ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ Α′

ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ

Αρχαίο Κείμενο
Απόδοση στη σύγχρονη Μαθηματική γλώσσα

Νίκος Ροκοπάνος, Αντώνης Τσολομύτης

Σάμος 2022–2026

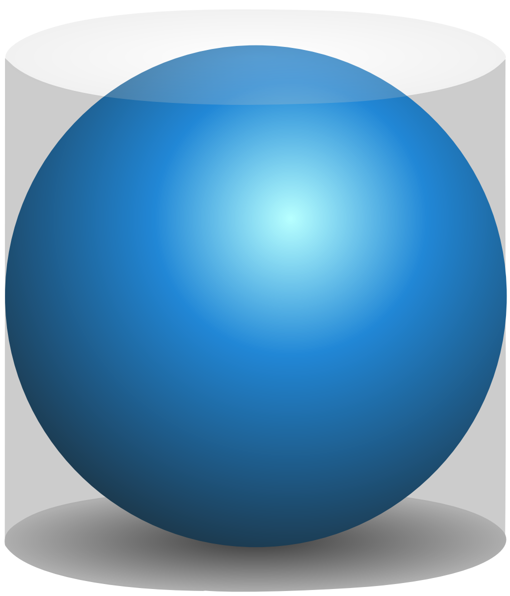
ISBN: (σε αναμονή έκδοσης)

Έκδοση 1.0 ¶ 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Στοιχειοθετήθηκε με το XƎLaTeX

© 2026, Ν. Ροκοπάνος, Α. Τσολομύτης
Σάμος, Ελλάδα.
Επικοινωνία: atsol@aegean.gr

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ Α΄



Πρόλογος

Στο έργο αυτό ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί τεχνικές, που σήμερα θα τις λέγαμε τεχνικές ολοκλήρωσης (όπως είχε χρησιμοποιήσει και στο έργο Κύκλου Μέτρησις), για να υπολογίσει το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας, τον όγκο της καθώς και το εμβαδόν και τον όγκο του κυλίνδρου, του κώνου και του κόλουρου κώνου.

Συγκεκριμένα έχουμε τον εξής κατάλογο αποτελεσμάτων με παραπομπές στις σχετικές προτάσεις και τον αριθμό σελίδας σε παρένθεση:

- Ορισμός κυρτότητας (Ορισμός 1, (10))
- Μονοτονία μήκους και επιφάνειας (Αξίωμα 2 και 4, (12))
- Αρχή του Αρχιμήδη (Αξίωμα 5, (12))
- Ολοκληρωσιμότητα του κύκλου (Πρόταση 5, (16))
- Ολοκληρωσιμότητα κυκλικού τομέα (Πρόταση 6, (18))
- Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου (Πρόταση 13, (38))
- Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κώνου (Πρόταση 14, (42))
- Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κόλουρου κώνου (Πρόταση 16, (48))
- Εμβαδόν Επιφάνειας Σφαίρας (Πρόταση 33, (75))
- Όγκος Σφαίρας (Πρόταση 34, (78))
- Σχέση όγκου σφαίρας και όγκου περιγεγραμμένου κυλίνδρου (Πόρισμα 4, (83))
- Εμβαδόν σφαιρικού τμήματος (Πρόταση 42 και 43, (99 και 101))
- Όγκος σφαιρικού τομέα (Πρόταση 44, (103))

Ο όγκος κώνου (που φαίνεται να λείπει από τον παραπάνω κατάλογο) ήταν ήδη γνωστός από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη σε συνδυασμό με το

«Κύκλου Μέτρησις» του Αρχιμήδη. Πράγματι, στα «Στοιχεία» η Πρόταση 10 του 12ου Βιβλίου μάς λέει ότι ο όγκος κώνου είναι το $1/3$ του κυλίνδρου με ίσο ύψος και ίδια βάση με τον κώνο. Ο όγκος του κυλίνδρου τώρα είναι το ύψος του επί τον όγκο κυλίνδρου ίδιας βάσης και ύψους 1 (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 14). Τέλος το ότι ο όγκος κυλίνδρου ύψους 1 ισούται με το εμβαδόν του κύκλου της βάσης του προκύπτει άμεσα από το «Κύκλου Μέτρησις», αφού η ίδια διαδικασία προσέγγισης του κύκλου με εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα χωρίζει τον κύλινδρο σε ορθά πρίσματα των οποίων ο όγκος είναι γνωστός («Στοιχεία», Βιβλίο 12, Προτάσεις 1 έως 7).

Όσο αφορά στον όγκο σφαίρας υπάρχει διαφορά με τον υπολογισμό που γίνεται στα «Στοιχεία» στο Βιβλίο 12, Πρόταση 18. Εκεί αποδεικνύεται ότι ότι ο όγκος σφαίρας ακτίνας ρ είναι ίσος με ρ^3 επί τον όγκο σφαίρας ακτίνας 1. Εδώ ο Αρχιμήδης στην ουσία προσθέτει τον υπολογισμό που λείπει, δηλαδή υπολογίζει τον όγκο της σφαίρας ακτίνας 1 να είναι $4\pi/3$. Άρα, αν συμβολίσουμε με B_ρ τη σφαίρα ακτίνας ρ και με $\mathrm{vol}(B_\rho)$ τον όγκο της, από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{vol}(B_\rho) = \rho^3 \mathrm{vol}(B_1),$$

ενώ ο Αρχιμήδης ολοκληρώνει τον υπολογισμό καταλήγοντας την έκφραση

$$\mathrm{vol}(B_\rho) = \frac{4}{3}\pi\rho^3.$$

Ένα άλλο ενδιαφέρον θέμα είναι μια ανισότητα που χρησιμοποιεί ο Αρχιμήδης στην απόδειξη της Πρότασης 9 χωρίς να μπαίνει στον κόπο να εξηγήσει—δείχνοντας μια άνεση με την ορθότητά της, αφού γενικώς ο Αρχιμήδης είναι πολύ προσεκτικός και στην τελευταία λεπτομέρεια—και η οποία δεν είναι προφανής. Σε αυτό το σημείο έχουμε προσθέσει τη γεωμετρική απόδειξη του Ευτόκιου, σχολιαστή του Αρχιμήδη, μετά την απόδειξη της Πρότασης. Τους τελευταίους αιώνες έχει γραφτεί από διάφορους ότι η απόδειξη του Ευτόκιου δεν είναι σωστή και προσπάθησαν να δώσουν δικές τους αποδείξεις συχνά ανεπιτυχώς. Κατά τη δική μας γνώμη η απόδειξη του Ευτόκιου είναι επαρκέστατη και καλύπτει πλήρως τις ανάγκες της Πρότασης 9. Επίσης έχει διαπιστωθεί ότι μια προφανής γενίκευση αυτής της ανισότητας είναι στην ουσία η ανισότητα Cauchy-Schwarz και παραθέτουμε την απόδειξη στο Παράρτημα πριν τη βιβλιογραφία.

Νίκος Ροκοπάνος, Αντώνης Τσολομύτης
Σάμος 2026

ΜΕΡΟΣ Ι

Σύγχρονη Μαθηματική Απόδοση

Εισαγωγή (109)

Ο Αρχιμήδης χαιρετά τον Δοσίθεο,

Προηγούμενως σου απέστειλα τα θεωρήματα που επινόησα και έγραψα μαζί με τις αποδείξεις τους.

Ότι το παραβολικό τμήμα έχει έμβαδόν ίσο με τα $4/3$ του εμβαδού του τριγώνου με την ίδια βάση και ίσο ύψος.

Πιο ύστερα ανακάλυψα αξιοσημείωτα θεωρήματα και ασχολήθηκα με τις αποδείξεις τους.

Αυτά είναι τα εξής:

1. Η επιφάνεια μιας σφαίρας έχει εμβαδόν ίσο με το τετραπλάσιο του εμβαδού του μέγιστου κύκλου της

2. Η επιφάνεια κάθε σφαιρικού τμήματος έχει εμβαδόν ίσο με αυτό του κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι ίση με το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή του σφαιρικού τμήματος προς την περιφέρεια του κύκλου που είναι η βάση του σφαιρικού τμήματος.

3. Ένας κύλινδρος με βάση κύκλο ίσου εμβαδού με αυτό του μέγιστου κύκλου μιας σφαίρας και ύψος ίσο με την διάμετρό της έχει όγκο ίσο με τα $3/2$ του όγκου της σφαίρας ενώ η επιφάνειά του έχει εμβαδόν ίσο με τα $3/2$ του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας.

Οι παραπάνω ιδιότητες προϋπήρχαν φυσικά στα σχήματα που αναφέρονται αλλά τις αγνοούσαν οι προγενέστεροι από εμάς που ασχολήθηκαν με την Γεωμετρία ενώ κανείς από αυτούς δεν είχε επινοήσει ότι μεταξύ των σχημάτων αυτών υπάρχει συμμετρία.

Για τον λόγο αυτό δεν θα δίσταζα να αντιπαραβάλλω τα θεωρήματα αυτά με άλλα άλλων γεωμετρών, όπως τα θεωρήματα για τα στερεά του Ευδόξου, δηλαδή ότι κάθε πυραμίδα έχει όγκο ίσο με το $1/3$ του όγκου του πρίσματος που έχει την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με αυτήν όπως και ότι κάθε κώνος έχει όγκο ίσο με το $1/3$ του όγκου του κυλίνδρου που έχει την ίδια βάση και ίσο ύψος με αυτόν.

Διότι ενώ αυτές οι ιδιότητες προϋπήρχαν φυσικά στα σχήματα αυτά, αυτές αγνοούνταν από όλους και δεν ανακαλύφθηκαν αν και υπήρξαν άξιοι λόγου γεωμέτρες προ του Ευδόξου.

Θα αποφανθούν για αυτά αυτοί που μπορούν.

Θα ήταν ευχής έργο να εκδοθούν όλα αυτά όσο ζει ο Κόνωνας διότι τον θεωρούμε ικανό να τα κατανοήσει και να διατυπώσει την αρμόζουσα γνώμη περί αυτών.

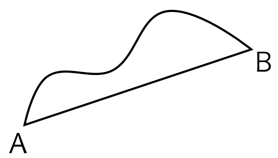
Επειδή πιστεύω ότι είναι σωστό να ανακοινώσουμε στους οικείους τα θεωρήματα σου αποστέλλω τις αποδείξεις που έγραψα για τις οποίες αρμόδιοι να αποφανθούν είναι όσοι ασχολούνται πολύ με τα Μαθηματικά.

Πρώτα γράφονται οι Ορισμοί και τα Λαμβανόμενα (στμ: αξιώματα) που θα χρησιμοποιηθούν στις αποδείξεις.

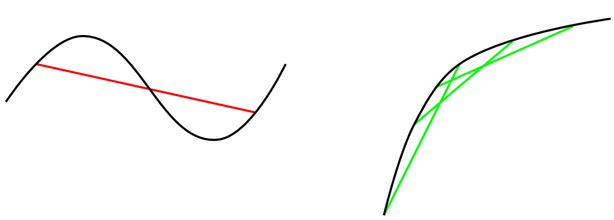
Ορισμοί και Αξιώματα

Ορισμοί 1 (110)

1. Στο επίπεδο υπάρχουν πεπερασμένες καμπύλες γραμμές, οι οποίες σε σχέση με τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα άκρα τους, βρίσκονται εξολοκλήρου προς την ίδια μεριά (στμ: των ευθυγράμμων τμημάτων που συνδέουν τα άκρα τους) ή δεν έχουν κανένα μέρος τους σε διαφορετική μεριά (στμ: των ευθυγράμμων τμημάτων που συνδέουν τα άκρα τους).



2. «Κοίλη προς το ίδιο μέρος» λέγεται μια καμπύλη στην οποία αφού ληφθούν δύο οποιαδήποτε σημεία της το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει είτε βρίσκεται ολόκληρο προς την ίδια μεριά της, είτε βρίσκεται πάνω της (στμ: είναι μέρος της) και δεν βρίσκεται σε διαφορετικά μέρη της καμπύλης αυτής.

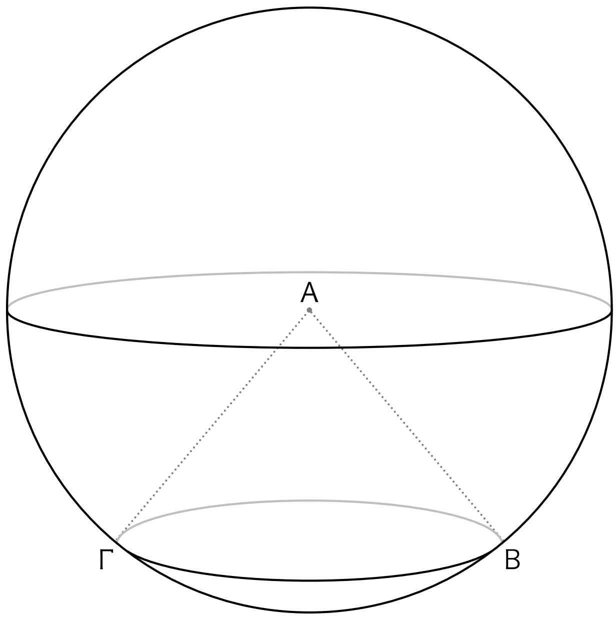


3. Ομοίως υπάρχουν πεπερασμένες επιφάνειες που δεν είναι επίπεδες ενώ έχουν τα περατά τους σε ένα επίπεδο και οι γραμμές που είναι

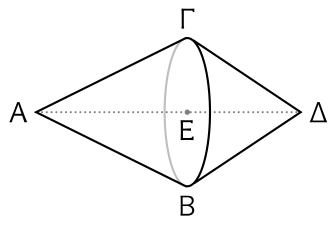
τα περατά τους βρίσκονται ολόκληρες στο ίδιο μέρος του επιπέδου ή δεν έχουν κανένα μέρος τους σε διαφορετική μεριά του επιπέδου.

4. «Κοίλη προς το ίδιο μέρος» λέγεται μια επιφάνεια στην οποία αφού ληφθούν δύο οποιαδήποτε σημεία της το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει είτε βρίσκεται προς την ίδια μεριά της είτε βρίσκεται πάνω της (στμ: είναι μέρος της) ενώ κανένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα δεν βρίσκεται σε διαφορετικές μεριές της επιφάνειας αυτής.

5. Όταν ένας κώνος έχει την κορυφή του στο κέντρο μιας σφαίρας και την τέμνει τότε το σχήμα που περιέχεται από την επιφάνεια του κώνου μέσα στην σφαίρα και της σφαιρικής επιφάνειας λέγεται «στερεός σφαιρικός τομέας».



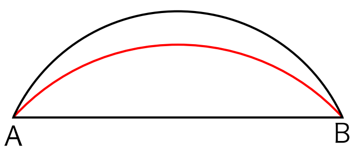
6. «Στερεός ρόμβος» ή «διπλός κώνος» λέγεται το στερεό σχήμα που προκύπτει από δύο κώνους με την ίδια βάση που έχουν τις κορυφές τους σε διαφορετικές μεριές του επιπέδου της κοινής βάσης τους και των οποίων οι άξονες βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



Λαμβάνουμε τα εξής, ως αξιώματα:

Αξιώματα 2 (110)

1. Από τις γραμμές με ίδια άκρα η ελάχιστη είναι το ευθύγραμμο τμήμα.
2. Δύο γραμμές που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και έχουν ίδια άκρα είναι «άνισες» όταν είναι κοίλες προς τα ίδια μέρη και η μια περιλαμβάνεται στην άλλη είτε εξολοκλήρου είτε έχοντας ένα μέρος τους κοινό. Η περιλαμβανόμενη γραμμή είναι η «μικρότερη».



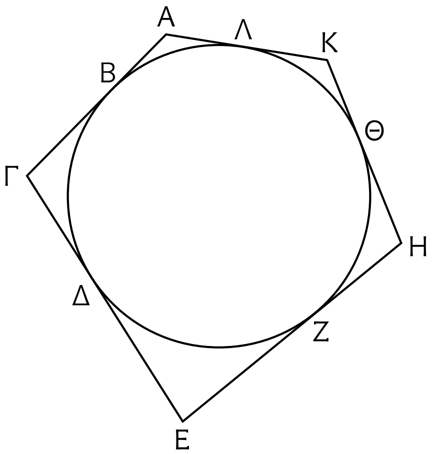
3. Από τις επιφάνειες με τα ίδια πέρατα που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο «μικρότερη» είναι η επίπεδη.
4. Οι επιφάνειες με τα ίδια πέρατα τα οποία βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο είναι «άνισες» όταν είναι κοίλες προς τα ίδια μέρη και η μια περιλαμβάνεται ολόκληρη στην άλλη και το επιπέδο στο οποίο βρίσκονται τα κοινά περατά τους ή όταν ένα μέρος της μιας περιλαμβάνεται στην άλλη το οποίο έχουν κοινό. Η περιλαμβανόμενη επιφάνεια είναι η «μικρότερη».
5. «Αξίωμα συνέχειας» (στμ: ή «Αρχή του Αρχιμήδη»). Από δύο άνισα μεγέθη (μήκη γραμμών, εμβαδά επιφανειών, όγκοι στερεών) το μεγαλύτερο υπερέχει από το μικρότερο κατά κάποιο μέγεθος που όταν ληφθεί πολλές φορές είναι δυνατόν να υπερέχει από καθένα από τα δύο αρχικά μεγέθη.

Με βάση τα παραπάνω είναι φανερό ότι αν σε έναν κύκλο εγγραφεί ένα πολύγωνο τότε η περίμετρός του πολυγώνου αυτού είναι μικρότερη από την περιφέρεια του κύκλου καθώς η πλευρά του πολυγώνου είναι μικρότερη από το αποτεμνόμενο από αυτήν τόξο του κύκλου.

Προτάσεις και Θεωρήματα

Πρόταση 1 (111) *Αν περί ενός κύκλου περιγραφεί πολύγωνο τότε η περίμετρος του πολυγώνου αυτού είναι μεγαλύτερη από την περιφέρεια του κύκλου.*

Απόδειξη. (Στμ: Ο Αρχιμήδης αποδεικνύει την παραπάνω πρόταση για την περίπτωση του πενταγώνου. Η απόδειξη αυτή γενικεύεται εύκολα για οποιοδήποτε πολύγωνο).



Θεωρούμε το πεντάγωνο ΑΓΕΗΚ που έχει περιγραφεί περί τον κύκλο ΒΔΖΘΛ. Τότε θα είναι $\mathrm{ΒΑ} + \mathrm{ΑΛ} > \widehat{\mathrm{ΒΛ}}$ καθώς η γραμμή ΒΑΛ περιλαμβάνει το τόξο $\widehat{\mathrm{ΒΛ}}$ που έχει τα ίδια άκρα με αυτήν (Αξίωμα 2).

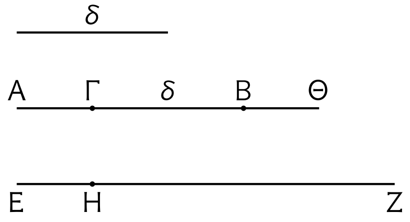
Ομοίως είναι και $\mathrm{ΔΓ} + \mathrm{ΓΒ} > \widehat{\mathrm{ΒΔ}}$, $\mathrm{ΛΚ} + \mathrm{ΚΘ} > \widehat{\mathrm{ΛΘ}}$, $\mathrm{ΖΗ} + \mathrm{ΗΘ} > \widehat{\mathrm{ΖΘ}}$ και $\mathrm{ΔΕ} + \mathrm{ΕΖ} > \widehat{\mathrm{ΔΖ}}$.

Αθροίζοντας κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες παίρνουμε ότι η περίμετρος του πολυγώνου που έχει περιγραφεί περί τον κύκλο είναι μεγαλύτερη από την περιφέρεια του κύκλου αυτού. ◘

Πρόταση 2 (112) *Δοθέντων δύο άνισων μεγεθών είναι δυνατόν να βρεθούν δύο άνισα ευθύγραμμα τμήματα ώστε ο λόγος του μεγαλύτερου τμήματος προς το μικρότερο τμήμα να είναι μικρότερος από τον λόγο του μεγαλύτερου μεγέθους προς το μικρότερο μέγεθος.*

Απόδειξη. Έστω τα άνισα μεγέθη ΑΒ και δ με $\mathrm{ΑΒ} > \delta$. Ισχυρίζομαι ότι είναι δυνατόν να βρεθούν δύο άνισα ευθύγραμμα τμήματα ώστε ο λόγος του μεγαλύτερου από αυτά προς το μικρότερο να είναι μικρότερος από τον λόγο $\mathrm{ΑΒ}/\delta$.

Στο εσωτερικό του ΑΒ λαμβάνουμε τμήμα $\mathrm{ΒΓ} = \delta$ (Στοιχεία, Βιβλίο 1, Πρόταση 2) και έστω τυχόν τμήμα ΖΗ.



Τότε, σύμφωνα με το Αξίωμα της Συνέχειας (Αξίωμα 5) αν το ΓΑ ληφθεί πολλές φορές, έστω κ, θα ξεπεράσει το δ δηλαδή θα ισχύει $\kappa \cdot \mathrm{ΓΑ} > \delta$.

Έστω ακόμα τα σημεία Θ και Ε στα ΑΒ και ΖΗ αντίστοιχα ώστε να ισχύουν $\mathrm{ΑΘ} = \kappa \cdot \mathrm{ΓΑ}$ και $\mathrm{ΖΗ} = \kappa \cdot \mathrm{ΗΕ}$.

Τότε, θα ισχύει και $\mathrm{ΑΘ}/\mathrm{ΓΑ} = \mathrm{ΖΗ}/\mathrm{ΗΕ}$ (Στοιχεία, Βιβλίο 5, Πρόταση 15) και άρα $\mathrm{ΓΑ}/\mathrm{ΑΘ} = \mathrm{ΗΕ}/\mathrm{ΖΗ}$ (Στοιχεία, Βιβλίο 5, Πόρισμα Πρότασης 7).

Όμως $\mathrm{ΑΘ} > \delta = \mathrm{ΒΓ}$ και άρα

$$\frac{\mathrm{ΓΑ}}{\mathrm{ΑΘ}} < \frac{\mathrm{ΓΑ}}{\delta} = \frac{\mathrm{ΓΑ}}{\mathrm{ΒΓ}}$$

(Στοιχεία, Βιβλίο 5, Πρόταση 8).

Έτσι έχουμε

$$\frac{\mathrm{ΗΕ}}{\mathrm{ΖΗ}} < \frac{\mathrm{ΓΑ}}{\mathrm{ΒΓ}}$$

και άρα συνθέτοντας παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{HE}+\mathrm{ZH}}{\mathrm{ZH}} < \frac{\Gamma\mathrm{A}+\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma}$$

ή

$$\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{ZH}} < \frac{\mathrm{AB}}{\delta}$$

Συνεπώς, βρέθηκαν τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΖ και ΖΗ ώστε ο λόγος του μεγαλύτερου προς το μικρότερο να είναι μικρότερος από τον λόγο του μεγαλύτερου μεγέθους προς το μικρότερο μέγεθος που έχουν δοθεί.

◙

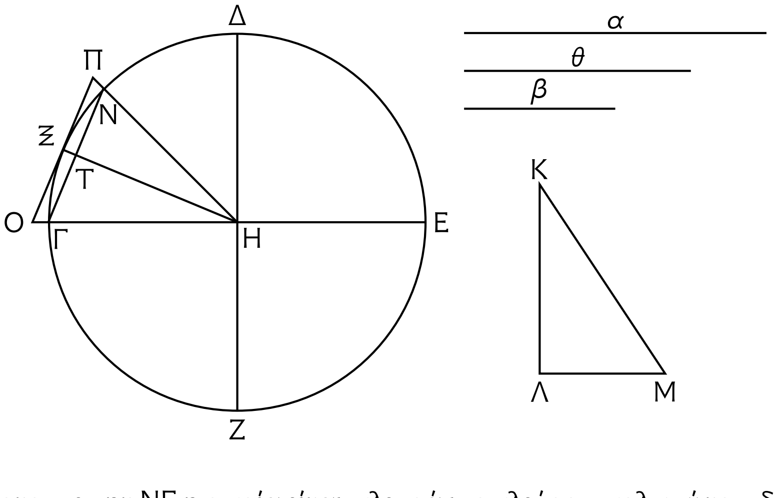
Πρόταση 3 (112) *Αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και ένας κύκλος τότε είναι δυνατόν να εγγραφεί στον κύκλο ένα πολύγωνο και να περιγραφεί περί αυτόν ένα άλλο ώστε ο λόγος της πλευράς του περιγεγραμμένου πολυγώνου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου πολυγώνου να είναι μικρότερος από τον λόγο του μεγαλύτερου μεγέθους προς το μικρότερο μέγεθος.*

Απόδειξη. Έστω τα δοθέντα άνισα μεγέθη α και β και ο δοθείς κύκλος ΔΖΓΕ.

Έστω ακόμα τα ευθύγραμμα τμήματα θ και ΚΛ με $\theta > \mathrm{K}\Lambda$ και $\frac{\theta}{\mathrm{K}\Lambda} < \frac{\alpha}{\beta}$ (Πρόταση 2).

Από το Λ φέρνουμε την κάθετη στην ΛΚ λαμβάνοντας σε αυτή τμήμα ΛΜ ώστε $\mathrm{KM} = \theta$. Στην συνέχεια φέρνουμε τις διαμέτρους ΓΕ και ΔΖ ώστε να είναι κάθετες μεταξύ τους.

Διχοτομούμε την $\widehat{\Delta\mathrm{H}\Gamma}$ όπως και την μισή της. Επαναλαμβάνοντας συνεχώς την διχοτόμηση κάποια στιγμή θα απομείνει μια γωνία, έστω η $\widehat{\mathrm{NH}\Gamma}$, μικρότερη από $2 \cdot \widehat{\Lambda\mathrm{KM}}$. Δηλαδή θα ισχύει $\widehat{\mathrm{NH}\Gamma} < 2 \cdot \widehat{\Lambda\mathrm{KM}}$.



Φέρνουμε την ΝΓ η οποία είναι πλευρά ισοπλεύρου πολυγώνου, διότι η $\widehat{\mathrm{NH}\Gamma}$ μετρά την $\widehat{\Delta\mathrm{H}\Gamma} = 1$ ορθή και άρα το τόξο $\widehat{\mathrm{N}\Gamma}$ μετρά το τεταρτοκύκλιο

$\widehat{ΓΔ}$ και άρα μετρά και ολόκληρο τον κύκλο οπότε προφανώς η ΝΓ είναι πλευρά ισοπλεύρου πολυγώνου.

