_n}{a_n}\right| \leq 1$$
και παίρνοντας όρια προκύπτει η ζητούμενη με τη βοήθεια της Πρότασης 5.9.8. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9.10. *Για κάθε ακολουθία $a_n \neq 0$ με $a_n \to 0$ ισχύει*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1.$$

Απόδειξη: Από την Πρόταση 5.7.7, για κάθε $-1 < x < 1$ ισχύει

$$1 + x \le e^x \le \frac{1}{1-x}. \tag{5.11}$$

Χρησιμοποιώντας την a_n στη θέση του x (αφού μετά από κάποιο δείκτη θα βρίσκεται στο διάστημα $(-1,1)$, λόγω του ότι $a_n \to 0$) προκύπτει

$$1 \le \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \le \frac{1}{1 - a_n}$$

για τους θετικούς όρους της a_n, και

$$1 \ge \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \ge \frac{1}{1 - a_n}$$

για τους αρνητικούς όρους της a_n. Παίρνοντας όρια σε κάθε περίπτωση, προκύπτει το ζητούμενο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9.11. *Για κάθε $a > 1$ και για κάθε p, $q > 0$ οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές:*

$$\frac{\log n}{n}, \qquad \frac{\log n}{n^p}, \qquad \frac{\log^q n}{n^p}, \qquad \frac{\log_a n}{n}, \qquad \frac{\log_a n}{n^p}, \qquad \frac{\log_a^q n}{n^p}.$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $\log x \le x - 1$ που ισχύει για κάθε $x \ge 1$. Έχουμε:

$$0 \le \frac{\log n}{n} = \frac{2\log n^{1/2}}{n} \le \frac{2(\sqrt{n} - 1)}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} \to 0,$$
$$0 \le \frac{\log n}{n^p} = \frac{(2/p)\log(n^{p/2})}{n^p} \le \frac{2}{p}\frac{n^{p/2} - 1}{n^p} = \frac{2}{p}\frac{1}{n^{p/2}} - \frac{2}{p}\frac{1}{n^p} \to 0,$$

και

$$0 \le \frac{\log^q n}{n^p} = \left(\frac{\log n}{n^{p/q}}\right)^q \to 0.$$

Τα κλάσματα με τους λογαρίθμους βάσης $a > 1$ προκύπτουν από τα προηγούμενα και τον τύπο $\log_a n = (\log n)/(\log a)$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9.12. *Αν $a > 1$, $a_n \to 0$ και $a_n > -1$ τότε $\log_a(1 + a_n) \to 0$.*

Απόδειξη: Από τη σχέση $\log_a x = (\log x)/(\log a)$ αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για $a = e$. Αλλά αυτό προκύπτει αμέσως από τις ανισότητες $1 - \frac{1}{x} \le \log x \le x - 1$ (Πρόταση 5.7.7). □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9.13. *Αν $a_n \to 0$, $a_n \ne 0$ και $a_n > -1$ τότε*

$$\frac{\log(1 + a_n)}{a_n} \to 1.$$

Απόδειξη: Από την ανισότητα $1 - \frac{1}{x} \le \log x \le x - 1$ προκύπτει αμέσως ότι

$$\frac{1}{1+a_n} \le \frac{\log(1+a_n)}{a_n} \le 1$$

για τους θετικούς όρους της a_n, και

$$\frac{1}{1+a_n} \ge \frac{\log(1+a_n)}{a_n} \ge 1$$

για τους αρνητικούς όρους της a_n. Παίρνοντας όρια προκύπτει το ζητούμενο. □.

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.1. Χρησιμοποιείστε το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών (Πρόταση 5.4.11) για να βρείτε το όριο των ακολουθιών

(i) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

(ii) $b_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

(iii) $c_n = \sqrt[n]{\beta_k n^k + \beta_{k-1} n^{k-1} + \ldots + \beta_1 n + \beta_0}$, όπου $\beta_i > 0$ για $i = 1, 2, \ldots, k$.

(iv) $d_n = \sqrt[n]{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}}$.
(Παρατηρήστε ότι $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \ge 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.2. Αν το $[x]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του αριθμού x (δηλαδή τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν είναι μεγαλύτερος του x), αποδείξτε χρησιμοποιώντας ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[nx]}{n} = x.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ποσότητα $[nx]/n$ είναι ρητός αριθμός. Συμπεράνετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει ακολουθία *ρητών* που συγκλίνει σε αυτόν.

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.3. Αν $x \in \mathbb{R}$ ώστε $\sin x \ne -1/3$ υπολογίστε το όριο της

$$a_n = \frac{x}{1 + (3\sin x)^{3n}},$$

διακρίνοντας περιπτώσεις για το αν η ποσότητα $3\sin x$ είναι απολύτως μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από το 1.

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.4. Υπολογίστε τα όρια:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{4n}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\log n}\right)^n. \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^n. \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\log n}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.5. Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 5.9.6 για να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας a_n με

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\lambda^n+2}{\lambda^{2n}+e^n}}$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda > 0$. (Υπόδειξη: Διακρίνετε τις περιπτώσεις $0<\lambda<1$, $1\le\lambda\le\sqrt{e}$ και $\lambda>\sqrt{e}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.6. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\frac{\sqrt[3]{2n^6+n+1}}{3n^2+1} \qquad \frac{2n^2(3n^3-5n+6)}{(4n^4-1)(2n+3)}$$

$$\frac{\sqrt{5n^5+1}}{\sqrt[4]{3n^{10}+n+1}} \qquad \sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}$$

$$\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n} \qquad \sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n}$$

$$\frac{n^2 3^n-2n9^{n+1}+2}{3n2^{n-1}+5n^2 3^{2n}+4^n} \qquad \frac{a^n+5b^n}{2a^n+7b^n}, \quad a,b>0$$

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+1} \qquad \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$$

$$\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n(1+2+3+\ldots+n)}$$

$$\frac{1}{2^0+2^{n+1}}+\frac{1}{2+2^{n+1}}+\frac{1}{2^2+2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^n+2^{n+1}}$$

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \qquad \underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\dots\sqrt{3}}}}}}_{n-\text{ριζικά}}$$

$$\frac{(2n-1)!}{(3n+1)!} \qquad n!\sin\frac{\lambda}{1}\sin\frac{\lambda}{2}\cdots\sin\frac{\lambda}{n}, \quad \lambda\in(0,1)$$

$$\sqrt[n+3]{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{5}{6}\right)^n} \qquad \left(\frac{3n^2+4n}{4n^2+1}\right)^n$$

$$\left(\frac{2n-1}{3n+7}\right)^n \qquad \sqrt[n]{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+2}$$

$$\sqrt[n]{1+\frac{1}{2n}} \qquad \sqrt[n+1]{n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{n^2+2n}{2n^2+1}} \qquad \sqrt[3n]{\frac{n^2+7n+18}{8n+4}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.7. Αν $z_n \to 0$ βρείτε τα όρια των ακολουθιών:

$$\frac{\sqrt[3]{1+z_n}-1}{z_n} \qquad \frac{(\lambda+z_n)^3-\lambda^3}{z_n}, \quad \lambda>0.$$

$$\frac{\sqrt{z_n+1}-1}{z_n}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.8. Αποδείξτε ότι αν a_n, $b_n > 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\sqrt[n]{a_n}\to 1$, $a_n/b_n \to \ell > 0$ τότε $\sqrt[n]{b_n}\to 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.9. Αποδείξτε ότι για κάθε $a>0$ η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά θέτοντας

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right) \quad \text{και} \quad x_1=a,$$

συγκλίνει σε αριθμό $x>0$ με την ιδιότητα $x^2=a$. (Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι για $a\geq 1$ η x_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη.)

Οι επόμενες δύο ασκήσεις δίνουν ένα αποτελεσματικό τρόπο υπολογισμού της n-στης ρίζας θετικού αριθμού, ορίζοντας μια ακολουθία που συγκλίνει ταχύτατα.

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.10. Χρησιμοποιήστε τη μονοτονία της $(1+x/n)^n$ για να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{(n-1)x+a}{n}\right)^n \geq x^{n-1}a.$$

(Υπόδειξη: Διαιρέστε με x^n και τα δύο σκέλη της ζητούμενης για να αναχθείτε σε μια ανισότητα της μορφής $(1+(b-1)/n)^n \geq b$.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.11. Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη ανισότητα για να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{(k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}}{k}\right)^k \geq a.$$

Με τη βοήθεια αυτού αποδείξετε ότι η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά με

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) \quad \text{και} \quad x_1 = a \geq 1,$$

ικανοποιεί την ανισότητα $a/x_n^k \leq 1$. Στη συνέχεια δείξτε ότι συγκλίνει (είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη), και το όριό της $x > 0$ έχει την ιδιότητα $x^k = a$.

Για $0 < a < 1$ ορίζουμε την k-ρίζα του a εργαζόμενοι με τον $1/a > 1$.

Οι επόμενες δύο ασκήσεις παρέχουν ένα εναλλακτικό τρόπο για να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $x_n = (1 + x/n)^n$ είναι αύξουσα:

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.12. Αποδείξτε ότι η $x_n = (1 + x/n)^n$ είναι γνήσια αύξουσα για $x > 0$ αποδεικνύοντας ότι $x_{n+1}/x_n > 1$ ως εξής: γράψτε πρώτα

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\left(\frac{\frac{n+1+x}{n+1}}{\frac{n+x}{n}}\right)^n,$$

μεταφέρετε όλους τους όρους στον παρονομαστή (ώστε στον αριθμητή να μείνει μονάδα) και εφαρμόστε την ανισότητα Bernoulli.

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.13. Αποδείξτε ότι η $x_n = (1 + x/n)^n$ είναι γνήσια αύξουσα για $x < 0$ και $n > -x$ ως εξής: θεωρήστε την ακολουθία

$$y_n = \left(1 + \frac{|x|}{n - |x|}\right)^n,$$

για κάθε $n > |x| = -x$, και γράφοντας

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{|x|}{n-|x|}\right)^n}{\left(1 + \frac{|x|}{n+1-|x|}\right)^{n+1}} = \frac{1}{1 + \frac{|x|}{n+1-|x|}}\left(\frac{\frac{n}{n-|x|}}{\frac{n+1}{n+1-|x|}}\right)^n$$

μεταφέρετε όλους τους όρους στον παρονομαστή (ο αριθμητής να μείνει μονάδα) και εφαρμόστε την ανισότητα Bernoulli για να δείξετε ότι $y_n/y_{n+1} \geq 1$, δηλαδή η y_n είναι φθίνουσα. Στη συνέχεια παρατηρήστε ότι $y_n = 1/x_n$.

Η ανισότητα Bernoulli ισχύει και για μη ακέραιους εκθέτες. Η επόμενες δύο ασκήσεις μας καθοδηγούν στο να την αποδείξουμε.

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.14. Για κάθε $t > -1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\left(1 + \frac{1}{n}\frac{t}{1+t}\right)^n \leq 1 + t.$$

Η ανισότητα είναι γνήσια, εκτός αν $t = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.15. Για κάθε $\theta > -1$ και για κάθε $p \in \mathbb{R}$ με $p \geq 1$ ισχύει

$$(1+\theta)^p \geq 1 + p\theta.$$

(Υψώστε την ανισότητα της Άσκησης 5.9.14. εις την m/n και εφαρμόστε την ανισότητα Bernoulli για να αποδείξετε τη ζητούμενη με $p = 1 + m/n$, όπου m, $n \in \mathbb{N}$. Μετά χρησιμοποιήστε τη συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης για να περάσετε σε πραγματικούς εκθέτες.)

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.16. Αποδείξτε με διαφορετικό τρόπο ότι η $x_n = (1 + x/n)^n$ είναι γνησίως αύξουσα αν $x \neq 0$ και $n > -x$ ως εξής: πολλαπλασιάστε την ανισότητα της Άσκησης 5.9.14. με $(1+t)^n$ (για $t > -1$) και στη συνέχεια αντικαταστήστε το t με $x/(n+1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.9.17. Αποδείξτε με τον ίδιο τρόπο όπως στο Θεώρημα 5.7.1 ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > -a$ και $x \neq 0$. Για να το καταφέρετε εύκολα, για $x < y$ ξεκινήστε με την παράσταση $((1+a/x)/(1+a/y))^{x/(y-x)}$, μεταφέρετε τον αριθμητή στον παρονομαστή και προετοιμάστε την εφαρμογή της ανισότητας Bernoulli για πραγματικούς αριθμούς όπως στην Άσκηση 5.9.15. Μετά την εφαρμογή της Bernoulli η ποσότητα που θα προκύψει θα είναι μικρότερη της $1 + a/y$ αν και μόνο αν

$$0 \leq \frac{a^2}{y^2}\frac{y-x}{x+a},$$

η οποία είναι αληθής αν $x > -a$, και δεν είναι γνήσια μόνο αν $a = 0$.

Κεφάλαιο 6

lim sup και lim inf

6.1 Το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων

Όπως γνωρίζουμε από το Θεώρημα 5.5.1, μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παρόλο που μπορεί να μην συγκλίνει έχει πάντα συγκλίνουσες υπακολουθίες αν σε αυτές συμπεριλάβουμε και εκείνες που τείνουν στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ (αν η ακολουθία είναι φραγμένη έχει συγκλίνουσα υπακολουθία ενώ αν δεν είναι φραγμένη έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$).

Ας συμβολίσουμε με $\Upsilon(a_n)$—ή απλά με Υ αν είναι σαφές για ποια ακολουθία μιλάμε—το σύνολο όλων των ορίων των υπακολουθιών της a_n. Για παράδειγμα, αν $a_n = (-1)^n(1+1/n)$ τότε $\Upsilon(a_n) = \{-1,+1\}$. Φανερά, αν μια ακολουθία έχει όριο στο $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, κάθε υπακολουθία της τείνει στο όριο της ακολουθίας, οπότε το Υ είναι μονοσύνολο.

Από την άλλη μεριά, υπάρχουν ακολουθίες των οποίων το σύνολο Υ είναι όλο το $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Μια τέτοια ακολουθία είναι η ακολουθία των ρητών αριθμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.1.1. *Θεωρούμε μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και θέτουμε $s := \sup\Upsilon(a_n)$ και $i := \inf\Upsilon(a_n)$. Τότε $s,\ i \in \Upsilon(a_n)$, δηλαδή το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο στο $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Ισοδύναμα, υπάρχουν δυο υπακολουθίες της a_n που η μια τείνει στο s και η άλλη στο i*

Απόδειξη: Αν $s = +\infty$ τότε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ υπάρχει υπακολουθιακό όριο $s_N > N$ (αλλιώς όλα τα υπακολουθιακά όρια είναι μικρότερα ή ίσα του N οπότε και το s). Άρα υπάρχει όρος a_{k_N} της a_n ώστε $a_{k_N} > N$ (αλλιώς αν κάθε όρος της a_n είναι μικρότερος ή ίσος του N τότε η a_n έχει άνω φράγμα το N και δεν γίνεται να έχει υπακολουθία που να συγκλίνει στο $s_N > N$). Έτσι η υπακολουθία a_{k_N} τείνει στο $+\infty = s$. Άρα $s \in \Upsilon(a_n)$

Αν $s = -\infty$ τότε όλα τα υπακολουθιακά όρια της a_n είναι $-\infty$ οπότε $a_n \to -\infty = s$. Άρα $s \in \Upsilon(a_n)$

Έστω τώρα ότι $s \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει στοιχείο $s_n \in \Upsilon(a_n)$ με $s \geq s_n > s - 1/n$ από τον ορισμό του s ως supremum του $\Upsilon(a_n)$. Αφού το s_n είναι υπακολουθιακό όριο της a_n υπάρχει a_{k_n} όρος της a_n ώστε $|s_n - a_{k_n}| < 1/n$. Έτσι, έχουμε

$$|a_{k_n} - s| \leq |a_{k_n} - s_n| + |s_n - s| = |a_{k_n} - s_n| + s - s_n < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \to 0.$$

Συνεπώς η υπακολουθία a_{k_n} της a_n συγκλίνει στο s. Δηλαδή $s \in \Upsilon(a_n)$. Ομοίως, $i \in \Upsilon(a_n)$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1.2. Τα $\sup \Upsilon(a_n)$ και $\inf \Upsilon(a_n)$ ονομάζονται lim sup και lim inf της ακολουθίας a_n ή *ανώτερο* (ή άνω) και *κατώτερο* (ή *κάτω*) *όριο* της ακολουθίας a_n ή *μέγιστο* και *ελάχιστο υπακολουθιακό όριο της* a_n αντίστοιχα. Γράφουμε

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup \Upsilon(a_n) \quad \text{και} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf \Upsilon(a_n),$$

ή απλούστερα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ αντίστοιχα.

Για παράδειγμα, αν $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$ τότε $\Upsilon = \{-1, +1\}$ οπότε $\limsup a_n = +1$ και $\liminf a_n = -1$.

Φανερά ισχύει πάντα η

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n, \tag{6.1}$$

αφού $\inf\{a_k : k \geq n\} \leq \sup\{a_k : k \geq n\}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.1.3. *Κάθε ακολουθία a_n έχει όριο αν και μόνο αν*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

και η κοινή αυτή τιμή είναι το $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Απόδειξη: Αν η a_n έχει όριο το ℓ τότε $\Upsilon(a_n) = \{\ell\}$, αφού κάθε υπακολουθία έχει και αυτή το ίδιο όριο ℓ. Συνεπώς

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf \Upsilon(a_n) = \ell = \sup \Upsilon(a_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Αντιστρόφως, αν $\ell := \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ τότε το $\Upsilon(a_n)$ είναι μονοσύνολο, το μονοσύνολο $\{\ell\}$, αφού το infimum και το supremum του $\Upsilon(a_n)$ συμπίπτουν. Η απόδειξη θα ήταν τετριμμένη αν ξέραμε ότι η a_n συγκλίνει, διότι η a_n είναι υπακολουθία του εαυτού της. Όμως δεν είναι εκ των προτέρων σαφές ότι αυτή συγκλίνει. Για αυτό καταφεύγουμε στο ακόλουθο επιχείρημα. Ας υποθέσουμε ότι η a_n δεν τείνει στο ℓ. Τότε η ακολουθία αυτή δεν είναι ακολουθία Cauchy. Συνεπώς υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $n > m \geq n_0$ ώστε $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$. Εφαρμόζουμε το παραπάνω για $n_0 = 1$ και βρίσκουμε $n_1 > m_1 \geq 1$ ώστε $|a_{n_1} - a_{m_1}| \geq \varepsilon$. Επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο για $n_0 = n_1 + 1$ και βρίσκουμε $n_2 > m_2 \geq n_1 + 1$ ώστε $|a_{n_2} - a_{m_2}| \geq \varepsilon$. Επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο για $n_0 = n_2 + 1$ κοκ. Έτσι βρίσκουμε δύο υπακολουθίες a_{n_k} και a_{m_k} ώστε $|a_{n_k} - a_{n_k}| \geq \varepsilon$.

Καθεμιά από τις ακολουθίες $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ και $(a_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ έχουν υπακολουθίες που τείνουν σε κάποιο όριο (είτε πραγματικό αριθμό αν είναι φραγμένες είτε κάποιο από τα $\pm\infty$ αν δεν είναι φραγμένες). Έστω ότι αυτά τα όρια είναι τα ℓ_1 και ℓ_2 αντίστοιχα. Τότε φανερά $|\ell_1 - \ell_2| \geq \varepsilon$ και ταυτόχρονα $\ell_1, \ell_2 \in \Upsilon(a_n)$ το οποίο είναι άτοπο, αφού το τελευταίο σύνολο είναι μονοσύνολο. □

6.2 Ιδιότητες των lim sup και lim inf

Θα ξεκινήσουμε αποδεικνύοντας ένα «τύπο» για τα lim sup και lim inf. Θεωρούμε μια ακολουθία a_n. Από αυτή ορίζουμε μια άλλη ακολουθία, την $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Φανερά η ακολουθία αυτή είναι φθίνουσα, διότι αν $n_1 > n_2$,

$$\{a_k : k \geq n_1\} \subseteq \{a_k : k \geq n_2\}$$

οπότε

$$b_{n_1} = \sup\{a_k : k \geq n_1\} \leq \sup\{a_k : k \geq n_2\} = b_{n_2}.$$

Άρα η b_n ως φθίνουσα είτε συγκλίνει (αν είναι φραγμένη) είτε αποκλίνει στο $-\infty$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ομοίως, ορίζουμε την ακολουθία $c_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$. Φανερά η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα, διότι αν $n_1 > n_2$,

$$\{a_k : k \geq n_1\} \subseteq \{a_k : k \geq n_2\}$$

οπότε

$$c_{n_1} = \inf\{a_k : k \geq n_1\} \geq \inf\{a_k : k \geq n_2\} = c_{n_2}.$$

Άρα η c_n ως αύξουσα είτε συγκλίνει (αν είναι φραγμένη) είτε αποκλίνει στο $+\infty$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} c_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Η επόμενη πρόταση μάς λέει ότι τα παραπάνω όρια είναι τα lim sup και lim inf της a_n αντίστοιχα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.2.1. *Για κάθε ακολουθία a_n ισχύει*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{a_k : k \geq n\}\right)$$

και

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{a_k : k \geq n\}\right).$$

Απόδειξη: Αν $\limsup a_n = \sup \Upsilon(a_n) = +\infty$ τότε υπάρχει υπακολουθία $a_{k_n} \to +\infty$ οπότε $\sup\{a_k : k \geq n\} = +\infty$ και άρα

$$\lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k : k \geq n\}) = +\infty = \limsup a_n.$$

Αν $\limsup a_n = \sup \Upsilon(a_n) = -\infty$ τότε $\Upsilon(a_n) = \{-\infty\}$ δηλαδή $a_n \to -\infty$. Έτσι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n < -M$. Συνεπώς $\sup\{a_k : k \geq n\} \leq -M$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k : k \geq n\}) = -\infty = \limsup a_n.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $\limsup a_n = s \in \mathbb{R}$, και έστω ότι η υπακολουθία a_{k_n} συγκλίνει στο s (Πρόταση 6.1.1). Έτσι για κάθε $k_n \geq n$ ισχύει $a_{k_n} \in \{a_k : k \geq n\}$ οπότε

$$\sup\{a_k : k \geq n\} \geq a_{k_n}.$$

Παίρνουμε τώρα όριο ως προς n για να καταλήξουμε στην

$$\lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k : k \geq n\}) \geq s.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, εργαζόμαστε με απαγωγή στο άτοπο. Θέτουμε

$$\ell = \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k : k \geq n\}),$$

υποθέτουμε ότι $\ell > s$, και εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = (\ell - s)/2 > 0$, οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\left| \sup\{a_k : k \geq n\} - \ell \right| < \frac{\ell - s}{2}.$$

Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή και προσθέτοντας ℓ προκύπτει ότι

$$\sup\{a_k : k \geq n\} \geq \frac{\ell + s}{2},$$

για κάθε $n \geq n_0$. Άρα υπάρχει υπακολουθία a_{k_n} της a_n ώστε $a_{k_n} \geq (\ell + s)/2$. Περνώντας σε μια συγκλίνουσα υπακολουθία βρίσκουμε υπακολουθιακό όριο μεγαλύτερο του $(\ell + s)/2$, δηλαδή γνησίως μεγαλύτερο του s, το οποίο είναι άτοπο.