Στην συνέχεια διχοτομούμε την $\widehat{ΓΗΝ}$ και έστω ΞΗ η διχοτόμος της ενώ φέρνουμε και την εφαπτομένη ΟΞΠ του κύκλου στο Ξ. Τα σημεία Ο και Π είναι τα σημεία τομής των προεκτάσεων των ΗΝ και ΗΓ με την εφαπτομένη.

Τότε όμως η ΟΠ είναι πλευρά ισοπλεύρου πολυγώνου που έχει περιγραφεί περί τον κύκλο. Και είναι ισόπλευρο καθώς το πολύγωνο αυτό είναι όμοιο προς το εγγεγραμμένο στον κύκλο ισόπλευρο πολυγωνο που έχει πλευρά ίση με ΝΓ.

Επιπλέον επειδή $\widehat{ΝΗΓ} < 2 \cdot \widehat{ΛΚΜ}$ και $\widehat{ΝΗΓ} = 2 \cdot \widehat{ΤΗΓ}$ έπεται ότι $\widehat{ΤΗΓ} < \widehat{ΛΚΜ}$.

Επειδή τώρα οι γωνίες με κορυφές τα Λ και Τ είναι ορθές, δηλαδή $\widehat{ΚΛΜ} = \widehat{ΗΤΓ} = 1$ ορθή για τις πλευρές των τριγώνων ΤΗΓ και ΚΛΜ έχουμε

$$\frac{ΜΚ}{ΛΚ} > \frac{ΓΗ}{ΗΤ} = \frac{ΞΗ}{ΗΤ} \tag{1}$$

καθώς ΓΗ = ΗΞ.

Από την ομοιότητα των δύο πολυγώνων είναι $ΞΗ/ΗΤ = ΠΟ/ΝΓ$ και άρα από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι $ΠΟ/ΝΓ < ΜΚ/ΚΛ$.

Αλλά $ΜΚ/ΚΛ < \alpha/\beta$ διότι $ΜΚ = \theta$ και $\theta/ΚΛ < \alpha/\beta$ οπότε ισχύει $ΠΟ/ΝΓ < \alpha/\beta$ που είναι η αποδεικτέα καθώς η ΠΟ είναι η πλευρά του πολυγώνου που έχει περιγραφεί περί τον κύκλο ενώ αντίστοιχα η ΝΓ είναι η πλευρά του εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο πολυγώνο. ◘

(Στμ: διάφορα σχόλια περί «κενού» έχουν γραφτεί για την ανισότητα (1). Όμως δεν υπάρχει κανένα κενό, απλώς η σχέση είναι προφανής στον Αρχιμήδη. Πράγματι, αν Ρ σημείο της ΛΜ ώστε $\widehat{ΛΚΡ} = \widehat{ΤΗΓ}$ τότε τα τρίγωνα με αυτές τις κορυφές είναι όμοια και οι πλευρές που περιέχουν τη ίση αυτή γωνία είναι ανάλογες (Στοιχεία, Β6, Π4). Αλλά ΚΡ < ΚΜ από τη μονοτονία της περιμέτρου (Στοιχεία, Β1, Π21), αφού ο διπλασιασμός του τριγώνου ΚΛΜ που προκύπτει αν επεκτείνουμε την ΚΛ με ίσο τμήμα ΛΣ, θα είναι $2ΚΡ = ΚΡ + ΡΣ < ΚΜ + ΜΣ = 2ΚΜ$.)

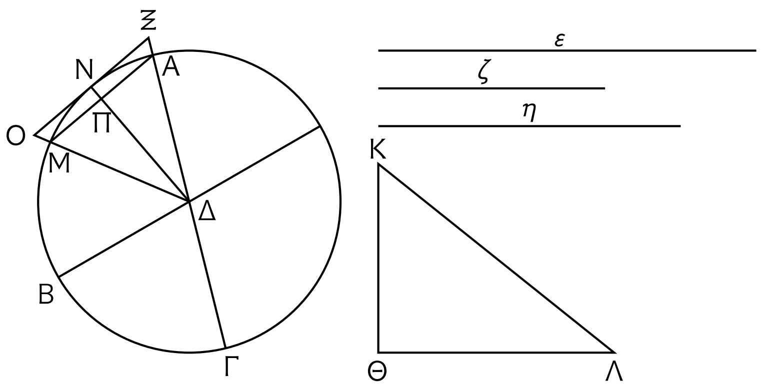
Πρόταση 4 (113) *Δοθέντων δύο άνισων μεγεθών και ενός κυκλικού τομέα είναι δυνατόν να περιγραφεί περί τον τομέα πολύγωνο και να εγγραφεί σε αυτόν ένα άλλο πολύγωνο ώστε ο λόγος της πλευράς του περιγεγραμμένου πολυγώνου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου πολυγώνου να είναι μικρότερος από τον λόγο του μεγαλύτερου μεγέθους προς το μικρότερο μέγεθος.*

Απόδειξη. Έστω τα δοθέντα άνισα μεγέθη ε και ζ με $\varepsilon > \zeta$ και ο κύκλος ΑΒΓ με κέντρο το Δ. Θεωρούμε ακόμα τον κυκλικό τομέα ΑΔΒ.

Πρέπει να περιγραφεί περί τον κυκλικό τομέα ΑΔΒ πολύγωνο και να εγγραφεί σε αυτόν ένα άλλο πολύγωνο (που να έχει ίσες τις πλευρές του χωρίς τις ΔΒ και ΔΑ) ώστε ο λόγος της πλευράς του περιγεγραμμένου πολυγώνου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου πολυγώνου να είναι μικρότερος από τον λόγο ε/ζ.

Λαμβάνουμε τα άνισα ευθύγραμμα τμήματα η και ΘΚ με $\eta >$ ΘΚ και $\eta/$ΘΚ $< \varepsilon/\zeta$ (Πρόταση 2).

Από το Θ φέρνουμε την κάθετη στην ΘΚ λαμβάνοντας σε αυτή το σημείο Λ ώστε ΚΛ $= \eta$ (αυτό μπορεί να γίνει καθώς $\eta >$ ΘΚ).



Στην συνέχεια διχοτομούμε την $\widehat{\text{ΑΔΒ}}$ και έστω ΔΜ η διχοτόμος της. Διχοτομούμε και την μισή της, δηλαδή την $\widehat{\text{ΑΔΜ}}$ επαναλαμβάνοντας συνεχώς την διαδικασία διχοτόμησης της μισής γωνίας που προκύπτει κάθε φορά.

Κάποια στιγμή θα απομείνει γωνία, έστω η $\widehat{\text{ΑΔΜ}} < 2 \cdot \widehat{\text{ΛΚΘ}}$ (Στοιχεία, Βιβλίο 10, Πρόταση 1) και τότε η ΑΜ είναι η πλευρά του πολυγώνου που εγγράφεται στον κύκλο.

Αν ΔΝ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\text{ΑΔΜ}}$ που έχει απομείνει και η εφαπτομένη ΟΝΞ του κύκλου στο Ν τότε η ΟΞ θα είναι αντίστοιχα η πλευρά του πολυγώνου που περιγράφεται περί τον κυκλικό τομέα και που είναι όμοιο με το πολύγωνο που εγγράφηκε σε αυτόν.

Τότε ισχύει και

$$\frac{\text{ΞΟ}}{\text{ΑΜ}} < \frac{\varepsilon}{\zeta}$$

που είναι η αποδεικτέα. ◘

Πρόταση 5 (113) *Δοθέντων ενός κύκλου και δύο άνισων μεγεθών να περιγραφεί περί τον κύκλο πολύγωνο και να εγγραφεί σε αυτόν ένα άλλο πολύγωνο ώστε ο λόγος του εμβαδού του περιγραφέντος πολυγώνου προς το εμβαδόν του εγγραφέντος πολυγώνου να είναι μικρότερος από τον λόγο του μεγαλύτερου μεγέθους προς το μικρότερο μέγεθος.*

Απόδειξη. Λαμβάνουμε τον κύκλο Α και τα άνισα μεγέθη ε και ζ με $\varepsilon > \zeta$.

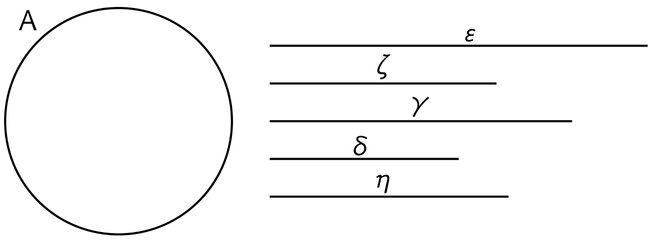
Πρέπει να εγγραφεί στον κύκλο ένα πολύγωνο και να περιγραφεί περί αυτόν ένα άλλο πολύγωνο ώστε ο λόγος του εμβαδού του περιγραφέντος πολυγώνου προς το εμβαδόν του εγγραφέντος πολυγώνου να είναι μικρότερος από τον λόγο ε/ζ.

Λαμβάνουμε τα άνισα ευθύγραμμα τμήματα γ και δ με $\gamma > \delta$ ώστε να ισχύει

$$\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\varepsilon}{\zeta}$$

σύμφωνα με την Πρόταση 2.

Αφού ληφθεί η μέση ανάλογος η των γ και δ (Στοιχεία, Βιβλίο 6, Πρόταση 13) θα είναι και $\gamma > \eta$.



Στην συνέχεια περιγράφουμε περί τον κύκλο Α ένα πολύγωνο και εγγράφουμε σε αυτόν ένα άλλο έτσι ώστε ο λόγος της πλευράς του περιγραφέντος πολυγώνου προς την πλευρά του εγγραφέντος πολυγώνου να είναι μικρότερος από τον λόγο γ/η (Πρόταση 3).

Δηλαδή αν α και β είναι οι πλευρές των δύο πολυγώνων (του περιγραφέντος και του εγγραφέντος αντίστοιχα) θα ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\eta}$$

οπότε θα είναι και

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^2.$$

Αλλά το τετράγωνο του λόγου των δύο πλευρών των δύο πολυγώνων είναι ίσο με τον λόγο των εμβαδών τους καθώς αυτά είναι όμοια (Στοιχεία, Βιβλίο 6, Πρόταση 20).

Δηλαδή αν ε_1 και ε_2 είναι τα εμβαδά των δύο όμοιων πολυγώνων (του περιγραφέντος και του εγγραφέντος αντίστοιχα) ισχύει

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$$

Επιπλέον ισχύει και ότι

$$\frac{\gamma}{\delta} = \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^2$$

διότι

$$\frac{\gamma}{\eta} = \frac{\eta}{\delta}$$

καθώς το η είναι η μέση ανάλογος των γ και δ (Στοιχεία, Βιβλίο 5, Ορισμός 9).

Έτσι έχουμε

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^2 = \frac{\gamma}{\delta}$$

και καθώς $\gamma/\delta < \varepsilon/\zeta$ από την προηγούμενη έπεται ότι $\varepsilon_1/\varepsilon_2 < \varepsilon/\zeta$ που είναι η αποδεικτέα. ◘

Πρόταση 6 (114) *Δοθέντων δύο άνισων μεγεθών και ενός κυκλικού τομέα είναι δυνατόν να περιγραφεί περί τον τομέα ένα πολύγωνο και να εγγραφεί σε αυτόν ένα άλλο όμοιο με αυτό που περιγράφηκε περί τον τομέα ώστε ο λόγος του εμβαδού του περιγραφέντος πολυγώνου προς το εμβαδόν του εγγραφέντος πολυγώνου να είναι μικρότερος από τον λόγο του μεγαλύτερου μεγέθους προς το μικρότερο μέγεθος.*

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι αν δοθεί ένας κύκλος ή κυκλικός τομέας και ένα χωρίο είναι δυνατόν αν εγγράφουμε συνεχώς στον κύκλο ή στον τομέα ισόπλευρα πολύγωνα επαναλαμβάνοντας συνεχώς την ίδια διαδικασία εγγραφής ισόπλευρων πολυγώνων στα αποτέμνοντα τμήματα θα απομείνουν κάποια στιγμή τμήματα κύκλου ή του κυκλικού τομέα με εμβαδόν μικρότερο από το εμβαδόν του δοθέντος χωρίου (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 1).

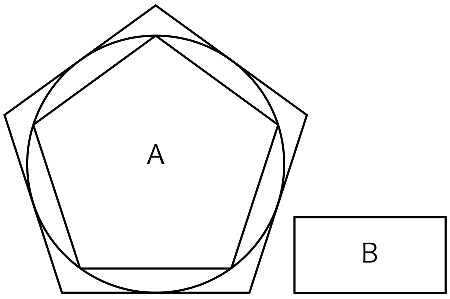
Πρέπει επίσης να δειχτεί ότι δοθέντων ενός κύκλου ή κυκλικού τομέα και ενός χωρίου είναι δυνατόν να περιγραφεί περί τον κύκλο ή τον κυκλικό τομέα πολύγωνο ώστε τα αποτέμνοντα μετά την περιγραφή τμήματα να έχουν εμβαδόν μικρότερο από αυτό του δοθέντος χωρίου.

Αφού αποδειχτεί για τον κύκλο θα πρέπει η απόδειξη να γενικευτεί και για τον κυκλικό τομέα.

Αν λοιπόν δίνεται ο κύκλος Α και το χωρίο Β είναι δυνατόν να περιγραφεί περί τον κύκλο πολύγωνο ώστε τα τμήματα μεταξύ του κύκλου και του πολυγώνου που απομένουν όταν ο κύκλος αφαιρεθεί από το πολύγωνο έχουν εμβαδόν μικρότερο από το εμβαδόν του χωρίου Β καθώς αν υπάρχουν δύο άνισα μεγέθη με το μεγαλύτερο από αυτά να είναι το άθροισμα των εμβαδών του κύκλου και του χωρίου και το μικρότερο να είναι το εμβαδόν του κύκλου τότε μπορεί να περιγραφεί μερί τον κύκλο ένα πολύγωνο και να εγγραφεί σε αυτόν ένα άλλο πολύγωνο όμοιο με το προηγούμενο ώστε ο λόγος του εμβαδού του περιγραφέντος πολυγώνου προς το εμβαδόν του εγγραφέντος πολυγώνου να είναι μικρότερος από τον λόγο του αθροίσματος των εμβαδών του κύκλου και του χωρίου (που είναι το μεγαλύτερο μέγεθος) προς το εμβαδόν του κύκλου (που είναι το μικρότερο μέγεθος), σύμφωνα με την Πρόταση 5.

Δηλαδή αν ε_1 και ε_2 είναι τα εμβαδά των δύο πολυγώνων (του περιγραφέντος και το εγγραφέντος αντίστοιχα) τότε ισχύει

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{|A| + |B|}{|A|}.$$



Έτσι αν ο κύκλος αφαιρεθεί από το πολύγωνο απομένουν τμήματα κύκλου με εμβαδόν μικρότερο από το εμβαδόν του χωρίου B καθώς

$$\frac{\varepsilon_1}{|A|} < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

διότι $|A| > \varepsilon_2$.

Πράγματι, από την προηγούμενη έπεται ότι

$$\frac{\varepsilon_1}{|A|} < \frac{|A| + |B|}{|A|} \tag{2}$$

και άρα (Στοιχεία, Βιβλιο 5, Πρόταση 10) θα ισχύει και ότι

$$\frac{\varepsilon_1 - |A|}{|A|} < \frac{|B|}{|A|}.$$

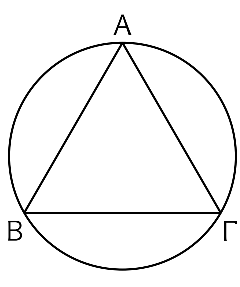
Οπότε είναι $\varepsilon_1 - |A| < |B|$.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και από την (2) καθώς από αυτήν έπεται ότι $\varepsilon_1 < |A| + |B|$ ή $\varepsilon_1 - |A| < |B|$.

Ομοίως γίνεται η απόδειξη και για τον κυκλικό τομέα. ◘

Πρόταση 7 (115) *Αν σε ισοσκελή κώνο (στμ: ο Αρχιμήδης εννοεί τον ορθό κώνο) εγγραφεί τριγωνική πυραμίδα με βάση ισόπλευρο τρίγωνο τότε η παράπλευρη επιφάνεια της πυραμίδας έχει εμβαδόν ίσο με τον εμβαδόν ενός τριγώνου που έχει βάση ίση με την περίμετρο της βάσης της πυραμίδας και ύψος ίσο με το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή της πυραμίδας προς την μια πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου που είναι η βάση της πυραμίδας (στμ: δηλαδή το απόστημα της πυραμίδας).*

Απόδειξη. Έστω ο ισοσκελής κώνος με βάση τον κύκλο ΑΒΓ. Εγγράφουμε στον κώνο αυτό πυραμίδα με βάση το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ.



Ισχυρίζομαι ότι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας είναι ίσο με το εμβαδόν ενός

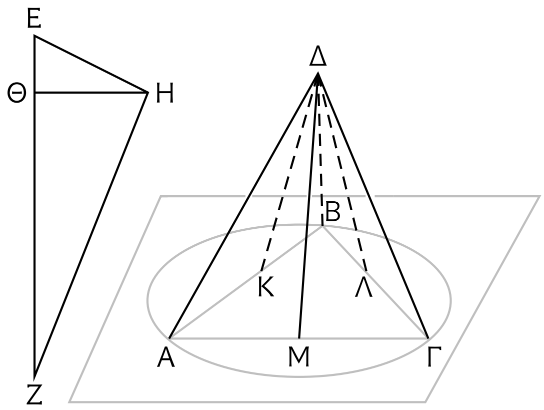
τριγώνου με βάση ίση με την περί-
μετρο του ΑΒΓ και ύψος ίσο με το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή του κώνου προς μια από τις πλευρές του ΑΒΓ.

Επειδή ο κώνος είναι ισοσκελής και η βάση της πυραμίδας ισόπλευρο τρίγωνο έπεται ότι τα ύψη των τριγώνων στα οποία περιέχεται η πυραμίδα είναι ίσα, οπότε συμβολίζοντας με υ καθένα από αυτά παίρνουμε ότι το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων αυτών είναι:

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \upsilon + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Gamma}\cdot \upsilon + \frac{1}{2}\cdot \Gamma\mathrm{A}\cdot \Gamma\mathrm{A}\cdot \upsilon = \frac{1}{2}\cdot (\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\Gamma\Delta)\cdot \upsilon$$

δηλαδή το συνολικό εμβαδόν των τριγώνων αυτών είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου με βάση ίση με $\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\Gamma\Delta$ και ύψος υ (Στοιχεία, Βιβλίο 6, Πρόταση 1).

2^{η} απόδειξη: Θεωρούμε τον ισοσκελή κώνο με βάση τον κύκλο ΑΒΓ και κορυφή το Δ και εγγράφουμε σε αυτόν πυραμίδα με βάση το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε και τις ΔΑ, ΔΓ και ΔΒ.



Ισχυρίζομαι ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ και ΒΔΓ έχουν συνολικό εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν ενός τριγώνου με βάση ίση με την περίμετρο του ΑΒΓ και ύψος ίσο με το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από το Δ προς την ΒΓ.

Φέρνουμε από το Δ τις κάθετες ΔΚ, ΔΛ, ΔΜ στις ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα οπότε θα είναι και $\Delta\mathrm{K} = \Delta\Lambda = \Delta\mathrm{M}$.

Στην συνέχεια λαμβάνουμε το τριγωνο ΕΖΗ με βάση $\mathrm{EZ} = \mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{A\Gamma}$ και ύψος $\mathrm{H\Theta} = \Delta\Lambda$.

Το ορθογώνιο με πλευρές ίσες με τις ΒΓ και ΔΛ έχει εμβαδόν διπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ (Στοιχεία, Βιβλίο 1, Πρόταση 41) ενώ το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με τις ΑΒ και ΔΚ έχει εμβαδόν διπλάσιο από αυτό του τριγώνου ΑΒΔ και το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με τις ΑΓ και ΔΜ έχει αντίστοιχα διπλάσιο εμβαδόν από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΓ.

Άρα το ορθογώνιο με πλευρές την ΕΖ (που είναι ίση με την περίμετρο του ΑΒΓ) και την ΔΛ = ΗΘ έχει διπλάσιο εμβαδόν από το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ΑΔΒ, ΒΔΓ και ΑΔΓ. Δηλαδή

$$\mathrm{EZ} \cdot \mathrm{H\Theta} = 2 \cdot (|\mathrm{A\Delta B}| + |\mathrm{B\Delta\Gamma}| + |\mathrm{A\Delta\Gamma}|)$$

Αλλά $\mathrm{EZ} \cdot \mathrm{H\Theta} = 2 \cdot |\mathrm{EZH}|$ (Στοιχεία, Βιβλίο Ι, Πρόταση 41) οπότε

$$2 \cdot |\mathrm{EZH}| = 2 \cdot (|\mathrm{A\Delta B}| + |\mathrm{B\Delta\Gamma}| + |\mathrm{A\Delta\Gamma}|)$$

ή

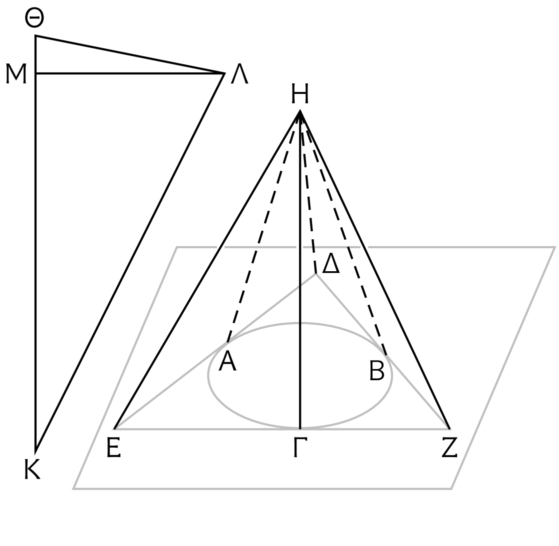
$$|\mathrm{EZH}| = |\mathrm{A\Delta B}| + |\mathrm{B\Delta\Gamma}| + |\mathrm{A\Delta\Gamma}|$$

που είναι η αποδεικτέα. ◘

Πρόταση 8 (116) *Αν περί έναν ισοσκελή κώνο περιγραφεί πυραμίδα τότε η παράπλευρη επιφάνειά της έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν ενός τριγώνου με βάση ίση με την περίμετρο της βάσης της πυραμίδας και ύψος ίσο με την πλευρά του κώνου* (*στμ: την γενέτειρα*).

Απόδειξη. Έστω ο κώνος με βάση τον κύκλο ΑΒΓ. Περιγράφουμε περί τον κώνο πυραμίδα με βάση το τρίγωνο ΔΕΖ που είναι περιγεγραμμένο περί τον κύκλο ΑΒΓ.

Ισχυρίζομαι ότι η παράπλευρη επιφάνεια της πυραμίδας έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου που έχει βάση ίση με την περίμετρο του ΔΕΖ και ύψος ίσο με την πλευρά του κώνου.



Επειδή ο άξονας του κώνου είναι κάθετος στο επίπεδο του κύκλου ΑΒΓ και οι ακτίνες του κύκλου είναι κάθετες στις εφαπτομένες (δηλαδή στις ΔΕ, ΕΖ, ΔΖ) στα σημεία επαφής από το «Θεώρημα των τριών καθέτων» (Στοιχεία, Βιβλίο ΙΙ, Πρόταση ΙΙ) έπεται ότι ισχύουν $\mathrm{HA} \perp \mathrm{\Delta E}$, $\mathrm{HB} \perp \mathrm{\Delta Z}$

και $\mathrm{H\Gamma} \perp \mathrm{EZ}$. Ενώ ισχύει και ότι $\mathrm{HA} = \mathrm{HB} = \mathrm{H\Gamma}$ καθώς είναι ίσες με την πλευρά του κώνου.

Στην συνέχεια λαμβάνουμε το τρίγωνο ΘΚΛ με $\Theta\mathrm{K} = \Delta\mathrm{E} + \mathrm{EZ} + +\Delta\mathrm{Z}$ και $\Lambda\mathrm{M} = \mathrm{HA}$ όπου $\Lambda\mathrm{M} \perp \Theta\mathrm{K}$.

Το ορθογώνιο που έχει πλευρές ίσες με ΔΕ και ΑΗ έχει διπλάσιο εμβαδόν από το ΕΔΗ (Στοιχεία, Βιβλιό Ι, Πρόταση 41) ενώ το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του αντίστοιχα ίσες με τις ΔΖ και ΗΒ έχει εμβαδόν διπλάσιο από το εμβαδόν του ΔΖΗ και το ορθογώνιο με πλευρές ίσες με τις ΕΖ και ΓΗ έχει αντίστοιχα διπλάσιο εμβαδόν από το εμβαδόν του ΕΗΖ.

Δηλαδή, $\Delta\mathrm{E} \cdot \mathrm{AH} = 2 \cdot |\mathrm{E}\Delta\mathrm{H}|$, $\Delta\mathrm{Z} \cdot \mathrm{HB} = 2 \cdot |\Delta\mathrm{ZH}|$ και $\mathrm{EZ} \cdot \Gamma\mathrm{H} = 2 \cdot |\mathrm{EHZ}|$ οπότε αθροίζοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$(\Delta\mathrm{E} + \Delta\mathrm{Z} + \mathrm{EZ}) \cdot \lambda = 2 \cdot (|\mathrm{E}\Delta\mathrm{H}| + |\Delta\mathrm{ZH}| + |\mathrm{EHZ}|)$$

όπου με λ έχουμε συμβολίσει την πλευρά του κώνου $\lambda = \mathrm{HA} = \mathrm{HB} = \mathrm{H\Gamma}$.

Καθώς όμως $\Delta\mathrm{E} + \Delta\mathrm{Z} + \mathrm{EZ} = \Theta\mathrm{K}$ και $\Lambda\mathrm{M} = \lambda$ από την παραπάνω παίρνουμε

$$\Theta\mathrm{K} \cdot \Lambda\mathrm{M} = 2 \cdot (|\mathrm{E}\Delta\mathrm{H}| + |\Delta\mathrm{ZH}| + |\mathrm{EHZ}|)$$

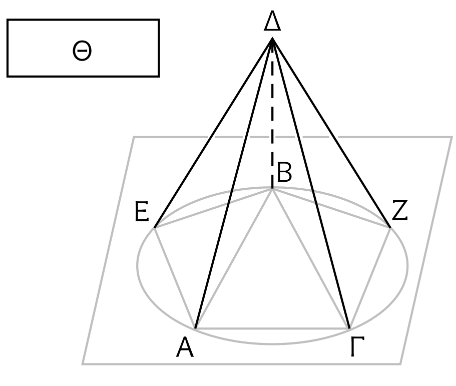
ή ισοδύναμα (Στοιχεία, Βιβλίο Ι, Πρόταση 41)

$$|\Theta\Lambda\mathrm{K}| = |\mathrm{E}\Delta\mathrm{H}| + |\Delta\mathrm{ZH}| + |\mathrm{EHZ}|$$

Συνεπώς, η παράπλευρη επιφάνεια της πυραμίδας έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου που έχει βάση ίση με την περίμετρο του ΔΕΖ και ύψος ίσο με την πλευρά του κώνου. ◙

Πρόταση 9 (116) *Αν από τα άκρα της χορδής ενός κύκλου που είναι η βάση ενός ισοσκελούς κώνου αχθούν τα ευθύγραμμα τμήματα προς την κορυφή του κώνου τότε το τρίγωνο με πλευρές αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα και την χορδή έχει εμβαδόν μικρότερο από το εμβαδόν της επιφάνειας του κώνου που περιέχεται μεταξύ των ευθυγράμμων αυτών τμημάτων.*

Απόδειξη. Έστω ο ισοσκελής κώνος με κορυφή το Δ και βάση τον κύκλο ΑΒΓ. Λαμβάνουμε στον κύκλο την χορδή ΑΓ και φέρνουμε τις ΑΔ και ΔΓ.



Ισχυρίζομαι ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΓ είναι μικρότερο από το εμβαδόν της κωνικής επιφάνειας (στμ: της μικρότερης) μεταξύ των ΔΑ και ΔΓ.

Διχοτομούμε το τόξο $\widehat{\mathrm{AB\Gamma}}$ και έστω Β το μέσο του. Φέρνουμε και τις ΑΒ, ΓΒ και ΔΒ.

Τότε ισχύει

$$|\mathrm{AB}\Delta| + |\mathrm{B\Gamma}\Delta| > |\mathrm{A}\Delta\Gamma|.$$

(Στμ: δείτε την σημείωση αμέσως μετά το τέλος της απόδειξης).

Έστω Θ το χωρίο με εμβαδόν ίσο με την ποσότητα κατά την οποία υπερέχει το άθροισμα των εμβαδών των ΑΒΔ και ΒΓΔ από το εμβαδόν του ΑΔΓ, δηλαδή

$$|\Theta| = |AB\Delta| + |B\Gamma\Delta| - |A\Delta\Gamma|.$$

Τότε για το $|\Theta|$ ισχύει είτε $|\Theta| \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ είτε $|\Theta| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ όπου με ε_1 και ε_2 έχουμε συμβολίσει τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων (στμ: που αντιστοιχούν στις κυρτές επίκεντρες γωνίες) ΑΕΒ και ΒΖΓ.

1^{η} περίπτωση: $|\Theta| \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Επειδή υπάρχουν δύο επιφάνειες: η κωνική μεταξύ των ΑΔ και ΔΒ μαζί με το τμήμα κύκλου ΑΕΒ και η τριγωνική ΑΔΒ που έχουν κοινό σύνορο την περίμετρο του τριγώνου ΑΔΒ από το Αξίωμα 3 έπεται ότι η κωνική επιφάνεια μεταξύ των ΑΔ και ΔΒ έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό της τριγωνικής ΑΔΒ καθώς από δύο επιφάνειες με κοινό σύνορο μεγαλύτερο εμβαδόν έχει εκείνη που περιλαμβάνει την άλλη.

Συμβολίζοντας με E_1 το εμβαδόν της κωνικής επιφάνειας μεταξύ των ΑΔ και ΔΒ θα έχουμε

$$E_1 + \varepsilon_1 > |A\Delta B|.$$

Ομοίως αν E_2 είναι το εμβαδόν της κωνικής επιφάνειας μεταξύ των ΒΔ και ΔΓ θα ισχύει αντίστοιχα ότι

$$E_2 + \varepsilon_2 > |B\Delta\Gamma|.$$

Αθροίζοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$E_1 + E_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > |A\Delta B| + |B\Delta\Gamma|$$

οπότε, καθώς $|\Theta| \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, θα είναι και

$$E_1 + E_2 + |\Theta| \geq E_1 + E_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > |A\Delta B| + |B\Delta\Gamma|$$

και άρα

$$E_1 + E_2 > |A\Delta B| + |B\Delta\Gamma| - |\Theta| > |A\Delta\Gamma| - |\Theta|.$$

Έτσι,

$$E_1 + E_2 > |A\Delta\Gamma|,$$

που είναι η αποδεικτέα.

2^{η} περίπτωση: $|\Theta| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Διχοτομούμε τα τόξα $\widehat{\mathrm{AB}}$, $\widehat{\mathrm{B\Gamma}}$ και στην συνέχεια διχοτομούμε και τα μισά τους. Επαναλαμβάνουμε συνεχώς την ίδια διαδικασία διχοτομώντας τα μισά των τόξων που προκύπτουν κάθε φορά.

Έτσι, κάποια στιγμή θα απομείνουν κυκλικά τμήματα με συνολικό εμβαδόν μικρότερο του $|\Theta|$ (Στοιχεία, Βιβλίο 10, Πρόταση 1).

Έστω ότι τα εναπομείναντα κυκλικά τμήματα είναι αυτά που ορίζονται από τις χορδές ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ και ΖΓ (στμ: αυτά που αντιστοιχούν στις κυρτές επίκεντρες γωνίες) ενώ φέρνουμε και τις ΔΕ και ΔΖ.

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση ισχύουν $\mathrm{B}_1+\beta_1 > |\mathrm{A\Delta E}|$ και $\mathrm{B}_2+\beta_2 > |\mathrm{E\Delta B}|$ όπου με B_1 και B_2 έχουμε συμβολίσει την κωνική επιφάνεια μεταξύ των ΑΔΕ και ΕΔΒ αντίστοιχα ενώ με β_1 και β_2 συμβολίζουμε τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων με χορδές τις ΑΕ και ΕΒ.

Αθροίζοντας κατά μέλη τις παραπάνω παίρνουμε

$$\mathrm{B}_1+\mathrm{B}_2+\beta_1+\beta_2 > |\mathrm{A\Delta E}|+|\mathrm{E\Delta B}|$$

και επειδή $|\mathrm{A\Delta E}|+|\mathrm{E\Delta B}| > |\mathrm{A\Delta B}|$ είναι

$$\mathrm{B}_1+\mathrm{B}_2+\beta_1+\beta_2 > |\mathrm{A\Delta B}|.$$

Με όμοιο τρόπο προκύπτει και ότι

$$\Gamma_1+\Gamma_2+\gamma_1+\gamma_2 > |\Delta\mathrm{B}\Gamma|,$$

όπου με Γ_1 και Γ_2 συμβολίζουμε τις κωνικές επιφάνειες μεταξύ των ΔΒ, ΔΖ και ΔΖ, ΔΓ αντίστοιχα ενώ με γ_1 και γ_2 συμβολίζουμε τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων που αντιστοιχούν στις χορδές ΒΖ και ΖΓ.

Αθροίζοντας κατά μελη τις δύο παραπάνω ανισότητες παίρνουμε

$$\varepsilon+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2 > |\mathrm{A\Delta B}|+|\Delta\mathrm{B}\Gamma|,$$

όπου με ε συμβολίζουμε το εμβαδόν ολόκληρης της κωνικής επιφάνειας μεταξύ των ΑΔΓ.

Έτσι, καθώς $|\Theta| = |\mathrm{AB\Delta}|+|\mathrm{B}\Gamma\Delta|-|\mathrm{A}\Delta\Gamma|$, από την παραπάνω έπεται ότι

$$\varepsilon+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2 > |\mathrm{A}\Delta\Gamma|+|\Theta|$$

και άρα

$$\varepsilon > |\mathrm{A}\Delta\Gamma|,$$

(στμ: αφού $\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2 < |\Theta|$ από την διαδικασία της διχοτόμησης) που είναι η αποδεικτέα. ◙

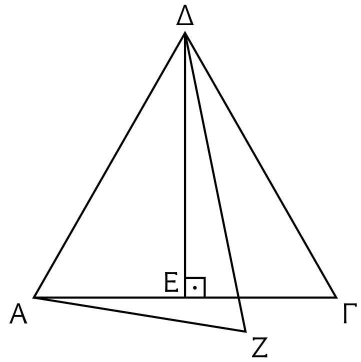
Στμ: Παραπάνω χρησιμοποιήθηκε χωρίς απόδειξη ότι σε έναν ισοσκελή κώνο ΔΑΒΓ (με κορυφή το Δ και βάση τον κύκλο ΑΒΓ) αν το Β είναι το μέσο του τόξου $\widehat{ΑΓ}$ τότε ισχύει $|ΒΔΓ| + |ΔΒΑ| > |ΑΔΓ|$. Για αυτό το θέμα έχουν γραφτεί διάφορες αναφορές ότι πρόκειται περί κενού. Ο Netz χαρακτηρίζει την ανισότητα «extremely perplexing» [Ne2004] (και αυτό είναι αληθές αλλά σε μια γενικότερη διατύπωση και όχι στην ειδική περίπτωση του κειμένου). Εμείς συμφωνούμε με την νεώτερη άποψη του Masià-Fornos [Ma2010] ότι κανένα κενό δεν υπάρχει. Κατά πάσα πιθανότητα ο Αρχιμήδης γνωρίζει την ανισότητα αυτή από άλλο κείμενο που δεν διασώθηκε και δεν ασχολείται να εξηγήσει. Η δε εξήγηση του Ευτόκιου (σχολιαστή του Αρχιμήδη), ενώ και για αυτή έχει γραφτεί ότι δεν είναι πλήρης, και πάλι συμφωνούμε με τον Masià-Fornos ότι είναι επαρκέστατη. Απλώς ο Ευτόκιος παραλείπει να σχολιάσει το προφανές: ότι το ζητούμενο της Πρότασης 9 αρκεί να αποδειχθεί όταν το τόξο $\widehat{ΑΓ}$ είναι κυρτό. Διότι φανερά η παράπλευρη επιφάνεια του κώνου όταν θεωρήσουμε το μη κυρτό $\widehat{ΑΓ}$ είναι μεγαλύτερη από την παράπλευρη επιφάνεια όταν το $\widehat{ΑΓ}$ είναι κυρτό, οπότε αρκεί να ασχοληθούμε μόνο με αυτή την περίπτωση και το σημείο Β στο κυρτό $\widehat{ΑΓ}$.

Με αυτή την παραδοχή η εξήγηση που παραθέτει ο Ευτόκιος είναι επαρκής και έχει ως εξής:

Απόδειξη Ευτόκιου: Από τα Στοιχεία Βιβλίο ΙΙ Πρόταση 20, ισχύει

$$2\,\widehat{ΒΔΑ} = \widehat{ΓΔΒ} + \widehat{ΒΔΑ} > \widehat{ΓΔΑ} = 2\,\widehat{ΑΔΕ},$$

όπου Ε το μέσο της ΑΓ. Αρκεί να αποδείξουμε λοιπόν ότι $|ΒΔΑ| > |ΑΔΕ|$ γνωρίζοντας ότι $\widehat{ΒΔΑ} > \widehat{ΑΔΕ}$. Επειδή το τόξο $\widehat{ΑΓ}$ είναι κυρτό συμπεραίνουμε ότι $ΑΓ > ΑΒ$.



Μεταφέρουμε τα δύο τρίγωνα στο ίδιο επίπεδο τοποθετώντας τα και τα δύο στην ίδια πλευρά της ΑΔ (δείτε το διπλανό σχήμα) ως εξής: φέρνουμε από το Δ ευθεία ΔΖ ώστε $\widehat{ΑΔΖ} = \widehat{ΑΔΒ}$ την οποία επεκτείνουμε μέχρι το Ζ ώστε $ΔΖ = ΔΑ$. Φέρνουμε και την ΖΑ. Τα τρίγωνα ΔΖΑ και ΔΒΑ είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες ($ΔΒ = ΔΖ$, ΔΑ κοινή) και την περιεχόμενη γωνία ίση από κατασκευή (Στοιχεία Βιβλίο Ι, Πρόταση 4), άρα το ΑΔΖ είναι μεγαλύτερο από το ΑΔΕ. ◘

Το τελευταίο βήμα προκύπτει άμεσα από το ότι το Ε βρίσκεται εντός του τριγώνου ΑΔΖ. Πράγματι, το Ζ βρίσκεται έξω από το τρίγωνο ΑΔΓ (αφού $ΔΖ = ΔΑ = ΔΓ$) αλλά εντός της γωνίας ΕΔΓ, αφού $ΑΖ < ΑΓ$ (Στοιχεία Βιβλίο Ι, Πρόταση 25). Συνεπώς $\widehat{ΔΑΕ} < \widehat{ΔΑΖ}$ αλλά και $\widehat{ΑΔΕ} < \widehat{ΑΔΖ}$.

Έτσι, με το Ε εντός του τριγώνου ΑΔΖ το ύψος ΖΛ από το Ζ του ΑΔΖ είναι μεγαλύτερο από το ύψος ΗΜ του ΑΔΕ από το Ε, διότι είτε το Ζ είναι στην επέκταση του ΜΗ και είναι φανερό, είτε δεν είναι και αν Κ η τομή της της ΖΛ με την παράλληλη στην ΔΑ από το Η θα είναι ΖΛ = ΖΚ + ΚΛ = ΖΚ + ΗΜ > ΗΜ. Επιπλέον η βάση των τριγώνων είναι η κοινή ΑΔ.

Αν κανείς θελήσει να αποδείξει αυτή την ανισότητα ανεξάρτητα αν το Β είναι στο κυρτό τόξο ή στο μη κυρτό τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ η απόδειξη είναι πιο περίπλοκη. Μια σύντομη απόδειξη δίνει ο Netz, μια πιο περίπλοκη ο Κατσουρίδης από το forum mathematica.gr. Το θέμα γίνεται ακόμα πιο περίπλοκο αν δεν υποθέσει κανείς ότι το Β είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$. Φαίνεται ότι η ανισότητα σε αυτή την περίπτωση είναι ισοδύναμη με την ανισότητα Cauchy-Schwarz και Minkowski. Δείχνουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση (που το Β είναι τυχόν σημείο του κυρτού ή του μη κυρτού $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$) μια μικρή τροποποίηση της απόδειξης του Ευτόκιου δίνει και πάλι την ανισότητα, αν και η Ανάλυση που απαιτείται είναι λεπτομερέστερη.

Ο Ευτόκιος ο Ασκαλωνίτης[1] (περίπου 480—περίπου 540 μΧ) υπήρξε αρχαίος Έλληνας μαθηματικός, που ασχολήθηκε κυρίως με τη γεωμετρία. Σχολίασε πολλές μελέτες του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου.

Λίγα γνωρίζουμε για τον Ευτόκιο. Διετέλεσε μαθητής του Αμμωνίου και του αρχιτέκτονα και μηχανικού Ισιδώρου του Μιλησίου.

1. Ασκαλώνα: λιμάνι στο σημερινό Ισραήλ, 5 χιλιόμετρα νότια του Τελ Αβίβ.

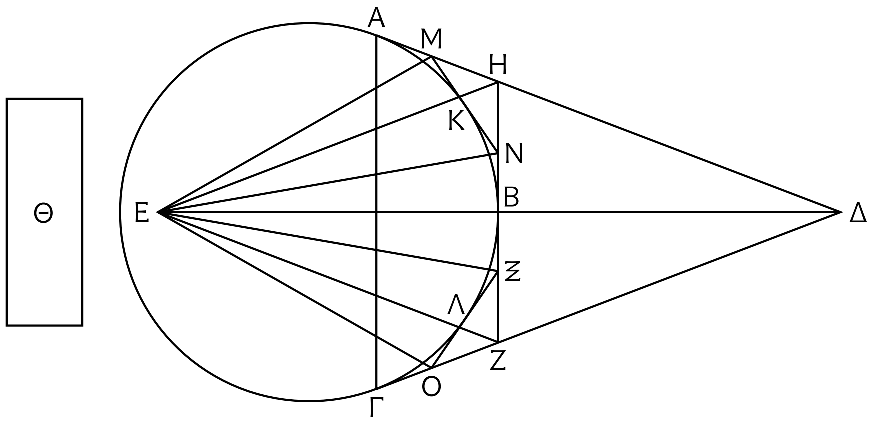
Επιστρέφουμε τώρα την κανονική ροή του κειμένου.

Πρόταση 10 (117) *Αν αχθούν οι εφαπτομένες στα άκρα της χορδής ενός κύκλου που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με τον κύκλο, ο οποίος είναι βάση ενός κώνου, και τέμνονται τότε το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων με πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται από τα σημεία επαφής προς την κορυφή του κώνου και τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο τομής των εφαπτομένων και το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή του κώνου προς το σημείο τομής των εφαπτομένων είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν της αντίστοιχης κωνικής επιφάνειας που βρίσκεται μεταξύ των τμημάτων από την κορυφή του κώνου προς τα σημεία επαφής (στμ: που βρίσκεται προς την μεριά του σημείου τομής των εφαπτομένων).*

Απόδειξη. Έστω ο κώνος με βάση τον κύκλο ΑΒΓ και κορυφή το Ε. Φέρνουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα Α και Γ οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με τον κύκλο ΑΒΓ και τέμνονται στο Δ. Φέρνουμε και τις ΕΑ, ΕΔ και ΕΓ.

Ισχυρίζομαι ότι ισχύει $|\text{ΑΔΕ}| + |\text{ΔΕΓ}| > \varepsilon$ όπου με ε συμβολίζουμε την κωνική επιφάνεια των ΑΕ, ΓΕ και του τόξου $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$ (στμ: που βρίσκεται προς την μεριά του σημείου τομής των εφαπτομένων στα Α και Γ).

Φέρνουμε ακόμα την εφαπτομένη στο Β (το οποίο διχοτομεί το $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$) δηλαδή την ΗΒΖ // ΑΓ ενώ φέρνουμε και τις ΗΕ και ΖΕ.



Τότε από την Τριγωνική Ανισότητα (Στοιχεία, Βιβλίο Ι, Πρόταση 20) είναι $\text{ΗΔ} + \text{ΔΖ} > \text{ΗΖ}$ οπότε $\text{ΗΔ} + \text{ΔΖ} + \text{ΗΑ} + \text{ΖΓ} > \text{ΗΑ} + \text{ΗΖ} + \text{ΖΓ}$ ή $\text{ΑΔ} + \text{ΔΓ} > \text{ΑΗ} + \text{ΗΖ} + \text{ΖΓ}$.

Όμως $\text{ΑΕ} = \text{ΕΒ} = \text{ΕΓ}$ διότι είναι πλευρές του ισοσκελούς κώνου.

Τότε όμως

$$|\text{ΑΕΔ}| + |\text{ΔΕΓ}| > |\text{ΑΗΕ}| + |\text{ΗΖΕ}| + |\text{ΖΓΕ}|$$

καθώς τα ύψη είναι ίσα διότι από το Θεώρημα των Τριών Καθέτων (Στοιχεία, Βιβλίο ΙΙ, Πρόταση 12) έπεται ότι το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή του κώνου είναι κάθετο στην εφαπτομένη του κύκλου (που είναι η βάση του κώνου) στο σημείο επαφής.

Έστω τώρα ότι Θ είναι το χωρίο με εμβαδόν

$$|\Theta| = |\text{ΑΕΔ}| + |\text{ΔΓΕ}| - (|\text{ΑΕΗ}| + |\text{ΗΕΖ}| + |\text{ΖΕΓ}|)$$

Προφανώς, ισχύει είτε $|\Theta| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ είτε $|\Theta| \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ όπου με ε_1 και ε_2 συμβολίζουμε τα εμβαδά των μικτόγραμμων χωρίων (αποτμημάτων) ΑΗΒΚ και ΒΖΓΛ αντίστοιχα.

1^{η} περίπτωση: Έστω $|\Theta| \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Τότε υπάρχουν δύο επιφάνειες: αυτή της πυραμίδας με βάση το τραπέζιο ΗΑΖΓ και κορυφή το Ε, και η κωνική επιφάνεια μεταξύ του τριγώνου

ΑΕΓ και του κυκλικού τμήματος ΑΒΓ οι οποίες έχουν κοινό σύνορο το τρίγωνο ΑΕΓ.

Έτσι, από το Αξίωμα 4 είναι φανερό ότι $A_1 > \varepsilon + A + |ΑΕΓ|$ όπου με A_1 συμβολίζουμε το εμβαδόν της επιφάνειας της πυραμίδας, με ε το εμβαδόν της κωνικής επιφάνειας μεταξύ των ΑΕ, ΕΓ και του τόξου $\widehat{ΑΒΓ}$ που βρίσκεται στην μεριά του σημείου τομής των εφαπτομένων και με α το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΑΒΓ.

Από την παραπάνω ανισότητα έπεται

$$A_1 - |ΑΕΓ| - \alpha > \varepsilon$$

και καθώς $A_1 - |ΑΕΓ| - \alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + |ΑΗΕ| + |ΗΕΖ| + |ΖΓΕ|$ έχουμε

$$|ΑΗΕ| + |ΗΕΖ| + |ΖΕΓ| + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > \varepsilon$$

Τότε

$$|Θ| + |ΑΗΕ| + |ΗΕΖ| + |ΖΕΓ| \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + |ΑΗΕ| + |ΗΕΖ| + |ΖΕΓ| > \varepsilon$$

Όμως $|Θ| = |ΑΕΔ| + |ΔΕΓ| - (|ΑΕΗ| + |ΗΕΖ| + |ΖΕΓ|)$ και άρα από την παραπάνω έπεται ότι

$$|ΑΕΔ| + |ΔΕΓ| > \varepsilon$$

που είναι η αποδεικτέα.

$2^η$ περίπτωση: Έστω $|Θ| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Περιγράφουμε πολύγωνα περί των κυκλικών τμημάτων με χορδές τα ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ διχοτομώντας τα αντίστοιχα τόξα και φέρνοντας τις εφαπτόμενες στα σημεία των τόξων που τα διχοτομούν.

Επαναλαμβάνοντας συνεχώς αυτήν την διαδικασία διχοτόμησης των τόξων που αντιστοιχούν στα κυκλικά τμήματα και της κατασκευής των εφαπτομένων στα σημεία διχοτόμησης λαμβάνουμε κάποια στιγμή αποτμήματα με εμβαδόν μικρότερο του $|Θ|$ (Στοιχεία, Βιβλίο 10, Πρόταση 1).

Έστω ότι τα αποτμήματα που έχουν απομείνει είναι τα μεικτόγραμμα τμήματα ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ και ΛΟΓ.

Φέρνουμε και τις ΜΕ, ΝΕ, ΞΕ και ΟΕ οπότε ισχύει

$$|ΑΗΕ| + |ΗΕΖ| + |ΖΕΓ| > |ΑΕΜ| + |ΜΕΝ| + |ΝΕΞ| + |ΞΕΟ| + |ΟΕΓ|$$

καθώς το άθροισμα των βάσεων των ΑΗΕ, ΗΕΖ και ΖΕΓ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των βάσεων των ισοϋψών με αυτά τριγώνων ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ και ΟΕΓ.

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση παρατηρούμε ότι αν από το συνολικό εμβαδόν της πυραμίδας με βάση το πολύγωνο ΑΜΝΞΟΓ και κορυφή το Ε αφαιρεθεί το εμβαδόν του ΑΕΓ έχουμε

$$\beta - |\mathrm{AE\Gamma}| > \varepsilon + \alpha$$

όπου με β συμβολίζουμε το εμβαδόν της συνολικής επιφάνειας της πυραμίδας με βάση το πολύγωνο ΑΜΝΞΟΓ, ενώ ε είναι αντίστοιχα το εμβαδόν της κωνικής επιφάνειας μεταξύ των ΑΕ, ΕΓ και του $\widehat{\mathrm{AB\Gamma}}$ (προς την μεριά που βρίσκεται το σημείο τομής των εφαπτομένων) και α είναι το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΑΒΓ.

Από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει

$$\beta - |\mathrm{AE\Gamma}| - \alpha > \varepsilon$$

αλλά

$$\beta - |\mathrm{AE\Gamma}| - \alpha = |\mathrm{AEM}| + |\mathrm{MEN}| + |\mathrm{NE\Xi}| + |\mathrm{\Xi EO}| + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

όπου α_1, α_2, α_3 και α_4 είναι τα εμβαδά των αποτμημάτων ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ και ΛΟΓ αντίστοιχα.

Όμως

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 < |\Theta|$$

και

$$|\mathrm{AEH}| + |\mathrm{HEZ}| + |\mathrm{ZE\Gamma}| > |\mathrm{AEM}| + |\mathrm{MEN}| + |\mathrm{NE\Xi}| + |\mathrm{\Xi EO}| + |\mathrm{OE\Gamma}|$$

οπότε

$$\begin{aligned} &|\Theta| + |\mathrm{AEH}| + |\mathrm{HEZ}| + |\mathrm{ZE\Gamma}| \\ &\quad > |\Theta| + |\mathrm{AEM}| + |\mathrm{MEN}| + |\mathrm{NE\Xi}| + |\mathrm{\Xi EO}| + |\mathrm{OE\Gamma}| \\ &\quad > \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + |\mathrm{AEM}| + |\mathrm{MEN}| + |\mathrm{NE\Xi}| + |\mathrm{\Xi EO}| + |\mathrm{OE\Gamma}| \end{aligned}$$

Και άρα

$$|\Theta| + |\mathrm{AEH}| + |\mathrm{HEZ}| + |\mathrm{ZE\Gamma}| > \varepsilon$$

Καθώς όμως $|\Theta| = |\mathrm{AE\Delta}| + |\mathrm{\Delta\Gamma E}| - (|\mathrm{AEH}| + |\mathrm{HEZ}| + |\mathrm{ZE\Gamma}|)$ από την παραπάνω έπεται ότι

$$|\mathrm{AE\Delta}| + |\mathrm{\Delta\Gamma E}| > \varepsilon$$

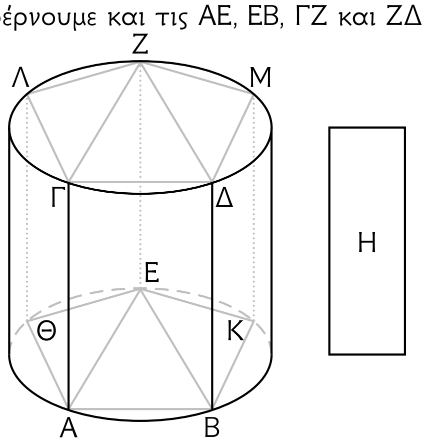
που είναι η αποδεικτέα. ◘

Πρόταση 11 (119) *Η επιφάνεια ενός ορθού κυλίνδρου που περιέχεται μεταξύ δύο ευθύγραμμων τμημάτων (στμ: που είναι κάθετα στα επίπεδα των βάσεων του κυλίνδρου) με άκρα στις βάσεις του κυλίνδρου έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που περιέχεται στα τμήματα αυτά και τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα άκρα τους.*

Απόδειξη. Έστω ο ορθός κύλινδρος με βάσεις τους κύκλους ΑΒ και ΓΔ. Φέρνουμε τις ΑΓ και ΒΔ.