Ομοίως εργαζόμαστε για την περίπτωση του lim inf. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.2.2. *Αν για δυο ακολουθίες a_n και b_n υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n \leq b_n$, τότε*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$$

και

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση από την Πρόταση 6.2.1, αφού για $n \geq n_0$ θα ισχύει

$$\sup\{a_k : k \geq n\} \leq \sup\{b_k : k \geq n\}$$

και

$$\inf\{a_k : k \geq n\} \leq \inf\{b_k : k \geq n\}. \qquad \square$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.2.3. *Για κάθε ακολουθία $a_n > 0$ ισχύει*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Απόδειξη: Η δεύτερη ανισότητα στη ζητούμενη είναι ήδη γνωστή (σχέση (6.1)) Η πρώτη ανισότητα έχει την ίδια απόδειξη με την τρίτη, οπότε θα αποδείξουμε μόνο την τρίτη.

Θέτουμε $\ell = \limsup(a_{n+1}/a_n)$ και θεωρούμε ένα οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$. Έτσι, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\sup\left\{\frac{a_{k+1}}{a_k} : k \geq n\right\} \leq \ell + \varepsilon.$$

Άρα αν $n = n_0$ ισχύει

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \ell + \varepsilon, \tag{6.2}$$

για κάθε $k \geq n_0$. Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (6.2) για $k = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots, n-1$ για κάθε n με $n-1 \geq n_0$, παίρνουμε

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq (\ell+\varepsilon)^{n-n_0},$$

αφού στα αριστερά έχουμε $n - n_0$ κλάσματα. Μετά από τις διαγραφές στα αριστερά παίρνουμε ότι $a_n/a_{n_0} \leq (\ell+\varepsilon)^{n-n_0}$. Συνεπώς για κάθε $n \geq n_0 + 1$ ισχύει

$$\sqrt[n]{a_n} \leq (\ell+\varepsilon) \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}}.$$

Άρα για κάθε $n \geq n_0 + 1$

$$\sup\{\sqrt[k]{a_k} : k \geq n\} \leq (\ell+\varepsilon) \sup\left\{\sqrt[k]{\frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}} : k \geq n\right\}.$$

Αφήνοντας το n να πάει στο άπειρο,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup\{\sqrt[k]{a_k} : k \geq n\}\Big) \leq \ell + \varepsilon,$$

διότι το όριο $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{n_0}/(\ell+\varepsilon)^{n_0}}$ υπάρχει και ισούται με 1, οπότε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{\sqrt[k]{\frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}} : k \geq n\right\}\right) &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}} = 1,\end{aligned}$$

από την Πρόταση 6.1.3.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \varepsilon$. Τέλος, αφήνοντας $\varepsilon \to 0^+$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 6.2.1. Γράψτε τις λεπτομέρειες για την απόδειξη της ανισότητας

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

για κάθε ακολουθία $a_n > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 6.2.2. Αποδείξτε ότι και τα τέσσερα όρια της Πρότασης 6.2.3 μπορεί να είναι διαφορετικά, υπολογίζοντάς τα για την ακολουθία

$$a_n = 2^{(-1)^n n - n},$$

και δείχνοντας ότι

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \quad \liminf \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{4}, \quad \limsup \sqrt[n]{a_n} = 1 \quad \text{και} \quad \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty.$$

Κεφάλαιο 7

Αριθμητικοί, γεωμετρικοί και αρμονικοί μέσοι

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις ακολουθίες που προκύπτουν αν υπολογίσουμε αριθμητικούς ή γεωμετρικούς ή αρμονικούς μέσους μιας ακολουθίας. Δυο ακολουθίες a_n και b_n λέγονται *επάλληλες* όταν η b_n είναι αύξουσα, η a_n είναι φθίνουσα και ισχύει $b_n \leq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι έχουμε το εξής «σχήμα» για τους όρους τους:

$$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \ldots \leq b_n \leq a_n \leq \ldots \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1.$$

Παρατηρούμε ότι δυο επάλληλες ακολουθίες πάντα είναι συγκλίνουσες ως μονότονες και φραγμένες (στα παραπάνω η b_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον a_1 και η a_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον b_1). Αν επιπλέον ξέρουμε ότι $a_n - b_n \to 0$ τότε οι επάλληλες ακολουθίες a_n και b_n έχουν το ίδιο όριο.

7.1 Η ακολουθία των αριθμητικών μέσων

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.1.1. *Αν η ακολουθία x_n συγκλίνει στο ℓ τότε και η ακολουθία*

$$a_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

συγκλίνει στο ίδιο όριο.

Απόδειξη: Έστω ότι $\varepsilon > 0$ και $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_n - \ell| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_1$. Για το n_1 επιλέγουμε $n_0 \geq n_1$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\frac{|x_1 - \ell| + |x_2 - \ell| + \ldots + |x_{n_1-1} - \ell|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έτσι για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|a_n - \ell| &= \left| \frac{(x_1 - \ell) + (x_2 - \ell) + \ldots + (x_{n_1} - \ell) + \ldots + (x_n - \ell)}{n} \right| \\
&\leq \frac{|x_1 - \ell| + |x_2 - \ell| + \ldots + |x_{n_1 - 1} - \ell|}{n} + \frac{|x_{n_1} - \ell| + \ldots + |x_n - \ell|}{n} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_1 + 1}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα $a_n \to \ell$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Από την παραπάνω πρόταση μπορούμε άμεσα να να βρούμε τα όρια του αρμονικού μέσου και του γεωμετρικού μέσου της x_n. Αν υποθέσουμε ότι $x_n > 0$ και $\ell > 0$ τότε $x_n^{-1} \to \ell^{-1}$ άρα από την προηγούμενη πρόταση ισχύει

$$\frac{x_1^{-1} + \ldots + x_n^{-1}}{n} \to \ell^{-1}$$

και αντιστρέφοντας το κλάσμα συμπεραίνουμε ότι και ο αρμονικός μέσος συγκλίνει στο ℓ:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \to \ell.$$

Τέλος, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού-αρμονικού μέσου (δείτε Άσκηση 7.1.2.)

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \tag{7.1}$$

και το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει άμεσα ότι

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \to \ell.$$

Μια άμεση γενίκευση των παραπάνω με εντελώς παρόμοια απόδειξη είναι η εξής:

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.1.2. *Αν $x_n \to \ell$ και p_n ακολουθία θετικών όρων με $p_1 + \cdots + p_n \to \infty$ τότε*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \ell.$$

Επιπλέον, αν $x_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\ell > 0$ τότε

$$\lim_{n \to \infty} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} = \ell \quad \text{και} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \cdots + \frac{p_n}{x_n}} = \ell.$$

Απόδειξη: Θέτουμε

$$a_n = \frac{p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + \cdots + p_n}.$$

Αν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_n - \ell| \leq \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_1$. Για το n_1, αφού $p_1 + \cdots + p_n \to +\infty$, επιλέγουμε $n_0 \geq n_1$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\frac{p_1|x_1 - \ell| + \cdots + p_{n_1-1}|x_{n_1-1} - \ell|}{p_1 + \cdots + p_n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έτσι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}
|a_n - \ell| &= \left| \frac{p_1(x_1 - \ell) + \cdots + p_n(x_n - \ell)}{p_1 + \cdots + p_n} \right| \\
&\leq \frac{p_1|x_1 - \ell| + \cdots + p_{n_1-1}|x_{n_1-1} - \ell|}{p_1 + \cdots + p_n} + \frac{p_{n_1}|x_{n_1} - \ell| + \ldots + p_n|x_n - \ell|}{p_1 + \cdots + p_n} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{p_{n_1} + \cdots + p_n}{p_1 + \cdots + p_n} \, \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Για τον αρμονικό μέσο, αφού ℓ, $x_n > 0$ ισχύει $x_n^{-1} \to \ell^{-1}$, άρα από το προηγούμενο

$$\frac{p_1 x_1^{-1} + \cdots + p_n x_n^{-1}}{p_1 + \cdots + p_n} \to \ell^{-1},$$

συνεπώς,

$$\frac{p_1 + \cdots + p_n}{p_1 x^{-1} + \cdots + p_n x^{-1}} \to \ell.$$

Τέλος, το αποτέλεσμα για τον γεωμετρικό μέσο προκύπτει άμεσα από την γενικευμένη ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού-αρμονικού μέσου (δείτε Άσκηση 7.1.2.):

$$\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \geq x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} \geq \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \cdots + \frac{p_n}{x_n}}. \tag{7.2}$$

□

Ένα άμεσο πόρισμα της προηγούμενης πρότασης είναι το εξής θεώρημα γνωστό ως «Λήμμα του Stoltz». Μπορεί να θεωρηθεί και ως ο κανόνας L' Hospital για ακολουθίες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.1.3 (Λήμμα του Stoltz). *Έστω ότι η y_n είναι γνησίως αύξουσα και* $\lim y_n = +\infty$. *Αν*

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \ell \qquad \textit{τότε} \qquad \lim \frac{x_n}{y_n} = \ell.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $x_0 = y_0 = 0$ και υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $y_1 > 0 = y_0$. Παρατηρούμε ότι αν $p_n = y_n - y_{n-1} > 0$ τότε $p_1 + \ldots + p_n = y_n \to +\infty$. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση παίρνουμε ότι

$$\ell = \lim \frac{p_1 \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} + \ldots + p_n \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}}{p_1 + \ldots + p_n} = \lim \frac{x_n}{y_n},$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Με βάση το προηγούμενο, επειδή η $y_n = n$ είναι γνήσια αύξουσα με όριο το $+\infty$, μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim((\log n)/n)$ ως εξής:

$$\begin{aligned}\lim \frac{\log n}{n} &= \lim \frac{\log n - \log(n-1)}{n - (n-1)} \\ &= \lim \log\left(\frac{n}{n-1}\right) = \lim \log\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = 0.\end{aligned}$$

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 7.1.1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ βρείτε το όριο της ακολουθίας

$$\frac{[x] + [2x] + [3x] + \cdots + [nx]}{n^2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7.1.2. Αποδείξτε τις ανισότητες (7.1) και (7.2) ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- Αποδειξτε πρώτα ότι για κάθε $y \geq x > 0$ και για κάθε $\lambda \in [0,1]$ ισχύει
$$(1-\lambda)x + \lambda y \geq x^{1-\lambda} y^{\lambda}.$$
Αυτό μπορεί να γίνει αν διαιρέσετε με το x, θέσετε $z = y/x \geq 1$ και αποδείξετε με τη βοήθεια της παραγώγου ότι η συνάρτηση $\varphi(z) = (1-\lambda) + \lambda z - z^{\lambda}$ είναι αύξουσα για $z \in [1, +\infty)$.
- Παρατηρήστε ότι η ίδια ανισότητα ισχύει και όταν $x \geq y > 0$ θέτοντας $\mu = 1 - \lambda$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο.
- Χρησιμοποιήστε επαγωγή για να δείξετε ότι αν $\lambda_i \in [0,1]$, $x_i > 0$ για $i = 1, \ldots, n$ και $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ τότε
$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}.$$

Για την (7.2) επιλέξτε $\lambda_i = p_i/(p_1 + \ldots + p_n)$ και για την (7.1) επιλέξτε $\lambda_i = 1/n$.

ΑΣΚΗΣΗ 7.1.3. Αποδείξτε το Λήμμα του Stoltz με τον ορισμό του ορίου ως εξής: από τον ορισμό της σύγκλισης θα οδηγηθείτε σε μια ανισότητα που θα σχετίζει τις ποσότητες $y_n - y_{n-1}$ και $x_n - x_{n-1}$. Στη συνέχεια αθροίστε κατά μέλη για όσα n ισχύει η ανισότητα που βρήκατε.

ΑΣΚΗΣΗ 7.1.4. Χρησιμοποιήστε το Λήμμα του Stoltz για να αποδείξετε ότι αν $x_n \to x$ τότε για κάθε $r > 0$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^r x_1 + 2^r x_2 + 3^r x_3 + \cdots + n^r x_n}{n^{1+r}} = \frac{x}{1+r}.$$

7.2 Ο αριθμητικός-αρμονικός μέσος

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.2.1. *Για οποιουσδήποτε αριθμούς a, $b > 0$ θεωρούμε τις ακολουθίες a_n και b_n με $a_1 = (a+b)/2$, $b_1 = 2/(a^{-1} + b^{-1})$,*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \textit{και} \qquad b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}.$$

Τότε οι a_n και b_n συγκλίνουν και ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}.$$

Δηλαδή ο «αριθμητικός-αρμονικός μέσος» *είναι ο γεωμετρικός μέσος.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $a_1 \geq b_1$ και επαγωγικά

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{b_{n-1}}} = b_n \text{ για κάθε } n \geq 2,$$

δηλαδή $a_n \geq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τώρα προκύπτει εύκολα ότι η a_n είναι φθίνουσα και η b_n αύξουσα. Πράγματι,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n \quad \text{και} \quad b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}} \geq \frac{2}{\frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_n}} = b_n.$$

Συνεπώς οι ακολουθίες είναι επάλληλες:

$$0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \ldots \leq a_2 \leq a_1,$$

άρα είναι μονότονες και φραγμένες, συνεπώς συγκλίνουν. Και επειδή $b_1 > 0$ τα όριά τους είναι θετικοί αριθμοί. Αλλά $b_n = 2a_{n+1} - a_n$ άρα

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (2a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

δηλαδή οι ακολουθίες είναι ισοσυγκλίνουσες.

Για τον υπολογισμό του κοινού τους ορίου ℓ παρατηρούμε ότι

$$a_n b_n = a_{n-1} b_{n-1} = \ldots = ab.$$

Παίρνοντας όρια στην προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι $\ell^2 = ab$ δηλαδή $\ell = \sqrt{ab}$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7.2.2. Παρατηρούμε εδώ ότι ο υπολογισμός του κοινού ορίου των a_n και b_n έγινε χρησιμοποιώντας τη συνεχή συνάρτηση $f(x,y) = xy$ η οποία έχει την ιδιότητα $f(a_{n+1}, b_{n+1}) = f(a_n, b_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτή η ταυτότητα μας έδωσε την $f(a_n, b_n) = f(a,b)$ και με τη βοήθεια της συνέχειας της f περάσαμε στο όριο ως προς n. Έτσι προέκυψε η σχέση $f(\ell,\ell) = f(a,b)$ από όπου λύσαμε ως προς ℓ. Αυτή η παρατήρηση είναι σημαντική για την κατανόηση της επόμενης ενότητας.

7.3 Ο αριθμογεωμετρικός μέσος

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.3.1. *Για οποιουσδήποτε αριθμούς a, $b > 0$ θεωρούμε τις ακολουθίες a_n και b_n με $a_1 = (a+b)/2$, $b_1 = \sqrt{ab}$,*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{και} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Τότε οι a_n και b_n συγκλίνουν και ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{x^2+b^2}}\, dx \right)^{-1/2}.$$

Το όριο αυτό ονομάζεται «αριθμογεωμετρικός μέσος» *των a και b.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $a_1 \geq b_1$ και

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \geq \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} = b_n \text{ για κάθε } n \geq 2,$$

άρα $a_n \geq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τώρα προκύπτει εύκολα ότι η a_n είναι φθίνουσα και η b_n αύξουσα. Πράγματι,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n \quad \text{και} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n.$$

Συνεπώς οι ακολουθίες είναι επάλληλες:

$$0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \ldots \leq a_2 \leq a_1,$$

άρα είναι μονότονες και φραγμένες, συνεπώς συγκλίνουν. Και επειδή $b_1 > 0$ τα όριά τους είναι θετικοί αριθμοί. Αλλά $a_n = b_{n+1}^2 / b_n$ οπότε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}^2}{b_n} = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Δηλαδή οι ακολουθίες έχουν το ίδιο όριο $\ell := M(a,b)$. Μένει να υπολογιστεί η τιμή του ορίου.

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.2.2, αναζητούμε μια συνεχή συνάρτηση $I(a,b) : (0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$I(a,b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

Μια τέτοια συνάρτηση έδωσε ο Gauss. Θεωρούμε την

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}\, d\theta.$$

Για να δείξουμε εύκολα ότι έχει τη ζητούμενη ιδιότητα ελέγχουμε πρώτα ότι

$$I(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}\,\sqrt{x^2+b^2}}\, dx,$$

αλλάζοντας μεταβλητή στο τελευταίο ολοκλήρωμα. Συγκεκριμένα θέτουμε $x = b\tan\theta$ (η αλλαγή μεταβλητής αφήνεται ως άσκηση).

Ισχυρισμος: $I(a,b) = I\left((a+b)/2, \sqrt{ab}\right) = I(a_1,b_1)$.

Πράγματι· ξεκινάμε παρατηρώντας ότι επειδή η ποσότητα στο ολοκλήρωμα είναι άρτια ισχύει

$$I(a_1,b_1) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+a_1^2}\sqrt{x^2+b_!^2}}\, dx.$$

Ελέγχουμε ότι η συνάρτηση

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right) : (0,\infty)\to\mathbb{R}$$

είναι συνεχής και 1-1. Συγκεκριμένα $\varphi' > 0$ οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα και $\varphi(0^+) = -\infty$ και $\varphi(+\infty) = +\infty$. Αλλάζοντας λοιπόν μεταβλητή και θέτοντας $x = \varphi(t)$ το ολοκλήρωμα θα αλλάξει από 0 έως $+\infty$. Ελέγχουμε τέλος με απλές πράξεις ότι

$$x^2 + b_1^2 = \frac{1}{4}\left(t + \frac{ab}{t}\right)^2,$$

$$x^2 + a_1^2 = \frac{1}{4t^2}(t^2+b^2)(t^2+a^2)$$

και

$$dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ab}{t^2}\right) dt.$$

Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$\begin{aligned}
I(a_1,b_1) &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2t}\sqrt{t^2+a^2}\,\sqrt{t^2+b^2}\;\frac{1}{2}\left(t+\frac{ab}{t}\right)}\frac{1}{2}\left(1+\frac{ab}{t^2}\right) dt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}\,\sqrt{x^2+b^2}}\, dt \\
&= I(a,b),
\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη του ισχυρισμού.

Τώρα ισχύει

$$I(a,b) = I(a_1,b_1) = \cdots = I(a_n,b_n).$$

Αν υποθέσουμε ότι η I είναι συνεχής στο σημείο (ℓ,ℓ) τότε παιρνόντας όρια, παίρνουμε $I(a,b) = I(\ell,\ell)$. Αλλά εύκολα υπολογίζουμε ότι $I(\ell,\ell) = \pi/(2\ell^2)$. Έτσι $I(a,b) = \pi/(2\ell^2)$, και λύνοντας ως προς ℓ ολοκληρώνουμε την απόδειξη.

Μένει να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} I(a_n,b_n) = I(\ell,\ell)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a_n \geq \ell/2$ και $b_n \geq \ell/2$ Έτσι

$$\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta} \geq \ell/2.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
|I(a_n,b_n) - I(\ell,\ell)| &\leq \int_0^{\pi/2} \left| \frac{1}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}} - \frac{1}{\ell} \right| d\theta \\
&\leq \int_0^{\pi/2} \frac{|a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta - \ell^2|\, d\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}\ \ell\ \left(\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta} + \ell\right)} \\
&\leq \int_0^{\pi/2} \frac{|a_n^2 - \ell^2|\cos^2\theta + |b_n^2 - \ell^2|\sin^2\theta}{(\ell/2)\ell((\ell/2 + \ell))}\, d\theta \\
&\leq \frac{4}{3\ell^3}\,\frac{\pi}{2}\left(|a_n^2 - \ell^2| + |b_n^2 - \ell^2|\right) \to 0.
\end{aligned}$$

□

Μπορούμε επιπλέον να δούμε ότι η ταχύτητα της σύγκλισης είναι εκθετική:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} &= \frac{a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2}{(a_n - b_n)(a_{n+1} + b_{n+1})} = \frac{1}{4}\frac{a_n - b_n}{a_{n+1} + b_{n+1}} \\
&= \frac{a_n - b_n}{2(a_n + b_n) + 4b_{n+1}} \\
&\leq \frac{a_n - b_n}{2(a_n + b_n)} \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Οπότε επαγωγικά

$$0 \leq a_n - b_n \leq \frac{1}{2^n}(a_1 - b_1).$$

Μέρος II

Σειρές

Κεφάλαιο 8

Γενικά περί σειρών

8.1 Ορισμοί

Θεωρούμε μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και ορίζουμε μια νέα ακολουθία $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ θέτοντας

$$s_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Η νέα αυτή ακολουθία ονομάζεται σειρά της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Κάθε όρος s_N ονομάζεται *το N-στο μερικό άθροισμα της ακολουθίας* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Αλλιώς, σειρά της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων των όρων της.

Αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων s_N συγκλίνει, το όριό της το συμβολίζουμε με $a_1 + a_2 + \cdots + a_N + \ldots$ ή με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Συχνά, παραβιάζεται η τυπική αυτή γλώσσα, και λέμε «η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$» επειδή με αυτό το συμβολισμό είναι προφανές ποια είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων και ποιο είναι το όριο. Αν το όριο δεν υπάρχει λέμε ότι «η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει» εννοώντας βεβαίως ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει.

Οι σειρές λοιπόν, δεν είναι παρά ειδικού τύπου ακολουθίες που παράγονται από μια άλλη ακολουθία προσθέτοντας τους όρους της «με τη σειρά που εμφανίζονται».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8.1.1. Ας θεωρήσουμε ένα αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ και θέτουμε $a_n = \lambda^n$, δηλαδή η a_n είναι η γεωμετρική ακολουθία με λόγο λ. Η σειρά αυτής της ακολουθίας ονομάζεται *γεωμετρική σειρά με λόγο* λ. Αν $\lambda = 1$ τότε φανερά

$$s_N = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{N} = N \to \infty.$$

Θα υπολογίσουμε τώρα αυτή τη σειρά, δηλαδή τα μερικά αθροίσματα s_N, υπό την προϋπόθεση ότι $\lambda \neq 1$:

$$s_N = \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots + \lambda^N = \sum_{n=1}^{N} \lambda^n.$$

Για να βρούμε το όριο αυτής της ακολουθίας θα υπολογίσουμε το s_N ως εξής: παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(1-\lambda)s_N &= (1-\lambda)(\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots + \lambda^N)\\ &= \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots + \lambda^N - \lambda^2 - \lambda^3 - \cdots - \lambda^N - \lambda^{N+1}\\ &= \lambda - \lambda^{N+1}.\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$s_N = \frac{\lambda(1-\lambda^N)}{1-\lambda}.$$

Αν $-1 < \lambda < 1$ ισχύει $\lim_{N\to\infty} \lambda^N = 0$, συνεπώς $s_N \to \lambda/(1-\lambda)$. Λέμε λοιπόν ότι η σειρά συγκλίνει στο $\lambda/(1-\lambda)$ και αντί για $s_N \to \lambda/(1-\lambda)$ γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Αν $\lambda > 1$ τότε επειδή $\lim_{N\to\infty} \lambda^N = \infty$ συμπεραίνουμε ότι $s_N \to \infty$, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \infty$, και λέμε ότι η σειρά αυτή «απειρίζεται» ή αποκλίνει στο άπειρο· σε κάθε περίπτωση δεν συγκλίνει.