Ισχυρίζομαι ότι η κυλινδρική επιφάνεια που αποτέμνεται από τις ΑΓ και ΒΔ (στμ: με σύνορα τα τόξα $\widehat{\text{ΑΕΒ}}$ και $\widehat{\text{ΓΖΔ}}$) έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ.

Λαμβάνουμε τα μέσα Ε και Ζ των τόξων $\widehat{\text{ΑΒ}}$ και $\widehat{\text{ΓΔ}}$ αντίστοιχα ενώ φέρνουμε και τις ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ και ΖΔ.



Από την Τριγωνική Ανισότητα (Στοιχεία, Βιβλίο Ι, Πρόταση 20) έχουμε

$$\text{ΑΕ} + \text{ΕΒ} > \text{ΑΒ}$$

οπότε $|\text{ΑΖ}| + |\text{ΒΖ}| > |\text{ΑΔ}|$ καθώς τα παραλληλόγραμμα ΑΖ, ΒΖ και ΑΔ έχουν βάσεις τις ΑΕ, ΕΒ, ΑΒ αντίστοιχα και είναι ισοϋψή με ύψη ίσα με το ύψος του κυλίνδρου (Στοιχεία, Βιβλίο 6, Πρόταση 1).

Θεωρούμε το χωρίο Η με εμβαδόν

$$|\text{Η}| = |\text{ΑΖ}| + |\text{ΒΖ}| - |\text{ΑΔ}|$$

Τότε για το $|\text{Η}|$ ισχύει είτε

$$|\text{Η}| < \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$$

είτε

$$|\text{Η}| \geq \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$$

όπου με τ_1, τ_2, τ_3 και τ_4 συμβολίζουμε τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων $\widehat{\text{ΑΕ}}$, $\widehat{\text{ΕΒ}}$, $\widehat{\text{ΓΖ}}$ και $\widehat{\text{ΖΔ}}$ αντίστοιχα.

1η περίπτωση: Έστω $|\text{Η}| \geq \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$

Τότε υπάρχουν δύο επιφάνειες: η κυλινδρική που αποτέμνεται από τις ΑΓ, ΒΔ και τα κυκλικά τμήματα ΑΕΒ και ΖΓΔ και η επιφάνεια που αποτελείται από τα παραλληλόγραμμα ΑΖ, ΒΖ και τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΖΓΔ.

Οι επιφάνειες αυτές έχουν κοινό σύνορο το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η πρώτη περιλαμβάνει την δεύτερη ενώ είναι κοίλες προς το ίδιο μέρος.

Έτσι από το Αξίωμα 4 έπεται ότι

$$\text{Κ}_1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + |\text{ΑΕΒ}| + |\text{ΖΓΔ}| > |\text{ΑΖ}| + |\text{ΖΒ}| + |\text{ΑΕΒ}| + |\text{ΖΓΔ}|,$$

όπου με K_1 συμβολίζουμε το εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας που αποτέμνεται από τις ΑΓ και ΒΔ.

Από την παραπάνω ανισότητα έπεται ότι

$$K_1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 > |AZ| + |ZB|$$

και άρα

$$K_1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 > |AB\Gamma\Delta| + |H|$$

καθώς $|H| = |AZ| + |ZB| - |A\Delta|$.

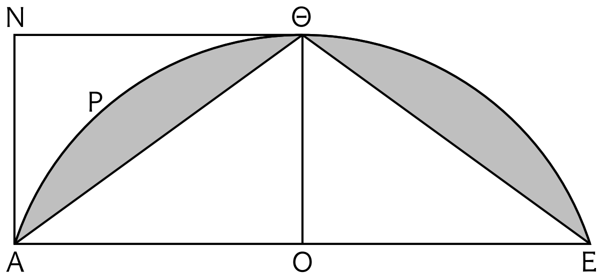
Επειδή $|H| \geq \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$ έχουμε $K_1 > |AB\Gamma\Delta|$ που είναι η αποδεικτέα.

2^{η} περίπτωση: Έστω $|H| < \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$

Διχοτομούμε τα τόξα $\overset{\frown}{AE}$, $\overset{\frown}{EB}$, $\overset{\frown}{\Gamma Z}$ και $\overset{\frown}{Z\Delta}$ λαμβάνοντας τα σημεία τους Θ, Κ, Λ και Μ αντίστοιχα ενώ φέρνουμε και τις ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ και ΜΔ.

Στην συνέχεια αφαιρούμε από τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ και ΖΔ τα εμβαδά των τριγώνων ΑΘΕ, ΕΚΒ, ΓΛΖ και ΖΜΔ αντίστοιχα.

Έτσι από κάθε εμβαδόν αφαιρείται ποσότητα που είναι μεγαλύτερη από το μισό του.



Στμ: Πράγματι, έχουμε $|A\Theta O| = |\Theta AN| > |\overset{\frown}{AP\Theta}|$, οπότε θα είναι $2 \cdot |A\Theta O| > |\overset{\frown}{AP\Theta}| + |A\Theta O|$ ή $2 \cdot |A\Theta O| > |O\Theta PA|$ και επομένως $|A\Theta E| > |\overset{\frown}{A\Theta E}|/2$.

Επαναλαμβάνοντας συνεχώς την ίδια διαδικασία θα απομείνουν κάποια στιγμή τμήματα με εμβαδόν μικρότερο από το εμβαδόν του χωρίου Η (Στοιχεία, Βιβλίο 10, Πρόταση 1).

Έστω ότι έχουν απομείνει τα κυκλικά τμήματα ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ και ΜΔ με εμβαδά χ_1, χ_2, χ_3, χ_4, χ_5, χ_6, χ_7 και χ_8 αντίστοιχα.

Τότε είναι

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5 + \chi_6 + \chi_7 + \chi_8 < |H|$$

Από την Τριγωνική Ανισότητα (Στοιχεία, Βιβλίο Ι, Πρόταση 20) είναι ΑΘ + ΘΕ > ΑΕ και ΕΚ + ΚΒ > ΕΒ οπότε

$$|\mathrm{A\Lambda}| + |\mathrm{\Theta Z}| + |\mathrm{ME}| + |\mathrm{K\Delta}| > |\mathrm{AZ}| + |\mathrm{BZ}|$$

καθώς τα παραλληλόγραμμα ΑΛ, ΘΖ, ΜΕ, ΚΔ, ΑΖ, και ΒΖ είναι ισοϋψή με τα ύψη τους να είναι ίσα με το ύψος του κυλίνδρου (Στοιχεία, Βιβλίο 6, Πρόταση 1).

Τώρα υπάρχουν δύο επιφάνειες:

- η κυλινδρική επιφάνεια που αποτέμνεται από τα ΑΓ και ΒΔ και τα επίπεδα κυκλικά τμήματα ΑΕΒ και ΓΖΔ και
- η επιφάνεια που αποτελείται από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΑΛ, ΘΖ, ΕΜ και ΚΖ (με βάσεις τις ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ και ΚΒ αντίστοιχα) που είναι ισοϋψή με τα ύψη τους να είναι ίσα με το ύψος του κυλίνδρου καθώς και τα ευθύγραμμα σχήματα ΑΘΕΚΒ και ΓΛΖΒ

που έχουν σύνορο το επίπεδο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και η πρώτη περιλαμβάνει την δεύτερη ενώ είναι κοίλες προς το ίδιο μέρος του επιπέδου του ΑΒΓΔ.

Συνεπώς, από το Αξίωμα 4, έπεται

$$\mathrm{K}_1 + \sigma_1 + \sigma_2 > |\mathrm{A\Lambda}| + |\mathrm{\Theta Z}| + |\mathrm{EM}| + |\mathrm{KZ}| + |\mathrm{A\Theta EKB}| + |\mathrm{\Gamma\Lambda ZM\Delta}|,$$

όπου με K_1 συμβολίζουμε το εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας που αποτέμνεται από τις ΑΓ και ΒΔ ενώ με σ_1 και σ_2 συμβολίζουμε αντίστοιχα τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων ΑΕΒ και ΓΖΔ.

Από την προηγούμενη ανισότητα προκύπτει

$$\mathrm{K}_1 + \sigma_1 + \sigma_2 - (|\mathrm{A\Theta EKB}| + |\mathrm{\Gamma\Lambda ZM\Delta}|) > |\mathrm{A\Lambda}| + |\mathrm{\Theta Z}| + |\mathrm{EM}| + |\mathrm{KZ}|.$$

Όμως

$$\sigma_1 + \sigma_2 - (|\mathrm{A\Theta EKB}| + |\mathrm{\Gamma\Lambda ZM\Delta}|) = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5 + \chi_6 + \chi_7 + \chi_8$$

και $|\mathrm{A\Lambda}| + |\mathrm{\Theta Z}| + |\mathrm{EM}| + |\mathrm{KZ}| > |\mathrm{AZ}| + |\mathrm{BZ}|$ όπως έχει αποδειχθεί παραπάνω.

Έτσι,

$$\mathrm{K}_1 + \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5 + \chi_6 + \chi_7 + \chi_8 > |\mathrm{AZ}| + |\mathrm{BZ}|.$$

Επίσης είναι $|\mathrm{AZ}| + |\mathrm{ZB}| = |\mathrm{AB\Gamma\Delta}| + |\mathrm{H}|$ (διότι $|\mathrm{H}| = |\mathrm{AZ}| + |\mathrm{ZB}| - |\mathrm{AB\Gamma\Delta}|$)) οπότε

$$\mathrm{K}_1 + \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5 + \chi_6 + \chi_7 + \chi_8 > |\mathrm{AB\Gamma\Delta}| + |\mathrm{H}|$$

ή

$$\mathrm{K}_1 > |\mathrm{AB\Gamma\Delta}| + |\mathrm{H}| - (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5 + \chi_6 + \chi_7 + \chi_8)$$

από όπου καθώς $|Η| > \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5 + \chi_6 + \chi_7 + \chi_8$ έπεται ότι

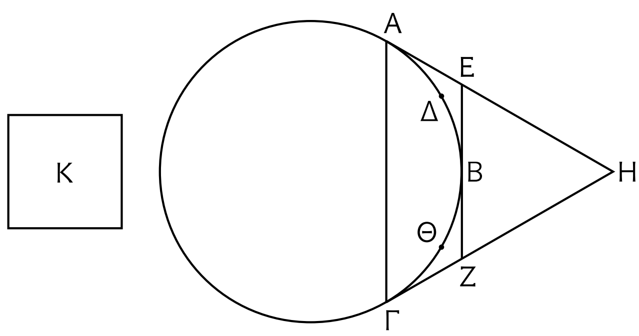
$$Κ_1 > |ΑΒΓΔ|$$

που είναι η αποδεικτέα. ◙

Πρόταση 12 (120) *Αν στην επιφάνεια ενός κυλίνδρου υπάρχουν δύο ευθύγραμμα τμήματα (στμ: που είναι κάθετα στα επίπεδα των βάσεων και που τα άκρα τους είναι στις περιφέρειες των κύκλων που είναι οι βάσεις του κυλίνδρου) και στα άκρα τους αχθούν οι εφαπτόμενες που βρίσκονται στα επίπεδα των βάσεων του κυλίνδρου και τέμνονται σε ένα σημείο τότε τα παραλληλόγραμμα που περιέχονται στα εφαπτόμενα τμήματα και στις πλευρές του κυλίνδρου έχουν εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό της επιφάνειας του κυλίνδρου που περιέχεται μεταξύ των δύο αρχικών ευθύγραμμων τμημάτων.*

Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓ που είναι η μια βάση του ορθού κυλίνδρου στην επιφάνεια του οποίου βρίσκονται δύο τμήματα με άκρα τα Α και Γ.

Από τα Α και Γ φέρνουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου ΑΒΓ που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτόν και τέμνονται στο Η.



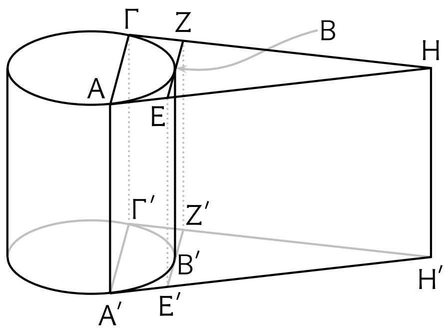
Θεωρούμε ακόμα και τις αντίστοιχες εφαπτόμενες στον κύκλο που είναι η άλλη βάση του κυλίνδρου και οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτόν.

Πρέπει να δείξουμε ότι τα παραλληλόγραμμα που περιέχονται στα παραπάνω εφαπτόμενα τμήματα και στις πλευρές του κυλίνδρου έχουν εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό της επιφάνειας του κυλίνδρου που ορίζεται από το $\widehat{ΑΒΓ}$ (στμ: προς την μεριά που βρίσκονται τα σημεία τομής των εφαπτομένων).

Φέρνουμε την εφαπτόμενη του κύκλου ΑΒΓ στο Β που τέμνει τις ΑΗ και ΗΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

Έστω ακόμα $Α'$, $Γ'$, $Ε'$, $Ζ'$ και $Η'$ τα αντίστοιχα σημεία (των Α, Γ, Ε, Ζ και Η) που βρίσκονται στο επίπεδο της άλλης βάσης του κυλίνδρου.

Στην συνέχεια από τα Ε και Ζ φέρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα που είναι παράλληλα προς τον άξονα του κυλίνδρου με τα άλλα άκρα τους να βρίσκονται στο επίπεδο της άλλης βάσης του κυλίνδρου.



Τότε τα παραλληλόγραμμα που περιέχονται στις ΑΗ και ΗΓ και τις πλευρές του κυλίνδρου (στμ: του ύψους του κυλίνδρου) έχουν εμβαδόν μεγαλύτερο από τα παραλληλόγραμμα που περιέχονται στις ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ και του ύψους του κυλίνδρου, καθώς λόγω της Τριγωνικής Ανισότητας (Στοιχεία, Βιβλίο Ι, Πρόταση 20) είναι $\mathrm{EH} + \mathrm{HZ} > \mathrm{ZE}$ οπότε

$$\mathrm{EH} + \mathrm{HZ} + \mathrm{AE} + \mathrm{Z\Gamma} > \mathrm{ZE} + \mathrm{Z\Gamma} + \mathrm{AE}$$

ή

$$\mathrm{AH} + \mathrm{H\Gamma} > \mathrm{AE} + \mathrm{EZ} + \mathrm{Z\Gamma}$$

ενώ τα παραλληλόγραμμα αυτά είναι ισοϋψή.

Συνεπώς ισχύει

$$|\mathrm{AH}'| + |\Gamma\mathrm{H}'| > |\mathrm{AE}'| + |\mathrm{EZ}'| + |\Gamma\mathrm{Z}'|.$$

Έστω ακόμα Κ το χωρίο με εμβαδόν

$$|\mathrm{K}| = (|\mathrm{AH}'| + |\Gamma\mathrm{H}'|) - (|\mathrm{AE}'| + |\mathrm{EZ}'| + |\Gamma\mathrm{Z}'|).$$

Για το $|\mathrm{K}|$ ισχύει

$$\frac{|\mathrm{K}|}{2} > \mu_1 + \mu_2 \quad \text{ή} \quad \frac{|\mathrm{K}|}{2} \leq \mu_1 + \mu_2,$$

όπου με μ_1 και μ_2 συμβολίζουμε τα εμβαδά των μικτόγραμμων χωρίων ΑΔΒΕ και ΒΘΖΓ αντίστοιχα, που περιέχονται στα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ και τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{A\Delta}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{\Delta B}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{B\Theta}}$ και $\overset{\frown}{\Theta\Gamma}$.

1^{η} περίπτωση: Έστω $|\mathrm{K}|/2 > \mu_1 + \mu_2$.

Η επιφάνεια που αποτελείται από τα παραλληλόγραμμα ΑΕ′, ΕΖ′, ΓΖ′ και τα τραπέζια ΑΕΖΓ και Α′Ε′Ζ′Γ′ έχει σύνορο την περίμετρο του παραλληλογράμμου ΑΓΓ′Α′.

Επίσης, η επιφάνεια που αποτελείται από την κυλινδρική επιφάνεια που ορίζεται από το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB\Gamma}}$ και τα κυκλικά τμήματα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχει ομοίως σύνορο την περίμετρο του παραλληλογράμμου ΑΓΓ′Α′.

Οι επιφάνειες αυτές λοιπόν έχουν το ίδιο σύνορο το οποίο βρίσκεται σε ένα επίπεδο, είναι κοίλες προς το ίδιο μέρος και μερικά τμήματα της μιας περιέχονται στην άλλη και είναι κοινά και στις δύο.

Έτσι, από το Αξίωμα 4, έπεται ότι από τις δύο αυτές επιφάνειες η πρώτη περιλαμβάνει την δεύτερη και η περιλαμβανόμενη έχει μικρότερο εμβαδόν. Δηλαδή

$$|\mathrm{AE}'| + |\mathrm{EZ}'| + |\Gamma\mathrm{Z}'| + |\mathrm{AEZ}\Gamma| + |\mathrm{A}'\mathrm{E}'\mathrm{Z}'\Gamma'| > \mathrm{A} + \alpha_1 + \alpha_2,$$

όπου με A συμβολίζουμε το εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας που ορίζεται από το τόξο $\widehat{\mathrm{AB}\Gamma}$, ενώ α_1 και α_2 συμβολίζουμε τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων $\mathrm{AB}\Gamma$ και $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\Gamma'$ αντίστοιχα.

Από την προηγούμενη ανισότητα προκύπτει

$$\mathrm{A} < |\mathrm{AE}'| + |\mathrm{EZ}'| + |\Gamma\mathrm{Z}'| + |\mathrm{AEZ}\Gamma| + \mathrm{A}'\mathrm{E}'\mathrm{Z}'\Gamma'| - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Όμως $|\mathrm{AEZ}\Gamma| + |\mathrm{A}'\mathrm{E}'\mathrm{Z}'\Gamma'| - (\alpha_1 + \alpha_2) = 2 \cdot (\mu_1 + \mu_2)$ και επομένως

$$\mathrm{A} < |\mathrm{AE}'| + |\mathrm{EZ}'| + \Gamma\mathrm{Z}'| + 2 \cdot (\mu_1 + \mu_2)$$

Επειδή τώρα $|\mathrm{K}| = |\mathrm{AH}'| + |\Gamma\mathrm{H}'| - (|\mathrm{AE}'| + |\mathrm{EZ}'| + |\Gamma\mathrm{Z}'|)$ από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι

$$\mathrm{A} < |\mathrm{AH}'| + |\Gamma\mathrm{H}'| - |\mathrm{K}| + 2 \cdot (\mu_1 + \mu_2)$$

και άρα

$$\mathrm{A} < |\mathrm{AH}'| + |\Gamma\mathrm{H}'| - |\mathrm{K}| + 2 \cdot \frac{|\mathrm{K}|}{2}$$

διότι

$$\mu_1 + \mu_2 < \frac{|\mathrm{K}|}{2}.$$

Τελικά προκύπτει $\mathrm{A} < |\mathrm{AH}'| + |\Gamma\mathrm{H}'|$ που είναι η αποδεικτέα.

2^η περίπτωση: Έστω $|\mathrm{K}|/2 \leq \mu_1 + \mu_2$.

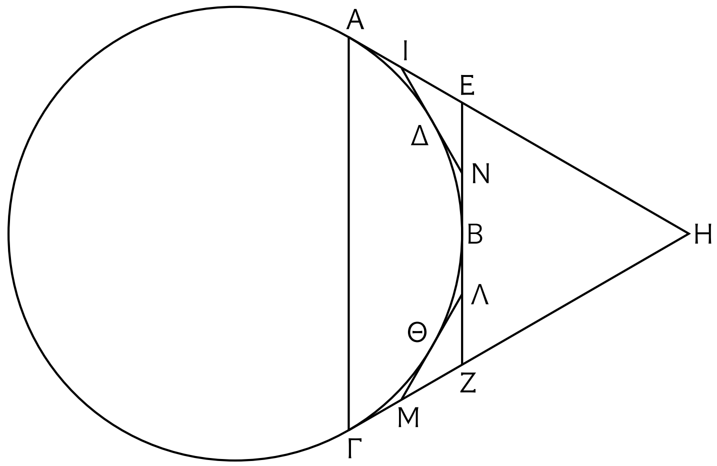
Διχοτομούμε τα τόξα $\widehat{\mathrm{AB}}$ και $\widehat{\mathrm{B}\Gamma}$ λαμβάνοντας τα Δ και Θ αντίστοιχα και στην συνέχεια φέρνουμε τις εφαπτομένες του κύκλου $\mathrm{AB}\Gamma$ στα Δ και Θ.

Επαναλαμβάνουμε συνεχώς της διαδικασία διχοτόμησης των τόξων που προκύπτουν και της κατασκευής των εφαπτομένων του κύκλου στα σημεία του που διχοτομούν τα τόξα αυτά οπότε κάποια στιγμή θα απομείνουν τμήματα με εμβαδόν μικρότερο από $|\mathrm{K}|/2$ (Στοιχεία, Βιβλίο 10, Πρόταση 1).

Τα υπόλοιπα αποδεικνύονται όπως στην 1^η περίπτωση. ◘

Στμ: Ο Αρχιμήδης δεν κάνει αναλυτικά την απόδειξη για την $2^η$ περίπτωση. Την παραθέτουμε όμως εδώ.

Πραγματι, έστω ότι μετά την διχοτόμηση έχουν απομείνει τα μεικτόγραμμα χωρία ΑΙΔ, ΔΝΒ, ΒΛΘ και ΘΜΓ.



Για τα εμβαδά των χωρίων αυτών θέτουμε $\beta_1 = |\widehat{\text{ΑΙΔ}}| + |\widehat{\text{ΔΝΒ}}|$ και $\beta_2 = |\widehat{\text{ΒΛΘ}}| + |\widehat{\text{ΘΜΓ}}|$.

Τότε υπάρχουν δύο επιφάνειες οι:

- η κυλινδρική επιφάνεια που ορίζεται από το τόξο $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$ και τα κυκλικά τμήματα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ και
- η επιφάνεια που αποτελείται από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΑΙ′, ΙΝ′, ΝΛ′, ΛΜ′ και ΜΓ′ όπου τα Ι′, Ν′, Λ′, Μ′ και Γ′ είναι τα σημεία που οι κάθετες από τα Ι, Ν, Λ, Μ και Γ τέμνουν το επίπεδο του κύκλου Α′Β′Γ′ και τα πολύγωνα ΑΙΝΛΜΓ και Α′Ι′Ν′Λ′Μ′Γ′

που έχουν κοινό σύνορο την περίμετρο του ΑΓΓ′Α′, είναι κοίλες προς το ίδιο μέρος του ΑΓΓ′Α′ και η πρώτη περιλαμβάνει την δεύτερη.

Έτσι, από το Αξίωμα 4, έπεται

$$\text{Α}+\alpha_1+\alpha_2 < |\text{ΑΙ}'|+|\text{ΙΝ}'|+|\text{ΝΛ}'|+|\text{ΛΜ}'|+|\text{ΜΓ}'|+|\text{ΑΙΝΛΜΓ}|+|\text{Α}'\text{Ι}'\text{Ν}'\text{Λ}'\text{Μ}'\text{Γ}'|$$

όπου τα α_1 και α_2 είναι όπως στην $1^η$ περίπτωση.

Από την Τριγωνική Ανισότητα (Στοιχεία, Βιβλίο Ι, Πρόταση 20) είναι όμως ΙΝ < ΙΕ + ΕΝ, ΛΜ < ΛΖ + ΜΖ οπότε είναι και

$$\text{ΑΙ} + \text{ΙΝ} + \text{ΝΛ} + \text{ΛΜ} + \text{ΜΓ} < \text{ΑΙ} + \text{ΙΕ} + \text{ΕΝ} + \text{ΝΛ} + \text{ΛΖ} + \text{ΜΖ} + \text{ΜΓ}$$

ή

$$\text{ΑΙ} + \text{ΙΝ} + \text{ΝΛ} + \text{ΛΜ} + \text{ΜΓ} < \text{ΑΕ} + \text{ΕΖ} + \text{ΓΖ},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$|AI'| + |IN'| + |N\Lambda'| + |\Lambda M'| + |M\Gamma'| < |AE'| + |EZ'| + |\Gamma Z'|$$

καθώς τα ορθογώνια AI′, IN′, NΛ′, ΛM′ και MΓ′ με βάσεις τις AI, IN, NΛ, ΛM και MΓ αντίστοιχα είναι ισοϋψή με τα ύψη τους να είναι ίσα με το ύψος του κυλίνδρου.

Έτσι,

$$A + \alpha_1 + \alpha_2 < |AE'| + |EZ'| + |\Gamma Z'| + |AIN\Lambda M\Gamma| + |A'I'N'\Lambda'M'\Gamma'|$$

και άρα

$$A < |AE'| + |EZ'| + |\Gamma Z'| + |AIN\Lambda M\Gamma| + |A'I'N'\Lambda'M'\Gamma'| - (\alpha_1 + \alpha_2)$$

Καθώς

$$|AIN\Lambda M\Gamma| + |A'I'N'\Lambda'M'\Gamma'| - (\alpha_1 + \alpha_2) = 2 \cdot (\beta_1 + \beta_2)$$

και $|AE'| + |EZ'| + |\Gamma Z'| = |AH'| + |\Gamma H'| - |K|$ με $\beta_1 + \beta_2 < \frac{|K|}{2}$ από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει ότι

$$A < |AH'| + |\Gamma H'| - |K| + 2 \cdot (\beta_1 + \beta_2)$$

ή

$$A < |AH'| + |\Gamma H'| - |K| + 2 \cdot \frac{|K|}{2}$$

από όπου τελικά παίρνουμε ότι

$$A < |AH'| + |\Gamma H'|$$

που είναι η αποδεικτέα.