Το να μην συγκλίνει μια σειρά δεν σημαίνει ότι αποκλίνει στο άπειρο. Ας πάρουμε για παράδειγμα τη σειρά της ακολουθίας $a_n = (-1)^n$, δηλαδή τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Για να βρούμε αν συγκλίνει αυτή η σειρά πρέπει να ελέγξουμε αν συγκλίνουν τα μερικά της αθροίσματα. Αλλά αν ο δείκτης N της s_N είναι άρτιος τότε $s_N = 0$ ενώ αν ο N είναι περιττός, τότε $s_N = -1$. Δηλαδή, $s_{2N} = 0 \to 0$ και $s_{2N-1} = -1 \to -1$. Άρα η σειρά αυτή δεν συγκλίνει (χωρίς να «απειρίζεται»). Γενικότερα, αν $\lambda \leq -1$ η γεωμετρική σειρά αποκλίνει. Πράγματι,

$$s_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} \lambda^n = \frac{\lambda(1-\lambda^{2N})}{1-\lambda} \to \infty$$

ενώ

$$s_{2N-1} = \sum_{n=1}^{2N-1} \lambda^n = \frac{\lambda(1-\lambda^{2N-1})}{1-\lambda} \to -\infty,$$

(ελέγξτε τα πρόσημα των παραπάνω κλασμάτων) και συνεπώς η s_N έχει δυο υπακολουθίες με διαφορετικό όριο, άρα η ίδια δεν συγκλίνει.

Πολλές φορές χρειαζόμαστε να προσθέσουμε όρους μιας ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξεκινώντας όχι από τον a_1 αλλά από κάποιον από τους επόμενους όρους. Αυτό μπορεί να συμβαίνει είτε επειδή μας χρειάζεται κάτι τέτοιο ή επειδή η ακολουθία δεν έχει a_1 (ή και κάποιους ακόμα) όρους. Για παράδειγμα, η $a_n = (n-1)^{-1}(n-5)^{-1}$ δεν ορίζεται ούτε για $n = 1$ ούτε για $n = 5$. Έτσι και πάλι θα ονομάζουμε «σειρά» την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της μορφής

$$s_N = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_N$$

με όριο το $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Όπως και πριν, κατά παράβαση αυτής της τυπικής γλώσσας, θα λέμε «η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$» μια και από αυτή την έκφραση καταλαβαίνουμε αμέσως πιο είναι το μερικό άθροισμα και ποιο το όριο (αν υπάρχει).

Φράσεις όπως «σειρά της $(n-1)^{-1}(n-5)^{-1}$» δεν είναι σαφής και θα πρέπει να ξεκαθαριστεί αν εννοούμε την $\sum_{n=6}^{\infty}(n-1)^{-1}(n-5)^{-1}$ ή την $\sum_{n=7}^{\infty}(n-1)^{-1}(n-5)^{-1}$ ή κάτι άλλο. Όμως η φράση «η σειρά της $(n-1)^{-1}(n-5)^{-1}$ συγκλίνει» έχει νόημα σύμφωνα με την επόμενη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.1.2. *Για κάθε ακολουθία a_n που ορίζεται για $n \geq k \in \mathbb{N}$ και για κάθε n_1, $n_2 \geq k$ η σειρά $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=n_2}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $n_2 > n_1$ και θέτουμε

$$s_N = \sum_{n=n_1}^{N} a_n = a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_N$$

και

$$t_N = \sum_{n=n_2}^{N} a_n = a_{n_2} + a_{n_2+1} + \cdots + a_N$$

για κάθε $N \geq n_2$. Φανερά

$$s_N = t_N + (a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2-1}).$$

Άρα η s_N συγκλίνει αν και μόνο αν η t_N συγκλίνει, αφού διαφέρουν κατά μια σταθερή ποσότητα. □

Στη συνέχεια θα εργαζόμαστε εν γένει με σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αλλά όλα τα αποτελέσματα με τις προφανείς τροποποιήσεις ισχύουν και για σειρές της μορφής $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, για οποιοδήποτε $n_0 \in \mathbb{N}$.

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 8.1.1. Υπολογίστε τις γεωμετρικές σειρές:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}.$$

8.2 Πράξεις με σειρές

Εξαιτίας των ιδιοτήτων των συγκλινουσών ακολουθιών έχουμε την εξής συνέπεια.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.2.1. *Έστω ότι οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών και οι σειρές τους $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν. Τότε για κάθε πραγματικό αριθμό λ οι σειρές*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) \quad \textit{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

συγκλίνουν, και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Απόδειξη: Φανερά ισχύουν οι

$$\sum_{n=1}^{N} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{N} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} b_n,$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Παίρνοντας όρια για $N \to \infty$ προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. □

Το αντίστροφο δεν είναι σωστό. Μπορεί να συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ αλλά να αποκλίνουν οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Για παράδειγμα, η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

συγκλίνει ως γεωμετρική σειρά με λόγο $1/2$ αλλά καμιά από τις $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n} - 1)$ δεν συγκλίνουν (γιατί;).

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 8.2.1. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά: $\displaystyle\sum_{n=1}^{n} (a_n - e^{-n})$.

ΑΣΚΗΣΗ 8.2.2. Αν γνωρίζετε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$ υπολογίστε τις σειρές

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!\,(n+1)}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!}$.

Γενικά αν έχουμε να υπολογίσουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n!},$$

όπου το $\varphi(n)$ είναι ακέραιο πολυώνυμο του n, γράφουμε πρώτα το πολυώνυμο στη μορφή

$$A_0 + A_1 n + A_2 n(n-1) + A_3 n(n-1)(n-2) + \cdots + A_k n(n-1)\ldots(n-k+1),$$

όπου k ο βαθμός του $\varphi(n)$. Με βάση αυτή την παρατήρηση λύστε την παρακάτω άσκηση.

ΑΣΚΗΣΗ 8.2.3. Υπολογίστε τις σειρές

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3n+2}{n!}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^3}{n!}$

Αν έχουμε να υπολογίσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)x^n$ όπου το $\varphi(n)$ είναι ακέραιο πολυώνυμο του n, τότε θέτουμε s_N για το μερικό άθροισμα της σειράς και υπολογίζουμε την ποσότητα $(1-x)s_n = s_N - xs_N$. Αυτό θα μας οδηγήσει σε νέες σειρές του ίδιου τύπου όπου η νέα $\varphi(n)$ θα έχει χαμηλότερο βαθμό από την αρχική. Με βάση αυτή την παρατήρηση λύστε την ακόλουθη άσκηση.

ΑΣΚΗΣΗ 8.2.4. Υπολογίστε τις σειρές

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3^n}$

ΑΣΚΗΣΗ 8.2.5. Δείξτε ότι για $|\lambda| < 1$ ισχύει $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^{n-1} = \frac{1}{(1-\lambda)^2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 8.2.6. Δείξτε ότι για $|\lambda| < 1$ ισχύει $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\lambda^{n-1} = \frac{1+\lambda}{(1-\lambda)^3}$.

Κεφάλαιο 9

Θεωρητικά κριτήρια σύγκλισης σειρών

9.1 Το κριτήριο φράγματος

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.1.1 (Κριτήριο φράγματος). *Αν* $a_n \geq 0$ *και η* $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ *είναι φραγμένη ακολουθία τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει. Αν δεν είναι φραγμένη απειρίζεται.*

Απόδειξη: Επειδή $a_n \geq 0$ η s_N είναι αύξουσα· και επειδή είναι και φραγμένη συγκλίνει (Θεώρημα 5.5.1). Αν δεν είναι φραγμένη η s_N τότε δεν είναι άνω φραγμένη επειδή είναι αύξουσα. Έτσι, για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $s_{N_0} \geq M$. Οπότε επειδή είναι και αύξουσα, για κάθε $N \geq N_0$ ισχύει $s_N \geq s_{N_0} \geq M$, δηλαδή $s_N \to \infty$. □

Ένα πολύ ενδιαφέρον και χρήσιμο παράδειγμα προκύπτει από την Άσκηση 4.2.4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.1.2. Για κάθε $p > 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ συγκλίνει. Πράγματι, από την Άσκηση 4.2.4.

$$s_N = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{N^p} \leq \frac{p}{p-1},$$

δηλαδή είναι φραγμένη· και επειδή $1/n^p \geq 0$, από την προηγούμενη πρόταση η σειρά συγκλίνει. Για $0 < p < 1$ η σειρά αποκλίνει αφού δεν είναι άνω φραγμένη (Άσκηση 4.2.4.). Τέλος για $p = 1$ δεν είναι άνω φραγμένη, αφού $s_{2^N} \geq 2^{-1}N$ (Άσκηση 4.2.4. ή 9.1.1.).

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 9.1.1. Αποδείξτε ότι η σειρά $s_N = \sum_{n=1}^{N} 1/n$ δεν είναι άνω φραγμένη αποδεικνύοντας ότι $s_{2^N} \geq 2^{-1}N$ ως εξής: ομαδοποιήστε τα κλάσματα της s_{2^N} ανά 2^n κλάσματα γράφοντας

$$
\begin{aligned}
s_{2^N} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^N} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(\frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \cdots + \frac{1}{2^3}\right) + \\
&\qquad + \cdots + \left(\frac{1}{2^{N-1}+1} + \frac{1}{2^{N-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right),
\end{aligned}
$$

και αντικαταστήστε σε κάθε παρένθεση όλα τα κλάσματα με το μικρότερο κλάσμα της παρένθεσης.

ΑΣΚΗΣΗ 9.1.2. Αποδείξτε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ είναι συγκλίνουσα.

9.2 Το κριτήριο Cauchy

Όπως γνωρίζουμε από τις ακολουθίες (Θεώρημα 5.5.5), κάθε ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy. Έτσι το ίδιο ισχύει και για την ακολουθία $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ των μερικών αθροισμάτων οποιασδήποτε ακολουθίας. Σε αυτή την περίπτωση, εξαιτίας της μορφής που έχουν οι όροι s_N, η ιδιότητα Cauchy παίρνει και αυτή μια ειδική μορφή. Παρατηρούμε ότι αν οι $N > M$ είναι φυσικοί αριθμοί, και s_N είναι τα μερικά αθροίσματα της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε

$$
\begin{aligned}
|s_N - s_M| &= \left| \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{M} a_n \right| \\
&= \big| (a_1 + a_2 + \cdots + a_N) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_M) \big| \\
&= \left| \sum_{n=M+1}^{N} a_n \right|,
\end{aligned}
$$

αφού όλοι οι όροι της a_n μέχρι και τον a_M θα διαγραφούν. Έτσι καταλήγουμε στην ακόλουθη πρόταση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.2.1 (Ιδιότητα Cauchy). *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $N > M \geq N_0$ να ισχύει*

$$
\left| \sum_{n=M+1}^{N} a_n \right| < \varepsilon. \qquad \square
$$

Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, θα έχει την παραπάνω ιδιότητα για κάθε $N > M \geq N_0$ άρα και για $N = M + 1$. Δηλαδή

$$\left| \sum_{n=M+1}^{M+1} a_n \right| < \varepsilon.$$

Αλλά το τελευταίο άθροισμα δεν είναι παρά η ποσότητα $|a_{M+1}|$. Καταλήξαμε έτσι στο ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $M \geq N_0$ να ισχύει $|a_{M+1}| < \varepsilon$. Ισοδύναμα, για κάθε $n \geq N_0 + 1$ ισχύει $|a_n| < \varepsilon$, δηλαδή η ακολουθία a_n είναι μηδενική.

ΠΟΡΙΣΜΑ 9.2.2. *Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

□

Το πόρισμα αυτό αποτελεί και ένα εύκολο κριτήριο *μη σύγκλισης σειρών*. Διότι αν ξέρουμε για μια ακολουθία a_n ότι αυτή δεν είναι μηδενική, τότε αποκλείεται, με βάση αυτό το πόρισμα, να συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Για παράδειγμα, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

δεν συγκλίνει διότι η ακολουθία $(n/(n+1))^n$ δεν είναι μηδενική. Πράγματι:

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \to \frac{1}{e} \neq 0.$$

Αυτός είναι ο *πρώτος* έλεγχος που κάνουμε σε μια σειρά όταν προσπαθούμε να διαγνώσουμε αν αυτή συγκλίνει ή όχι, διότι είναι συνήθως ο απλούστερος.

Το αντίστροφο του παραπάνω πορίσματος δεν είναι σωστό όπως φαίνεται εύκολα στο επόμενο παράδειγμα.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει παρόλο που $1/\sqrt{n} \to 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} s_N &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{N}} \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{N}}}_{N-\text{κλάσματα}} = N\frac{1}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}. \end{aligned}$$

Δηλαδή $s_N \geq \sqrt{N}$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$, συνεπώς $s_N \to \infty$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ αποκλίνει (απειρίζεται). (Δείτε και Άσκηση 4.2.4. από όπου προκύπτει αμέσως ότι για όλα τα $0 < p < 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ απειρίζεται.)

Την ίδια συμπεριφορά έχει και η ακολουθία $1/n$. Παρόλο που $1/n \to 0$ εν τούτοις

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Η σειρά της $1/n$ ονομάζεται *αρμονική σειρά*. Το ότι αποκλίνει (απειρίζεται) μπορεί να αποδειχθεί με διάφορους τρόπους (δείτε Ασκήσεις 9.1.1., 4.2.4., 9.2.3. και 9.2.4.). Ίσως ο πιο γρήγορος τρόπος απόδειξης ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει είναι ο ακόλουθος: υποθέτουμε ότι η σειρά συγκλίνει και θέτουμε $\ell = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Τότε

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\
&\geq \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) \\
&\geq \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Παίρνουμε τώρα όριο με $n \to \infty$ από όπου προκύπτει αμέσως $\ell \geq \frac{1}{2} + \ell$ το οποίο είναι άτοπο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9.2.3. Λέμε ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μιας ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει απόλυτα αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ της ακολουθίας $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, πολλές φορές αντί για τη φράση «συγκλίνει» χρησιμοποιούμε τη φράση «συγκλίνει απλά» σε αντιδιαστολή με τη φράση «συγκλίνει απόλυτα».

Μια άλλη συνέπεια της ιδιότητας Cauchy είναι η ακόλουθη.

ΠΟΡΙΣΜΑ 9.2.4. *Αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει και απλά.*

Απόδειξη: Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε ικανοποιεί την ιδιότητα Cauchy. Αλλά τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $N > M \geq N_0$ να ισχύει $\sum_{n=M+1}^{N} |a_n| < \varepsilon$. Αλλά από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\left| \sum_{n=M+1}^{N} a_n \right| \leq \sum_{n=M+1}^{N} |a_n| < \varepsilon,$$

δηλαδή και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ικανοποιεί την ιδιότητα Cauchy, άρα συγκλίνει. □

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 9.2.1. Εξετάστε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 9.2.2. [Abel-Pringsheim] Αποδείξτε ότι αν η $a_n \geq 0$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία και η σειρά της συγκλίνει, τότε $na_n \to 0$. Συμπεράνετε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ δεν συγκλίνει.

Υπόδειξη: Αν s_n το μερικό άθροισμα της σειράς της a_n αποδείξτε ότι $s_{2n} - s_n \geq na_{2n}$.

ΑΣΚΗΣΗ 9.2.3. Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n$$

και

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

είναι επάλληλες, δηλαδή ότι $x_n \leq y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η x_n είναι αύξουσα και η y_n είναι φθίνουσα. Συμπεράνετε ότι συγκλίνουν, και από αυτό αποδείξτε ότι

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to \infty.$$

ΑΣΚΗΣΗ 9.2.4. Αποδείξτε ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει, ως εξής: αν $s_N = \sum_{n=1}^{N} 1/n$ το μερικό άθροισμα της αρμονικής σειράς, τότε

$$e^{s_N} = \prod_{n=1}^{N} e^{1/n} \geq N + 1,$$

χρησιμοποιώντας σε κάθε όρο του γινομένου την ανισότητα $e^x \geq 1+x$ για $x \in \mathbb{R}$ και κάνοντας τις απλοποιήσεις που προκύπτουν στο γινόμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 9.2.5. Αποδείξτε ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει ως εξής: δείξτε ότι

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

και συμπεράνετε ότι λόγω αυτού τα μερικά αθροίσματα της αρμονικής σειράς δεν είναι ακολουθία Cauchy.

9.3 Το κριτήριο σύγκρισης

Το ακόλουθο κριτήριο έχει ακριβώς την ίδια απόδειξη με την απόδειξη της Πρότασης 9.2.4.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.3.1 (Κριτήριο σύγκρισης). *Αν για δυο ακολουθίες a_n, $b_n > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $a_n \le b_n$ για κάθε $n \ge n_0$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη: Αφού η σειρά της b_n συγκλίνει συμπεραίνουμε ότι η σειρά αυτή ικανοποιεί την ιδιότητα Cauchy. Έτσι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με $N_0 \ge n_0$ (αλλιώς επιλέγουμε το n_0 στη θέση του N_0) ώστε για κάθε $N > M \ge N_0$ να ισχύει

$$\left| \sum_{n=M+1}^{N} b_n \right| < \varepsilon.$$

Αλλά $0 \le a_n \le b_n$ για κάθε $n \ge N_0$ οπότε

$$\left| \sum_{n=M+1}^{N} a_n \right| = \sum_{n=M+1}^{N} a_n \le \sum_{n=M+1}^{N} b_n = \left| \sum_{n=M+1}^{N} b_n \right| < \varepsilon,$$

συνεπώς και η σειρά της a_N έχει την ιδιότητα Cauchy, άρα συγκλίνει.

Αν τώρα η $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ αποκλίνει, επειδή $a_n \ge 0$ συμπεραίνουμε ότι $s_N \to \infty$. Αλλά για κάθε $N \ge n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} b_n &= \sum_{n=1}^{n_0-1} b_n + \sum_{n=n_0}^{N} b_n \\ &\ge \sum_{n=1}^{n_0-1} b_n + \sum_{n=n_0-1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{n_0} b_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n + \sum_{n=1}^{N} a_n \to \infty. \end{aligned}$$

Άρα και η $\sum_{n=1}^{N} b_n$ αποκλίνει. □

Η απόδειξη του παρακάτω κριτηρίου ανάγεται στο προηγούμενο.

ΠΟΡΙΣΜΑ 9.3.2 (Κριτήριο οριακής σύγκρισης). *Αν για δυο ακολουθίες a_n, $b_n > 0$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \ell > 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης με $\varepsilon = \ell/2$. Οπότε υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ $|a_n/b_n - \ell| < \ell/2$. Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή και πολλαπλασιάζοντας με b_n συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2}\ell\, b_n < a_n < \frac{3}{2}\ell\, b_n.$$

Έτσι, από το Θεώρημα 9.3.1 αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)\ell b_n$, άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (Πρόταση 8.2.1 για $\lambda = 2/\ell$). Επιπλέον, αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty}(3/2)\ell b_n$ (Πρόταση 8.2.1 για $\lambda = (3/2)\ell$). οπότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Το επόμενο πόρισμα είναι απλό αλλά ιδιαίτερα χρήσιμο.

ΠΟΡΙΣΜΑ 9.3.3 (Κριτήριο σύγκρισης λόγων). *Αν για τις ακολουθίες a_n, $b_n > 0$ ισχύει*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

για καθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

- *αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*
- *αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη: Φανερά, μετά τις απαλοιφές, ισχύει

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1 \le \frac{b_n}{b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} a_1 = \frac{a_1}{b_1} b_n,$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως από το Θεώρημα 9.3.1. □

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 9.3.1. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(n+1)/n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n^2 + n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{3n^2 + 2n + 7}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9.3.2. Αποδείξτε με το κριτήριο σύγκρισης ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 e^{-n^6}$ συγκλίνει, συγκρίνοντας την ακολουθία $n^5 e^{-n^6}$ με την e^{-n}.

ΑΣΚΗΣΗ 9.3.3. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n^a}, \ a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 9.3.4. Χρησιμοποιήστε το οριακό κριτήριο σύγκρισης για να ελέγξετε τη σύγκλιση των σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-1/n}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1).$$

ΑΣΚΗΣΗ 9.3.5. Αν για $a_n \geq 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει εξετάστε τη σύγκλιση των σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p,\ p \geq 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}.$$

9.4 Τηλεσκοπικές σειρές

Ξεκινάμε με τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9.4.1. Αν η ακολουθία a_n γράφεται ως $b_{n+1} - b_n$ για κάποια *άλλη* ακολουθία b_n, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ονομάζεται *τηλεσκοπική*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.4.2. *Έστω ότι a_n και b_n ακολουθίες για τις οποίες ισχύει $a_n = b_{n+1} - b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim b_n$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1.$$

Απόδειξη: Πράγματι,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a_n &= \sum_{n=1}^{N} (b_{n+1} - b_n) \\ &= (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \cdots + (b_{N+1} - b_N) \\ &= b_{N+1} - b_1.\end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} (b_{N+1} - b_1) = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1. \qquad \square$$

Με βάση τα παραπάνω, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(n+1)^{-1}$ συγκλίνει διότι

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \left(-\frac{1}{n+1}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right).$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1.$$

9.4.1 Το κριτήριο Dini-Kummer

Ένα πόρισμα που συνδυάζει το θεώρημα για τις τηλεσκοπικές σειρές και το κριτήριο σύγκρισης είναι και ένα από τα πλέον ισχυρά κριτήρια, γνωστό ως κριτήριο Dini-Kummer.

ΠΟΡΙΣΜΑ 9.4.3 (Κριτήριο Dini-Kummer). *Για τις ακολουθίες a_n, $b_n > 0$ θέτουμε*

$$\mathrm{dk}_n = \frac{a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}}{a_n}.$$

Αν $\lim \mathrm{dk}_n > 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{dk}_n \leq 0$ για κάθε $n \geq n_0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-1}$ αποκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη: Αν θέσουμε $\lambda = (\lim \mathrm{dk}_n)/2 > 0$ τότε υπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\mathrm{dk}_n \geq \lambda$. Συνεπώς,

$$0 < a_n \leq \frac{1}{\lambda}(a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}) \tag{9.1}$$

Από την (9.1) η ακολουθία $a_n b_n$ είναι φθίνουσα. Και επειδή είναι και θετική, είναι φραγμένη και άρα συγκλίνει. Έτσι η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ συγκρίνεται με την τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty}(a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1})$ η οποία συγκλίνει (στο $a_{n_0} b_{n_0} - \lim a_n b_n$). Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν τώρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\mathrm{dk}_n \leq 0$ τότε $a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \leq 0$ οπότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n \geq a_{n-1}(b_{n-1}/b_n)$ οπότε

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{1/b_n}{1/b_{n-1}}$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως από το κριτήριο σύγκρισης λόγων (Πόρισμα 9.3.3). □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 9.4.4. Αν $\lim \mathrm{dk}_n < 0$ τότε υπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{dk}_n \leq 0$, δηλαδή ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη του κριτηρίου Dini-Kummer. Το αντίστροφο όμως δεν είναι αληθές.

Με το κριτήριο Dini-Kummer μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε τη σύγκλιση της σειράς της $1/n^p$ για $p \neq 1$. Πράγματι, θέτουμε θέτουμε $b_n = n - 1$ για κάθε $n \geq 2$. Έτσι για $a_n = 1/n^p$ ισχύει

$$\mathrm{dk}_n = \frac{(n-1)/n^p - n/(n+1)^p}{1/n^p} = n\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right) - 1,$$

με όριο τον αριθμό $p - 1$ (Άσκηση 9.4.1.). Άρα σύμφωνα με το κριτήριο Dini-Kummer η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει για $p < 1$.

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 9.4.1. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right) = p,$$

γράφοντας

$$(n+1)\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right) = p\,\frac{1-e^{p\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}}{p\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}\,\frac{\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}},$$

και χρησιμοποιώντας τα βασικά όρια των Προτάσεων 5.9.10 και 5.9.13.

ΑΣΚΗΣΗ 9.4.2. Υπολογίστε τις τηλεσκοπικές σειρές:

$$\sum_{n=n_a}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)},\ \text{για } n_a > a,\ a\in\mathbb{R}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\left(1-\frac{2}{n+1}\right),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}\log\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\left(ne^{-n}(e^{-1}-1+e^{-n-1})\right),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^n}\left(\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 9.4.3. Αποδείξτε ότι αν $a_n = A\varphi(n) + B\varphi(n+1) + C\varphi(n+2)$ με $A+B+C=0$ τότε ισχύει

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = A\varphi(1) - C\varphi(2) - A\varphi(n+1) + C\varphi(n+2),$$

και με τη βοήθεια αυτού υπολογίστε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}.$$

(Υπόδειξη: για την τελευταία σειρά $\varphi(n) = 1/n$.)