Επιστρέφουμε τώρα στην κανονική ροή του κειμένου.

Πόρισμα 1 (122) *Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι αν σε έναν ισοσκελή κώνο εγγραφεί πυραμίδα τότε η επιφάνεια της χωρίς την βάση έχει εμβαδόν μικρότερο από αυτό της κωνικής επιφάνειας διότι κάθε τρίγωνο από αυτά που περιέχουν την πυραμίδα έχει εμβαδόν μικρότερο από την αντίστοιχη κωνική επιφάνεια που περιέχεται στις πλευρές του (Πρόταση 9) και άρα το συνολικό εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας έχει εμβαδόν μικρότερο από την επιφάνεια του κώνου (χωρίς την βάση).*

Επιπλέον αν περί έναν ισοσκελή κώνο περιγραφεί πυραμίδα η παράπλευρη επιφάνειά της έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου (Πρόταση 10).

Πόρισμα 2 (122) *Από τα αποδειχθέντα είναι επίσης φανερό ότι και αν σε έναν ορθό κύλινδρο εγγραφεί ένα ορθό πρίσμα τότε η παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος έχει εμβαδόν μικρότερο από αυτό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου καθώς κάθε ένα από τα παραλληλόγραμμα που αποτελούν την παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος έχει εμβαδόν μικρότερο από αυτό της αντίστοιχης επιφάνειας του κυλίνδρου* (*Πρόταση 11*).

Αν αντίστοιχα περί τον ορθό κύλινδρο περιγραφεί ένα ορθό πρίσμα τότε η παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου.

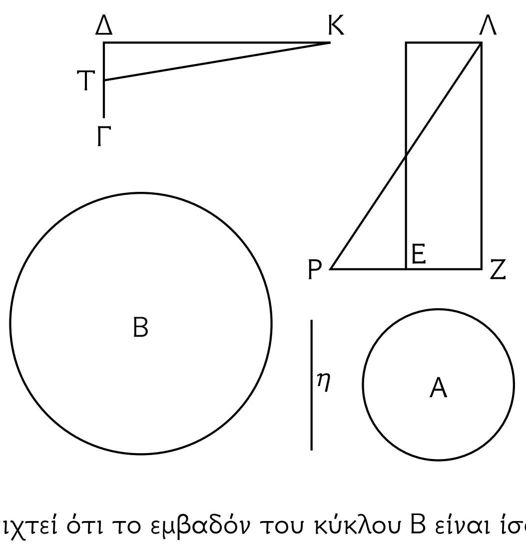
Πρόταση 13 (122) *Σε κάθε ορθό κύλινδρο η επιφάνεια χωρίς την βάση* (*στμ: η παράπλευρη*) *έχει εμβαδόν ίσο με τον κύκλο του οποίου η ακτίνα είναι η μέση ανάλογος της πλευράς του κυλίνδρου* (*δηλαδή του ύψους του*) *και της διαμέτρου της βάσης του κυλίνδρου.*

Στμ: Η μέση ανάλογος της πλευράς (δηλαδή του ύψους) του κυλίνδρου υ και της διαμέτρου δ του κύκλου της βάσης του είναι ο αριθμός x που ικανοποιεί την $x/\upsilon = \delta/x$ δηλαδή ο $\sqrt{\upsilon\delta}$. Συνεπώς η πρόταση αυτή μας δίνει τον τύπο του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας ως $\pi\sqrt{\upsilon\delta}^2 = \pi\upsilon\delta$.

Απόδειξη. Έστω ο κύλινδρος με βάση τον κύκλο Α που έχει διάμετρο την ΓΔ. Έστω ακόμα ΕΖ η πλευρά του κυλίνδρου (στμ: το ύψος του) και η η μέση ανάλογος των ΔΓ και ΕΖ, δηλαδή ισχύει

$$\frac{\Delta\Gamma}{\eta} = \frac{\eta}{\mathrm{EZ}}.$$

Λαμβάνουμε ακόμα τον κύκλο Β με ακτίνα ίση με η.



Πρέπει να δειχτεί ότι το εμβαδόν του κύκλου Β είναι ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου.

Έστω ε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου. Θα δείξουμε ότι $|\mathrm{B}| = \varepsilon$.

1^{η} περίπτωση: Έστω $|\mathrm{B}| < \varepsilon$

Τότε υπάρχουν δύο άνισα μεγέθη (τα $|\mathrm{B}|$ και ε) οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 5 είναι δυνατόν να εγγραφεί στον κύκλο Β ένα ισόπλευρο πολύγωνο και να περιγραφεί περί αυτόν ένα άλλο ώστε να ισχύει

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{\varepsilon}{|\mathrm{B}|}$$

όπου ε_1 και ε_2 είναι τα εμβαδά του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου πολυγώνου αντίστοιχα.

Στην συνέχεια περιγράφουμε περί τον κύκλο Α ένα ευθύγραμμο σχήμα όμοιο με αυτό που έχει περιγραφεί περί τον κύκλο Β και με βάση το σχήμα αυτό αναγράφουμε πρίσμα που είναι περιγεγραμμένο περί τον κύλινδρο.

Έστω ακόμα ΚΔ το τμήμα που είναι ίσο με την περίμετρο του παραπάνω ευθύγραμμου σχήματος ενώ λαμβάνουμε την $\Lambda\mathrm{Z} = \mathrm{K}\Delta$ και την $\Gamma\mathrm{T} = \Gamma\Delta/2$ (στμ: δηλαδή η ΓΤ είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου Α).

Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΚΔΤ είναι ίσο με το εμβαδόν του ευθύγραμμου σχήματος που έχει περιγραφεί περί τον κύκλο Α διότι η βάση του είναι ίση με την περίμετρο του σχήματος ενώ το ύψος του είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου.

Ακόμα το παραλληλόγραμμο ΕΛ έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος που έχει περιγραφεί περί τον κύλινδρο καθώς η πλευρά του ΛΖ είναι ίση με την περίμετρο της βάσης του πρίσματος ενώ η άλλη πλευρά του ΕΖ είναι ίση με το ύψος του κυλίνδρου.

Στην συνέχεια λαμβάνουμε την $\mathrm{EP} = \mathrm{EZ}$ οπότε $|\mathrm{ZP}\Lambda| = |\mathrm{E}\Lambda|$ (Στοιχεία, Βιβλίο Ι, Πρόταση 41), οπότε το τρίγωνο ΖΡΛ έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος την οποία συμβολίζουμε με ε_3. Δηλαδή ισχύει $|\mathrm{ZP}\Lambda| = \varepsilon_3$.

Τα σχήματα όμως που έχουν περιγραφεί περί τους κύκλους Α και Β είναι όμοια και άρα ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου των ακτίνων των δύο κύκλων, δηλαδή

$$\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_1} = \left(\frac{\mathrm{T}\Delta}{\eta}\right)^2$$

όπου ε_1 είναι το εμβαδόν του περιγραφέντος περί τον κύκλο Β πολυγώνου και ε_4 είναι αντίστοιχα το εμβαδόν του περιγραφέντος περί τον κύκλο Α σχήματος.

Επειδή $|\mathrm{KT}\Delta| = \varepsilon_4$ θα είναι και

$$\frac{|\mathrm{K}\mathrm{T}\Delta|}{\varepsilon_1} = \left(\frac{\mathrm{T}\Delta}{\eta}\right)^2 \tag{3}$$

Αλλά

$$\left(\frac{\mathrm{T}\Delta}{\eta}\right)^2 = \frac{\mathrm{T}\Delta}{\mathrm{P}\mathrm{Z}}$$

διότι η η είναι η μέση ανάλογος των ΤΔ και ΡΖ όπως και η μέση ανάλογος των ΓΔ και ΕΖ.

Πράγματι επειδή $\Delta\mathrm{T} = \mathrm{T}\Gamma$, $\mathrm{PE} = \mathrm{EZ}$ ισχύουν $\Delta\Gamma = 2 \cdot \Delta\mathrm{T}$ και $\mathrm{PZ} = 2 \cdot \mathrm{ZE}$ και άρα

$$\frac{\mathrm{PZ}}{\mathrm{ZE}} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta\mathrm{T}}.$$

Έτσι $\Gamma\Delta \cdot \mathrm{EZ} = \mathrm{PZ} \cdot \Delta\mathrm{T}$ από όπου (καθώς η η είναι η μέση ανάλογος των ΤΔ και ΕΖ) παίρνουμε ότι

$$\Gamma\Delta \cdot \mathrm{EZ} = \mathrm{PZ} \cdot \Delta\mathrm{T} = \eta^2$$

και άρα

$$\frac{\mathrm{T}\Delta}{\eta} = \frac{\eta}{\mathrm{PZ}}.$$

Τότε όμως είναι και

$$\frac{\mathrm{T}\Delta}{\mathrm{PZ}} = \frac{\mathrm{T}\Delta^2}{\eta^2}$$

διότι αν τρία μεγέθη είναι σε συνεχή αναλογία τότε ο λόγος του πρώτου προς το τρίτο είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών των σχημάτων που κατασκευάζονται με πλευρές το πρώτο και το δεύτερο ώστε να είναι όμοια και όμοια τοποθετημένα (Στοιχεία, Βιβλίο 5, Ορισμός 9).

Έτσι από την (3) λαμβάνουμε

$$\frac{\mathrm{T}\Delta}{\mathrm{PZ}} = \frac{|\mathrm{KT}\Delta|}{\varepsilon_1}.$$

Επίσης είναι

$$\frac{|\mathrm{KT}\Delta|}{|\Lambda\mathrm{PZ}|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \Delta\mathrm{T} \cdot \Delta\mathrm{K}}{\frac{1}{2} \cdot \mathrm{PZ} \cdot \Lambda\mathrm{Z}} = \frac{\Delta\mathrm{T} \cdot \Delta\mathrm{K}}{\mathrm{PZ} \cdot \Lambda\mathrm{Z}} = \frac{\Delta\mathrm{T}}{\mathrm{PZ}}$$

διότι $\mathrm{K}\Delta = \Lambda\mathrm{Z}$. Άρα

$$\frac{|\mathrm{KT}\Delta|}{\varepsilon_1} = \frac{|\mathrm{KT}\Delta|}{|\Lambda\mathrm{PZ}|}$$

από όπου προκύπτει ότι $|\Lambda\mathrm{PZ}| = \varepsilon_1$.

Όμως $|\Lambda\mathrm{PZ}| = \varepsilon_3$ και άρα $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$.

Τώρα επειδή $\varepsilon_1/\varepsilon_2 < \varepsilon/|\mathrm{B}|$ έπεται ότι $\varepsilon_3/\varepsilon_2 < \varepsilon/|\mathrm{B}|$.

Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς η παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος που είναι περιγεγραμμένο περί τον κύλινδρο έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου (δηλαδή $\varepsilon_3 > \varepsilon$) και επιπλέον το εμβαδόν του εγγραφέντος πολυγώνου στον κύκλο Β είναι προφανώς μικρότερο από το εμβαδόν του κύκλου αυτού (δηλαδή ισχύει $\varepsilon_2 < |\mathrm{B}|$).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο κύκλος Β δεν έχει μικρότερο εμβαδόν από την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου.

2^{η} περίπτωση: Έστω τώρα ότι ισχύει $|\mathrm{B}| > \varepsilon$.

Θεωρούμε και πάλι ένα ευθύγραμμο σχήμα που να είναι περιγεγραμμένο περί τον κύκλο Β και ένα άλλο εγγεγραμμένο σε αυτόν ώστε ο λόγος των εμβαδών τους να είναι μικρότερος από τον λόγο $|\mathrm{B}|/\varepsilon$ (Πρόταση 5).

Δηλαδή αν ε_1 και ε_2 είναι τα εμβαδά των δύο πολυγώνων ισχύει

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{|\mathrm{B}|}{\varepsilon}$$

Στην συνέχεια εγγράφουμε στον κύκλο Α ένα πολύγωνο όμοιο με αυτό που έχει εγγραφεί στον κύκλο Β και με βάση το πολύγωνο αυτό αναγράφουμε πρίσμα.

Έστω και πάλι ΚΔ τμήμα ίσο με την περίμετρο του σχήματος που έχει εγγραφεί στον κύκλο Α και ΖΛ τμήμα τέτοιο ώστε $\mathrm{Z\Lambda} = \mathrm{K\Delta}$.

Τότε το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΤΔ θα έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το σχήμα που έχει εγγραφεί στον κύκλο Α διότι έχει βάση ίση με την περίμετρο του σχήματος αυτού ενώ το ύψος του είναι μεγαλύτερο από την κάθετη που άγεται από το κέντρο του κύκλου προς την πλευρά του πολυγώνου.

Επίσης το παραλληλόγραμμο ΕΛ έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος που αποτελείται από παραλληλόγραμμα καθώς η μια πλευρά του είναι ίση με την περίμετρο του σχήματος που είναι η βάση του πρίσματος ενώ η άλλη πλευρά του είναι ίση με την πλευρά του κυλίνδρου (το ύψος του).

Καθώς

$$|\mathrm{PZ\Lambda}| = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{PZ} \cdot \mathrm{Z\Lambda} = \mathrm{EZ} \cdot \mathrm{Z\Lambda} = |\mathrm{E\Lambda}|$$

έπεται ότι το ΡΖΛ έχει εμβαδόν ίσο με την παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος.

Όμως τα σχήματα που έχουν εγγραφεί στους κύκλους Α και Β είναι όμοια και άρα ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των ακτίνων των δύο κύκλων (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 1).

Δηλαδή

$$\frac{\varepsilon_5}{\varepsilon_2} = \frac{\text{ΤΔ}^2}{\eta^2}$$

όπου με ε_5 συμβολίζουμε το εμβαδόν του πολυγώνου που εγγράφηκε στον κύκλο Α.

Επίσης

$$\frac{|\text{ΚΤΔ}|}{|\text{ΡΖΛ}|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot \text{ΔΤ}\cdot \text{ΔΚ}}{\frac{1}{2}\cdot \text{ΡΖ}\cdot \text{ΖΛ}} = \frac{\text{ΔΤ}}{\text{ΡΖ}} = \frac{\text{ΔΤ}\cdot \text{ΔΤ}}{\text{ΔΤ}\cdot \text{ΡΖ}} = \frac{\text{ΔΤ}^2}{\eta^2}$$

διότι $\text{ΡΖ}\cdot\text{ΔΤ} = \eta^2$ επειδή η η είναι η μέση ανάλογος των ΔΓ και ΕΖ και άρα

$$\frac{\text{ΔΓ}}{\eta} = \frac{\eta}{\text{ΕΖ}}$$

ή

$$\frac{2\cdot \text{ΔΤ}}{\eta} = \frac{\eta}{\frac{\text{ΡΖ}}{2}}$$

από όπου προκύπτει ότι $\text{ΔΤ}\cdot\text{ΡΖ} = \eta^2$.

Έτσι, ισχύει

$$\frac{\varepsilon_5}{\varepsilon_2} = \frac{|\text{ΚΤΔ}|}{|\text{ΡΖΛ}|}.$$

Όμως $\varepsilon_5 < |\text{ΚΤΔ}|$ και άρα θα είναι και $\varepsilon_2 < |\text{ΡΖΛ}|$.

Δηλαδή το σχήμα που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο Β έχει εμβαδόν μικρότερο από το |ΡΖΛ| που είναι ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος που έχει εγγραφεί στον κύλινδρο.

Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς $\varepsilon_2 > \varepsilon$ διότι $\varepsilon_1 > |\text{Β}|$ και $\varepsilon_1/\varepsilon_2 < |\text{Β}|/\varepsilon$ οπότε $\varepsilon_2 > \varepsilon$.

Πράγματι επειδή, $\varepsilon_1 > |\text{Β}|$ είναι $\varepsilon_1/\varepsilon > |\text{Β}|/\varepsilon$ και άρα $\varepsilon_1/\varepsilon_2 < |\text{Β}|/\varepsilon < \varepsilon_1/\varepsilon$ οπότε $\varepsilon_2 > \varepsilon$.

Συνεπώς, δεν μπορεί να ισχύει ούτε $|\text{Β}| > \varepsilon$ και καθώς δεν μπορεί να ισχύει ούτε $|\text{Β}| < \varepsilon$ όπως δείχτηκε παραπάνω, έπεται τελικά ότι $|\text{Β}| = \varepsilon$.

Δηλαδή ο κύκλος Β έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου. ◙

Πρόταση 14 (124) *Σε κάθε ισοσκελή κώνο η επιφάνεια χωρίς την βάση* (*στμ: παράπλευρη*) *έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι μέση ανάλογος της πλευράς του κώνου* (*στμ: γενέτειρα*) *και της ακτίνας του κύκλου ο οποίος είναι η βάση του κώνου.*

Στμ: Η μέση ανάλογος της πλευράς του κώνου λ και της ακτίνας ρ του κύκλου της βάσης του είναι ο αριθμός x που ικανοποιεί την $x/\lambda = \rho/x$

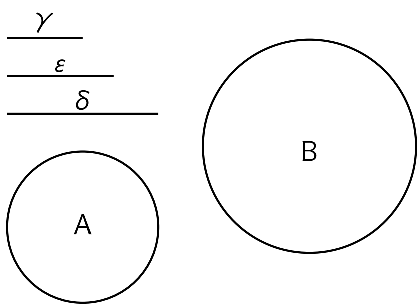
δηλαδή ο $\sqrt{\rho\lambda}$. Συνεπώς η πρόταση αυτή μας δίνει τον τύπο του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας ως $\pi\sqrt{\rho\lambda}^2 = \pi\rho\lambda$.

Απόδειξη. Έστω ο ισοσκελής κώνος που έχει βάση τον κύκλο Α και ακτίνα ίση με γ. Έστω ακόμα η δ που είναι ίση με την πλευρά του κώνου και ε η μέση ανάλογος των γ και δ.

Θεωρούμε ακόμα τον κύκλο Β με ακτίνα ίση με ε.

Ισχυρίζομαι ότι ο κύκλος Β και η παράπλευρη επιφάνεια του κώνου έχουν ίσα εμβαδά, δηλαδή αν Ε είναι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου ισχύει $|B| = E$.

Πράγματι, αν δεν είναι $|B| = E$ τότε θα ισχύει είτε $|B| < E$ ή $|B| > E$.



1η Περίπτωση: Έστω $|B| < E$.

Τότε υπάρχουν δύο άνισα μεγέθη, τα $|B|$ και Ε, και άρα είναι δυνατόν να περιγραφεί περί τον κύκλο Β ένα ισόπλευρο πολύγωνο και να εγγραφεί σε αυτόν ένα άλλο πολύγωνο όμοιο με το εγγεγραμμένο ώστε να ισχύει

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{E}{|B|}$$

όπου ε_1 και ε_2 είναι τα εμβαδά του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου πολυγώνου αντίστοιχα (Πρόταση 5).

Θεωρούμε τώρα ένα άλλο πολύγωνο που να είναι περιγεγραμμένο περί τον κύκλο Α όμοιο προς αυτό που είναι περιγεγραμμένο περί τον κύκλο Β και από αυτό (στμ: με βάση το πολύγωνο αυτό) ανυψώνουμε πυραμίδα που έχει την ίδια κορυφή με τον κώνο.

Τα πολύγωνα όμως που είναι περιγεγραμμένα περί τους κύκλους Α και Β είναι όμοια και άρα ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των ακτίνων των κύκλων περί τους οποίους είναι περιγεγραμμένα (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 1).

Στμ: Η Πρόταση 1 στο Βιβλίο 12 των Στοιχείων αναφέρεται σε εγγεγραμμένα πολύγωνα ενώ τα πολύγωνα που αναφέρονται παραπάνω στην απόδειξη είναι περιγεγραμμένα. Επειδή αυτά είναι όμοια με τα εγγεγραμμένα στους ίδιους κύκλους το συμπέρασμα ισχύει και για τον λόγο των εμβαδών των περιγεγραμμένων πολυγώνων καθώς το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας δύο όμοιων σχημάτων είναι ίσο με τον λόγο των εμβαδών των σχημάτων αυτών.

Δηλαδή,

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{\gamma^2}{\varepsilon^2}$$

όπου ε_3 είναι το εμβαδόν του πολυγώνου που είναι περιγεγραμμένο περί τον κύκλο Α.

Όμως

$$\frac{\gamma^2}{\varepsilon^2} = \frac{\gamma}{\delta}$$

διότι

$$\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\delta}$$

καθώς η ε είναι η μέση ανάλογος των γ και δ και άρα

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{\gamma}{\delta}. \tag{4}$$

Επίσης ισχύει

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4}$$

όπου ε_4 είναι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας.

Η αναλογία αυτή ισχύει διότι

$$\varepsilon_3 = \frac{\nu \cdot \lambda_\nu \cdot \upsilon}{2} = \frac{\nu \cdot \lambda_\nu \cdot \gamma}{2}$$

όπου ν είναι ο αριθμός των πλευρών, λ_ν το μήκος της κάθε πλευράς και υ η κάθετη από το κέντρο του κύκλου Α προς την πλευρά λ_ν του πολυγώνου η οποία είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου Α δηλαδή $\upsilon = \gamma$.

Και

$$\varepsilon_4 = \frac{\nu \cdot \lambda_\nu \cdot \alpha}{2}$$

όπου α είναι η κάθετη από την κορυφή της πυραμίδας προς την πλευρά του περιγεγραμμένου περί τον κύκλο Α πολυγώνου (στμ: απόστημα) ενώ ισχύει $\alpha = \delta$ και άρα

$$\varepsilon_4 = \frac{\nu \cdot \lambda_\nu \cdot \delta}{2}.$$

Έτσι

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4} = \frac{\frac{\nu \cdot \lambda_\nu \cdot \gamma}{2}}{\frac{\nu \cdot \lambda_\nu \cdot \delta}{2}} = \frac{\gamma}{\delta}. \tag{5}$$

Από τις (4) και (5) παίρνουμε

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4}$$

και άρα $\varepsilon_1 = \varepsilon_4$.

Επειδή πάλι
$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{\mathrm{E}}{|\mathrm{B}|}$$
θα είναι και
$$\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_2} < \frac{\mathrm{E}}{|\mathrm{B}|}$$
που είναι αδύνατον καθώς $\varepsilon_4 > \mathrm{E}$ (η πυραμίδα είναι περιγεγραμμένη περί τον κώνο) και $\varepsilon_2 < |\mathrm{B}|$ (το πολύγωνο με εμβαδόν ε_2 είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο Β).

Πράγματι,
$$\frac{\mathrm{E}}{|\mathrm{B}|} < \frac{\varepsilon_4}{|\mathrm{B}|} < \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_2}$$
και άρα συμπεραίνουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει $|\mathrm{B}| < \mathrm{E}$.

2^{η} Περίπτωση: Έστω $|\mathrm{B}| > \mathrm{E}$.

Θεωρούμε και πάλι ένα πολύγωνο περιγεγραμμένο περί τον κύκλο Β και ένα άλλο εγγεγραμμένο σε αυτόν ώστε να ισχύει
$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{|\mathrm{B}|}{\mathrm{E}}$$
(Πρόταση 5) όπου ε_1 είναι το εμβαδόν του περιγεγραμμένου περί τον κύκλο Β πολυγώνου, ε_2 είναι το εμβαδόν του εγγεγραμμένου στον κύκλο Β πολυγώνου, $|\mathrm{B}|$ το εμβαδόν του κύκλου Β και Ε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου.

Στην συνέχεια θεωρούμε ένα άλλο πολύγωνο (όμοιο προς αυτό που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο Β) που να είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο Α και με βάση το πολύγωνο αυτό αναγράφουμε πυραμίδα με κορυφή την κορυφή του κώνου.

Τα πολύγωνα που είναι εγγεγραμμένα στους κύκλους Α και Β είναι όμοια και άρα ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των ακτίνων των κύκλων στους οποίους είναι εγγεγραμμένα (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 1).

Έτσι,
$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{\gamma^2}{\varepsilon^2}$$
όπου με ε_3 συμβολίζουμε το εμβαδόν του πολυγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο Α.

Αλλά
$$\frac{\gamma^2}{\varepsilon^2} = \frac{\gamma \cdot \gamma}{\gamma \cdot \delta} = \frac{\gamma}{\delta}$$
καθώς $\varepsilon^2 = \gamma \cdot \delta$ επειδή η ε είναι η μέση ανάλογος των γ και δ.

Επίσης είναι, $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\varepsilon_3}{3_4}$ όπου ε_4 είναι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας.

Πράγματι,

$$\varepsilon_3 = \frac{\nu \cdot \lambda_\nu \cdot \upsilon}{2}$$

όπου ν είναι ο αριθμός των πλευρών, λ_ν η πλευρά του και υ το ύψος, δηλαδή η κάθετη που άγεται από το κέντρο του κύκλου προς της πλευρά του πολυγώνου.

Και

$$\varepsilon_4 = \frac{\nu \cdot \lambda_\nu \cdot \alpha}{2}$$

όπου α το απόστημα (στμ: της πυραμίδας από την κορυφή της κάθετα προς την πλευρά της βάσης της).

Έτσι

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4} = \frac{\frac{\nu \cdot \lambda_\nu \cdot \upsilon}{2}}{\frac{\nu \cdot \lambda_\nu \cdot \alpha}{2}} = \frac{\upsilon}{\alpha}$$

και καθώς $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\upsilon}{\alpha}$ (στμ: η απόδειξη της ανισότητας αυτής παρατίθεται αμέσως μετά το τέλος της απόδειξης της πρότασης) έπεται ότι $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4}$

Έτσι έχουμε

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{\gamma}{\delta} > \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4}$$

και άρα $\varepsilon_2 < \varepsilon_4$.

Επειδή όμως

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{|\mathrm{B}|}{\mathrm{E}}$$

έχουμε ότι

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_4} < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{|\mathrm{B}|}{\mathrm{E}}$$

που όμως είναι αδύνατον καθώς $\varepsilon_1 > |\mathrm{B}|$ επειδή το πολύγωνο με εμβαδόν ε_1 είναι περιγεγραμμένο περί τον κύκλο Β ενώ ισχύει και $\varepsilon_4 < \mathrm{E}$ διότι η πυραμίδα είναι εγγεγραμμένη στον κώνο.