ΑΣΚΗΣΗ 9.4.4. Αποδείξτε το κριτήριο Dini-Kummer για την περίπτωση που δεν υπάρχει το όριο της dk_n. Συγκεκριμένα αποδείξτε ότι αν $\liminf \mathrm{dk}_n > 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, ενώ αν $\limsup \mathrm{dk}_n < 0$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-1}$ αποκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

9.5 Το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy

Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία a_n είναι θετική και φθίνουσα, και θέλουμε να ελέγξουμε τη σύγκλιση της σειράς της. Δεδομένου του ότι είναι φθίνουσα, χρειαζόμαστε άραγε όλους τους όρους της ή μήπως μπορούμε κάποιους να τους απορρίψουμε; Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \cdots &\le a_1 + a_1 + a_3 + a_3 + a_5 + a_5 + \cdots \\ &\le 2(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots). \end{aligned}$$

Δηλαδή αν συγκλίνει η σειρά των όρων με περιττό δείκτη συγκλίνει και η αρχική σειρά. Βεβαίως, δεν υπάρχει κάτι «μαγικό» στους όρους με περιττό δείκτη. Διότι ισχύει και

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \cdots &\le a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_6 + \cdots \\ &\le a_1 + 2(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots). \end{aligned}$$

Άρα αν η σειρά των όρων με άρτιους δείκτες συγκλίνει τότε συγκλίνει και η αρχική σειρά. Μάλιστα η σύγκλιση είναι «αν και μόνο αν». Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \cdots &\ge a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_6 + a_6 + \cdots \\ &\le 2(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots), \end{aligned}$$

οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ συγκλίνει.

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι αυτό το τέχνασμα μπορεί να επεκταθεί και να ελέγξουμε τη σύγκλιση μιας σειράς θετικής και φθίνουσας ακολουθίας ελέγχοντας αν συγκλίνει η σειρά αφού της αφαιρέσουμε περισσότερους όρους. Δοκιμάστε για παράδειγμα να δείξετε όπως παραπάνω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n}$ συγκλίνει.

Μέχρι πού μπορεί να επεκταθεί αυτό το τέχνασμα; Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει μια απάντηση. Έστω ότι η k_n είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Θέλουμε να εφαρμόσουμε το παραπάνω τέχνασμα από τον όρο a_{k_n} έως τον $a_{k_{n+1}}$. Αν οι αποστάσεις των k_n από τους k_{n+1} δεν «αυξάνουν ραγδαία» το παραπάνω τέχνασμα λειτουργεί:

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.5.1 (Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy). *Έστω ότι η a_n είναι μια μη αρνητική και φθίνουσα ακολουθία και η k_n είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών για την οποία υπάρχει αριθμός $M > 0$ ώστε*

$$k_{n+1} - k_n \le M(k_n - k_{n-1})$$

για κάθε $n \ge 2$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (k_{n+1} - k_n) a_{k_n}$ συγκλίνει.

Απόδειξη: Επειδή η k_n είναι γνησίως αύξουσα εύκολα ελέγχουμε με επαγωγή ότι $k_n \ge n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (Άσκηση 3.2.2.). Άρα, αν

s_N είναι το μερικό άθροισμα της σειράς της a_n, επειδή $N+1 \le k_{N+1}$ (οπότε $N \le k_{N+1} - 1$) ισχύει:

$$\begin{aligned} s_N &\le s_{k_{N+1}-1} \\ &\le a_1 + \cdots + a_{k_1-1} + \underbrace{a_{k_1} + \cdots + a_{k_2-1}}_{k_2-k_1 \text{ όροι}} + \cdots + \underbrace{a_{k_N} + \cdots + a_{k_{N+1}-1}}_{k_{N+1}-k_N \text{ όροι}} \\ &\le a_1 + \cdots + a_{k_1-1} + (k_2 - k_1)a_{k_1} + \cdots + (k_{N+1} - k_N)a_{k_N}. \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \le a_1 + \cdots + a_{k_1-1} + \sum_{n=1}^{N} (k_{n+1} - k_n)a_{k_n}.$$

Άρα αν η τελευταία σειρά συγκλίνει, συγκλίνει και η αρχική.

Αντιστρόφως, για κάθε $m \ge k_N$

$$\begin{aligned} s_m \ge s_{k_N} &= a_1 + \ldots + a_{k_1} + a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2} + a_{k_2+1} + \ldots + a_{k_N} \\ &\ge \underbrace{a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}}_{k_2-k_1 \text{ όροι}} + \cdots + \underbrace{a_{k_{N-1}+1} + \cdots + a_{k_N}}_{k_N-k_{N-1} \text{ όροι}} \\ &\ge (k_2 - k_1)a_{k_2} + \cdots + (k_N - k_{N-1})a_{k_N}. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας με M και χρησιμοποιώντας την υπόθεση, παίρνουμε

$$Ms_m \ge (k_3 - k_2)a_{k_2} + \cdots + (k_{N+1} - k_N)a_{k_N}.$$

Δηλαδή

$$M \sum_{n=1}^{N} a_n \ge \sum_{n=2}^{N} (k_{n+1} - k_n)a_{k_n}.$$

Άρα αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty}(k_{n+1} - k_n)a_n$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

ΠΟΡΙΣΜΑ 9.5.2 (Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy). *Αν η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη αρνητική και φθίνουσα τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Άμεσο από το παραπάνω θεώρημα για $k_n = 2^n$, αφού

$$k_{n+1} - k_n = 2^{n+1} - 2^n = 2 \cdot 2^n - 2^n = 2^n = 2(2^n - 2^{n-1}) = 2(k_n - k_{n-1}).$$

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 9.5.3. Και πάλι η επιλογή $k_n = 2^n$ για το παραπάνω δεν είναι σε καμμία περίπτωση μοναδική. Αν για παράδειγμα επιλέξουμε $k_n = 3^n$ θα προκύψει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n a_{3^n}$ συγκλίνει. Ή αν επιλέξουμε $k_n = n^2$ εύκολα ελέγχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(2n + 1)a_{n^2}$ συγκλίνει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.5.4. Με το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy είναι πολύ εύκολο να ελέγξουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ για κάθε $p > 0$. Πράγματι, η σειρά θα συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n .$$

Αλλά η τελευταία είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $1/2^{p-1}$, οπότε συγκλίνει αν και μόνο αν ο λόγος αυτός είναι μικρότερος του 1, δηλαδή, αν και μόνο αν $p > 1$.

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 9.5.1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan\frac{1}{n^3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{3/2}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 9.5.2. Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n^p},$$

για $p \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 9.5.3. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p} \quad \text{και} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^p}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 9.5.4. Αν συμβολίσουμε με $\log^{(n)}(x)$ τη συνάρτηση

$$\underbrace{\log\log\log\ldots\log}_{n \text{ φορές}}(x)$$

(για παράδειγμα $\log^{(3)}(x) = \log(\log(\log(x)))$), και με $e^{(n)}$ την ποσότητα

$$\underbrace{\exp\exp\ldots\exp}_{n \text{ φορές}}(1)$$

(για παράδειγμα $e^{(3)} = e^{e^e}$ και $e^{(4)} = e^{e^{e^e}}$), εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=e^{(k)}+1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n \cdot \log^{(2)} n \cdots \log^{(k-1)} n \cdot (\log^{(k)} n)^p}.$$

(Παρατηρήστε ότι το σημείο εκκίνησης της σειράς, δηλαδή το $e^{(k)} + 1$, έχει επιλεχθεί μόνο και μόνο ώστε να μην μηδενίζεται κανένας από τους λογαρίθμους του παρονομαστή, αφού $\log^{(k)}(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = e^{(k)}$.)

ΑΣΚΗΣΗ 9.5.5. Αν η ακολουθία $a_n \geq 0$ είναι φθίνουσα δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e^n a_{[e^n]}$ συγκλίνει. (Πρέπει πρώτα να δείξετε ότι $[e^n] < [e^{n+1}]$.)

9.6 Το ολοκληρωτικό κριτήριο

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.6.1 (Ολοκληρωτικό κριτήριο). *Έστω ότι η συνάρτηση $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι μη αρνητική και φθίνουσα. Θέτουμε $a_n = f(n)$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει (δηλαδή αν $\lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,dx \in \mathbb{R}$).*

Απόδειξη: Αφού η f είναι φθίνουσα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$$

για κάθε $x \in [n, n+1]$. Συνεπώς,

$$\int_n^{n+1} f(n)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx,$$

δηλαδή $f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1)$. Προσθέτοντας τις τελευταίες ανισότητες για $n = 1, 2, \ldots, N$ παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \int_1^{N} f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{N} f(n+1) = \sum_{n=2}^{N+1} f(n) = \sum_{n=2}^{N+1} a_n.$$

Άρα αν το ολοκλήρωμα συγκλίνει τότε συγκλίνει και το μερικό άθροισμα $\sum_{n=2}^{N+1} a_n$, αφού αυξάνει και είναι φραγμένο από το $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$. Δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αντιστρόφως, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{N} a_n$ συγκλίνει τότε το ολοκλήρωμα συγκλίνει, αφού η

$$\int_1^{t} f(x)\,dx \leq \int_1^{[t]+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $F(t) := \int_1^t f(x)\,dx$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα το όριο $\lim_{t\to\infty} F(t)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ (και ισούται με $\sup_{t\geq 1} F(t)$). □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9.6.2. Ας ελέγξουμε και πάλι τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ για $p > 0$. Φανερά η $f(x) = 1/x^p$ για $x \in [0, \infty)$ είναι μη αρνητική και φθίνουσα, και $1/n^p = f(n)$. Συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty x^{-p}\,dx$. Αλλά

$$\int_1^\infty x^{-p}\,dx = \begin{cases} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{x=1}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} & \text{αν } 0 < p \neq 1, \\ \log x \,\Big|_{x=1}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \log x & \text{αν } p = 1. \end{cases}$$

Φανερά, αυτά τα όρια υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $p > 1$.

Κεφάλαιο 10

Εφαρμογές του κριτηρίου σύγκρισης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε εργαλεία που προκύπτουν από το κριτήριο σύγκρισης. Αν περιοριστούμε σε μη αρνητικές ακολουθίες, είναι φανερό ότι κάθε συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα σειρά δίνει τη δυνατότητα δημιουργίας ενός κριτηρίου σύγκλισης ή απόκλισης. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι για $\lambda > 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $0 < \lambda < 1$. Έτσι αν βρούμε τρόπους να συγκρίνουμε μια ακολουθία $a_n \geq 0$ με την λ^n θα προκύψει ένα κριτήριο σύγκλισης ή απόκλισης. Πολλές φορές, αντί για την άμεση σύγκριση $a_n \leq \lambda^n$ είναι ευκολότερο να ελέγχουμε άλλες συνθήκες οι οποίες οδηγούν στην επιθυμητή σύγκριση (θα δούμε παρακάτω συγκεκριμμένα παραδείγματα).

Εκτός από την ακολουθία λ^n μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε ακολουθία γνωρίζουμε ότι συγκλίνει ή αποκλίνει για να φτιάξουμε ένα κριτήριο. Για παράδειγμα μπορεί κανείς να αναπτύξει κριτήρια που συγκρίνουν με τη σειρά της ακολουθίας $1/n^p$ ή με τη σειρά της ακολουθίας $1/(n(\log n)^p)$ για τις οποίες γνωρίζουμε πότε συγκλίνουν και πότε όχι από το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy.

Ένα άλλο ενδιαφέρον θέμα είναι αν υπάρχει κάποια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{με} \quad c_n \geq 0$$

η οποία θα παρείχε το «απόλυτο» κριτήριο σύγκλισης, υπό την έννοια ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ θα συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκρίνεται με την $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Θα δούμε στην τελευταία ενότητα ότι ένα τέτοιο καθολικό κριτήριο σύγκλισης δεν μπορεί να υπάρξει.

Ξεκινάμε με κριτήρια που προκύπτουν από σύγκριση με τη γεωμετρική σειρά.

10.1 Σύγκριση με τη γεωμετρική σειρά

Στην ενότητα αυτή βρίσκουμε συνθήκες που ελέγχονται σχετικά εύκολα και οδηγούν στη σύγκριση μιας ακολουθίας a_n με τη γεωμετρική ακολουθία λ^n.

10.1.1 *Το κριτήριο λόγου*

Αν οι όροι μιας μη αρνητικής ακολουθίας a_n φθίνουν πιο γρήγορα από τη γεωμετρική πρόοδο με λόγο $0 \le \lambda < 1$ θα ισχύει $a_{n+1} \le \lambda a_n$ (δηλαδή ο επόμενος όρος της a_n έχει μειωθεί περισσότερο από τον πολλαπλασιασμό με λ της γεωμετρικής προόδου), η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ θα πρέπει να συγκλίνει, αφού συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$. Ανάλογα, αν η a_n αυξάνει πιο γρήγορα από όσο αυξάνει η λ^n για $\lambda \ge 1$, δηλαδή αν $a_{n+1} \ge \lambda a_n$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ πρέπει να αποκλίνει. Σε κάθε περίπτωση συγκρίνουμε τον λόγο a_{n+1}/a_n με έναν αριθμό λ είτε μικρότερο είτε μεγαλύτερο ή ίσο του 1. Η απόδειξη όμως ανισοτήτων είναι συνήθως δυσχερής. Για αυτό τον λόγο καταφεύγουμε στη χρήση της Παρατήρησης 5.3.2, και υπολογίζουμε το όριο $\ell = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. Αν για παράδειγμα το όριο ℓ είναι στο διάστημα $[0, 1)$ τότε χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση για $\varepsilon = (1-\ell)/2$ θα προκύψει ότι μετά από κάποιον δείκτη $n_0 \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{n+1} \le ((1+\ell)/2)a_n$ δηλαδή έχουμε σύγκριση με τη γεωμετρική ακολουθία με λόγο $\lambda = (1+\ell)/2 \in (0, 1)$. Έτσι η σειρά της a_n θα συγκλίνει. Ομοίως θα αποκλίνει αν το όριο είναι γνησίως μεγαλύτερο του 1. Αν το όριο βέβαια βγει ακριβώς ίσο με 1 τότε δεν μπορούμε να κάνουμε σύγκριση γιατί δεν μπορούμε να ξέρουμε ούτε καν αν $a_{n+1}/a_n \le 1$ ή $a_{n+1}/a_n \ge 1$.

Τέλος, η προϋπόθεση $a_n \ge 0$ μπορεί να παραλειφθεί αν χρησιμοποιήσουμε τις απόλυτες τιμές $|a_{n+1}/a_n|$. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο:

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.1.1 (Κριτήριο λόγου του D' Alambert). *Για κάθε ακολουθία $a_n \neq 0$,*

- *αν* $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, και μάλιστα απολύτως.*
- *αν* $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη: Θέτουμε $\ell = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ και υποθέτουμε ότι $0 \le \ell < 1$. Έτσι, για κάθε $\varepsilon > 0$ άρα και για $\varepsilon = (1-\ell)/2 > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει

$$\left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - \ell \right| < \frac{1-\ell}{2}.$$

Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή, και προσθέτοντας το ℓ, παίρνουμε

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{1+\ell}{2} < 1.$$

Αν θέσουμε $\lambda = (1+\ell)/2$ τότε $0 < \lambda < 1$ και για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει $|a_{n+1}| \le \lambda |a_n|$. Η τελευταία ανισότητα όμως, μπορεί να επαναλαμβάνεται όσο το n παραμένει από n_0 και πάνω. Έτσι, αν $n \ge n_0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} |a_n| &\le \lambda |a_{n-1}| \le \lambda\, \lambda |a_{n-2}| = \lambda^2 |a_{n-2}| \le \lambda^3 |a_{n-3}| \le \dots \\ &\le \lambda^{n-n_0} |a_{n-(n-n_0)}| = \lambda^{n-n_0} |a_{n_0}| \end{aligned}$$

(στο a_{n_0} σταματάει η δυνατότητα εφαρμογής της $|a_{n+1}| \le \lambda |a_n|$). Άρα, για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει $|a_n| \le (\lambda^{-n_0} |a_{n_0}|)\, \lambda^n$. Επειδή η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ συγκλίνει, αφού $0 \le \lambda < 1$ συμπεραίνουμε ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει από την Πρόταση 9.3.1.

Αν τώρα $\ell > 1$ εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για $\varepsilon = (\ell - 1)/2 > 0$, και παίρνουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \frac{\ell+1}{2} > 1.$$

Συνεπώς $|a_{n+1}| > |a_n|$, για κάθε $n \ge n_0$, δηλαδή η ακολουθία $(|a_n|)_{n \ge n_0}$ είναι γνησίως αύξουσα άρα δεν είναι μηδενική. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει από το Πόρισμα 9.2.2. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 10.1.2. Παρατηρούμε εδώ ότι αν $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$ δεν γίνεται να συμπεράνουμε κάτι για τη σύγκλιση της σειράς. Αυτό συμβαίνει επειδή για παράδειγμα το παραπάνω όριο είναι ίσο με 1, τόσο για την ακολουθία $1/n$ όσο και για την ακολουθία $1/n^2$. Εν τούτοις η μεν $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ αποκλίνει η δε $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ συγκλίνει.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 10.1.3. Η απόδειξη του κριτηρίου λόγου δείχνει άμεσα ότι αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_{n+1}/a_n| \le \lambda < 1$ για κάθε $n \ge n_0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, ενώ αν $|a_{n+1}/a_n| \ge \lambda > 1$ για κάθε $n \ge n_0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 10.1.1. Αποδείξτε ότι αν για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$ αλλά υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 10.1.2. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

(α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$, για $p \in \mathbb{R}$ (γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ (δ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ (ε) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{n!}$.

ΑΣΚΗΣΗ 10.1.3.* Αποδείξτε χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(n/e)^n}{n!}$ αποκλίνει. (Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε την Άσκηση 10.1.1.) Στη συνέχεια αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

και συμπεράνετε ότι και οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/e)^n}{n!} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/e)^n}{\sqrt{n}\, n!}$$

αποκλίνουν.

ΑΣΚΗΣΗ 10.1.4. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a^n/n^a)$ για $a \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 10.1.5. Βρείτε για ποια $x \geq 0$ οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(3n)!}{(4n)!} x^n.$$

ΑΣΚΗΣΗ 10.1.6. Αποδείξτε ότι το κριτήριο Dini-Kummer είναι ισχυρότερο του κριτηρίου λόγου επιλέγοντας στο κριτήριο Dini-Kummer $b_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΑΣΚΗΣΗ 10.1.7. Στην περίπτωση που το όριο $\lim |a_{n+1}/a_n|$ δεν υπάρχει, αποδείξτε το εξής κριτήριο λόγου:

- Αν $\limsup \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
- $\liminf \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.
- Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ αλλά για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq m$ ώστε $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

10.1.2 Το κριτήριο n-στης ρίζας του Cauchy

Η απόδειξη του επόμενου κριτηρίου είναι και αυτή μια αναγωγή στη γεωμετρική σειρά. Η αναγωγή αυτή βασίζεται στο ότι για $\lambda \geq 0$ ισχύει $|a_n| \lesseqqgtr \lambda^n$ αν και μόνο αν $\sqrt[n]{|a_n|} \lesseqqgtr \lambda$

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.1.4 (Κριτήριο **n**-στής ρίζας του Cauchy). *Για κάθε ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,*

- *αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, και μάλιστα απολύτως.*
- *αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη: Θέτουμε $0 \le \ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ και αν $\ell < 1$ εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για $\varepsilon = (1-\ell)/2 > 0$: υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει

$$\left| \sqrt[n]{|a_n|} - \ell \right| < \frac{1-\ell}{2}.$$

Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή, προσθέτοντας ℓ και υψώνοντας στη n-στη δύναμη παίρνουμε

$$|a_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n.$$

Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}((1+\ell)/2)^n$ συγκλίνει (αφού $(1+\ell)/2 < 1$) άρα και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Αν τώρα $\ell > 1$, εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για $\varepsilon = (\ell-1)/2 > 0$: υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει

$$\left| \sqrt[n]{|a_n|} - \ell \right| < \frac{\ell-1}{2}.$$

Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή, προσθέτοντας ℓ και υψώνοντας στη n-στη δύναμη παίρνουμε

$$\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n < |a_n|.$$

Αλλά αυτό συνεπάγεται ότι η a_n δεν είναι μηδενική, αφού $((1+\ell)/2)^n \to \infty$, οπότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 10.1.5. Παρατηρούμε εδώ ότι αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ δεν γίνεται να συμπεράνουμε κάτι για τη σύγκλιση της σειράς. Αυτό συμβαίνει επειδή για παράδειγμα $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n^2} = 1$ αλλά η μεν $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ αποκλίνει η δε $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ συγκλίνει.

*10.2 Η σειρά που συγκλίνει στην εκθετική συνάρτηση

Στην Ενότητα 5.8 αποδείξαμε ότι

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Εδώ θα επεκτείνουμε το προηγούμενο στην ακόλουθη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.2.1. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *ισχύει*

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$. Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα εύκολα ελέγχουμε ότι

$$s(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)x^k,$$

διότι στην παραπάνω έκφραση το γινόμενο των παρενθέσεων είναι ίσο με μηδέν όταν $k \geq n+1$. Συνεπώς, από την τριγωνική ανισότητα

$$\begin{aligned}\left|s(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| &\leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)|x|^k \\ &= \left|s(|x|) - \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n\right|.\end{aligned}$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε τη ζητούμενη για $x > 0$. Αλλά για αυτό η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με την απόδειξη ότι $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ της Ενότητας 5.8 και αφήνεται ως άσκηση. □

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 10.2.1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{e^n},\ p\in\mathbb{R}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}b^n,\ a,b\in\mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 10.2.2. Εξετάστε για ποια $x \geq 0$ συγκλίνει η σειρά: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$.

ΑΣΚΗΣΗ 10.2.3. Αν για μια ακολουθία a_n δεν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ (Άσκηση 6.2.2.), αποδείξτε οι ισχύει το εξής κριτήριο ρίζας: Για κάθε ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

- αν $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, και μάλιστα απολύτως.
- αν $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.
- αν $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq m$ ώστε $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 10.2.4. Αποδείξτε ότι το κριτήριο n-στης ρίζας είναι ισχυρότερο από το κριτήριο λόγου χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.2.3 και την ακολουθία $2^{(-1)^n - n}$.

10.3 Σύγκριση με την ακολουθία $1/n^p$

Έστω ότι $p > 1$, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ συγκλίνει. Μπορούμε να φτιάξουμε ένα κριτήριο σύγκρισης από αυτήν χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκρισης λόγων (Πόρισμα 9.3.3). Έτσι αν $a_n > 0$ η συνθήκη

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{1/n^p}{1/(n-1)^p} \tag{10.1}$$

οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Επειδή όμως από την ανισότητα Bernoulli

$$\frac{1/n^p}{1/(n-1)^p} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p \geq 1 - \frac{p}{n}$$

αντί να ελέγχουμε την (10.1) αρκεί να ελέγξουμε την

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq 1 - \frac{p}{n},$$

ισοδύναμα

$$n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) \geq p > 1.$$

Επειδή ο έλεγχος ανισοτήτων είναι συνήθως δυσχερής, υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$$

και ελέγχουμε αν είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του 1. Έτσι οδηγούμαστε στο κριτήριο Raabe-Duhamel. Η απόδειξη του κριτηρίου αυτού μπορεί να γίνει ακριβώς όπως περιγράψαμε παραπάνω ή μπορεί να προκύψει ως πόρισμα του κριτηρίου Dini-Kummer θέτοντας $b_n = n - 1$. Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.3.1 (Κριτήριο Raabe-Duhamel). *Για μια θετική ακολουθία a_n θέτουμε*

$$\mathrm{rd}_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Αν $\lim \mathrm{rd}_n > 1$ (ή $\liminf \mathrm{rd}_n > 1$ αν το προηγούμενο όριο δεν υπάρχει) τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\mathrm{rd}_n \leq 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. □

Αν η απόδειξη μπορούσε να γίνει μόνο με τη σύγκριση με την ακολουθία $1/n^p$ τότε δεν θα ήταν λογικό να ελέγξουμε τη σύγκλιση της $1/n^p$ με αυτό το κριτήριο. Επειδή όμως η απόδειξη μπορεί να γίνει και ως πόρισμα του Dini-Kummer, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Raabe-Duhamel και για την $1/n^p$.

Η μέθοδος με την οποία κανείς συγκρίνει με μια γνωστή ακολουθία (όπως την $1/n^p$) δεν είναι απαραίτητα μοναδικός. Μπορεί κανείς να σκεφτεί άλλες εκφράσεις που θα οδηγούσαν στην ίδια σύγκριση. Ως παράδειγμα θα μπορούσαμε αντί να ακολουθήσουμε την τεχνική που οδήγησε το κριτήριο Raabe-Duhamel να κάνουμε το εξής: επιδιώκοντας μια σύγκριση της μορφής

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p$$

βλέπουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το να ισχύει

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p.$$

Αλλά επειδή η $(1+1/n)^n$ είναι αύξουσα με όριο το e, ισχύει $(1+1/n)^n \leq e$ οπότε $(1+1/n)^p \leq e^{p/n}$. Άρα θα ισχύει η ζητούμενη αν ισχύει η

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq e^{p/n}.$$

Παίρνοντας λογαρίθμους και αναδιατάσσοντας τους όρους της τελευταίας ανισότητας, αποδεικνύουμε το ακόλουθο κριτήριο:

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.3.2 (Λογαριθμικό κριτήριο). *Για κάθε ακολουθία θετικών όρων a_n θέτουμε*

$$g_n = n \log \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Τότε:

- *Αν* $\lim g_n > 1$ (*ή* $\liminf g_n > 1$ *αν το όριο δεν υπάρχει*) *η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*
- *Αν* $\lim g_n < 1$ (*ή* $\limsup g_n < 1$ *αν το όριο δεν υπάρχει*) *η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη: Η απόδειξη με βάση την παραπάνω συζήτηση αφήνεται ως εύκολη άσκηση (για την περίπτωση που αποκλίνει δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_{n+1}/a_n \geq 1/e^{a/n}$ για κατάλληλο $a \geq 0$, και πολλαπλασιάστε τις προηγιούμενες ανισότητες για τους δείκτες από n_0 μέχρι n). □

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 10.3.1. Γράψτε την απόδειξη του κριτηρίου Raabe-Duhamel (Πρόταση 10.3.1) χρησιμοποιώντας τη σύγκριση με την ακολουθία $1/n^p$.

ΑΣΚΗΣΗ 10.3.2. Γράψτε την απόδειξη του κριτηρίου Raabe-Duhamel (Πρόταση 10.3.1) ως πόρισμα του κριτηρίου Dini-Kummer.

ΑΣΚΗΣΗ 10.3.3. Γράψτε την απόδειξη του λογαριθμικού κριτηρίου και χρησιμοποιήστε το για να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^n/(e^n n!)$ αποκλίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 10.3.4. Εξηγήστε γιατί η χρήση της $a_n/a_{n-1} \le 1 - p/n$ δεν είναι ουσιαστικά ασθενέστερη της $a_n/a_{n-1} \le (1-1/n)^p$, δηλαδή δεν οδηγηθήκαμε σε ασθενέστερο κριτήριο από τη χρήση της ανισότητας Bernouli. (Υπόδειξη: Από το διωνυμικό ανάπτυγμα αν $p \in \mathbb{N}$ ή από το θεώρημα Taylor αν p όχι φυσικός αριθμός, προκύπτει ότι $(1-1/n)^p = 1 - (p/n) + A_n$ όπου η ποσότητα A_n έχει την ιδιότητα $\lim nA_n = 0$, οπότε

$$n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) \ge n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p\right) = p - nA_n.$$

Συμπεράνετε ότι η σύγκριση του a_n/a_{n-1} με την $(1-1/n)^p$ είναι ισοδύναμη με τη σύγκριση με την $1 - p/n$.)

10.4 Σύγκριση με την ακολουθία $1/(n(\log n)^p)$

Το κριτήριο Raabe-Duhamel αποτυγχάνει να δώσει αποτέλεσμα αν το όριο της rd_n είναι 1 διότι στην ουσία η σύγκριση της a_n είναι με την $1/n$ αλλά δεν είναι σαφές από το ότι $\lim \mathrm{rd}_n = 1$ ούτε καν αν $a_n \le 1/n$ ή $a_n \ge 1/n$. Έτσι μπορεί κανείς σε αυτή την περίπτωση να σκεφτεί να συγκρίνει με την ακολουθία $1/(n(\log n)^p)$ που για $p > 1$ είναι *λίγο* μικρότερη από την $1/n$ αλλά αρκετά μικρότερη ώστε η σειρά της να συγκλίνει. Αυτό είναι το περιεχόμενο του κριτηρίου Bertrand. Για να οδηγηθούμε σε μια οριακού τύπου συνθήκη όπως και στο κριτήριο Raabe-Duhamel κάνουμε τους παρακάτω υπολογισμούς: θέλουμε να έχουμε μια σύγκριση των λόγων

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{\dfrac{1}{n(\log n)^p}}{\dfrac{1}{(n-1)(\log(n-1))^p}} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{\log(n-1)}{\log n}\right)^p \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{\log n + \log(1-1/n)}{\log n}\right)^p \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\log(1-1/n)}{\log n}\right)^p.
\end{aligned}$$

Αλλά από το Θεώρημα Taylor υπάρχει ακολουθία A_n με $nA_n \to 0$ ώστε

$$\log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + A_n,$$

οπότε η σύγκριση που επιδιώκουμε είναι

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{\frac{1}{n} - A_n}{\log n}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1 - nA_n}{n\log n}\right)^p .$$

Πάλι από το Θεώρημα Taylor (ή το διωνυμικό ανάπτυγμα αν $p \in \mathbb{N}$) υπάρχει ακολουθία B_n με $(n\log n)B_n \to 0$ ώστε

$$\left(1 - \frac{1 - nA_n}{n\log n}\right)^p = 1 - p\frac{1 - nA_n}{n\log n} + B_n,$$

οπότε η σύγκριση που επιδιώκουμε γίνεται

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - p\frac{1 - nA_n}{n\log n} + B_n\right).$$

Ανοίγοντας τις παρενθέσεις βλέπουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\widetilde{B}_n$ με $(n\log n)\widetilde{B}_n \to 0$ ώστε

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - p\frac{1 - nA_n}{n\log n} + B_n\right) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{p}{n\log n} + \widetilde{B}_n,$$

οπότε η επιδιωκόμενη σύγκριση γίνεται

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{p}{n\log n} + \widetilde{B}_n.$$

Μετά από πράξεις οδηγούμαστε στην

$$(\log n)\left(1 - n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\right) \leq p + (n\log n)\widetilde{B}_n.$$

Η διαδικασία αυτή μας οδηγεί στο εξής κριτήριο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.4.1 (Κριτήριο Bertrand). *Για κάθε ακολουθία* $a_n > 0$ *για την οποία*

$$\lim(\log n)\left(1 - n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right) < 1$$

(ή $\limsup$ *αν δεν υπάρχει το όριο) η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει. Ενώ αν*

$$\lim(\log n)\left(1 - n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right) > 1$$

(ή $\liminf$ *αν δεν υπάρχει το όριο) τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει όπως και στην περίπτωση όπου υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε για κάθε* $n \geq n_0$ *να ισχύει*

$$(\log n)\left(1 - n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right) \geq 1.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη με βάση την παραπάνω συζήτηση αφήνεται ως άσκηση. □

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 10.4.1. Γράψτε τις λεπτομέρειες της απόδειξης του κριτηρίου Bertrand.

ΑΣΚΗΣΗ 10.4.2. [Κριτήριο Gauss] Αποδείξτε χρησιμοποιώντας το κριτήριο Bertrand ότι αν για μια θετική ακολουθία a_n ισχύει

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{b}{n} - \frac{c_n}{n^2}$$

για κάποια φραγμένη ακολουθία c_n, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $b > 1$.

10.5 Δεν υπάρχει καθολικό κριτήριο σύγκρισης σειρών

Παρατηρώντας τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στα παραπάνω κριτήρια, ένα φυσιολογικό ερώτημα είναι αν θα μπορούσε να υπάρχει ένα κριτήριο σύγκρισης το οποίο να αποφασίζει πάντα αν μια σειρά συγκλίνει ή όχι. Αν υπάρχει δηλαδή μια «καθολική» σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, με $a_n \geq 0$, η οποία να «διαχωρίζει» τις συγκλίνουσες από τις αποκλίνουσες σειρές μη αρνητικών όρων. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι δυστυχώς αρνητική. Διότι αν το καθολικό κριτήριο συγκρίνει με μια ακολουθία a_n για την οποία η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει μπορούμε να βρούμε ακολουθία b_n γνησίως αύξουσα, με $\lim b_n = +\infty$ ώστε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ να συγκλίνει. Οπότε η σύγκριση της $a_n b_n$ με την a_n ώστε να προκύψει η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ δεν είναι εφικτή.

Ομοίως αν ένα καθολικό κριτήριο αποφάσιζε ότι μια σειρά αποκλίνει συγκρίνοντας με μια γνωστή αποκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μη αρνητικών όρων, τότε υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία b_n ώστε $\lim b_n = 0$ με την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ να αποκλίνει. Οπότε η σύγκριση $a_n b_n$ με την a_n ώστε να προκύψει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ αποκλίνει δεν είναι εφικτή.

Έτσι καθολικό κριτήριο σύγκρισης το οποίο να αποφασίζει για τη σύγκλιση ή την απόκλιση των σειρών δεν γίνεται να υπάρχει.

Στα παρακάτω θεωρήματα δίνουμε τις αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.5.1. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, με $a_n > 0$, συγκλίνει τότε υπάρχει γνήσια αύξουσα ακολουθία b_n με $\lim b_n = +\infty$ ώστε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει αμέσως από το επόμενο θεώρημα αν θέσουμε $b_n = (\sum_{k=n}^{\infty} a_k)^{-p}$ για οποιοδήποτε $0 < p < 1$. Με αυτή την επιλογή, φανερά η b_n είναι γνήσια αύξουσα με όριο το $+\infty$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.5.2 (Dini, 1867). *Έστω ότι για την ακολουθία $a_n > 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Τότε η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^p}$$

συγκλίνει αν $0 < p < 1$ και αποκλίνει αν $p \geq 1$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος αποδεικνύουμε πρώτα μια ανισότητα τύπου Bernoulli:

ΛΗΜΜΑ 10.5.3. *Για κάθε $0 \leq z \leq 1$ και για κάθε $a \geq 1$ ισχύει*

$$(1-z)^a \geq 1 - az.$$

Συγκεκριμένα, για κάθε $0 \leq x \leq 1$ και για κάθε $0 < p < 1$ ισχύει

$$1 - x \leq \frac{1}{1-p}\left(1 - x^{1-p}\right)$$

και για $1 < p \leq 2$ ισχύει

$$1 - x \leq \frac{1}{p-1}\left(1 - x^{p-1}\right).$$

Απόδειξη: Η απόδειξη μπορεί να γίνει με το υλικό του βιβλίου όπως περιγράφεται στην Άσκηση 5.9.15. ή με τα εργαλεία του απειροστικού λογισμού ως εξής: Η συνάρτηση $f(z) = (1-z)^a - 1 + az$ είναι αύξουσα στο $[0,1]$ διότι $f'(z) = -a((1-z)^{a-1} - 1) \geq 0$. Άρα $f(z) \geq f(0) = 0$, δηλαδή η ζητούμενη. Για τη δεύτερη ανισότητα θέτουμε $a = 1/(1-p) \geq 1$ και $z = 1 - x^{1-p}$ ενώ για την τρίτη ανισότητα $a = 1/(p-1) \geq 1$ και $z = 1 - x^{p-1}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 10.5.2: Θέτουμε $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητες υποθέτουμε ότι $s \leq 1$ (αλλιώς αλλάζουμε την a_n στην a_n/s). Έτσι $r_{n-1} < 1$, οπότε αν $p \geq 1$ ισχύει $r_{n-1}^p < r_{n-1}$. Άρα για κάθε k, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+k}}{r_{n+k-1}^p} + \ldots + \frac{a_n}{r_{n-1}^p} &\geq \frac{a_{n+k}}{r_{n+k-1}} + \ldots + \frac{a_n}{r_{n-1}} \\ &\geq \frac{a_{n+k}}{r_{n-1}} + \ldots + \frac{a_n}{r_{n-1}} = \frac{r_{n-1} - r_{n+k}}{r_{n-1}} = 1 - \frac{r_{n+k}}{r_{n-1}}.\end{aligned}$$

Αλλά η ακολουθία r_n συγκλίνει στο 0, αφού $r_n = s - s_n \to 0$. Άρα για κάθε n υπάρχει επαρκώς μεγάλο k ώστε $r_{n+k}/r_{n-1} \leq 1/2$, οπότε

$$\frac{a_{n+k}}{r_{n+k-1}^p} + \ldots + \frac{a_n}{r_{n-1}^p} \geq \frac{1}{2},$$

και έτσι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/r_{n-1}^p)$ δεν είναι Cauchy, συνεπώς αποκλίνει.

Έστω τώρα ότι $0 < p < 1$. Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}} r_{n-1}^{1-p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}} r_{n-1}^{1-p}.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}} r_{n-1}^{1-p} \leq \frac{1}{1-p} \left(r_{n-1}^{1-p} - r_n^{1-p} \right),$$

διότι η σειρά της τελευταίας θα συγκλίνει ως τηλεσκοπική. Αλλά αυτή η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$1 - \frac{r_n}{r_{n-1}} \leq \frac{1}{1-p} \left(1 - \left(\frac{r_n}{r_{n-1}} \right)^{1-p} \right),$$

η οποία ισχύει από τη δεύτερη ανισότητα του Λήμματος 10.5.3 με $x = r_n/r_{n-1}$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.5.4 (Dini, 1867). *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, με $a_n > 0$ αποκλίνει, τότε υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία b_n με $\lim b_n = 0$ ώστε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ να αποκλίνει.*

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το επόμενο θεώρημα θέτοντας $b_n = (\sum_{k=1}^{n} a_k)^{-1}$. Φανερά, με αυτή την επιλογή η b_n είναι γνησίως φθίνουσα με όριο το μηδέν. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.5.5 (Dini-Pringsheim). *Έστω ότι για την ακολουθία $a_n > 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Τότε η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^p}$$

συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $0 \leq p \leq 1$.

Απόδειξη: Επιλέγουμε n ώστε $s_n \geq 1$. Αυτό είναι εφικτό, αφού $s_n \to +\infty$. Έτσι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για $0 \leq p \leq 1$ ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+k}}{s_{n+k}^p} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{s_{n+1}^p} &\geq \frac{a_{n+k}}{s_{n+k}} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} \\ &\geq \frac{a_{n+k}}{s_{n+k}} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{s_{n+k}} = \frac{s_{n+k} - s_n}{s_{n+k}} = 1 - \frac{s_n}{s_{n+k}}. \end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{k\to\infty} s_{n+k} = +\infty$ υπάρχει $k \geq n$ ώστε $s_n/s_{n+k} \leq 1/2$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $s_n \geq 1$ υπάρχει $k \geq n$ ώστε

$$\frac{a_{n+k}}{s_{n+k}^p} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{s_{n+1}^p} \geq \frac{1}{2}.$$

Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/s_n^p$ δεν είναι Cauchy, οπότε αποκλίνει.

Αν τώρα $p \geq 2$, επειδή $s_n \to +\infty$ θα ισχύει

$$\frac{a_n}{s_n^p} \leq \frac{a_n}{s_n^2}$$

από τη στιγμή που το s_n θα γίνει μεγαλύτερο ή ίσο του 1. Συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/s_n^p$ συγκλίνει για $1 < p \leq 2$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $1 < p \leq 2$. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n s_{n-1}^{p-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}^{p-1}}.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}^{p-1}} \leq \frac{1}{p-1} \left(s_{n-1}^{1-p} - s_n^{1-p} \right),$$

διότι η σειρά της τελευταίας θα συγκλίνει ως τηλεσκοπική. Αλλά η ανισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$1 - \frac{s_{n-1}}{s_n} \leq \frac{1}{p-1} \left(1 - \left(\frac{s_{n-1}}{s_n} \right)^{p-1} \right),$$

η οποία προκύπτει από την τρίτη ανισότητα του Λήμματος 10.5.3 για $x = s_{n-1}/s_n$. □

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 10.5.1. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 9.2.3. και το Θεώρημα 10.5.5 για να αποδείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$

συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει για $0 < p \leq 1$.

Κεφάλαιο 11

Εναλλάσουσες σειρές

Οι εναλλάσουσες σειρές, δηλαδή οι σειρές που η ακολουθία αλλάζει συχνά πρόσημο, αποτελούν ειδική κατηγορία σειρών και μελετώνται ξεχωριστά.

11.1 Το κριτήριο Leibniz

Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ όπου είτε $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είτε $a_n \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ονομάζεται *εναλλάσουσα σειρά*. Η παρακάτω πρόταση δίνει ένα κριτήριο σύγκλισης για εναλλάσουσες σειρές.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.1.1 (Κριτήριο του Leibniz). *Αν η ακολουθία a_n είναι φθίνουσα και μηδενική τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $s_N = \sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n$ τότε η s_{2N} είναι φθίνουσα διότι

$$\begin{aligned} s_{2(N+1)} &= s_{2N+2} = s_{2N} + (-1)^{2N+1}a_{2N+1} + (-1)^{2N+2}a_{2N+2} \\ &= s_{2N} + a_{2N+2} - a_{2N+1} \leq s_{2N}, \end{aligned}$$

αφού $a_{2N+2} \leq a_{2N+1}$. Επιπλέον η s_{2N-1} είναι αύξουσα διότι

$$\begin{aligned} s_{2(N+1)-1} &= s_{2N+1} = s_{2N-1} + (-1)^{2N}a_{2N} + (-1)^{2N+1}a_{2N+1} \\ &= s_{2N} + a_{2N} - a_{2N+1} \geq s_{2N-1}, \end{aligned}$$

αφού $a_{2N} \geq a_{2N+1}$. Όμως

$$s_{2N} = s_{2N-1} + (-1)^{2N}a_{2N} = s_{2N-1} + a_{2N} \geq s_{2N-1}.$$

Συνεπώς

$$s_1 \leq s_{2N-1} \leq s_{2N} \leq s_2,$$

δηλαδή οι s_{2N-1} και s_{2N} είναι μονότονες και φραγμένες, άρα συγκλίνουν. Τέλος $s_{2N} = s_{2N-1} + a_{2N}$. Συνεπώς $|s_{2N} - s_{2N-1}| = |a_{2N}| \to 0$ οπότε οι s_{2N-1} και s_{2N} συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Άρα και η s_N είναι συγκλίνουσα. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.1.2. Παρόλο που η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ δεν συγκλίνει απολύτως, αφού $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n/n| = \sum_{n=1}^{\infty}1/n = \infty$, εν τούτοις η ίδια η σειρά συγκλίνει σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, αφού η $1/n$ είναι φθίνουσα και μηδενική.

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 11.1.1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos\frac{a}{n},\ a\in\mathbb{R},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^p e^{q\sqrt{n}},\ p,q\in\mathbb{R},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a^{1/n},\ a\in\mathbb{R}.$$

11.2 Το κριτήριο Dirichlet

Η παραπάνω πρόταση μπορεί να γενικευθεί αντικαθιστώντας την ακολουθία $(-1)^n$ με μια «γενικότερη» ακολουθία. Χρειαζόμαστε πρώτα ένα λήμμα για την «άθροιση κατά παράγοντες». Πρόκειται για μια εντελώς ανάλογη ιδιότητα με την ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Εκεί ο κανόνας παραγώγισης $(fg)' = f'g + fg'$ οδηγεί στην $f'g = (fg)' - fg'$, και μετά από ολοκλήρωση στο $[a,b]$ στην

$$\int_a^b f'g = f(b)g(a) - f(a)g(a) - \int fg'.$$

Εδώ τον ρόλο της παραγώγου παίζει η διαφορά $x_n - x_{n-1}$ και $y_n - y_{n-1}$ και το ρόλο του ολοκληρώματος η άθροιση. Κατά τα άλλα οι αποδείξεις και οι τύποι που προκύπτουν είναι πανομοιότυποι.

ΛΗΜΜΑ 11.2.1 (Άθροιση κατά παράγοντες). *Για οποιεσδήποτε ακολουθίες $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ και $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ στο $\mathbb{R}$ και για οποιουσδήποτε αριθμούς $N \in \mathbb{N}$ και $M \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ με $N > M$ ισχύει*

$$\sum_{n=M+1}^{N}(x_n - x_{n-1})y_n = x_N y_N - x_M y_M - \sum_{n=M+1}^{N} x_{n-1}(y_n - y_{n-1}).$$

Απόδειξη: Επειδή το άθροισμα $\sum_{n=M+1}^{N}(x_n y_n - x_{n-1}y_{n-1})$ είναι τηλεσκοπικό, μετά από διαγραφές προκύπτει ότι

$$\sum_{n=M+1}^{N}(x_n y_n - x_{n-1}y_{n-1}) = x_N y_N - x_M y_M.$$

Από την άλλη, προσθαφαιρώντας τον όρο $x_{n-1}y_n$ στην παρένθεση παίρνουμε ότι

$$\sum_{n=M+1}^{N}(x_n y_n - x_{n-1}y_{n-1}) = \sum_{n=M+1}^{N}(x_n y_n - x_{n-1}y_n + x_{n-1}y_n - x_{n-1}y_{n-1})$$
$$= \sum_{n=M+1}^{N}(x_n - x_{n-1})y_n + \sum_{n=M+1}^{N} x_{n-1}(y_n - y_{n-1}).$$

Άρα

$$\sum_{n=M+1}^{N}(x_n - x_{n-1})y_n + \sum_{n=M+1}^{N} x_{n-1}(y_n - y_{n-1}) = x_N y_N - x_M y_M,$$

οπότε

$$\sum_{n=M+1}^{N}(x_n - x_{n-1})y_n = x_N y_N - x_M y_M - \sum_{n=M+1}^{N} x_{n-1}(y_n - y_{n-1}).$$

□

Από την άθροιση κατά παράγοντες προκύπτει αμέσως το ακόλουθο:

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.2.2. *Αν για τις ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ το γινόμενο $x_n y_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=2}^{N}(x_n - x_{n-1})y_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=2}^{N} x_{n-1}(y_n - y_{n-1})$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Προκύπτει αμέσως από την άθροιση κατά παράγοντες θέτοντας $M = 0$ και $x_M = y_M = 0$. Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την άθροιση κατά παράγοντες για να επιβεβαιώσουμε την ιδιότητα Cauchy. □

ΠΟΡΙΣΜΑ 11.2.3 (Κριτήριο του Dirichlet). *Αν το μερικό άρθοισμα s_N της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι φραγμένη ακολουθία και η b_n είναι φθίνουσα και μηδενική, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Αφού η s_n είναι φραγμένη, $\lim_{n\to\infty} s_n b_n = 0$. Έτσι από το προηγούμενο θεώρημα η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(s_n - s_{n-1})b_n$$

συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} s_n(b_n - b_{n-1})$. Αλλά αν C το φράγμα της $|s_n|$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|s_n(b_n - b_{n-1})\right| \le C\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n-1})$$

και η τελευταία είναι τηλεσκοπική. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} s_n(b_n - b_{n-1})$ συγκλίνει απόλυτα, άρα και απλά. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.2.4. Τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ είναι φραγμένα (φανερά $|s_N| \leq 1$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$). Άρα αν η a_n είναι φθίνουσα και μηδενική, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ συγκλίνει, δηλαδή έχουμε το κριτήριο Leibniz ως πόρισμα του κριτηρίου Dirichlet.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 11.2.5. Η απαίτηση στο κριτήριο Dirichlet να είναι η b_n φθίνουσα δεν είναι απαραίτητη και μπορεί να αντικατασταθεί από την απαίτηση η b_n να είναι *φραγμένης κύμανσης* (Άσκηση 11.2.1.).