Πράγματι είναι

$$\frac{1}{\varepsilon_4} > \frac{1}{\mathrm{E}}$$

και άρα

$$\frac{|\mathrm{B}|}{\varepsilon_4} > \frac{|\mathrm{B}|}{\mathrm{E}}$$

ενώ

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_4} > \frac{|\mathrm{B}|}{\varepsilon_4}.$$

Έτσι

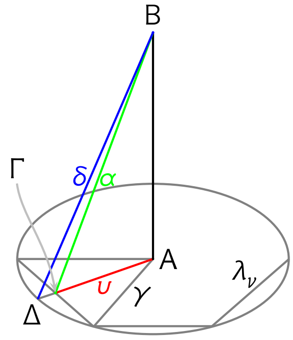
$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_4} > \frac{|\text{B}|}{\text{E}}$$

$\boxtimes$

Στμ: Για την απόδειξη της ανισότητας $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\upsilon}{\alpha}$ καταρχάς, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Στοιχεία, Βιβλίο I, Πρόταση 47), παρατηρούμε ότι $\gamma^2 = \upsilon^2 + \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2$ και $\delta^2 = \alpha^2 + \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2$.

Έτσι

$$\frac{\gamma^2}{\delta^2} = \frac{\upsilon^2 + \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2}{\alpha^2 + \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2}$$



από όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\gamma^2}{\delta^2} > \frac{\upsilon^2}{\alpha^2}$$

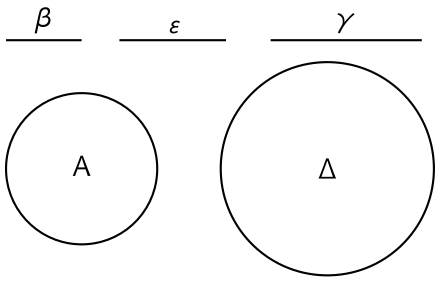
και άρα $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\upsilon}{\alpha}$.

Πρόταση 15 (126) *Σε κάθε ισοσκελή κώνο ο λόγος των εμβαδών της επιφάνειας του (στμ: παράπλευρης) και της βάσης του είναι ίσος με τον λόγο της πλευράς του κώνου (στμ: γενέτειρας) προς την ακτίνα της βάσης του.*

Απόδειξη. Έστω ο ισοσκελής κώνος με βάση τον κύκλο Α ακτίνας ίσης με β και έστω γ η πλευρά του κώνου.

Πρέπει να δειχθεί ότι ο λόγος του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου προς το εμβαδόν του κύκλου Α που είναι η βάση του κώνου είναι ίσος με γ/β.

Λαμβάνουμε την ε που είναι η μέση ανάλογος των β και γ και θεωρούμε τον κύκλο Δ με ακτίνα ίση με ε.



Τότε $|\Delta| = \text{E}$ όπου Ε είναι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου (Πρόταση 14).

Επίσης ο λόγος των εμβαδών των κύκλων Δ και Α είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 1) και άρα

$$\frac{|\Delta|}{|A|} = \frac{{\delta_1}^2}{{\delta_2}^2} = \frac{(2\cdot\varepsilon)^2}{(2\cdot\beta)^2} = \frac{4\cdot\varepsilon^2}{4\cdot\beta^2} = \frac{\varepsilon^2}{\beta^2}$$

Αλλά

$$\frac{\varepsilon^2}{\beta^2} = \frac{\beta\cdot\gamma}{\beta^2} = \frac{\gamma}{\beta}$$

διότι $\varepsilon^2 = \beta\cdot\gamma$ καθώς η ε είναι η μέση ανάλογος των β και γ.

Έτσι $|\Delta|/|A| = \gamma/\beta$ και άρα $E/|A| = \gamma/\beta$ που είναι η αποδεικτέα. ◘

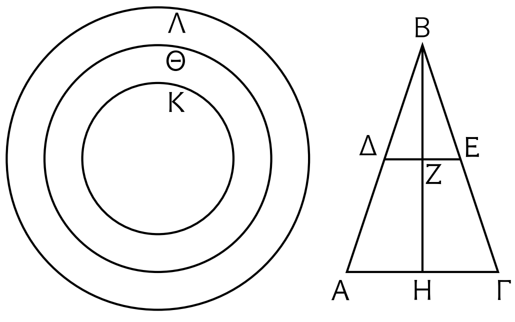
Πρόταση 16 (126) *Αν ένας ισοσκελής κώνος τμηθεί από ένα επίπεδο παράλληλα προς την βάση του τότε η επιφάνεια του κώνου που βρίσκεται ανάμεσα στο επίπεδο αυτό και την βάση του κώνου έχει εμβαδόν ίσο με τον κύκλο του οποίου η ακτίνα είναι η μέση ανάλογος του τμήματος της πλευράς του κώνου που βρίσκεται ανάμεσα στο επίπεδο που τον τέμνει και την βάση του κώνου και του αθροίσματος των ακτίνων του κύκλου που είναι η βάση του κώνου και του κύκλου του επιπέδου που τέμνει τον κώνο.*

Απόδειξη. Έστω ο κώνος του οποίου το δια του άξονα τρίγωνο είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ και ας τμηθεί από ένα επίπεδο παράλληλα προς την βάση του οπότε σχηματίζεται η τομή ΔΕ ενώ ο άξονας του κώνου είναι η ΒΗ.

Λαμβάνουμε τον κύκλο Θ με ακτίνα που είναι η μέση ανάλογος των ΑΔ και ΔΖ + ΗΑ.

Ισχυρίζομαι ότι ο κύκλος Θ έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της επιφάνειας του κώνου που βρίσκεται μεταξύ των ΔΕ και ΑΓ.

Στην συνέχεια λαμβάνουμε και τους κύκλους Κ και Λ με ακτίνες ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα ώστε το τετράγωνο με πλευρά ρ_2 να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που έχει πλευρές ΒΔ και ΔΖ ενώ το τετράγωνο με πλευρά ρ_1 να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που έχει πλευρές ίσες με ΒΑ και ΑΗ, δηλαδή ισχύουν $\rho_1^2 = BA\cdot AH$ και $\rho_2^2 = B\Delta\cdot\Delta Z$.



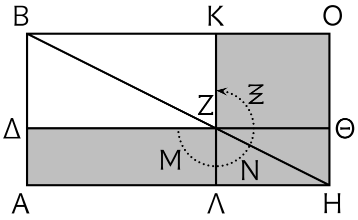
Τότε η παράπλευρη επιφάνεια ε_1 του κώνου ΑΒΓ έχει εμβαδόν ίσο με αυτό του κύκλου Λ, δηλαδή ισχύει $\varepsilon_1 = |\Lambda|$ ενώ αντίστοιχα η παράπλευρη επιφάνεια ε_2 του κώνου ΔΕΒ έχει εμβαδόν ίσο με αυτό του κύκλου Κ, δηλαδή $\varepsilon_2 = |\mathrm{K}|$ (Πρόταση 14).

Αλλά το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΒΑ και ΑΗ έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει τις πλευρές του ίσες με ΒΔ και ΔΖ και του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΔ και ΔΖ + ΑΗ καθώς ΔΖ // ΑΗ. Δηλαδή,

$$\mathrm{BA} \cdot \mathrm{AH} = \mathrm{B}\Delta \cdot \Delta\mathrm{Z} + \mathrm{A}\Delta \cdot (\Delta\mathrm{Z} + \mathrm{AH}).$$

Πράγματι θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΒΑΗΟ με διαγώνιο ΒΗ και έστω Δ τυχόν σημείο της ΒΑ. Από το Δ φέρνουμε την παράλληλη προς την ΑΗ που τέμνει την ΗΟ στο Θ και την ΒΗ στο Ζ. Από το Ζ φέρνουμε την παράλληλη προς τις ΑΒ, ΗΟ που τέμνει τις ΑΗ, ΒΟ στα Λ και Κ αντίστοιχα.

Τότε ισχυρίζομαι ότι $\mathrm{BA} \cdot \mathrm{AH} = \mathrm{B}\Delta \cdot \Delta\mathrm{Z} + \Delta\mathrm{A} \cdot (\Delta\mathrm{Z} + \mathrm{AH})$.



Είναι $\mathrm{BA} \cdot \mathrm{AH} = |\mathrm{BH}|$ και $\mathrm{B}\Delta \cdot \Delta\mathrm{Z} = |\mathrm{BZ}|$ ενώ $\Delta\mathrm{A} \cdot (\Delta\mathrm{Z} + \mathrm{AH}) = |\Delta\mathrm{AHOKZ}|$ (δηλαδή ο γνώμων ΜΝΞ) καθώς $\Delta\mathrm{A} \cdot \Delta\mathrm{Z} = |\Delta\Lambda|$ και $\Delta\mathrm{A} \cdot \mathrm{AH} = |\mathrm{KH}|$, διότι το παραπλήρωμα ΚΘ έχει εμβαδόν ίσο με αυτό του παραπληρώματος ΔΛ (Στοιχεία, Βιβλίο Ι, Πρόταση 43).

Έτσι,

$$\Delta\mathrm{A} \cdot \mathrm{AH} = |\Delta\mathrm{H}| = |\mathrm{AZ}| + |\mathrm{ZH}| = |\mathrm{K}\Theta| + |\mathrm{ZH}| = |\mathrm{KH}|$$

όμως $|\mathrm{BH}| = |\mathrm{BZ}| + |\Delta\mathrm{AHOKZ}|$ και άρα από την παραπάνω έπεται ότι

$$\mathrm{BA} \cdot \mathrm{AH} = \mathrm{B}\Delta \cdot \Delta\mathrm{Z} + \Delta\mathrm{A} \cdot (\Delta\mathrm{Z} + \mathrm{AH})$$

Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι $\mathrm{BA} \cdot \mathrm{AH} = \rho_1^2$, $\mathrm{B}\Delta \cdot \Delta\mathrm{Z} = \rho_2^2$ και $\Delta\mathrm{A} \cdot (\Delta\mathrm{Z} + \mathrm{AH}) = \rho_3^2$ όπου ρ_3 είναι η ακτίνα του κύκλου Θ η οποία είναι η μέση ανάλογος των ΔΑ και ΔΖ + ΑΗ.

Συνεπώς, $\rho_1^2 = \rho_2^2 + \rho_3^2$ και άρα $|\Lambda| = |\mathrm{K}| + |\Theta|$ από την οποία παίρνουμε ότι $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + |\Theta|$ όπου ε_1 είναι η παράπλευρη επιφάνεια του κώνου ΑΒΓ και ε_2 η παράπλευρη επιφάνεια του κώνου ΔΕΒ.

Από την τελευταία προκύπτει ότι $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = |\Theta|$ που είναι η αποδεικτέα.

◘

Λήμματα 1 (127)

1. *Οι ισοϋψείς κώνοι έχουν λόγο των όγκων τους ίσο με τον λόγο των εμβαδών των βάσεών τους ενώ οι κώνοι που έχουν ίσες βάσεις έχουν τον λόγο των όγκων τους ίσο με τον λόγο των υψών τους (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 11).*

2. *Αν ένας κύλινδρος τμηθεί από ένα επίπεδο παράλληλα στις βάσεις του τότε ο λόγος των όγκων των δύο κυλίνδρων που σχηματίζονται είναι ίσος με τον λόγο των υψών τους (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 13).*

3. *Ο λόγος των όγκων δυο κώνων είναι ίσος με τον λόγο των όγκων των κυλίνδρων που είναι ισοϋψείς με τους κώνους και που έχουν ίσες βάσεις με αυτούς (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 14).*

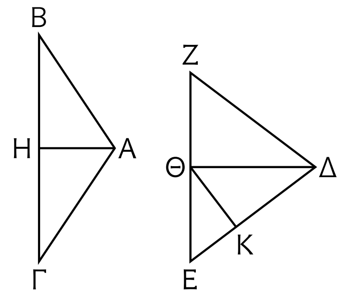
4. *Αν δυο κώνοι έχουν ίσους όγκους τότε τα εμβαδά των βάσεών τους είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη τους. Και αν σε δύο κώνους τα εμβαδά των βάσεών τους είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη τους τότε οι κώνοι αυτοί είναι ισοδύναμοι (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 15).*

5. *Δυο κώνοι στους οποίους οι διάμετροι των βάσεων τους έχουν λόγο ίσο με τον λόγο των υψών τους έχουν τον λόγο των όγκων τους ίσο με τον λόγο των κύβων των διαμέτρων των βάσεών τους (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 12).*

Πρόταση 17 (128) *Αν υπάρχουν δυο ισοσκελείς κώνοι ώστε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας (στμ: παράπλευρης) του πρώτου να είναι ίσο με το εμβαδόν της βάσης του δεύτερου και η κάθετη που άγεται από το κέντρο της βάσης του πρώτου κώνου προς την πλευρά του να είναι ίση με το ύψος του δεύτερου τότε οι δύο αυτοί κώνοι είναι ισοδύναμοι.*

Απόδειξη.

Έστω οι ισοσκελείς κώνοι ΑΒΓ και ΔΕΖ ώστε το εμβαδόν της βάσης του ΑΒΓ να είναι ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του ΔΕΖ και το ύψος ΑΗ του ΑΒΓ να είναι ίσο με την ΘΚ που είναι η αγόμενη από το κέντρο Θ της βάσης του ΔΕΖ προς την πλευρά του ΔΕ.



Ισχυρίζομαι ότι $|ΑΒΓ| = |ΔΕΖ|$.

Καταρχάς αν ε_1 και ε_2 είναι τα εμβαδά της βάσης του ΑΒΓ και της παράπλευρης επιφάνειας του ΔΕΖ θα είναι $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Αν τώρα ε_3 είναι το εμβαδόν της βάσης του ΔΕΖ τότε έχουμε $\varepsilon_1/\varepsilon_3 = \varepsilon_2/\varepsilon_3$ (Στοιχεία, Βιβλίο 5, Πρόταση 7).

Όμως $\varepsilon_2/\varepsilon_3 = ΔΘ/ΘΚ$ καθώς σε κάθε ισοσκελή κώνο έχει αποδειχτεί ότι ο λόγος του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας του προς το εμβαδόν της βάσης του είναι ίσος με τον λόγο της πλευράς του κώνου προς την ακτίνα της βάσης του, δηλαδή $\varepsilon_2/\varepsilon_3 = ΔΕ/ΘΕ$.

Αλλά τα τρίγωνα ΕΘΔ και ΕΘΚ είναι ισογώνια (καθώς είναι ορθογώνια και έχουν την $\hat{Ε}$ κοινή) οπότε είναι όμοια, και άρα $ΕΔ/ΘΔ = ΕΘ/ΘΚ$ ή

ΕΔ/ΕΘ = ΘΔ/ΘΚ οπότε

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = \frac{\Theta\Delta}{\Theta K}.$$

Όμως ΘΚ = ΑΗ και επομένως $\varepsilon_1/\varepsilon_3$ = ΘΔ/ΑΗ.

Συνεπώς, τα εμβαδά ε_1 και ε_3 των βάσεων είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη ΑΗ και ΘΔ των κώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ αντίστοιχα.

Έτσι, από το Λήμμα 4 έπεται ότι οι κώνοι είναι ισοδύναμοι. ◘

Πρόταση 18 (128) *Έστω στερεός ρόμβος που αποτελείται από δύο ίσους ισοσκελείς κώνους. Ο κώνος του οποίου:*

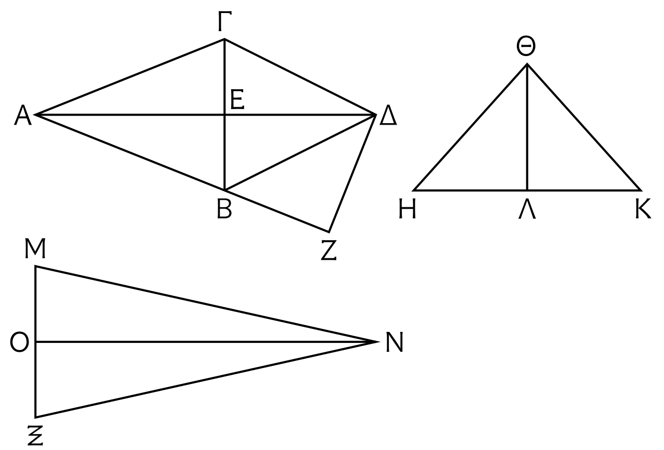
α) *η βάση έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του ενός από τους δύο κώνους που αποτελούν τον στερεό ρόμβο και*

β) *το ύψος είναι ίσο με την αγόμενη κάθετη από την κορυφή του ενός κώνου προς την πλευρά του άλλου κώνου*

είναι ισοδύναμος με τον στερεό ρόμβο.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον στερεό ρόμβο ΑΒΓΔ που αποτελείται από δύο ισοσκελείς κώνους με βάση τον κύκλο διαμέτρου ΒΓ και έστω ΑΔ το ύψος του.

Λαμβάνουμε έναν άλλο κώνο, τον ΗΘΚ, του οποίου η βάση έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου ΑΒΓ και του οποίου το ύψος ΘΛ είναι ίσο με την ΔΖ που είναι η αγόμενη κάθετη από το Δ προς την προέκταση της ΑΒ. Δηλαδή ισχύει ΘΛ = ΔΖ.



Ισχυρίζομαι ότι ο κώνος ΗΘΚ είναι ισοδύναμος με τον στερεό ρόμβο ΑΒΓΔ, δηλαδή ότι ισχύει |ΗΘΚ| = |ΑΒΓΔ|.

Λαμβάνουμε ακόμα έναν άλλο κώνο, τον ΜΝΞ, του οποίου η βάση έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της βάσης του κώνου ΑΒΓ και του οποίου το ύψος ΝΟ είναι ίσο με την ΑΔ, δηλαδή ΝΟ = ΑΔ.

Τότε ΝΟ/ΔΕ = ΑΔ/ΔΕ (Στοιχεία, Βιβλίο 5, Πρόταση 7).

Όμως |ΑΒΓΔ|/|ΒΓΔ| = ΑΔ/ΔΕ ενώ ισχύει και |ΜΝΞ|/|ΒΓΔ| = ΝΟ/ΔΕ καθώς οι κώνοι ΜΝΞ και ΒΓΔ έχουν ισεμβαδικές βάσεις (Λήμμα 1).

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει |ΜΝΞ|/|ΒΓΔ| = |ΑΒΓΔ|/|ΒΓΔ| και άρα |ΜΝΞ| = |ΑΒΓΔ| (Στοιχεία, Βιβλίο 5, Πρόταση 9).

Η παράπλευρη επιφάνεια του κώνου ΑΒΓ όμως έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν της βάσης του κώνου ΗΘΚ και άρα

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4}$$

όπου ε_1 είναι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου ΑΒΓ, ε_2 είναι το εμβαδόν της βάσης του κώνου ΑΒΓ, ε_3 είναι το εμβαδόν της βάσης του κώνου ΗΘΚ και ε_4 είναι το εμβαδόν της βάσης του κώνου ΜΝΞ, διότι οι βάσεις των κώνων ΑΒΓ και ΜΝΞ είναι ισεμβαδικές (δηλαδή $\varepsilon_2 = \varepsilon_4$).

Από την Πρόταση 15 έχουμε όμως ότι $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \mathrm{AB}/\mathrm{BE}$ ενώ καθώς τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΖ είναι όμοια ισχύει και ότι

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta Z}}.$$

Επομένως, από την προηγούμενη αναλογία παίρνουμε

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta Z}}.$$

Έτσι θα είναι και

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta Z}} = \frac{\mathrm{NO}}{\Theta\Lambda}$$

καθώς ΑΔ = ΝΟ και ΔΖ = ΘΛ.

Συνεπώς, οι βάσεις των κώνων ΗΘΚ και ΜΝΞ είναι αντιστρόφως ανάλογες των υψών τους οπότε από το Λήμμα 4 συμπεραίνουμε ότι οι κώνοι αυτοί είναι ισοδύναμοι.

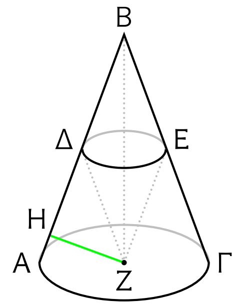
Δηλαδή |ΗΘΚ| = |ΜΝΞ| από όπου καθώς |ΜΝΞ| = |ΑΒΓΔ| έπεται ότι |ΗΘΚ| = |ΑΒΓΔ| που είναι η αποδεικτέα. ◙

Πρόταση 19 (129) *Αν ένας ισοσκελής κώνος τμηθεί από ένα επίπεδο που είναι παράλληλο στη βάση του και από τον κύκλο (στμ: που είναι η τομή του επιπέδου με τον κώνο) αναγραφεί κώνος με κορυφή το κέντρο της βάσης του αρχικού κώνου τότε η διαφορά του όγκου του στερεού ρόμβου που έχει κατασκευαστεί από τον όγκο του αρχικού κώνου είναι ίση με τον όγκο ενός κώνου του οποίου:*

α) η βάση έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της επιφάνειας του αρχικού κώνου που περιέχεται μεταξύ του επιπέδου που τον τέμνει και της βάσης του και

β) το ύψος είναι ίσο με την αγόμενη κάθετη από το κέντρο της βάσης του αρχικού κώνου προς την μια πλευρά του.

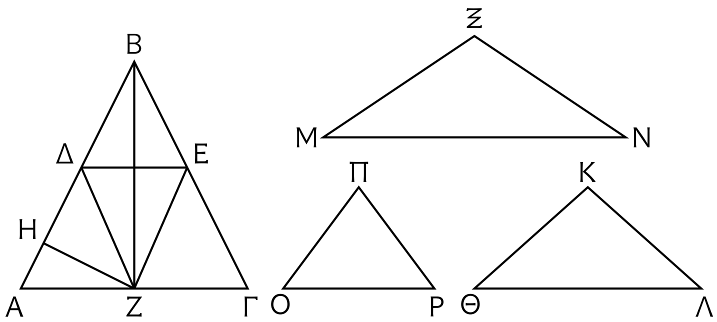
Απόδειξη. Έστω ο ισοσκελής κώνος ΑΒΓ που τέμνεται από επίπεδο παράλληλο στην βάση του και έστω ότι η τομή του κώνου με το επίπεδο είναι ο κύκλος διαμέτρου ΔΕ.



Έστω ακόμα ότι το κέντρο της βάσης του ΑΒΓ είναι το Ζ.

Με βάση τον κύκλο διαμέτρου ΔΕ και κορυφή το Ζ αναγράφουμε κώνο οπότε σχηματίζεται ο στερεός ρόμβος ΒΔΖΕ που αποτελείται από δύο ισοσκελείς κώνους.

Στην συνέχεια λαμβάνουμε έναν άλλο κώνο, τον ΚΘΛ, ώστε η βάση του να έχει ίσο εμβαδόν με αυτό της επιφάνειας του κώνου που περιέχεται μεταξύ των ΔΕ και ΑΓ και το ύψος του να είναι ίσο με την ΖΗ που είναι η αγόμενη κάθετη από το Ζ προς την ΑΒ.



Ισχυρίζομαι ότι αν από τον όγκο του ΑΒΓ αφαιρεθεί ο όγκος του στερεού ρόμβου ΒΔΖΕ η διαφορά που απομένει είναι ίση με τον όγκο του κώνου ΘΚΛ.

Λαμβάνουμε ακόμα δύο κώνους, τους ΜΝΞ και ΟΠΡ, ώστε η βάση του ΜΝΞ να έχει ίσο εμβαδόν με την παράπλευρη επιφάνεια του κώνου ΑΒΓ και το ύψος του ΜΝΞ να είναι ίσο με την ΖΗ.

Επιπλέον, η βάση του κώνου ΟΠΡ είναι ισεμβαδική με την παράπλευρη επιφάνεια του κώνου ΔΒΕ ενώ το ύψος του είναι ίσο με την αγόμενη κάθετη από το Ζ προς την πλευρά ΑΒ του κώνου ΑΒΓ.

Τότε οι κώνοι ΜΝΞ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμοι διότι είναι ισοσκελείς και η παράπλευρη επιφάνεια του ενός είναι ισεμβαδική με την βάση του άλλου και η κάθετη που άγεται από κέντρο της βάσης του πρώτου κώνου προς την μια πλευρά του είναι ίση με το ύψος του δεύτερου κώνου (Πρόταση 17).

Συνεπώς, |ΟΠΡ| = |ΒΔΖΕ|.

Όμως η κυρτή επιφάνεια, έστω ε_1, του κώνου ΑΒΓ αποτελείται από την κυρτή επιφάνεια, έστω ε_2, του κώνου ΔΒΕ και την επιφάνεια του κώνου

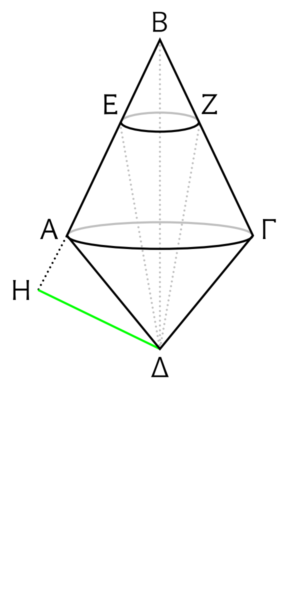
ΑΒΓ που περιέχεται μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΔΕ και ΑΓ, έστω ε_3. Δηλαδή ισχύει $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

Επίσης η κυρτή επιφάνεια του κώνου ΑΒΓ έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της βάσης του κώνου ΜΝΞ, έστω ε_4, ενώ αντίστοιχα η κυρτή επιφάνεια του κώνου ΔΒΕ είναι ισεμβαδική με την βάση του κώνου ΟΠΡ που έχει εμβαδόν ε_5. Δηλαδή ισχύουν $\varepsilon_1 = \varepsilon_4$ και $\varepsilon_2 = \varepsilon_5$.

Συνεπώς η βάση του ΜΝΞ έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των βάσεων των ΘΚΛ και ΟΠΡ.