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 11.2.1. [Dedekind] Αποδείξτε χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα όπως στην απόδειξη του Πορίσματος 11.2.3 ότι το συμπέρασμα του κριτηρίου Dirichlet συνεχίζει να ισχύει αν η ακολουθία b_n αντί να είναι φθίνουσα είναι φραγμένης κύμανσης, δηλαδή αν $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n - b_{n-1}| < +\infty$.

ΑΣΚΗΣΗ 11.2.2. [Κριτήριο Abel] Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, και η b_n είναι μια μονότονη και φραγμένη ακολουθία. Αποδείξτε ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

(Υπόδειξη: Η b_n ως μονότονη και φραγμένη συγκλίνει, έστω στο b. Εφαρμόστε το κριτήριο Dirichlet για την ακολουθία a_n και για τη φθίνουσα και μηδενική $|b_n - b|$.)

Κεφάλαιο 12

Αναδιατάξεις σειρών

Όταν προσθέτουμε ένα πεπερασμένο πλήθος αριθμών, τότε η σειρά με την οποία κάνουμε την πρόσθεση δεν έχει σημασία, αφού η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική πράξη. Όμως επειδή στις σειρές εμπλέκεται και η διαδικασία του ορίου τίθεται το ερώτημα αν η σειρά με την οποία γίνεται η άθροιση μπορεί τώρα να έχει ή όχι σημασία Είναι σωστό δηλαδή ότι ανεξάρτητα της σειράς άθροισης ένα άπειρο άθροισμα θα δίνει πάντα το ίδιο αποτέλεσμα; Όπως βλέπουμε στο ακόλουθο παράδειγμα η απάντηση είναι αρνητική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12.0.1. Ας θεωρήσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n$ για την οποία γνωρίζουμε ότι συγκλίνει, και ας θέσουμε ℓ το όριό της. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\ell < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 5/6$$

διότι οι επόμενοι όροι του αθροίσματος είναι ανά δύο αρνητικοί: $-1/4 + 1/5 < 0$, $-1/6 + 1/7 < 0$ κλπ. Αλλάζουμε τώρα τη σειρά της άθροισης ώστε κάθε αρνητικός όρος να εμφανιστεί αφού πρώτα εμφανιστούν δύο θετικοί όροι. Δηλαδή θεωρούμε τη σειρά

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε τριάδα από αυτούς τους όρους με τους δύο πρώτους θετικούς και τον τρίτο αρνητικό μπορεί να περιγραφεί με την έκφραση

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}$$

για $k \in \mathbb{N}$. Αλλά με απλές πράξεις βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \geq 0$$

άρα

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots \geq 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}>\ell.$$

Έτσι, η νέα άθροιση δίνει σειρά που είτε δεν συγκλίνει είτε συγκλίνει σε μεγαλύτερο αριθμό από το ℓ. Σε κάθε περίπτωση η απάντηση στην παραπάνω ερώτηση είναι αρνητική.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε ότι η απάντηση στην παραπάνω ερώτηση είναι πολύ «χειρότερη» από το απλό «όχι» του παραπάνω παραδείγματος.

Πρώτα όμως πρέπει να περιγράψουμε έναν τρόπο για να αλλάζουμε τη σειρά της άθροισης.

12.1 Αναδιατάξεις των φυσικών αριθμών

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.1.1. Μια ακολουθία $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ λέγεται αναδιάταξη του $\mathbb{N}$ αν είναι $1-1$ και επί.

Ο όρος που χρησιμοποιούμε είναι «φυσιολογικός», διότι εφόσον η k_n είναι επί του $\mathbb{N}$ στο σύνολο τιμών της βρίσκονται όλοι οι φυσικοί αριθμοί, και αφού είναι $1-1$ η k_n δεν επαναλαμβάνει τιμές. Άρα πράγματι, η k_n δίνει τους φυσικούς αριθμούς με άλλη σειρά. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Θέτουμε

$$k_n = \begin{cases} n-1 & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ n+1 & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Οι τιμές της k_n φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, από όπου βλέπουμε ότι η k_n απλώς αλλάζει τη σειρά των φυσικών αριθμών: τους αναδιατάσσει.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
k_n	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	...

12.2 Αναδιατάξεις σειρών

Με τη βοήθεια μιας αναδιάταξης του $\mathbb{N}$ μπορούμε να ορίσουμε τις αναδιατάξεις ακολουθιών και σειρών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.2.1. Αν ακολουθία $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι μια αναδιάταξη του $\mathbb{N}$ τότε η ακολουθία $a'_n = a_{k_n}$ ονομάζεται αναδιάταξη της a_n, και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ ονομάζεται αναδιάταξη της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Έτσι, η a'_n δίνει ακριβώς τους όρους της a_n κατά $1-1$ και επί τρόπο, αλλά με τη σειρά που περιγράφει η k_n. Για παράδειγμα, στον επόμενο πίνακα βλέπουμε την αναδιάταξη που κάνει σε μια ακολουθία a_n η παραπάνω k_n.

a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	...
a_{k_n}	a_2	a_1	a_4	a_3	a_6	a_5	a_8	a_7	a_{10}	a_9	a_{12}	...

Στη συνέχεια θέλουμε να αποδείξουμε ότι αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε κάθε ανάδιάταξή της συγκλίνει και μάλιστα στον ίδιο αριθμό. Για αυτό θα χρειαστούμε πρώτα δυο απλά λήμματα.

ΛΗΜΜΑ 12.2.2. *Αν $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $1-1$ τότε $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$.*

Απόδειξη: Έστω ότι $M > 0$ και $K = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ το σύνολο τιμών της k_n. Το σύνολο $K \cap \{1, 2, \ldots, [M] + 1\}$ είναι πεπερασμένο (με το πολύ $[M] + 1$ στοιχεία). Ας υποθέσουμε ότι

$$K \cap \{1, 2, \ldots, [M] + 1\} = \{k_{n_1}, k_{n_2}, \ldots, k_{n_r}\},$$

για κάποιους δείκτες $n_1, \ldots, n_r$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_r\} + 1$. φανερά αν $n \geq n_0$ τότε $k_n \notin \{1, 2, \ldots, [M]+1\}$ γιατί αλλιώς θα έπρεπε να ισούται με κάποιο από τα $k_{n_1}, k_{n_2}, \ldots, k_{n_r}$ αντιφάσκοντας με την ιδιότητα του $1-1$. Άρα $k_n \geq [M] + 1 > M$. Συνεπώς $k_n \to \infty$. □

ΛΗΜΜΑ 12.2.3. *Αν η k_n είναι αναδιάταξη του $\mathbb{N}$ τότε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m = m(N) \in \mathbb{N}$ ώστε*

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subseteq \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}.$$

Απόδειξη: Από το Λήμμα 12.2.2 υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq m$ να ισχύει $k_n \geq N+1$. Άρα οι αριθμοί $1, 2, \ldots, N$ είναι ήδη στο σύνολο τιμών της k_n για τα $n \leq m$, αλλιώς η k_n δεν μπορεί να είναι επί. Έτσι αποδείξαμε ότι $\{1, 2, \ldots, N\} \subseteq \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.2.4. *Αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε κάθε αναδιάταξή της συγκλίνει στον ίδιο αριθμό.*

Απόδειξη: Έστω ότι η k_n είναι μια αναδιάταξη των φυσικών αριθμών οπότε η a_{k_n} είναι αναδιάταξη της ακολουθίας a_n. Θέτουμε $\ell = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Θα δειξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \ell$.

Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, είναι Cauchy. Άρα υπάρχει $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $N > M \geq N_0$ να ισχύει $\sum_{n=M+1}^{N} |a_n| < \varepsilon/2$. Αφήνοντας το $N \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι $\sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon/2$. Άρα για κάθε $M \geq N_0$ ισχύει $\sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$, οπότε και για $M = N_0$. Δηλαδή,

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Από το Λήμμα 12.2.3 για το N_0 υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\{1, 2, \ldots, N_0\} \subseteq$

$\{k_1, k_2, \dots, k_{m_0}\}$. Έστω τώρα ότι $m \geq m_0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\ell - \sum_{n=1}^{m} a_{k_n}\right| &= \left|\sum_{n \notin \{k_1,k_2,\dots,k_m\}} a_n\right| \\ &\leq \sum_{n \notin \{k_1,k_2,\dots,k_m\}} |a_n| \leq \sum_{n \notin \{k_1,k_2,\dots,k_{m_0}\}} |a_n| \\ &\leq \sum_{n \notin \{1,2,\dots,N_0\}} |a_n| = \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 12.2.1. Αποδείξτε ότι αν $a_n \to \ell$ και a_{k_n} μια οποιαδήποτε αναδιάταξή της, τότε $a_{k_n} \to \ell$.

ΑΣΚΗΣΗ 12.2.2. Αποδείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία a_n έχει φθίνουσα αναδιάταξη. (Η φθίνουσα αναδιάταξη μιας ακολουθίας a_n συνήθως συμβολίζεται με a_n^*.)

12.3 Το θεώρημα Riemann

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε ότι αν μια σειρά συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως τότε για κάθε αριθμό υπάρχει αναδιάταξη της σειράς που συγκλίνει σε αυτόν. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 12.3.1. *Κάθε αναδιάταξη a_{k_n} μιας μηδενικής ακολουθίας a_n είναι μηδενική.*

Απόδειξη: Αν $\varepsilon > 0$ και $N_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $N \geq N_0$ να ισχύει $|a_N| < \varepsilon$, τότε, από το Λήμμα 12.2.3, βρίσκουμε ένα $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\{1, 2, \dots N_0\} \subseteq \{k_1, k_2 \dots, k_{m_0}\}$. Έτσι, αν $m \geq m_0 + 1$, επειδή η k_n είναι $1-1$, θα ισχύει

$$k_m \notin \{k_1, k_2 \dots, k_{m_0}\} \supseteq \{1, 2, \dots N_0\}.$$

Άρα $k_m \geq N_0$ οπότε $|a_{k_m}| < \varepsilon$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.3.2 (Riemann). *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ αποκλίνει, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει αναδιάταξη k_n του $\mathbb{N}$ ώστε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = x.$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αφού οι όποιοι μηδενικοί όροι δεν συμβάλλουν στη σύγκλιση ή όχι της σειράς. Θέτουμε

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{αν } a_n > 0 \\ 0 & \text{αν } a_n < 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{αν } a_n > 0 \\ -a_n & \text{αν } a_n < 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $a_n^+,\ a_n^- > 0$ και $a_n^+ + a_n^- = |a_n|$ και $a_n^+ - a_n^- = a_n$. Επιπλέον ισχυριζόμαστε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty. \tag{12.1}$$

Πράγματι, επειδή $a_n^+,\ a_n^- > 0$, αν δεν απειρίζονται και δυο παραπάνω σειρές, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάποια από τις δύο αυτές συγκλίνει. Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ συγκλίνει. Τότε επειδή $a_n^- = a_n^+ - a_n$ συνεπάγεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

οπότε αναγκαστικά θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Αλλά τότε θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Από την (12.1) παρατηρούμε ότι ξεκινώντας από οποιοδήποτε αριθμό $\alpha < x$ αν προσθέσουμε αρκετούς (πεπερασμένο πλήθος) από τους θετικούς όρους της a_n θα ξεπεράσουμε το x. Και ξεκινώντας από οποιοδήποτε αριθμό $\beta > x$ αν προσθέσουμε αρκετούς (πεπερασμένο πλήθος) από τους αρνητικούς όρους της a_n (οι οποίοι είναι της μορφής $-a_n^-$) θα πέσουμε κάτω από το x.

Ξεκινάμε την κατασκευή της αναδιάταξης της σειράς της a_n. Υποθέτουμε ότι $a_1 \leq x$. Θέτουμε $a_1' = a_1$ και $N_1 = n_1 = 1$. Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ο *πρώτος* φυσικός αριθμός ώστε αν οι πρώτοι $n_2 - 1$ θετικοί όροι της a_n προστεθούν στον a_1 να δίνουν αποτέλεσμα μικρότερο ή ίσο από τον x αλλά όταν προστεθεί και ο n_2-στος θετικός όρος της a_n να προκύπτει αποτέλεσμα γνήσια μεγαλύτερο από τον x. Ονομάζουμε αυτούς τους θετικούς όρους $a_2', a_3', \ldots, a_{n_2}'$ και αφού θέσουμε $N_2 = n_2$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{N_2-1} a_n' \leq x < \sum_{n=1}^{N_2} a_n'.$$

Πάλι από την παραπάνω παρατήρηση, υπάρχει n_3 ο πρώτος φυσικός αριθμός ώστε αν προσθέσουμε τους πρώτους $n_3 - 1$ όρους από τους αρνητικούς όρους της a_n στο $\sum_{n=1}^{N_2} a_n'$ να προκύτει αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του x, αλλά όταν προσθέσουμε και τον n_3-στο όρο να προκύψει γνήσια μικρότερος του x. Μετονομάζουμε αυτούς τους όρους σε $a_{n_2+1}', \ldots, a_{n_2+n_3}'$ και αφού θέσουμε $N_3 = n_2 + n_3$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{N_3} a_n' \leq x < \sum_{n=1}^{N_3-1} a_n'.$$

Έστω n_4 ο πρώτος φυσικός αριθμός ώστε αν προσθέσουμε τους επόμενους $n_4 - 1$ από τους θετικούς όρους της a_n στο $\sum_{n=1}^{N_3} a_n'$ να προκύπτει αποτέλεσμα μικρότερο ή ίσο με το x αλλά όταν προσθέσουμε και τον n_4-στο όρο να προκύψει αποτέλεσμα γνησίως μεγαλύτερο του x. Αν μετονομάσουμε αυτούς τους όρους σε $a_{N_3+1}', \ldots, a_{N_3+n_4}'$ και αφού θέσουμε $N_4 = N_3 + n_4$ ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{N_4-1} a_n' \leq x < \sum_{n=1}^{N_4} a_n'.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά αυτή τη διαδικασία κατασκευάζουμε την αναδιάταξη a_n' της a_n και έχουμε και φυσικούς αριθμούς $N_1 < N_2 < \ldots$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να ισχύουν τα εξής:

- $a_n' > 0$ για κάθε n με $N_{2k-1} < n \leq N_{2k}$, $\quad (\dagger)$

- $a_n' < 0$ για κάθε n με $N_{2k} < n \leq N_{2k+1}$, $\quad (\ddagger)$

- $$\sum_{n=1}^{N_{2k}-1} a_n' \leq x < \sum_{n=1}^{N_{2k}} a_n' \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{N_{2k-1}} a_n' < x \leq \sum_{n=1}^{N_{2k-1}-1} a_n'. \qquad (*)$$

Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη αν δείξουμε ότι τα μερικά αθροίσματα s_m' της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ συγκλίνουν στο x. Αν $\varepsilon > 0$ επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, η a_n είναι μηδενική ακολουθία, οπότε είναι μηδενική και η a_n' από το Λήμμα 12.3.1. Άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq k_0$ να ισχύει $|a_{N_{2k-1}}| < \varepsilon$ και $|a_{N_{2k}}| < \varepsilon$. Θέτουμε $m_0 = N_{2k_0-1}$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $m \geq m_0$ ισχύει $|s_m' - x| < \varepsilon$. Έστω λοιπόν $m \geq m_0$. Τότε υπάρχει $k \geq k_0$ ώστε είτε $N_{2k-1} \leq m < N_{2k}$ είτε $N_{2k} \leq m < N_{2k+1}$. Αν $N_{2k-1} \leq m < N_{2k}$ τότε από την $(\dagger)$ παίρνουμε ότι $s_{N_{2k-1}}' \leq s_m' < x$. Χρησιμοποιώντας τώρα την $(*)$,

$$|s_m' - x| = x - s_m' \leq x - s_{N_{2k-1}}' \leq \sum_{n=1}^{N_{2k-1}-1} a_n' - \sum_{n=1}^{N_{2k-1}} a_n' = -a_{N_{2k-1}}' = |a_{N_{2k-1}}'| < \varepsilon.$$

Ενώ αν $N_{2k} \leq m < N_{2k+1}$ τότε από την (‡) παίρνουμε ότι $x \leq s'_m \leq s'_{N_{2k}}$. Χρησιμοποιώντας πάλι την (∗),

$$|s'_m - x| = s'_m - x \leq s'_{N_{2k}} - x \leq \sum_{n=1}^{N_{2k}} a'_n - \sum_{n=1}^{N_{2k}-1} a'_n = a_{N_{2k}} = |a_{N_{2k}}| < \varepsilon.$$

Τέλος, αν $a_1 \geq x$ επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία ξεκινώντας από την πρόσθεση στον a_1 αρνητικών όρων της a_n μέχρι το άθροισμα να πέσει για πρώτη φορά κάτω από το x, και συνεχίζουμε με ακριβώς τον ίδιο τρόπο. □

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 12.3.1. Αποδείξτε ότι αν μια σειρά συγκλίνει αλλά όχι απολύτως, τότε υπάρχει αναδιάταξή της που να συγκλίνει στο $+\infty$. Ομοίως, αποδείξτε ότι υπάρχει αναδιάταξή της που να συγκλίνει στο $-\infty$. Ομοίως, αποδείξτε ότι υπάρχει αναδιάταξή της που δεν συγκλίνει σε κανένα σημείο του $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

ΑΣΚΗΣΗ 12.3.2. Αποδείξτε ότι αν μια σειρά συγκλίνει αλλά όχι απολύτως, τότε υπάρχει αναδιάταξή της, της οποίας τα μερικά αθροίσματα είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 12.3.3. Αν $a_n = \cos(n\pi)/n$ υπάρχει αναδιάταξη a'_n της a_n ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = e$;

ΑΣΚΗΣΗ 12.3.4. Αν $a_n = \sin(n\pi/2)/n$ υπάρχει αναδιάταξη a'_n της a_n ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = 1000$;

Μέρος III

Βασικές έννοιες στα απειρογινόμενα

Κεφάλαιο 13

Γενικά περί απειρογινομένων

Απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$ ονομάζουμε—όπως είναι αναμενόμενο—το όριο του μερικού γινομένου

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} x_n.$$

Όμως, στο γινόμενο αριθμών ο αριθμός μηδέν παίζει έναν πολύ ιδιαίτερο ρόλο. Εξαιτίας της απορροφητικότητάς του (είναι το απορροφητικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού) αν ένας όρος της x_n ισούται με μηδέν, τότε κάθε γινόμενο που περιέχει αυτόν τον όρο κάνει μηδέν και είμαστε υποχρεωμένοι να θέσουμε $\prod_{n=1}^{\infty} x_n = 0$, φράση η οποία δεν περιέχει καμία αξιόλογη πληροφορία για την x_n πέρα του ότι κάποιος όρος της είναι μηδέν. Αυτού του τύπου τα γινόμενα δεν θα θεωρούμε ότι συγκλίνουν, παρόλο που ξέρουμε την τιμή του ορίου του μερικού γινομένου.

Ακόμα και αν κάθε x_n είναι διάφορο του μηδενός, αν πάλι $\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} x_n = 0$, *δεν* θα θεωρούμε ότι το απειρογινόμενο συγκλίνει.

Κεφάλαιο 14

Κριτήρια σύγκλισης απειρογινομένων

Μέρος IV

Ασυμπτωτική συμπεριφορά ακολουθιών και σειρών

Κεφάλαιο 15

Ασυμπτωτική συμπεριφορά ακολουθιών

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά ακολουθιών αφορά κυρίως σε ακολουθίες οι οποίες έχουν όριο το $+\infty$ (ή το $-\infty$) και για τις οποίες θέλουμε να έχουμε μια εκτίμηση του μεγέθους τους από στοιχειώδεις συναρτήσεις. Αυτός ο όρος δεν είναι ίσως καλά ορισμένος. Για παράδειγμα, χωρίς να έχει εισαχθεί η έννοια του λογαρίθμου είναι αδύνατον να λυθεί η εξίσωση $e^x = t$ ενώ με την εισαγωγή του, η επίλυσή της είναι τετριμμένη. Άρα τίθεται το ερώτημα ποιες θεωρούμε στοιχειώδεις συναρτήσεις και εκφράσεις; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δεν μπορεί να είναι καθολική αλλά κάθε φορά εξαρτάται από το τι είδους εκτιμήσεις ζητάμε. Έτσι, ο λογάριθμος μπορεί να θεωρηθεί μια στοιχειώδης συνάρτηση για την επίλυση της $e^x = t$ αλλά αν επιθυμούμε να εκτιμήσουμε τον ίδιο τον λογάριθμο τότε θα θέλουμε να το κάνουμε με ακόμα πιο απλές συναρτήσεις όπως ένα πολυώνυμο (μια προσέγγιση για παράδειγμα με το μερικό άθροισμα της σειράς Taylor).

Συνήθως λοιπόν το ζητούμενο είναι αν δοθεί μια ακολουθία x_n για την οποία ξέρουμε ότι $x_n \to \infty$ τότε αναζητάμε μια συνάρτηση $\varphi(n)$ για την οποία να ισχύει

$$\frac{x_n}{\varphi(n)} \to 1$$

την οποία $\varphi(n)$ όμως να τη θεωρούμε «απλούστερη έκφραση» από ό,τι είναι η ίδια η x_n.

Για παράδειγμα, έστω ότι το p_n συμβολίζει το πλήθος των πρώτων αριθμών μέχρι και τον αριθμό n. Γνωρίζουμε ότι $p_n \to$

∞ αφού υπάρχει άπειρο πλήθος πρώτων αριθμών από γνωστό θεώρημα του Ευκλείδη. Το θεώρημα των πρώτων αριθμών μας λέει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n/\log n} = 1.$$

Εδώ λοιπόν η «απλή» συνάρτηση $\varphi(n)$ είναι η

$$\varphi(n) = n/\log n.$$

15.1 Η ακολουθία $n!$

Η

$$x_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

είναι μια ακολουθία που έχει όριο το άπειρο, και θα θέλαμε να «καταλαβαίνουμε» πόσο γρήγορα ή με τι ρυθμό/τρόπο μεγαλώνει. Η έκφρασή της ενώ περιέχει μόνο πολλαπλασιασμούς ακεραίων εν τούτοις δεν μας δίνει κάποια αίσθηση του πόσο μεγάλη είναι, για παράδειγμα σε σχέση με το n. Θα θέλαμε, αν είναι εφικτό, να την εκτιμήσουμε με δυνάμεις και ένα μικρό πλήθος πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων. Κάτι τέτοιο είναι εφικτό και είναι γνωστό ως ο τύπος του Stirling. Ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1.$$

Άρα η $\varphi(n) = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ είναι μια ακολουθία που προσεγγίζει την $n!$ καθώς $n \to \infty$ και τη θεωρούμε ικανοποιητική ως προς το πόσο απλή είναι.

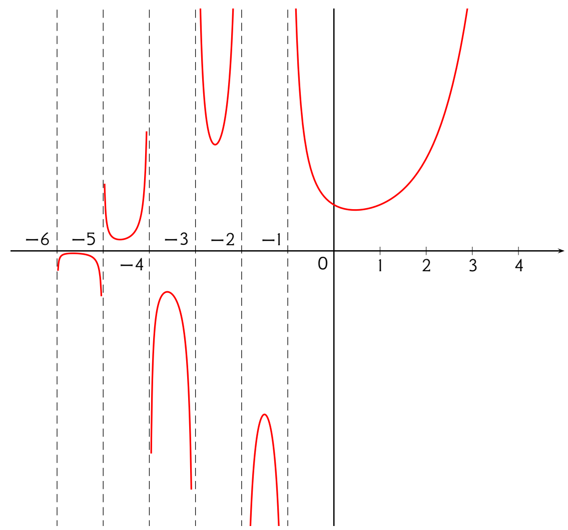
Για να αποδείξουμε αυτόν τον τύπο θα χρησιμοποιήσουμε μια κλασική μέθοδο, τη μέθοδο Laplace. Πρώτα θα αναχθούμε σε μια συνάρτηση, τη συνάρτηση Γ. Θέτουμε $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$, για $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$. Το γράφημα της συνάρτησης $\Gamma(x+1)$ δίνεται στο Σχήμα 15.1. Η συνάρτηση Γ ορίστηκε από το Euler το 1729 ως το απειρογινόμενο

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \frac{1\cdot 2^x}{1+x} \cdot \frac{2^{1-x}3^x}{2+x} \cdot \frac{3^{1-x}4^x}{3+x} \cdots \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

και μελετήθηκε στη μορφή του ολοκληρώματος $\int_0^1 (-\log t)^x\,dt$ στην προσπάθειά του να ορίσει μια έννοια παραγοντικού για πραγματικούς αριθμούς. Επίσης και ο Gauss από το 1811 μελέτησε τη συνάρτηση Γ στη μορφή

$$\Pi x = \lim_{k\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \cdot k^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}$$

δεδομένου του ότι $\Pi n = n!$ (Άσκηση 15.3.1.).



Σχήμα 15.1: Το γράφημα της συνάρτησης $\Gamma(x+1) : \mathbb{R} \setminus \{-1,-2,-3\ldots\} \to \mathbb{R}$.

15.2 Ιδιότητες της συνάρτησης Γ

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη της συνάρτησης Γ υπενθυμίζουμε ότι το ολοκλήρωμα της γκαουσιανής συνάρτησης είναι ίσο με 1:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = 1.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 15.2.1. *Η συνάρτηση Γ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες.*

(i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ii) *Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει $\Gamma(n+1) = n!$.*

(iii) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Απόδειξη: (i) Προκύπτει άμεσα με ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

(ii) Αποδεικνύεται εύκολα από το (i) με επαγωγή.

(iii) $\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dt$. Αλλάζουμε μεταβλητές, θέτοντας $t = x^2/2$ οπότε παίρνουμε

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \sqrt{2}x^{-1}e^{-x^2/2}x\,dx = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2}\frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}. \qquad \square$$

Ο υπολογισμός τιμών της συνάρτησης Γ είναι πολύ δυσχερής. Όμως αυτό που συχνά είναι χρήσιμο να ξέρουμε είναι η ασυμπτωτική συμπεριφορά των τιμών της Γ. Συγκεκριμένα ισχύει ο ακόλουθος τύπος:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(1+x)}{\sqrt{2\pi x}(x/e)^x} = 1.$$

Μια άμεση συνέπεια του τύπου αυτού είναι ο τύπος του Stirling ο οποίος μας λέει πόσο είναι περίπου το $n!$ για μεγάλα $n \in \mathbb{N}$. Αυτός προκύπτει από το γεγονός ότι $\Gamma(n+1) = n!$. Οπότε

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1.$$

Δηλαδή για μεγάλα n

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

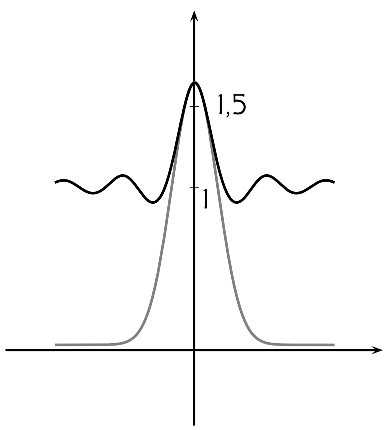
Αυτό συνεπάγεται και την $(n!)^{1/n} \simeq n/e$.

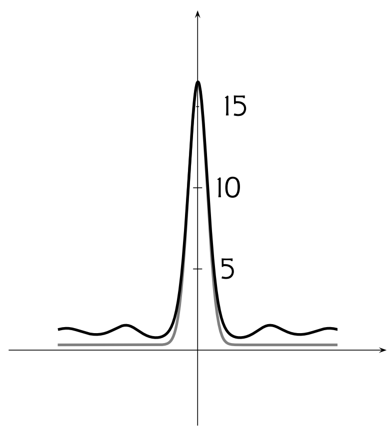
15.3 Η μέθοδος Laplace

Το 1774 ο Laplace παρουσίασε μια μέθοδο για τον υπολογισμό του ορίου ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_a^b e^{nf(x)}\,dx$ καθώς $n \to \infty$ (δείτε [10]) την οποία θα παρουσιάσουμε εδώ, και θα την χρησιμοποιήσουμε για την εκτίμιση της συνάρτησης Γ. Η μέθοδος αφορά σε συναρτήσεις f οι οποίες έχουν μέγιστη τιμή σε ένα και μόνο σημείο x_0 στο διάστημα $[a,b]$, και επιπλέον $a < x_0 < b$ και η f έχει συνεχή 2η παράγωγο στο σημείο αυτό.

Η ιδέα του Laplace είναι η εξής. Αν η f έχει μέγιστο σε ένα μόνο σημείο x_0 τότε ενώ ο πολλαπλασιασμός n επί $f(x)$ θα μεγαλώσει ανάλογα όλες τις τιμές της f στο διάστημα $[a,b]$ κατά τον παράγοντα n (συμπεριλαμβανομένης της $f(x_0)$), δηλαδή $nf(x_0)/nf(x) = f(x_0)/f(x)$. Αν όμως υψώσουμε σε εκθέτη μετά τον πολλαπλασιασμό, συγκεκριμμένα αν θεωρήσουμε την $e^{nf(x)}$, οι αντίστοιχοι λόγοι μεγενθύνονται εκθετικά: $e^{nf(x_0)}/e^{nf(x)} = e^{n(f(x_0)-f(x))}$. Αυτή η μεγέθυνση κάνει το ολοκλήρωμα της $e^{nf(x)}$ να εξαρτάται πολύ περισσότερο από τις τιμές κοντά στο x_0 παρά από αυτές που είναι πιο μακριά. Αλλά για τις τιμές κοντά στο x_0 μπορούμε να προσεγγίσουμε την f από μια κατάλληλη γκαουσιανή καμπύλη (καμπύλη της μορφής $e^{-a(x-x_0)^2}$). Αυτό είναι πράγματι εφικτό διότι έχοντας η f μέγιστο στο x_0 έχει πρώτη παράγωγο στο x_0 ίση με το μηδέν. Οπότε στο ανάπτυγμα Taylor της f με κέντρο στο x_0 δεν υπάρχει γραμμικός όρος! Δηλαδή μετά τον σταθερό όρο του αναπτύγματος ο επόμενος είναι ο $f''(x_0)(x-x_0)^2/2$, όρος ο οποίος θα δώσει την κατάλληλη γκαουσιανή.

Το φαινόμενο αυτό το βλέπουμε στο Σχήμα 15.2 όπου έχουμε σχεδιάσει τη συνάρτηση $\exp(0.5((\sin x)/x))$ και στη συνέχεια την $\exp(3((\sin x)/x))$ (μαύρη καμπύλη) σε σμίκρυνση ώστε να χωράει στη σελίδα. Στη δεύτερη περίπτωση η καμπύλη προσεγγίζεται πολύ καλά από την γκαουσιανή (γκρι καμπύλη). Η προσέγγιση αυτή αιτιολογεί τόσο την εμφάνιση του αριθμού e όσο και την εμφάνιση του αριθμού π στο αποτέλεσμα!





Σχήμα 15.2: Η ιδέα της μεθόδου Laplace.

Θα ξεκινήσουμε με την υπενθύμιση του Θεωρήματος Taylor από τον απειροστικό λογισμό με το υπόλοιπο στη μορφή Peano.

ΘΕΩΡΗΜΑ 15.3.1 (Taylor). *Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $x_0\in\mathbb{R}$, τότε υπάρχει συνάρτηση $h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε*

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+h_2(x)(x-x_0)^2$$

και $\lim_{x\to x_0}h_2(x)=0$.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι απλή: θέτουμε

$$h_2(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2}$$

και υπολογίζουμε το όριο για $x \to x_0$ με τον κανόνα L' Hospital. □

ΛΗΜΜΑ 15.3.2.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy = 1.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy$ και παρατηρούμε ότι

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy.$$

Αλλάζουμε σε πολικές συντεταγμένες και παίρνουμε

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r\, dr\, d\theta \\ &= 2\pi(-e^{-r^2/2})\Big|_0^{\infty} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Έτσι $I = \sqrt{2\pi}$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

ΛΗΜΜΑ 15.3.3.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-y^2/2}\, dy = 1.$$

Απόδειξη: Επειδή η $e^{-y^2/2}$ είναι άρτια συνάρτηση και $\sqrt{2\pi}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy = 1$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy = 0.$$

Αλλά η αλλαγή μεταβλητής $z = y - t$ δίνει

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy &= e^{-t^2/2}\int_0^{\infty} e^{-z^2/2} e^{-zt/2}\, dz \\ &\le e^{-t^2/2}\int_0^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-t^2/2}, \end{aligned}$$

η οποία έχει όριο το 0 για $t \to \infty$. □

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το γενικό θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 15.3.4 (Μέθοδος Laplace). *Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0, με την f'' συνεχή στο x_0, το* *οποίο είναι το μοναδικό σημείο στο $[a,b]$ στο οποίο έχει μέγιστο. Υποθέτουμε επίσης ότι $f''(x_0) < 0$ και $x_0 \in (a,b)$. Τότε*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_a^b e^{tf(x)}\,dx}{e^{tf(x_0)}\sqrt{\dfrac{2\pi}{t(-f''(x_0))}}} = 1. \tag{15.1}$$

Απόδειξη: (Κάτω φράγμα) Από το Θεώρημα Taylor όπως διατυπώθηκε στο Θεώρημα 15.3.1 για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|h_2(x)| < \varepsilon/2$, δηλαδή $-\varepsilon/2 < h_2(x) < \varepsilon/2$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε να ικανοποιούνται τα προηγούμενα και επιπλέον $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [a,b]$. Άρα από το Θεώρημα Taylor και το ότι $f'(x_0) = 0$, αφού στο x_0 η f έχει μέγιστο, θα έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + h_2(x)(x-x_0)^2 \\ &\geq f(x_0) + \frac{1}{2}(f''(x_0) - \varepsilon)(x-x_0)^2. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{tf(x)}\,dx &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}\,dx \\ &\geq e^{tf(x_0)} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{t\left(f''(x_0)-\varepsilon\right)(x-x_0)^2/2}\,dx \end{aligned}$$

(αλλάζοντας μεταβλητή με $y = \sqrt{t(-f''(x_0)+\varepsilon)}(x - x_0)$)

$$\geq e^{tf(x_0)} \sqrt{\frac{1}{t(-f''(x_0)+\varepsilon)}} \int_{-\delta\sqrt{t(-f''(x_0)+\varepsilon)}}^{\delta\sqrt{t(-f''(x_0)+\varepsilon)}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy.$$

Έτσι

$$\frac{\displaystyle\int_a^b e^{tf(x)}\,dx}{e^{tf(x_0)}\sqrt{\dfrac{2\pi}{t(-f''(x_0))}}} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta\sqrt{t(-f''(x_0)+\varepsilon)}}^{\delta\sqrt{t(-f''(x_0)+\varepsilon)}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy\right) \sqrt{\frac{-f''(x_0)}{-f''(x_0)+\varepsilon}}.$$

Όμως σύμφωνα με το Λήμμα 15.3.3 η τελευταία παρένθεση συγκλίνει στο 1 για $t \to \infty$. Οπότε παίρνοντας $\liminf$ ως προς $t \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_a^b e^{tf(x)}\,dx}{e^{tf(x_0)}\sqrt{\dfrac{2\pi}{t(-f''(x_0))}}} \geq \sqrt{\frac{-f''(x_0)}{-f''(x_0)+\varepsilon}},$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Συνεπώς (για $\varepsilon \to 0^+$)

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\int_a^b e^{tf(x)}\,dx}{e^{tf(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{t(-f''(x_0))}}} \geq 1. \tag{15.2}$$

(Άνω φράγμα) Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ ώστε $f''(x_0) + \varepsilon < 0$ (θυμηθείτε ότι $f''(x_0) < 0$). Εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor όπως και πριν παίρνουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε x με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει

$$f(x) \leq f(x_0) + \frac{1}{2}(f''(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)^2.$$

Από την υπόθεση ότι η f έχει μέγιστο μόνο στο x_0 συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\theta > 0$ ώστε αν $|x - x_0| \geq \delta$ να ισχύει $f(x) \leq f(x_0) - \theta$. Πράγματι, αρκεί να θέσουμε $\theta = f(x_0) - \max_{|x-x_0|\geq\delta} f(x)$, το οποίο είναι θετικό εφόσον η f έχει μοναδικό σημείο μεγίστου στο x_0. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{tf(x)}\,dx &= \int_a^{x_0-\delta} e^{tf(x)}\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}\,dx + \int_{x+\delta}^b e^{tf(x)}\,dx \\
&\leq ((x_0 - \delta) - a)e^{t\left(f(x_0)-\theta\right)} + e^{tf(x_0)}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{\frac{t}{2}(f''(x_0)+\varepsilon)(x-x_0)^2}\,dx \\
&\qquad + (b - (x_0 + \delta))e^{t(f(x_0)-\theta)} \\
&\leq (b - a)e^{t(f(x_0)-\theta)} + e^{tf(x_0)}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{\frac{t}{2}(f''(x_0)+\varepsilon)(x-x_0)^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Αλλάζοντας μεταβλητές όπως και στο κάτω φράγμα, καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\int_a^b e^{tf(x)}\,dx \leq (b - a)e^{t(f(x_0)-\theta)} + e^{tf(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{t(-f''(x_0) - \varepsilon)}}.$$

Παίρνοντας lim sup καθώς $t \to \infty$ οδηγούμαστε στην

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\int_a^b e^{tf(x)}\,dx}{e^{tf(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{t(-f''(x_0))}}} \leq \sqrt{\frac{-f''(x_0)}{-f''(x_0) - \varepsilon}},$$

για κάθε ε αρκετά κοντά στο μηδέν (ώστε $-f''(x_0) + \varepsilon < 0$). Αφήνοντας το ε να πάει στο μηδέν από δεξιά, καταλήγουμε στην

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\int_a^b e^{tf(x)}\,dx}{e^{tf(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{t(-f''(x_0))}}} \leq 1. \tag{15.3}$$

Οι (15.2) και (15.3) μαζί δίνουν το αποτέλεσμα. □

Η μέθοδος του Laplace μπορεί να εφαρμοστεί τώρα ώστε να υπολογίσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης Γ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 15.3.5. *Για τη συνάρτηση* Γ *ισχύει*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x}(x/e)^x} = 1.$$

Απόδειξη: Στο ολοκλήρωμα που ορίζει τη συνάρτηση Γ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = xr$, οπότε παίρνουμε

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^\infty e^{x(\log r - r)}\, dr.$$

Διαιρούμε με x^{x+1} και παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα στα δεξιά μπορεί να εκτιμηθεί από τη μέθοδο Laplace: πράγματι, η συνάρτηση $f(r) = \log r - r$ έχει μέγιστο μόνο στο σημείο $x_0 = 1$ και $f''(x_0) = -1 < 0$. Έχουμε όμως να λύσουμε άλλο ένα πρόβλημα. Η απόδειξη που κάναμε στη μέθοδο Laplace χρησιμοποίησε κατά ουσιαστικό τρόπο το ότι το πεδίο ολοκλήρωσης ήταν πεπερασμένο. Τώρα το άνω άκρο του ολοκληρώματος είναι $+\infty$. Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε δύο ολοκληρώματα, το ένα μέχρι 2 και το άλλο από 2 και πάνω. Εύκολα βλέπουμε ότι για $r \geq 2$ ισχύει $\log r \leq r/e$ (η $(\log r)/r$ έχει μέγιστο στο $r = e$). Γράφουμε τώρα,

$$\frac{\Gamma(x+1)}{x^{x+1}} = \int_0^2 e^{x(\log r - r)}\, dr + \int_2^\infty e^{x(\log r - r)}\, dr. \tag{15.4}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε ότι

$$\int_2^\infty e^{x(\log r - r)}\, dr \leq \int_2^\infty e^{-rx(1-e^{-1})}\, dr = \big(x(1-e^{-1})\big)^{-1} e^{-2x(1-e^{-1})}.$$

Επιστρέφοντας στην (15.4) και διαιρώντας με $e^{-x}\sqrt{2\pi/x}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{-x}\sqrt{2\pi/x}} \int_0^2 e^{x(\log r - r)}\, dr &\leq \frac{\Gamma(x+1)}{x^{x+1}e^{-x}\sqrt{2\pi/x}} \\ &\leq \frac{1}{e^{-x}\sqrt{2\pi/x}} \int_0^2 e^{x(\log r - r)}\, dr + \frac{1}{\sqrt{2\pi x}(1-e^{-1})} e^{-x(1-2e^{-1})}.\end{aligned}$$

Το όριο των ολοκληρωμάτων για $x \to \infty$ είναι ίσο με 1 από τη μέθοδο Laplace ενώ το όριο του τελευταίου όρου είναι 0. Οπότε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{x^{x+1}e^{-x}\sqrt{2\pi/x}} = 1,$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

ΠΟΡΙΣΜΑ 15.3.6 (Τύπος του Stirling). *Ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1.$$

Δηλαδή για μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει*

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \qquad \square$$

Πιο συγκεκριμμένη εκτίμηση για το $n!$ είναι η ακόλουθη.

ΠΟΡΙΣΜΑ 15.3.7. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει*

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{(12n+1)^{-1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{(12n)^{-1}}.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία

$$d_n = \log(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n + n = \log\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \to \log\sqrt{2\pi},$$

όπως αποδείχθηκε στο Θεώρημα 15.3.5. Επίσης ως προς τη μονοτονία αυτής της ακολουθίας έχουμε

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\log\frac{n+1}{n} - 1 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\log\frac{1 + (2n+1)^{-1}}{1 - (2n+1)^{-1}} - 1 \end{aligned}$$

$\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t} = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \cdots\right)$

$$= \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \frac{1}{7(2n+1)^6} + \cdots$$

Η τελευταία έκφραση είναι μικρότερη από

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{3(2n+1)^4} + \frac{1}{3(2n+1)^6} + \cdots$$

που ως γεωμετρική σειρά έχει άθροισμα

$$\frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)},$$

και μεγαλύτερη από τον πρώτο της όρο $(3(2n+1)^2)^{-1}$, ο οποίος ελέγχουμε με απλές πράξεις ότι είναι γνήσια μεγαλύτερος από

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1}.$$

Δείξαμε έτσι ότι η ακολουθία $d_n - (12n)^{-1}$ είναι γνησίως αύξουσα με όριο το $\log(\sqrt{2\pi})$, άρα $d_n - (12n)^{-1} < \log\sqrt{2\pi}$, και η ακολουθία $d_n - (12n+1)^{-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα με όριο πάλι το $\log(\sqrt{2\pi})$, άρα $d_n - (12n+1)^{-1} > \log\sqrt{2\pi}$. Οι $d_n - (12n)^{-1} < \log\sqrt{2\pi}$ και $d_n - (12n+1)^{-1} > \log\sqrt{2\pi}$ είναι οι ζητούμενες. □

Ανάλογη εκτίμηση ισχύει και για τη συνάρτηση Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 15.3.8. *Για κάθε $x \geq 0$ ισχύει*

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}\exp(\mu(x)),$$

όπου η $\mu(x)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση, μη αρνητική για $x \geq 1$ και

$$\mu(x) = \frac{1}{12x} - \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{p_3(t)}{(t+x)^3}\,dt,$$

όπου η $p_3(t)$ είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο 1 η οποία στο $[0,1]$ δίνεται από τον τύπο $p_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$.

Η απόδειξη ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος και μπορεί να βρεθεί στο [12] (σελίδα 62), όπου διατηρήσαμε τον συμβολισμό το συγκεκριμμένου βιβλίου.

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 15.3.1. Αποδείξτε ότι

$$\Gamma(n+1) = n! = \lim_{k\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k\cdot k^n}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 15.3.2. Αποδείξτε ότι $\Gamma(x+1) = \int_0^1 (-\log t)^x\,dt$.

ΑΣΚΗΣΗ 15.3.3. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση Γ είναι λογαριθμικά κυρτή, δηλαδή ότι η συνάρτηση $\log\Gamma$ είναι κυρτή.

ΑΣΚΗΣΗ 15.3.4. Αποδείξτε ότι

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 15.3.5. Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση Γ για να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\infty e^{-t^a}\,dt = \frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)$$

όπου $a > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 15.3.6. Η συνάρτηση «βήτα» B δίνεται από τον τύπο $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ για $x > 0$ και $y > 0$. Αποδείξτε ότι

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα. Γράψτε το γινόμενο $\Gamma(x)\Gamma(y)$ ως διπλό ολοκλήρωμα με δύο μεταβλητές u, v στο $[0,\infty)\times[0,\infty)$. Αλλάξτε μεταβλητές θέτοντας $u = zw$ και $v = z(1-w)$ ώστε να οδηγηθείτε στο γινόμενο $\Gamma(x+y)B(x,y)$.