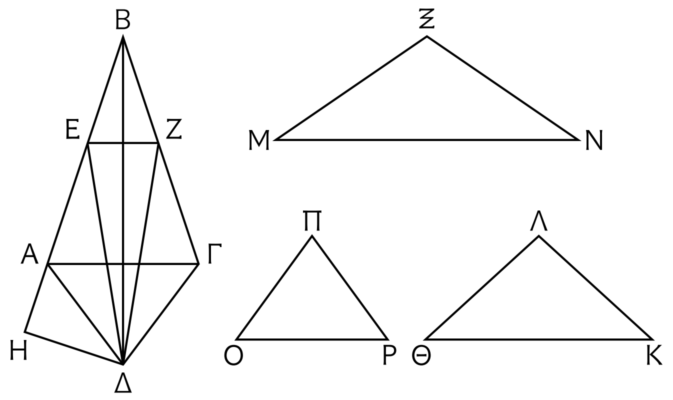
Καθώς οι κώνοι είναι ισοϋψείς έπεται ότι $|\text{ΜΝΞ}| = |\text{ΘΚΛ}| + |\text{ΟΠΡ}|$ ή $|\text{ΑΒΓ}| = |\text{ΘΚΛ}| + |\text{ΒΔΕΖ}|$ καθώς $|\text{ΜΝΞ}| = |\text{ΑΒΓ}|$ και $|\text{ΟΠΡ}| = |\text{ΒΔΕΖ}|$ από όπου προκύπτει ότι $|\text{ΘΚΛ}| = |\text{ΑΒΓ}| - |\text{ΒΔΕΖ}|$, που είναι η αποδεικτέα. ◘

Πρόταση 20 (130) *Έστω ένας στερεός ρόμβος που αποτελείται από δύο ισοσκελείς κώνους. Αν ένας από τους δύο κώνους τμηθεί από ένα επίπεδο παράλληλα στη βάση του και από τον κύκλο που είναι η τομή του επιπέδου με τον κύκλο αναγραφεί κώνος που να έχει κορυφή την κορυφή του άλλου κώνου και από τον αρχικό στερεό ρόμβο αφαιρεθεί ο στερεός ρόμβος που προκύπτει τότε το απομένον στερεό είναι ισοδύναμο με τον κώνο του οποίου η βάση έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της κυρτής επιφάνειας του αρχικού κώνου μεταξύ του επιπέδου από το οποίο έχει τμηθεί και της βάσης του, και του οποίου το ύψος είναι ίσο με την αγόμενη κάθετη από την κορυφή του ενός κώνου (στμ: από αυτούς που αποτελούν τον αρχικό στερεό ρόμβο) προς την πλευρά του άλλου κώνου (στμ: με τον οποίο σχηματίζουν μαζί τον αρχικό στερεό ρόμβο).*



Απόδειξη. Έστω ο στερεός ρόμβος ΑΒΓΔ που αποτελείται από δύο ισοσκελείς κώνους και έστω ότι τέμνεται από ένα επίπεδο παράλληλο προς την βάση του με τομή τον κύκλο διαμέτρου ΕΖ.

Με βάση τον κύκλο αυτό αναγράφουμε κώνο με κορυφή το Δ οπότε στο εσωτερικό του ρόμβου ΑΒΓΔ σχηματίζεται ο στερεός ρόμβος ΕΒΖΔ.



Λαμβάνουμε ακόμα τον κώνο ΘΚΛ του οποίου η βάση έχει εμβαδόν ίσο με την κυρτή επιφάνεια του κώνου ΑΒΓ που περιέχεται μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΑΓ και ΕΖ και του οποίου το ύψος είναι ίσο με την αγόμενη κάθετη ΔΗ από το Δ προς την ΒΑ (ή την προέκτασή της).

Ισχυρίζομαι ότι ο κώνος ΘΚΛ έχει όγκο ίσο με την διαφορά των όγκων των στερεών ρόμβων ΑΒΓΔ και ΕΒΔΖ.

Λαμβάνουμε ακόμα και τους κώνους ΜΝΞ και ΟΠΡ ώστε η βάση ΜΝΞ να έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της κυρτής επιφάνειας του ΑΒΓ και του οποίου το ύψος είναι ίσο με την ΔΗ.

Τότε ισχύει $|\text{ΜΝΞ}| = |\text{ΑΒΓΔ}|$ (Πρόταση 18).

Για τον κώνο ΟΠΡ ισχύει αντίστοιχα ότι η βάση του έχει εμβαδόν ίσο με την κυρτή επιφάνεια του κώνου ΕΒΖ ενώ το ύψος του είναι επίσης ίσο με ΔΗ.

Συνεπώς, από την Πρόταση 18, έπεται ότι $|\text{ΟΠΡ}| = |\text{ΕΒΔΖ}|$.

Η παράπλευρη επιφάνεια όμως του κώνου ΑΒΓ έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της βάσης του κώνου ΜΝΞ και αποτελείται από την παράπλευρη επιφάνεια του κώνου ΕΒΖ και την παράπλευρη επιφάνεια του κώνου ΑΒΓ που περιέχεται μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΕΖ και ΑΓ, δηλαδή

$$\text{εμβ. βάσης ΜΝΞ} = \mathcal{E}_{\text{ΑΒΓ}} = \mathcal{E}_{\text{ΕΒΖ}} + \mathcal{E},$$

όπου με $\mathcal{E}_{\text{ΑΒΓ}}$ και $\mathcal{E}_{\text{ΕΒΖ}}$ συμβολίζουμε τα εμβαδά των παράπλευρων επιφανειών των κώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ αντίστοιχα, ενώ με $\mathcal{E}$ συμβολίζουμε το εμβαδόν της κωνικής επιφάνειας μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΕΖ και ΑΓ.

Επιπλέον, η παράπλευρη επιφάνεια του κώνου ΕΒΖ έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της βάσης του κώνου ΟΠΡ ενώ η κυρτή επιφάνεια του κώνου ΑΒΓ που βρίσκεται μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΑΓ και ΕΖ έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της βάσης του κώνου ΘΚΛ. Δηλαδή

$$\mathcal{E}_{\text{ΕΒΖ}} = \text{εμβ. βάσης ΟΠΡ} \quad \text{και} \quad \mathcal{E} = \text{εμβ. βάσης ΘΚΛ}.$$

Συνεπώς, από την προηγούμενη ισότητα παίρνουμε

$$\text{εμβ. βάσης ΜΝΞ} = \text{εμβ. βάσης ΟΠΡ} + \text{εμβ. βάσης ΘΚΛ}$$

Επειδή οι κώνοι ΜΝΞ, ΟΠΡ και ΘΚΛ είναι ισοϋψείς, καθώς τα ύψη τους είναι ίσα με ΔΗ, από την παραπάνω έπεται ότι

$$|\mathrm{ΜΝΞ}| = |\mathrm{ΟΠΡ}| + |\mathrm{ΘΚΛ}|$$

και άρα, επειδή $|\mathrm{ΜΝΞ}| = |\mathrm{ΑΒΓΔ}|$ και $|\mathrm{ΟΠΡ}| = |\mathrm{ΕΒΔΖ}|$, θα είναι και

$$|\mathrm{ΑΒΓΔ}| = |\mathrm{ΕΒΔΖ}| + |\mathrm{ΘΚΛ}|$$

ή

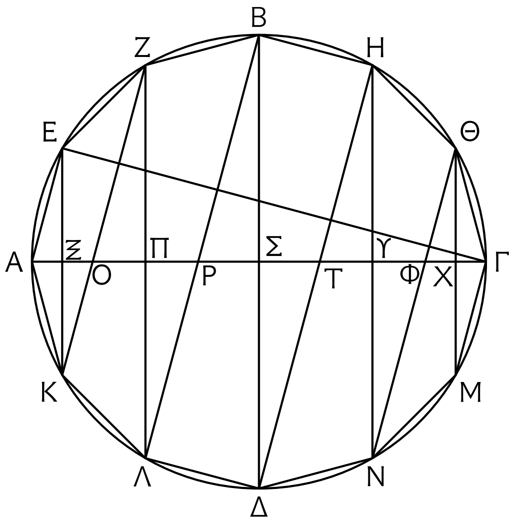
$$|\mathrm{ΘΚΛ}| = |\mathrm{ΑΒΓΔ}| - |\mathrm{ΕΒΔΖ}|$$

που είναι η αποδεικτέα. ◘

Πρόταση 21 (131) *Αν σε έναν κύκλο εγγραφεί ένα αρτιόπλευρο και ισόπλευρο πολύγωνο και αχθούν οι διαγώνιες του ώστε να είναι παράλληλες προς μια διαγώνιό του τότε ο λόγος του αθροίσματος των διαγωνιών (στμ: των μηκών τους) προς την διάμετρο του κύκλου (στμ: το μήκος της) είναι ίσος με τον λόγο της διαγωνίου του πολυγώνου που συνδέει τις μισές πλην μιας πλευρές του (στμ: δηλαδή της χορδής του κύκλου με άκρα κορυφές του πολυγώνου η οποία αποκόπτει από το πολύγωνο μια τεθλασμένη γραμμή που αποτελείται από διαδοχικές πλευρές του πολυγώνου το πλήθος των οποίων είναι ίσο με το μισό του πλήθούς πλην μιας των πλευρών του πολυγώνου) προς την πλευρά του πολυγώνου.*

Απόδειξη. Στμ: Ο Αρχιμήδης αποδεικνύει την πρόταση αυτή για το κανονικό δωδεκάγωνο. Η απόδειξη όμως γενικεύεται για οποιοδήποτε 2ν-γωνο.

Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔ στον οποίο εγγράφουμε το κανονικό δωδεκάγωνο ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ ενώ φέρνουμε και τις ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ και ΘΜ οι οποίες είναι παράλληλες στην ΒΔ.



Ισχυρίζομαι ότι

$$\frac{\mathrm{EK}+\mathrm{Z\Lambda}+\mathrm{B\Delta}+\mathrm{HN}+\mathrm{\Theta M}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{EA}}$$

Φέρνουμε και τις ΖΚ, ΛΒ, ΗΔ και ΘΝ οπότε θα είναι ΖΚ // ΕΑ (στμ: καθώς $\widehat{\mathrm{AEK}}=\widehat{\mathrm{EKZ}}$ επειδή οι ίσες χορδές ΕΑ και ΕΖ υποτείνουν ίσα τόξα), ενώ ομοίως θα είναι και ΒΛ // ΖΚ, ΔΗ // ΒΛ, ΘΝ // ΔΗ και ΓΜ // ΘΝ.

Τότε από την ομοιότητα των τριγώνων ΕΑΞ και ΟΞΚ έχουμε

$$\frac{\mathrm{E\Xi}}{\mathrm{\Xi A}}=\frac{\mathrm{K\Xi}}{\mathrm{\Xi O}}$$

ενώ ομοίως προκύπτει η αναλογία:

$$\frac{\mathrm{K\Xi}}{\mathrm{\Xi O}}=\frac{\mathrm{Z\Pi}}{\mathrm{\Pi O}}=\frac{\mathrm{\Lambda\Pi}}{\mathrm{\Pi P}}=\frac{\mathrm{B\Sigma}}{\mathrm{\Sigma P}}=\frac{\mathrm{\Delta\Sigma}}{\mathrm{\Sigma T}}=\frac{\mathrm{H\Upsilon}}{\mathrm{\Upsilon T}}=\frac{\mathrm{N\Upsilon}}{\mathrm{\Upsilon\Phi}}=\frac{\mathrm{\Theta X}}{\mathrm{X\Phi}}=\frac{\mathrm{MX}}{\mathrm{X\Gamma}}$$

(Στοιχεία, Βιβλίο 6, Πρόταση 4)

Από τις παραπάνω αναλογίες προκύπτουν:

$$\frac{\mathrm{E\Xi}}{\mathrm{\Xi A}}=\frac{\mathrm{K\Xi}}{\mathrm{\Xi O}}=\frac{\mathrm{E\Xi}+\mathrm{K\Xi}}{\mathrm{\Xi A}+\mathrm{\Xi O}}=\frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{AO}},$$

$$\frac{\mathrm{Z\Pi}}{\mathrm{\Pi O}}=\frac{\mathrm{\Lambda\Pi}}{\mathrm{\Pi P}}=\frac{\mathrm{Z\Pi}+\mathrm{\Lambda\Pi}}{\mathrm{\Pi O}+\mathrm{\Pi P}}=\frac{\mathrm{Z\Lambda}}{\mathrm{OP}},$$

$$\frac{\mathrm{B\Sigma}}{\mathrm{\Sigma P}}=\frac{\mathrm{\Delta\Sigma}}{\mathrm{\Sigma T}}=\frac{\mathrm{B\Sigma}+\mathrm{\Delta\Sigma}}{\mathrm{\Sigma P}+\mathrm{\Sigma T}}=\frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{PT}},$$

$$\frac{\mathrm{\Upsilon H}}{\mathrm{\Upsilon T}}=\frac{\mathrm{N\Upsilon}}{\mathrm{\Upsilon\Phi}}=\frac{\mathrm{\Upsilon H}+\mathrm{N\Upsilon}}{\mathrm{\Upsilon T}+\mathrm{\Upsilon\Phi}}=\frac{\mathrm{HN}}{\mathrm{T\Phi}}$$

και

$$\frac{\mathrm{\Theta X}}{\mathrm{X\Phi}}=\frac{\mathrm{MX}}{\mathrm{X\Gamma}}=\frac{\mathrm{\Theta X}+\mathrm{MX}}{\mathrm{X\Phi}+\mathrm{X\Gamma}}=\frac{\mathrm{\Theta M}}{\mathrm{\Phi\Gamma}}.$$

Έτσι έχουμε,

$$\frac{EK}{AO} = \frac{Z\Lambda}{OP} = \frac{B\Delta}{PT} = \frac{HN}{T\Phi} = \frac{\Theta M}{\Phi\Gamma} = \frac{EK + Z\Lambda + B\Delta + HN + \Theta M}{AO + OP + PT + T\Phi + \Phi\Gamma}$$

και άρα

$$\frac{E\Xi}{\Xi A} = \frac{EK + Z\Lambda + B\Delta + HN + \Theta M}{A\Gamma}.$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΓΕΑ και ΕΞΑ είναι

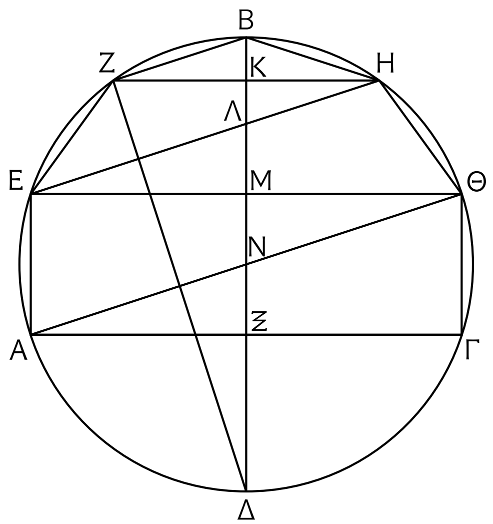
$$\frac{E\Xi}{\Xi A} = \frac{\Gamma E}{EA}$$

οπότε από την προηγούμενη έπεται η αποδεικτέα. ◘

Πρόταση 22 (131) *Αν σε τμήμα κύκλου εγγραφεί πολύγωνο του οποίου οι πλευρές χωρίς την βάση* (*στμ: που είναι χορδή του κύκλου*) *είναι ίσες και άρτιου πλήθους και με άκρα τις κορυφές του πολυγώνου αχθούν τα ευθύγραμμα τμήματα που είναι παράλληλα στη βάση του πολυγώνου τότε ο λόγος του αθροίσματος των τμημάτων αυτών και του μισού της βάσης του πολυγώνου προς το ύψος του τμήματος είναι ίσος με τον λόγο της αγόμενης από το ένα άκρο της διαμέτρου επί την μια πλευρά του πολυγώνου* (*στμ: την κορυφή του πολυγώνου που είναι η προηγούμενη από το αντιδιαμετρικό του άκρου αυτού*) *προς την πλευρά του πολυγώνου.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον κύκλο ΑΒΓΔ και έστω ΑΔ μια χορδή του.

Εγγράφουμε στο τμήμα ΑΒΓ πολύγωνο αρτιόπλευρο και ισόπλευρο (χωρίς την βάση ΑΓ) ενώ φέρνουμε τις ΖΗ και ΕΘ ώστε ΖΗ // ΕΘ // ΑΓ.



Ισχυρίζομαι ότι ισχύει

$$\frac{ZH + E\Theta + A\Xi}{B\Xi} = \frac{\Delta Z}{ZB}$$

όπου το Ξ είναι το σημείο τομής της ΑΓ και της διαμέτρου ΒΔ, δηλαδή το ΑΞ είναι το ύψος του τμήματος (ή τριγώνου) ΑΒΓ.

Στην συνέχεια φέρνουμε τις ΗΕ και ΑΘ οπότε ΗΕ // ΑΘ καθώς σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες $\widehat{\mathrm{HE\Theta}} = \widehat{\mathrm{E\Theta A}}$ διότι οι ίσες χορδές ΕΑ = ΗΘ υποτείνουν τα ίσα τόξα $\widehat{\mathrm{EA}} = \widehat{\mathrm{H\Theta}}$ (Στοιχεία, Βιβλίο 3, Πρόταδη 27). Οπότε ΗΕ // ΑΘ // ΒΖ.

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΚΖΒ και ΗΚΛ έπεται όμως ότι

$$\frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{KB}} = \frac{\mathrm{HK}}{\mathrm{K\Lambda}},$$

ενώ από την ομοιότητα των τριγώνων ΗΚΛ και ΕΜΛ προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$\frac{\mathrm{HK}}{\mathrm{K\Lambda}} = \frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{M\Lambda}}.$$

Επίσης από την ομοιότητα των τριγώνων ΕΜΛ, ΜΘΝ και ΞΑΝ προκύπτει η αναλογία

$$\frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{KB}} = \frac{\mathrm{HK}}{\mathrm{K\Lambda}} = \frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{M\Lambda}} = \frac{\mathrm{M\Theta}}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{\Xi A}}{\mathrm{\Xi N}}$$

οπότε (Στοιχεία, Βιβλίο 5, Πρόταση 12) ισχύει

$$\frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{KB}} = \frac{\mathrm{KZ}+\mathrm{HK}+\mathrm{EM}+\mathrm{M\Theta}+\mathrm{\Xi A}}{\mathrm{KB}+\mathrm{K\Lambda}+\mathrm{M\Lambda}+\mathrm{MN}+\mathrm{\Xi N}} = \frac{\mathrm{ZH}+\mathrm{E\Theta}+\mathrm{\Xi A}}{\mathrm{B\Xi}}.$$

Καθώς τα τρίγωνα ΖΚΛ και ΔΖΒ είναι όμοια ισχύει όμως ότι

$$\frac{\mathrm{ZK}}{\mathrm{KB}} = \frac{\mathrm{\Delta Z}}{\mathrm{ZB}}$$

(Στοιχεία, Βιβλίο 6, Πρόταση 4) και άρα από την προηγούμενη έπεται

$$\frac{\mathrm{\Delta Z}}{\mathrm{ZB}} = \frac{\mathrm{ZH}+\mathrm{E\Theta}+\mathrm{A\Xi}}{\mathrm{\Xi B}}$$

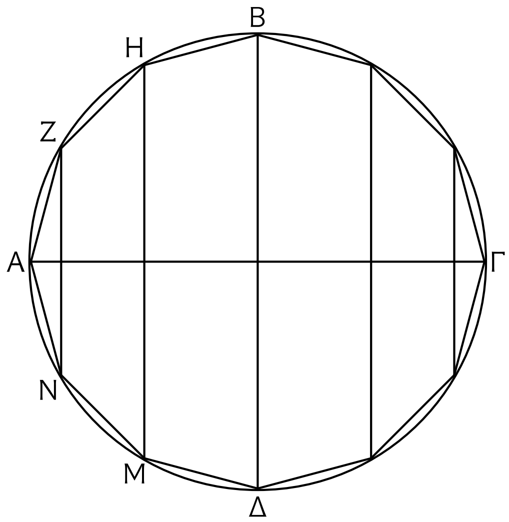
που είναι η αποδεικτέα. ◘

Πρόταση 23 (132) *Αν σε έναν από τους μέγιστους κύκλους μιας σφαίρας εγγραφεί ισόπλευρο πολύγωνο με αριθμό πλευρών που να διαιρείται με το τέσσαρα και στην συνέχεια ο κύκλος αυτός περιστραφεί περί την διάμετρο του που παραμένει σταθερή τότε το εμβαδόν της επιφάνειας του εγγραφόμενου σχήματος είναι μικρότερο από το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας.*

Απόδειξη. Έστω ο μέγιστος κύκλος ΑΒΓΔ της σφαίρας.

Εγγράφουμε σε αυτόν ένα ισόπλευρο πολύγωνο το πλήθος των πλευρών του οποίου διαιρείται με το τέσσαρα και έστω οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ με ΑΓ ⊥ ΒΔ.

Στμ: ο Αρχιμήδης αποδεικνύει την πρόταση για το κανονικό δωδεκάγωνο, η απόδειξη όμως γενικεύεται ομοίως για οποιοδήποτε 2ν-γωνο.



Αν ο κύκλος ΑΒΓΔ, στον οποίο έχει εγγραφεί το πολύγωνο, περιστραφεί περί την ΑΓ που παραμένει σταθερή είναι φανερό ότι η περιφέρειά του θα γράψει την επιφάνεια της σφαίρας ενώ οι κορυφές του πολυγώνου (εκτός των περί τα Α και Γ) διαγράφουν περιφέρειες κύκλων οι οποίες βρίσκονται στην επιφάνεια της σφαίρας και είναι κάθετες επί τον κύκλο ΑΒΓΔ ενώ οι διάμετροι των κύκλων αυτών συνδέουν τις κορυφές του πολυγώνου και είναι παράλληλες στην ΒΔ.

Επίσης οι πλευρές του πολυγώνου θα γράψουν κώνους ως εξής: οι ΑΖ και ΑΝ γράφουν επιφάνεια κώνου με βάση τον κύκλο διαμέτρου ΖΝ και κορυφή το Α ενώ οι ΖΗ και ΜΝ γράφουν μέρος κωνικής επιφάνειας με βάση κύκλο διαμέτρου ΜΗ και κορυφή το σημείο στο οποίο τέμνονται οι ΖΜ και ΜΝ όταν προεκταθούν προς την ΑΓ.

Ομοίως οι ΒΗ και ΜΔ θα γράψουν μέρος κωνικής επιφάνειας της οποίας η βάση είναι ο κύκλος διαμέτρου ΒΔ που είναι κάθετος στον κύκλο ΑΒΓΔ και κορυφή το σημείο στο οποίο τέμνονται οι ΒΗ και ΜΔ όταν προεκταθούν προς την ΑΓ.

Ομοίως και οι πλευρές του άλλου ημικυκλίου θα γράψουν αντίστοιχες με τις παραπάνω κωνικές επιφάνειες.

Θα υπάρχει λοιπόν σχήμα εγγεγραμμένο στη σφαίρα και το οποίο περιέχεται στις παραπάνω κωνικές επιφάνειες και άρα το εμβαδόν της επιφάνειάς του είναι μικρότερο από αυτό της επιφάνειας της σφαίρας.

Διότι αφού η σφαίρα διαιρεθεί από το επίπεδο που διέρχεται από την ΒΔ που είναι κάθετο στον κύκλο ΑΒΓΔ η επιφάνεια του άλλου ημισφαιρίου και η επιφάνεια του στερεού σχήματος που είναι εγγεγραμμένο στο ημισφαίριο αυτό έχουν το ίδιο σύνορο επί ενός επιπέδου που είναι ο κύκλος διαμέτρου ΒΔ και ο οποίος είναι κάθετος στον κύκλο ΑΒΓΔ και είναι και οι δύο κοίλες προς το ίδιο μέρος ενώ η μια περιλαμβάνει την άλλη και το επίπεδο που έχει το ίδιο σύνορο με αυτήν.

Ομοίως και η επιφάνεια του σχήματος που είναι εγγεγραμμένο στο άλλο ημισφαίριο έχει εμβαδόν μικρότερο από αυτό του ημισφαιρίου.

Συνεπώς από το Λήμμα 4 συμπεραίνουμε ότι η συνολική επιφάνεια του στερεού σχήματος που είναι εγγεγραμμένο στη σφαίρα έχει εμβαδόν μικρότερο από το συνολικό εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας. ◘

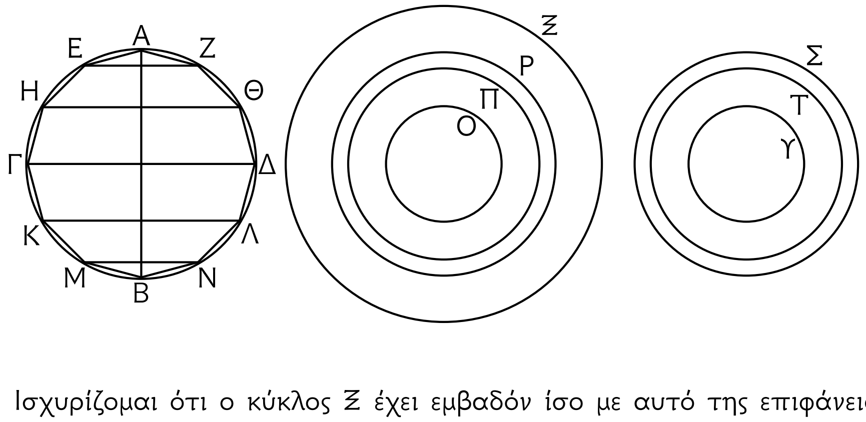
Πρόταση 24 (133) *Η επιφάνεια ενός στερεού σχήματος που έχει εγγραφεί σε μια σφαίρα έχει εμβαδόν ίσο με τον κύκλο με ακτίνα τέτοια ώστε το τετράγωνο με πλευρά την ακτίνα αυτή να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που η μια πλευρά του είναι ίση με την πλευρά του στερεού σχήματος ενώ η άλλη είναι ίση με το άθροισμα των ευθύγραμμων τμημάτων που συνδέουν τις κορυφές του πολυγώνου και είναι παράλληλα προς το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο συνεχόμενες πλευρές του πολυγώνου* (*στμ: δηλαδή την διαγώνιο που αντιστοιχεί σε δύο διαδοχικές πλευρές του πολυγώνου*).

Απόδειξη. Έστω ΑΒΓΔ ένας μέγιστος κύκλος της σφαίρας. Εγγράφουμε σε αυτόν ένα ισόπλευρο πολύγωνο το πλήθος των πλευρών του οποίου διαιρείται με το τέσσαρα.