ΑΣΚΗΣΗ 15.3.7. Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης Γ, ότι ασυμπτωτικά (για x και y μεγάλα) ισχύει

$$B(x,y) \simeq \sqrt{2\pi}\frac{x^{x-\frac{1}{2}}y^{y-\frac{1}{2}}}{(x+y)^{x+y-\frac{1}{2}}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 15.3.8. Υποθέστε ότι $f(x+1) = xf(x)$ και $f(1) = 1$. Αποδείξτε ότι αν

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+n)}{(n-1)!n^x} = 1$$

τότε

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\,n^x}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 15.3.9. Αποδείξτε ότι για κάθε n, $k\in\mathbb{N}$ με $k\le n$ ισχύει

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} < \frac{1}{e}\left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

Υπόδειξη: Για το κάτω φράγμα παρατηρήστε ότι

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{n-i}{k-i} \quad \text{και} \quad \frac{n-i}{k-i}\ge\frac{n}{k},$$

για κάθε $i = 1,2,\dots,k-1$. Για το άνω φράγμα,

$$\binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!} \quad \text{και} \quad e^{k-1} \ge \prod_{i=1}^{k-1}\left(1+\frac{1}{i}\right)^i = \frac{k^k}{k!},$$

από τη μονοτονία της $(1+1/i)^i$. (Παρατηρήστε επίσης ότι αν αντί για την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιηθεί η $k^k/k! \le \sum_{n=o}^{\infty}k^n/n! = e^k$ θα πάρουμε ασθενέστερη ανισότητα κατά τον παράγοντα $1/e$.)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 15.3.9. Το άνω φράγμα για τον διωνυμικό συντελεστή δεν είναι ακριβές όταν το k είναι κοντά στο n. Για αυτό, χρησιμοποιώντας το ότι $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ μπορούμε να γράψουμε την ακριβέστερη ανισότητα:

$$\max\left\{\left(\frac{n}{k}\right)^k, \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k}\right\} \le \binom{n}{k} < \frac{1}{e}\min\left\{\left(\frac{en}{k}\right)^k, \left(\frac{en}{n-k}\right)^{n-k}\right\}.$$

Επίσης, και η κάτω ανισότητα είναι γνήσια αν $k<n$.

15.4 Η ακολουθία π_n

Αυτή η ενότητα αναφέρεται στο Θεώρημα των πρώτων αριθμών. Το θεώρημα αυτό λέει ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του x είναι ασυμπτωτικά ίσο με $x/\log x$. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 15.4.1 (1896, Vallée de Poussin-Hadamard). *Αν για κάθε $x \geq 2$ θέσουμε*

$$\pi(x) = \left|\{p : p \text{ πρώτος } \leq x\}\right|,$$

τότε ισχύει

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Φανερά η συνάρτηση $\pi(x)$ είναι κατά διαστήματα σταθερή και ισχύει $\pi(x) = \pi(n) =: \pi_n$ για κάθε $x \in [n, n+1)$, και αυτός είναι ο λόγος που το θέμα αυτό εμπίπτει στους σκοπούς του παρόντος. Επιπλέον είναι προφανώς αύξουσα.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος έγινε πρώτη φορά (ανεξάρτητα) από τους Hadamard και de la Vallée Poussin το 1896. Η απόδειξη ήταν εξαιρετικά πολύπλοκη και βασιζόταν στο να αποδειχθεί πρώτα ότι η συνάρτηση $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ του Riemann δεν έχει ρίζες για $s \in \mathbb{C}$ με $\Re(s) = 1$ και στη συνέχεια ένα τρόπο να αποδειχθεί το θεώρημα από αυτό. Το πρώτο βήμα απλοποιήθηκε από τον Mertens και το αναπτύσσουμε εδώ και το δεύτερο βήμα απλοποιήθηκε από τον D. J. Newman χρησιμοποιώντας στην ουσία το Θεώρημα του Cauchy από τη Μιγαδική Ανάλυση.

Άλλες αποδείξεις χωρίς τη χρήση μιγαδικών έχουν βρεθεί (Selberg και Erdös 1949) αλλά είναι εξαιρετικά πολύπλοκες. Εδώ θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του D. J. Newman από το [11].

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε διάφορες βοηθητικές προτάσεις. Ξεκινάμε με το να εισαγάγουμε τις κατάλληλες συναρτήσεις και να αποδείξουμε μερικές βασικές ιδιότητες για αυτές. Θέτουμε

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \Phi(z) = \sum_{p} \frac{\log p}{p^z}, \quad \vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

όπου $z \in \mathbb{C}$ και $x \in \mathbb{R}$ και $p \in \mathbb{N}$ πρώτος αριθμός.

Η πρώτη πρόταση που θα αποδειξουμε είναι ότι η συνάρτηση ζ δεν έχει ρίζα σε κάνενα $z \in \mathbb{C}$ με $\Re(z) \geq 1$. Για αυτό θα χρειαστούμε δύο λήμματα.

ΛΗΜΜΑ 15.4.2 (Euler). *Για $\Re(z) > 1$ ισχύει*

$$\zeta(z) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-z}}.$$

Απόδειξη: Από το θεώρημα μοναδικής αναπαράστασης κάθε φυσικού αριθμού ως γινόμενο πρώτων έχουμε ότι

$$\zeta(z) = \sum_{r_1, r_2, \ldots \geq 0} \frac{1}{(2^{r_1} 3^{r_2} 5^{r_3} 7^{r_4} 11^{r_5} \ldots)^z}.$$

Βγάζοντας κοινούς παράγοντες τα $1/2^{r_1 z}$ το τελευταίο άθροισμα ισούται με

$$\left(\sum_{r_1\geq 0}\frac{1}{2^{r_1 z}}\right)\left(\sum_{r_2,\ldots\geq 0}\frac{1}{3^{r_2}5^{r_3}7^{r_4}11^{r_5}\ldots)^z}\right).$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία επαγωγικά, προκύπτει ότι

$$\zeta(z)=\prod_p\left(\sum_{r\geq 0}p^{-rz}\right)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-z}}, \qquad (15.5)$$

υπό τον περιορισμό $\Re(z)>1$ ώστε όλες οι σειρές και τα γινόμενα να συγκλίνουν. □

ΛΗΜΜΑ 15.4.3. *Η συνάρτηση* $h_1(z)=\zeta(z)-\dfrac{1}{z-1}$ *επεκτείνεται ολομορφικά στο* $\Re(z)>0$.

Απόδειξη: Για $\Re(z)>1$ φανερά ισχύει

$$\zeta(z)-\frac{1}{z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}-\int_1^{\infty}\frac{1}{x^z}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^z}-\frac{1}{x^z}\right)dx.$$

Αλλά η τελευταία σειρά συγκλίνει για $\Re(z)>0$ διότι φανερά

$$\begin{aligned}\left|\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^z}-\frac{1}{x^z}\right)dx\right| &= \left|z\int_n^{n+1}\int_n^x\frac{1}{t^{z+1}}\,dtdx\right|\\ &\leq \max_{n\leq t\leq n+1}\left|\frac{z}{t^{z+1}}\right|\\ &\leq \frac{|z|}{n^{\Re(z)+1}}.\end{aligned}$$ □

ΠΡΟΤΑΣΗ 15.4.4 (Hadamard). *Η συνάρτηση* ζ *δεν έχει ρίζα σε κάνενα* $z\in\mathbb{C}$ *με* $\Re(z)\geq 1$. *Αυτό συνεπάγεται ότι η* $\Phi(z)z^{-1}-(z-1)^{-1}$ *επεκτείνεται ολομορφικά στο* $\Re(z)\geq 1$.

Απόδειξη: Για $\Re(z)>1$, αφού το γινόμενο (15.5) συγκλίνει, συμπεραίνουμε ότι $\zeta(z)\neq 0$. Επίσης $\log\zeta(z)=\sum_p\log\frac{1}{1-p^{-z}}$ και παραγωγίζοντας οδηγούμαστε με απλές πράξεις στην

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=\sum_p\frac{\log p}{p^z-1}=\Phi(z)+\sum_p\frac{\log p}{p^z(p^z-1)}.$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους της παραπάνω εξίσωσης βρίσκουμε

$$\Phi(z)-\frac{1}{z-1}=-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}-\zeta(z)-\sum_p\frac{\log p}{p^z(p^z-1)}+\left(\zeta(z)-\frac{1}{z-1}\right).$$

Επειδή έχουμε δείξει στο Λήμμα 15.4.3 ότι η τελευταία παρένθεση είναι ολομορφική για $\Re(z)>0$ και η τελευταία σειρά συγκλίνει για $\Re(z) > 1/2$, συμπεραίνουμε ότι η $\Phi(z) - 1/(z-1)$ έχει πόλους μόνο στις ρίζες της $\zeta(z)$ για $\Re(z) > 1/2$. Επειδή μας ενδιαφέρει το πεδίο $\Re(z) \geq 1$ και η $\zeta(z)$ δεν έχει ρίζες για $\Re(z) > 1$ μένει να αποδείξουμε ότι στο $\Re(z) = 1$ η $\zeta(z)$ δεν μηδενίζεται.

Θα δειξουμε λοιπόν ότι αν $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ τότε $\zeta(1+ia) \neq 0$. Ας υποθέσουμε ότι η $\zeta(z)$ έχει ρίζα τάξης μ στο $1+ia$ και τάξης ν στο $1+2ia$ (αν όχι, $\nu = 0$). Επειδή φανερά ισχύει $\zeta(\overline{z}) = \overline{\zeta(z)}$ η $\zeta(z)$ έχει ρίζα τάξης μ και στο $1-ia$ και τάξης ν και στο $1-2ia$. Άρα είναι της μορφής:

$$\zeta(z) = (z-(1+ia))^{\mu}(z-(1-ia))^{\mu}(z-(1+2ia))^{\nu}(z-(1-2ia))^{\nu}h_2(z),$$

όπου η h_2 δεν μηδενίζεται σε κανένα από τα $1 \pm ia$ και $1 \pm 2ia$. Υπολογίζοντας την παράσταση $\zeta'(z)/\zeta(z)$ προκύπτει ότι

$$\Phi(z) = \frac{-\mu}{z-(1+ia)} + \frac{-\mu}{z-(1-ia)} + \frac{-\nu}{z-(1+2ia)} + \frac{-\nu}{z-(1-2ia)} + h_3(z),$$

όπου $h_3(z)$ ολομορφική για $\Re(z) \geq 1$. Συνεπώς εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm ia) = -\mu$$

και

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm 2ia) = -\nu.$$

Επιπλέον, επειδή

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + h_1(z),$$

όπου η h_1 είναι ολομορφική για $\Re(z) > 0$, εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$-\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)} = \frac{1+\varepsilon^2 h_1'(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon h_1(1+\varepsilon)} \to 1$$

καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Οπότε

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)} - \varepsilon\sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}(p^{1+\varepsilon}-1)}\right) = 1.$$

Έχουμε δείξει λοιπόν ότι

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon) = 1, \ \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm ia) = -\mu, \ \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm 2ia) = -\nu.$$

Από αυτές τώρα έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{r=-2}^{2}\binom{4}{2+r}\Phi(1+\varepsilon+ira) &= \sum_{r=-2}^{2}\binom{4}{2+r}\sum_{p}\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon+ira}} \\
&= \sum_{p}\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\sum_{r=-2}^{2}\binom{4}{2+r}\frac{1}{p^{ira}} \\
&= \sum_{p}\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\sum_{m=0}^{4}\binom{4}{m}\frac{1}{p^{i(m-2)a}} \\
&= \sum_{p}\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\sum_{m=0}^{4}\binom{4}{m}p^{-iam/2}p^{ia(4-m)/2} \\
&= \sum_{p}\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}(p^{ia/2}+p^{-ia/2})^4 \\
&= \sum_{p}\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}(2\Re(p^{ia/2}))^4 \geq 0.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, για $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\sum_{r=-2}^{2}\binom{4}{2+r}\varepsilon\Phi(1+\varepsilon+ira) \geq 0,$$

και παίρνοντας όριο για $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε $6-8\mu-2\nu \geq 0$. Από αυτό φανερά $\mu = 0$ και συνεπώς $\zeta(1+i\alpha) \neq 0$ για καθε $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Για την απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων αριθμών παρατηρούμε ότι

$$\vartheta(x) \leq \sum_{p\leq x}\log x = (\log x)\pi(x),$$

άρα

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)}{x/\log x}. \tag{15.6}$$

Επιπλέον για κάθε $0<\varepsilon<1$ ισχύει

$$\vartheta(x) \geq \sum_{x^{1-\varepsilon}\leq p\leq x}\log p \geq \sum_{x^{1-\varepsilon}\leq p\leq x}(1-\varepsilon)\log x = (1-\varepsilon)\log x\big(\pi(x)-\pi(x^{1-\varepsilon})\big).$$

Αλλά φανερά $\pi(t) \leq t$ για κάθε $t \geq 2$ οπότε εφαρμόζοντας αυτό το φράγμα στην ποσότητα $\pi(x^{1-\varepsilon})$ παίρνουμε ότι

$$\vartheta(x) \geq (1-\varepsilon)\log x\big(\pi(x)-x^{1-\varepsilon}\big).$$

Η τελευταία μαζί με την (15.6) μας οδηγούν στην

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{\vartheta(x)}{x}+\frac{\log x}{x^{\varepsilon}}. \tag{15.7}$$

Αφού όμως $\lim_{x\to\infty}(\log x)/x^{\varepsilon} = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1.$$

Η απόδειξη για αυτό θα βασιστεί στην εξής παρατήρηση: Αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε να υπάρχουν οσοδήποτε μεγάλα x ώστε $\vartheta(x) \geq (1+\varepsilon)x$, τότε για αυτά τα x ισχύει

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\, dt \geq \int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{(1+\varepsilon)x - t}{t^2}\, dt,$$

επειδή η ϑ είναι αύξουσα. Αλλάζοντας μεταβλητή, θέτοντας $y = t/x$ προκύπτει ότι

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\, dt \geq \int_1^{1+\varepsilon} \frac{(1+\varepsilon) - y}{y^2}\, dy > 0.$$

Άρα το όριο

$$\lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\, dt \tag{15.8}$$

δεν υπάρχει (από το κριτήριο Cauchy).

Ομοίως, αν υπάρχει $0 < \varepsilon < 1$ και οσοδήποτε μεγάλα x ώστε $\vartheta(x) \leq (1-\varepsilon)x$ τότε

$$\int_{(1-\varepsilon)x}^{x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\, dt \leq \int_{(1-\varepsilon)x}^{x} \frac{(1-\varepsilon)x - t}{t^2}\, dt = \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{1-\varepsilon-t}{t^2}\, dt < 0,$$

οπότε και πάλι δεν υπάρχει το όριο (15.8). Συνεπώς θα έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών αν αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{\infty} \frac{\vartheta(x) - x}{x^2}\, dx = \lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\, dt$$

υπάρχει. Για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την εξής πρόταση από τη Μιγαδική Ανάλυση την οποία θα αποδείξουμε στο τέλος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 15.4.5 (D. J. Newman). *Έστω ότι η $f(t)$ ορισμένη για $t \geq 0$ είναι φραγμένη τοπικά ολοκληρώσιμη και ότι η συνάρτηση $g(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\, dt$ για $\Re(z) > 0$ επεκτείνεται ολομορφικά στο $\Re(z) \geq 0$. Τότε το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty f(t)\, dt$ υπάρχει και είναι ίσο με $g(0)$.*

Για τις ανάγκες της απόδειξης του Θεωρήματος των πρώτων αριθμών, θέτουμε $f(t) = \vartheta(e^t)e^{-t} - 1$ για την οποία πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι φραγμένη (προφανώς είναι τοπικά ολοκληρώσιμη γιατί είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$). Επίσης

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt = \int_0^\infty (\vartheta(e^t)e^{-t} - 1)e^{-zt}\,dt \\ &= \int_0^\infty \vartheta(e^t)e^{-t(1+z)} - \int_0^\infty e^{-zt}\,dt \\ &= \int_0^\infty \vartheta(e^t)e^{-t(1+z)}\,dt - \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε όμως ότι αν αλλάξουμε μεταβλητή, θέτοντας $x = e^t$ και συμβολίσουμε με $2 = p_1 < p_2 < \ldots$ την ακολουθία των πρώτων αριθμών, τότε

$$\begin{aligned} z\int_0^\infty e^{-zt}\vartheta(e^t)\,dt = z\int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{z+1}}\,dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{p_n}^{p_{n+1}} \frac{\vartheta(x)}{x^{z+1}}\,dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_{p_n}^{p_{n+1}} z\frac{\vartheta(p_n)}{x^{z+1}}\,dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \vartheta(p_n)\left(\frac{1}{p_n^z} - \frac{1}{p_{n+1}^z}\right), \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας άθροιση κατά παράγοντες (Λήμμα 11.2.1) η τελευταία ποσότητα ισούται με

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\vartheta(p_n) - \vartheta(p_{n-1})}{p_n^z} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\log p_n}{p_n^z} = \Phi(z).$$

Συνεπώς ισχύει

$$g(z) = \frac{\Phi(1+z)}{1+z} - \frac{1}{z}.$$

Συνοψίζοντας λοιπόν για να εφαρμόσουμε την Πρόταση 15.4.5 και να ολοκληρωθεί η απόδειξη, μας μένει να αποδείξουμε τους εξής δύο ισχυρισμούς:

- η $f(t) = \vartheta(e^t)e^{-t} - 1$ είναι φραγμένη,
- η $g(z)$ επεκτείνεται ολομορφικά στο $\Re(z) \geq 0$.

Το δεύτερο είναι άμεσο αφού είναι το περιεχόμενο της Πρότασης 15.4.4. Το πρώτο προκύπτει αμέσως από το ακόλουθο:

ΛΗΜΜΑ 15.4.6 (Chebyshev). *Υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε $\vartheta(x) \leq Cx$, οπότε η f είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \ldots + \binom{2n}{2n} \geq \binom{2n}{n}.$$

Αλλά
$$e^{\vartheta(2n)-\vartheta(n)} = \prod_{n<p\le 2n} p \le \binom{2n}{n}$$
διότι
$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-1)(2(n-1))(2n-3)(2(n-2))\cdots(n+1)}{n(n-1)\cdots 2\cdot 1},$$
και το τελευταίο κλάσμα είναι ακέραιος αλλά κανένας πρώτος παράγοντας του αριθμητή (που αναγκαστικά είναι γνήσια μεγαλύτερος του n) δεν μπορεί να διαγραφεί με παράγοντα του παρονομαστή (που είναι μικρότερος ή ίσος του n).

Άρα $e^{\vartheta(2n)-\vartheta(n)} \le 2^{2n}$, οπότε $\vartheta(2n) - \vartheta(n) \le 2n\log 2$. Αυτό και η Άσκηση 4.2.5. συνεπάγονται ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε $\vartheta(x) \le Cx$. □

15.4.1 Απόδειξη της Πρότασης 15.4.5

Για $T > 0$ θέτουμε $g_T(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt}\,dt$ η οποία είναι φανερά ολομορφική για όλα τα $z \in \mathbb{C}$. Η απόδειξη θα γίνει αποδεικνύοντας ότι $\lim_{T\to\infty}(g_T(0)) = g(0)$.

Έστω ότι $R > 0$ και θέτουμε C να είναι το σύνορο του $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le R$ και $\Re(z) > -\delta\}$ όπου το $\delta = \delta(R) > 0$ είναι αρκετά μικρό ώστε η $g(z)$ να είναι ολομορφική στο C. Εφαρμόζουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy στη συνάρτηση
$$(g(z) - g_T(z))e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{T^2}\right)$$
στο 0 και παίρνουμε ότι
$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(g(z) - g_T(z))e^{zT}\left(1 + z^2/R^2\right)}{z}\,dz.$$
Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι η ποσότητα στα δεξιά τείνει το μηδέν καθώς το R τείνει στο άπειρο.

Στο ημικύκλο $C_+ = C \cap \{z :, \Re(z) > 0\}$ έχουμε ότι
$$\begin{aligned}
|g(z) - g_T(z)| &= \left|\int_T^\infty f(t)e^{-zt}\,dt\right| \le \|f\|_\infty \int_T^\infty |e^{-zt}| \\
&= \|f\|_\infty \int_T^\infty e^{-\Re(z)t}\,dt = \|f\|_\infty \frac{e^{-\Re(z)t}}{-\Re(z)}\Bigg|_T^\infty \\
&= \|f\|_\infty \frac{e^{-\Re(z)T}}{\Re(z)}.
\end{aligned}$$

Επειδή $|R^2 + z^2| = |z\overline{z} + z^2| = |z||\overline{z} + z| = 2\Re(z) \cdot R$ ισχύει

$$\left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| = e^{\Re(z)T} \left| \frac{R^2 + z^2}{R^2 z} \right| = e^{\Re(z)T} \frac{2\Re(z)}{R^2}.$$

Οπότε

$$\left| (g(z) - g_T(z))e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{R^2}.$$

Συνεπώς

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} (g(z) - g_T(z))e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\pi i R^2} \int_{C_+} dz = \frac{\|f\|_\infty}{R}.$$

Άρα στο C_+ το ολοκλήρωμα πάει στο μηδέν καθώς $R \to \infty$.

Μένει να ελέγξουμε το ολοκλήρωμα στο $C_- = C \cap \{z : \Re(z) < 0\}$. Για αυτή την καμπύλη θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις g και g_T. Αφού η g_T είναι αναλυτική, η καμπύλη C_- μπορεί να αντικατασταθεί από το ημικύκλιο $C'_- = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \ \Re(z) < 0\}$. Το ολοκλήρωμα τώρα φράσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_-} g_T(z)e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z}\, dz \right| \\ &\qquad \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C'_-} |g_T(z)| \left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| dz. \end{aligned}$$

Αλλά

$$|g_T(z)| \leq \|f\|_\infty \int_0^T |e^{-zt}|\, dt \leq \|f\|_\infty \int_{-\infty}^T |e^{-zt}|\, dt = \frac{\|f\|_\infty e^{\Re(z)T}}{|\Re(z)|}.$$

Οπότε

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_-} g_T(z)e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z}\, dz \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{R}.$$

Τέλος, για το ολοκλήρωμα με την $g(z)$ ισχύει

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g(z)e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z}\, dz \right| \\ &\qquad \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_-} \left| g(z) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| \cdot e^{-|\Re(z)|T}\, dz, \end{aligned}$$

αφού $\Re(z) < 0$. Η τελευταία παράσταση όμως μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή για $T \to \infty$.

Βάζοντας όλα τα παραπανω μαζί και παίρνοντας lim sup καταλήγουμε στο ότι

$$\limsup_{T\to\infty} |g(0) - g_T(0)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{R},$$

για κάθε $R > 0$, οπότε

$$\limsup_{T\to\infty} \left| g(0) - g_T(0) \right| = 0$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Βιβλιογραφία

[1] Απόστολος Γιαννόπουλος, *Απειροστικός Λογισμός I & II*, (Σημειώσεις Μαθήματος), `http://users.uoa.gr/~apgiannop/notes.html`

[2] Δημήτριος Κάππος, *Μαθήματα Αναλύσεως, Απειροστικός Λογισμός Α*.

[3] Στυλιανός Νεγρεπόντης, Σταύρος Γιωτόπουλος, Ευστάθιος Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός I*, Συμμετρία 1997. 2004.

[4] Σωτήρης Ντούγιας, *Απειροστικός Λογισμός I*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων 2000. 2004.

[5] Αντώνης Τσολομύτης, *Σύνολα και Αριθμοί*, Leader Books 2004.

---

[6] Robert Bartle, *The elements of Real Analysis*, 2nd ed. John Wiley & Sons 1989

[7] Konrad Knopp, *Infinite sequences and series*, Dover Publications, 1956.

[8] Thomas William Körner, *A companion to Analysis*, Graduate Studies in Mathematics vol. 62, American Mathematical Society, 2004.

[9] Serge Lang, *A first Course in Calculus*, 5th ed. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1986.

[10] Pierre Simon Laplace, *Memoir on the probability of causes of events*, tome sixième of *Mémoires de Mathématique et de Physique.* English translation by S. M. Stigler, Statist. Sci., 1(19):364–378. 1986.

[11] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 693–696.

[12] Reinhold Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, volume 172 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer Verlag, 1998.

[13] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd edition, McGraw Hill International Editions 1976.

[14] Karl Stromberg, *An introduction to Classical Real Analysis*, Chapman & Hall, 1996.

Ευρετήριο ελληνικών όρων

Παραγωγή: LaTeX 2ε