Από το εγγεγραμμένο αυτό πολύγωνο θεωρούμε το αντίστοιχο στερεό εκ περιστροφής σχήμα που είναι εγγεγραμμένο στην σφαίρα όπως στην Πρόταση 23.

Στην συνέχεια φέρνουμε τις ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ και ΜΝ παράλληλες προς την ΕΖ η οποία ενώνει τις συνεχόμενες πλευρές ΕΑ και ΑΖ του πολυγώνου και λαμβάνουμε τον κύκλο Ξ που έχει ακτίνα τέτοια ώστε το τετράγωνο με πλευρά την ακτίνα αυτή να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΕ (που είναι η πλευρά του πολυγώνου) και $ΕΖ + ΗΘ + ΓΔ + ΚΛ + ΜΝ$, δηλαδή ισχύει

$$\rho_{Ξ}^2 = ΑΕ \cdot (ΕΖ + ΗΘ + ΓΔ + ΚΛ + ΜΝ)$$



Ισχυρίζομαι ότι ο κύκλος Ξ έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της επιφάνειας του στερεού σχήματος που έχει εγγραφεί στην σφαίρα.

Πράγματι, λαμβάνουμε τους κύκλους Ο, Π, Ρ, Σ, Τ και Υ για τις ακτίνες των οποίων, που είναι αντίστοιχα οι ρ_{O}, ρ_{Π}, ρ_{P}, ρ_{Σ}, ρ_{T} και ρ_{Υ}, ισχύουν

$$\rho_{\mathrm{O}}^2 = \mathrm{EA} \cdot \frac{\mathrm{EZ}}{2}, \quad \rho_{\Pi}^2 = \mathrm{EA} \cdot \frac{\mathrm{EZ} + \mathrm{H\Theta}}{2}, \quad \rho_{\mathrm{P}}^2 = \mathrm{EA} \cdot \frac{\mathrm{H\Theta} + \Gamma\Delta}{2}$$

$$\rho_{\Sigma}^2 = \mathrm{EA} \cdot \frac{\Gamma\Delta + \mathrm{K}\Lambda}{2}, \quad \rho_{\mathrm{T}}^2 = \mathrm{EA} \cdot \frac{\mathrm{K}\Lambda + \mathrm{MN}}{2}, \quad \rho_{\Upsilon}^2 = \mathrm{EA} \cdot \frac{\mathrm{MN}}{2}$$

Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 14, έχουμε ότι: $|\mathrm{O}| = \varepsilon_1$ και $|\Upsilon| = \varepsilon_2$ όπου ε_1 και ε_2 είναι τα εμβαδά των επιφανειών των κώνων ΑΕΖ και ΜΒΝ αντίστοιχα.

Επιπλέον από την Προταση 16 ισχύουν αντίστοιχα ότι: $|\Pi| = \varepsilon_3$, $|\mathrm{P}| = \varepsilon_4$, $|\Sigma| = \varepsilon_5$ και $|\mathrm{T}| = \varepsilon_6$ όπου ε_3 είναι το εμβαδόν της κωνικής επιφάνειας μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΕΖ, ΗΘ, ε_4 το εμβαδόν της κωνικής επιφάνειας μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΗΘ και ΓΔ, ε_5 το εμβαδόν της κωνικής επιφάνειας μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΔΓ και ΚΛ, ε_6 το εμβαδόν της κωνικής επιφάνειας μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΚΛ και ΜΝ.

Αθροίζοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$|\mathrm{O}| + |\Upsilon| + |\Pi| + |\mathrm{P}| + |\Sigma| + |\mathrm{T}| = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 = \varepsilon$$

όπου με ε συμβολίζουμε το εμβαδόν της επιφάνειας του εγγεγραμμένου σχήματος.

Επιπλέον ισχύει:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{O}}^2 + \rho_{\Pi}^2 + \rho_{\mathrm{P}}^2 + \rho_{\Sigma}^2 + \rho_{T}^2 + \rho_{\Upsilon}^2 &= \mathrm{EA} \cdot \frac{2 \cdot (\mathrm{EZ} + \mathrm{H\Theta} + \Gamma\Delta + \mathrm{K}\Lambda + \mathrm{MN})}{2} \\ &= \mathrm{EA} \cdot (\mathrm{EZ} + \mathrm{H\Theta} + \Gamma\Delta + \mathrm{K}\Lambda + \mathrm{MN}) \end{aligned}$$

Είναι όμως και $\rho_{\Xi}^2 = \mathrm{AE} \cdot (\mathrm{EZ} + \mathrm{H\Theta} + \Gamma\Delta + \mathrm{K}\Lambda + \mathrm{MN})$ οπότε από την παραπάνω προκύπτει:

$$\rho_{\Xi}^2 = \rho_{\mathrm{O}}^2 + \rho_{\Pi}^2 + \rho_{\mathrm{P}}^2 + \rho_{\Sigma}^2 + \rho_{T}^2 + \rho_{\Upsilon}^2$$

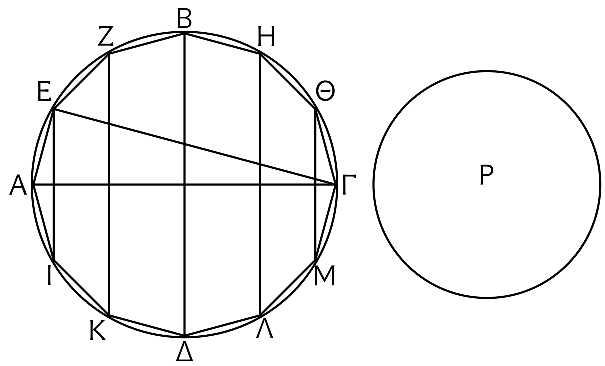
από όπου λαμβάνουμε ότι

$$|\Xi| = |\mathrm{O}| + |\Pi| + |\mathrm{P}| + |\Sigma| + |\mathrm{T}| + |\Upsilon|$$

δηλαδή ο κύκλος Ξ έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της επιφάνειας του σχήματος που έχει εγγραφεί στην σφαίρα. ◙

Πρόταση 25 (134) *Η επιφάνεια ενός στερεού σχήματος που είναι εγγεγραμμενο σε μια σφαίρα και περιέχεται σε κωνικές επιφάνειες έχει εμβαδόν μικρότερο από το τετραπλάσιο του εμβαδού του μέγιστου κύκλου της σφαίρας.*

Απόδειξη. Έστω ο μέγιστος κύκλος ΑΒΓΔ τη σφαίρας στον οποίο εγγράφουμε αρτιόπλευρο και ισόπλευρο πολύγωνο το πλήθος των πλευρών του οποίου διαιρείται με το τέσσαρα και θεωρούμε το αντίστοιχο με αυτό στερεό εκ περιστροφής σχήμα που περιέχεται στις κωνικές επιφάνειες που έχουν δημιουργηθεί, όπως στην Πρόταση 23.



Ισχυρίζομαι ότι το εμβαδόν της επιφάνειας του εγγραφέντος στην σφαίρα στερεού είναι μικρότερο από το τετραπλάσιο του εμβαδού του μέγιστου κύκλου της σφαίρας.

Φέρνουμε τις ΕΙ και ΘΜ που συνδέουν δύο συνεχόμενες πλευρές του πολυγώνου (τις ΙΑ και ΑΕ) και την συνέχεια τις ΖΚ, ΒΔ και ΗΛ που είναι παράλληλες σε αυτές.

Λαμβάνουμε τον κύκλο Ρ με ακτίνα τέτοια ώστε το τετράγωνο της να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που έχει πλευρές ίσες με ΕΑ και $\text{ΕΙ}+\text{ΖΚ}+\text{ΒΔ}+\text{ΗΛ}+\text{ΘΜ}$, δηλαδή

$$\rho_{\text{Ρ}}^2 = \text{ΕΑ} \cdot (\text{ΙΕ} + \text{ΖΚ} + \text{ΒΔ} + \text{ΗΛ} + \text{ΘΜ}).$$

Τότε από την Πρόταση 24 έχουμε ότι το εμβαδόν του κύκλου Ρ είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού σχήματος που έχει εγγραφεί στην σφαίρα.

Από την Πρόταση 21 έχουμε επίσης ότι

$$\frac{\text{ΕΙ} + \text{ΖΚ} + \text{ΒΔ} + \text{ΗΛ} + \text{ΘΜ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΕΑ}},$$

οπότε από την προηγούμενη έπεται ότι:

$$\rho_{\text{Ρ}}^2 = \text{ΕΑ} \cdot \frac{\text{ΓΕ} \cdot \text{ΑΓ}}{\text{ΕΑ}} = \text{ΓΕ} \cdot \text{ΑΓ}$$

(Στοιχεία, Βιβλίο 6, Πρόταση 16).

Αλλά το εμβαδόν του ορθογωνίου που έχει πλευρές ίσες με ΑΓ και ΓΕ είναι μικρότερο από αυτό του τετραγώνου πλευράς ΑΓ (Στοιχεία, Βιβλίο 3, Προταση 15), δηλαδή

$$\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΕ} < \text{ΑΓ}^2$$

και άρα από την παραπάνω παίρνουμε $\rho_P^2 < ΑΓ^2$ ή $\rho_P < ΑΓ$. Συνεπώς η διάμετρος δ_P του κύκλου Ρ είναι μικρότερη από το διπλάσιο της διαμέτρου $\delta_{ΑΒΓΔ}$ του ΑΒΓΔ, δηλαδή

$$2 \cdot \delta_{ΑΒΓΔ} > \delta_P,$$

και άρα

$$4 \cdot \delta_{ΑΒΓΔ}^2 > \delta_P^2$$

ή

$$4 \cdot ΑΓ^2 > \delta_P^2.$$

Όμως

$$\frac{4 \cdot ΑΓ^2}{\delta_P^2} = \frac{4 \cdot Ε}{|Ρ|},$$

όπου με Ε συμβολίζουμε το εμβαδόν του κύκλου ΑΒΓΔ (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 2).

Από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει ότι

$$4 \cdot Ε > |Ρ|,$$

δηλαδή το εμβαδόν του κύκλου Ρ είναι μικρότερο από αυτό τεσσάρων μέγιστων κύκλων της σφαίρας.

Έχει δειχθεί όμως ότι $|Ρ| = \varepsilon$ όπου ε είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού σχήματος που έχει εγγραφεί στην σφαίρα.

Έτσι, τελικά προκύπτει ότι

$$\varepsilon < 4 \cdot Ε,$$

που είναι η αποδεικτέα. ◙

Πρόταση 26 (134) *Ένα στερεό σχήμα που είναι εγγεγραμμένο σε μια σφαίρα και περιέχεται σε κωνικές επιφάνειες είναι ισοδύναμο με τον κώνο που έχει:*

α) βάση τον κύκλο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του στερεού σχήματος και

β) ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το κέντρο της σφαίρας προς μια πλευρά του πολυγώνου (στμ: που είναι εγγεγραμμένο σε έναν μέγιστο κύκλο της σφαίρας και από το οποίο κατασκευάζεται το στερεό σχήμα που είναι εγγεγραμμενο στη σφαίρα).

Απόδειξη. Έστω η σφαίρα που έχει μέγιστο κύκλο τον ΑΒΓΔ στον οποίο εγγράφουμε αρτιόπλευρο και ισόπλευρο πολύγωνο το πλήθος των πλευρών του οποίου διαιρείται με το τέσσαρα και θεωρούμε το αντίστοιχο στερεό σχήμα που είναι εγγεγραμμένο στην σφαίρα και περιέχεται στις κωνικές επιφάνειες που έχουν δημιουργηθεί (όπως και στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης).

Έστω ακόμα ο ορθογώνιος κώνος Ρ με βάση που έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της επιφάνειας του στερεού σχήματος που έχει εγγραφεί στην σφαίρα και ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το κέντρο της σφαίρας προς την μια πλευρά του πολυγώνου.

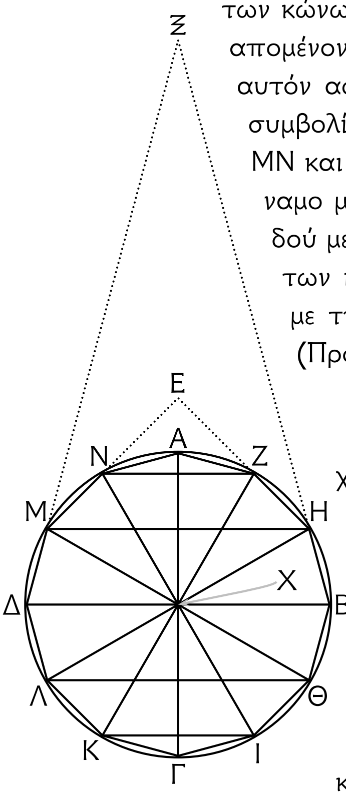
Πρέπει να δειχθεί ότι ο κώνος Ρ είναι ισοδύναμος με το στερεό σχήμα που έχει εγγραφεί στην σφαίρα.

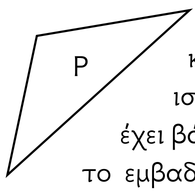
Με βάσεις τους κύκλους με διαμέτρους τις ΖΝ, ΗΜ, ΘΛ και ΙΚ γράφουμε τους κώνους που έχουν κορυφή το κέντρο της σφαίρας.

Έτσι κατασκευάζεται ο στερεός ρόμβος ΧΝΑΖ που αποτελείται από τον κώνο με βάση τον κύκλο διαμέτου ΖΝ και κορυφή το Α και από τον κώνο με βάση τον ίδιο κύκλο και κορυφή το Χ.

Ο στερεός αυτός ρόμβος είναι ισοδύναμος με τον κώνο που έχει βάση κύκλο ίσου εμβαδού με αυτό της επιφάνειας του κώνου ΝΑΖ και ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το Χ προς την ΑΖ (ή την ΑΝ) (Πρόταση 18).

Επίσης το τμήμα του ρόμβου μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΖΝ και ΗΜ το οποίο περιέχεται στις επιφάνειες των κώνων ΖΝΧ και ΗΜΧ (στμ: και το οποίο είναι το απομένον τμήμα του στερεού ρόμβου ΕΜΧΗ όταν από αυτόν αφαιρεθεί ο στερεός ρόμβος ΕΝΧΖ όπου με Ε συμβολίζουμε το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΜΝ και ΖΗ προς τα Ν και Ζ αντίστοιχα) είναι ισοδύναμο με τον κώνο που έχει βάση κύκλο ίσου εμβαδού με την κωνική επιφάνεια που βρίσκεται μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΜΗ και ΖΝ και ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το Χ προς την ΖΗ (Πρόταση 20).





Ομοίως και το τμήμα του κώνου που περιέχεται από την κωνική επιφάνεια μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΗΜ και ΒΔ, της επιφάνειας του κώνου ΜΗΧ και του κύκλου διαμέτρου ΒΔ είναι ισοδύναμο με τον κώνο που έχει βάση κύκλο ίσου εμβαδού με το εμβαδό της κωνικής επιφάνειας μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΗΜ και ΒΔ και ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το Χ προς την ΒΗ (Πρόταση 19) (στμ: αυτό το τμήμα κώνου προκύπτει όταν από τον κώνο ΞΔΒ αφαιρεθεί ο στερεός ρόμβος ΞΜΧΗ όπου με Ξ έχουμε συμβολίσει το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΜ και ΗΒ προς τα Μ και Η αντίστοιχα).

Ομοίως και στο άλλο ημισφαίριο ο στερεός ρόμβος ΧΓΚΙ και τα αποτέμνοντα από τους κώνους τμήματα θα είναι ισοδύναμα προς τους αντίστοιχους κώνους.

Τελικά, είναι φανερό ότι και ολόκληρο το στερεό σχήμα που είναι εγγεγραμμένο στην σφαίρα έχει όγκο ίσο με το άθροισμα των όγκων των αντίστοιχων κώνων.

Το άθροισμα όμως των όγκων των κώνων αυτών είναι ίσο με τον όγκο του κώνου Ρ καθώς είναι ισοϋψής με αυτούς και το εμβαδόν της βάσης του είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των βάσεων των κώνων.

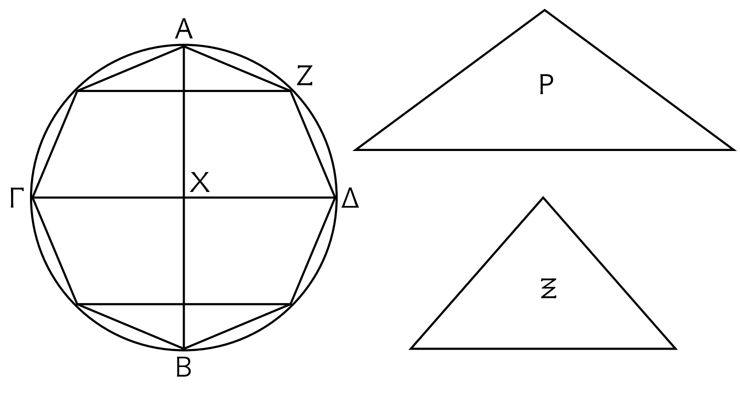
Συνεπώς, ο κώνος Ρ είναι ισοδύναμος με το εγγεγραμμένο στη σφαίρα στερεό σχήμα. ◘

Πρόταση 27 (135) *Ένα στερεό σχήμα που είναι εγγεγραμμένο σε μια σφαίρα και περιέχεται σε κωνικές επιφάνειες έχει όγκο μικρότερο από το τετραπλάσιο του όγκου του κώνου που έχει:*

α) βάση τον κύκλο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του μέγιστου κύκλου της σφαίρας και

β) ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον κώνο Ρ που είναι ισοδύναμος με το σχήμα που είναι εγγεγραμμένο στην σφαίρα και ο οποίος έχει βάση κύκλο ίσου εμβαδού με αυτό της επιφάνειας του στερεού σχήματος (που είναι εγγεγραμμένο στην σφαίρα) και του οποίου το ύψος είναι ίσο με την αγόμενη κάθετη από το κέντρο του κύκλου (στμ: του μέγιστου κύκλου) προς μια πλευρά του πολυγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον μέγιστο κύκλο της σφαίρας και το οποίο αντιστοιχεί στο στερεό σχήμα που είναι εγγεγραμμένο στην σφαίρα (Πρόταση 26).



Θεωρούμε ακόμα τον κώνο Ξ που έχει βάση τον κύκλο ίσου εμβαδού με τον μέγιστο κύκλο ΑΒΓΔ και ύψος ίσο με την ακτίνα του κύκλου αυτού.

Τώρα επειδή ο κώνος Ρ έχει βάση ίσου εμβαδού με την επιφάνεια του σχήματος που είναι εγγεγραμμένο στην σφαίρα και ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το Χ προς την ΑΖ ενώ έχει δείχτει και ότι η επιφάνεια του εγγεγραμμένου σχήματος έχει εμβαδόν μικρότερο από αυτό τεσσάρων μέγιστων κύκλων της σφαίρας (Πρόταση 25) θα είναι:

$$\mathrm{E_P} = \varepsilon < 4 \cdot \mathrm{E}$$

όπου με $\mathrm{E_P}$ συμβολίζουμε το εμβαδόν της βάσης του κώνου Ρ, με ε το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού σχήματος που είναι εγγεγραμμένο στην σφαίρα και με Ε το εμβαδόν του μέγιστου κύκλου ΑΒΓΔ της σφαίρας.

Προφανώς ισχύει και ότι $\upsilon_\mathrm{P} < \rho$ καθώς το ύψος του κώνου Ρ είναι μικρότερο από την ακτίνα της σφαίρας.

Τότε (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 10) έπεται ότι

$$\frac{1}{3} \cdot \mathrm{E_P} \cdot \upsilon_\mathrm{P} < 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \mathrm{E} \cdot \rho$$

ή

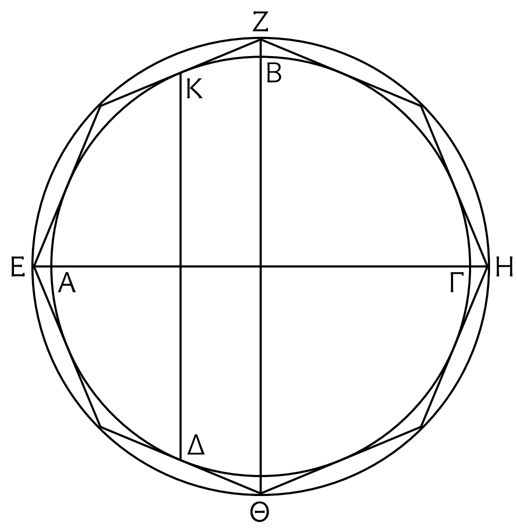
$$|\mathrm{P}| < 4 \cdot |\Xi|$$

Έτσι, καθώς το σχήμα που έχει εγγραφεί στην σφαίρα είναι ισοδύναμο με τον κώνο Ρ από την τελευταία προκύπτει η αποδεικτέα. ◘

Πρόταση 28 (136) *Αν περί έναν μέγιστο κύκλο μιας σφαίρας περιγραφεί ισόπλευρο και ισογώνιο πολύγωνο του οποίου το πλήθος των πλευρών διαιρείται με το τέσσαρα και ο κύκλος αυτός αφού περιστραφεί περί την μια διάμετρό του που παραμένει σταθερή επανέλθει στην αρχική του θέση τότε η επιφάνεια του σχήματος που περιγράφηκε περι την σφαίρα (στμ: στερεό σχήμα εκ περιστροφής) έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό της επιφάνειας της σφαίρας.*

Απόδειξη. Έστω ο μέγιστος κύκλος ΑΒΓΔ της σφαίρας περί τον οποίο περιγράφουμε πολύγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο με πλήθος πλευρών που διαιρείται με το τέσσαρα.

Στην συνέχεια περιγράφουμε περί το πολύγωνο αυτό τον κύκλο ΕΖΗΘ που είναι ομόκεντρος με τον ΑΒΓΔ και διατηρώντας σταθερή την ΕΗ περιστρέφουμε περί αυτήν το επίπεδο ΕΖΗΘ επί του οποίου βρίσκονται ο κύκλος ΕΖΗΘ και το πολύγωνο.



Τότε είναι φανερό ότι η περιφέρεια του κύκλου ΑΒΓΔ θα γράψει την επιφάνεια της αρχικής σφαίρας ενώ η περιφέρεια του κύκλου ΕΖΗΘ γράφει την επιφάνεια μιας άλλης σφαίρας που περιέχει την προηγούμενη και έχει το ίδιο κέντρο με αυτήν.

Επίσης τα σημεία επαφών του πολυγώνου και του μικρότερου κύκλου (στμ: του ΑΒΓΔ) γράφουν κύκλους που είναι κάθετοι επί τον κύκλο ΑΒΓΔ στην μικρότερη σφαίρα.

Αντίστοιχα οι κορυφές του πολυγώνου (πλην των Ε και Η) γράφουν περιφέρειες κύκλων στην επιφάνεια της μεγαλύτερης σφαίρας που είναι κάθετες επί τον κύκλο ΕΖΗΘ.

Τέλος, οι πλευρές του πολυγώνου γράφουν κωνικές επιφάνειες όπως και στις αποδείξεις των προηγούμενων προτάσεων.

Το σχήμα που προκύπτει από την περιστροφή και είναι περιεχόμενο στις κωνικές επιφάνειες θα είναι περιγεγραμμένο περί την μικρότερη σφαίρα και εγγεγραμμένο στην μεγαλύτερη.

Το ότι η επιφάνεια του περιγεγραμμένου περί την σφαίρα σχήματος έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό της επιφάνειας της σφαίρας αποδεικνύεται ως εξής: έστω ΚΔ είναι η διάμετρος ενός από τους κύκλους που γράφτηκαν στην μικρότερη σφαίρα με Κ και Δ να είναι τα σημεία επαφής του πολυγώνου με τον κύκλο ΑΒΓΔ.

Αν τώρα η σφαίρα διαιρεθεί από το επίπεδο που διέρχεται από το ΚΔ και είναι κάθετο προς τον κύκλο ΑΒΓΔ τότε διαιρείται και η επιφάνεια του στερεού σχήματος που είναι περιγεγραμμένο περί την σφαίρα αυτή.

Είναι επίσης φανερό ότι η επιφάνεια του τμήματος της σφαίρας και η επιφάνεια του στερεού σχήματος που είναι περιγεγραμμένο περί αυτήν έχουν κοινό σύνορο στο ίδιο επίπεδο την περιφέρεια του κύκλου διαμέτρου ΚΔ που είναι κάθετος προς τον κύκλο ΑΒΓΔ.

Οι επιφάνειες αυτές όμως είναι κοίλες προς τα ίδια μέρη και η μια περιλαμβάνεται από την άλλη και την επίπεδη επιφάνεια με το ίδιο σύνορο και άρα (Λαμβανόμενα 4) η επιφάνεια του τμήματος της σφαίρας έχει μικρότερο εμβαδόν από αυτό της επιφάνειας του περιγεγραμμένου σχήματος περί αυτήν.

Ομοίως και το υπόλοιπο τμήμα της σφαίρας έχει εμβαδόν μικρότερο από αυτό της επιφάνειας του (αντίστοιχου) περιγεγραμμένου περί αυτήν σχήματος.

Συνεπώς, και ολόκληρη η επιφάνεια της σφαίρας έχει εμβαδόν μικρότερο από αυτό της επιφάνειας του περιγεγραμμένου περί αυτήν σχήματος. ◘

Πρόταση 29 (137) *Αν ένα στερεό σχήμα είναι περιγεγραμμένο περί μια σφαίρα (στμ: όπως αυτό της προηγούμενης πρότασης) τότε το εμβαδόν της επιφάνειάς του είναι ίσο με αυτό του κύκλου με ακτίνα τέτοια ώστε το τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με αυτήν να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που η μια πλευρά του είναι ίση με την πλευρά του πολυγώνου (στμ: που είναι περιγεγραμμένο περί τον μέγιστο κύκλο της σφαίρας και από την περιστροφή του οποίου προκύπτει το στερεό σχήμα που είναι περιγεγραμμένο περί την σφαίρα) ενώ η άλλη πλευρά του είναι ίση με το άθροισμα όλων των διαγωνίων του πολυγώνου που είναι παράλληλες προς την διαγώνιο που συνδέει δύο συνεχόμενες πλευρές του πολυγώνου.*

Απόδειξη. Το περιγεγραμμένο περί την σφαίρα στερεό σχήμα είναι εγγεγραμμένο σε μια άλλη μεγαλύτερη σφαίρα (Πρόταση 28).

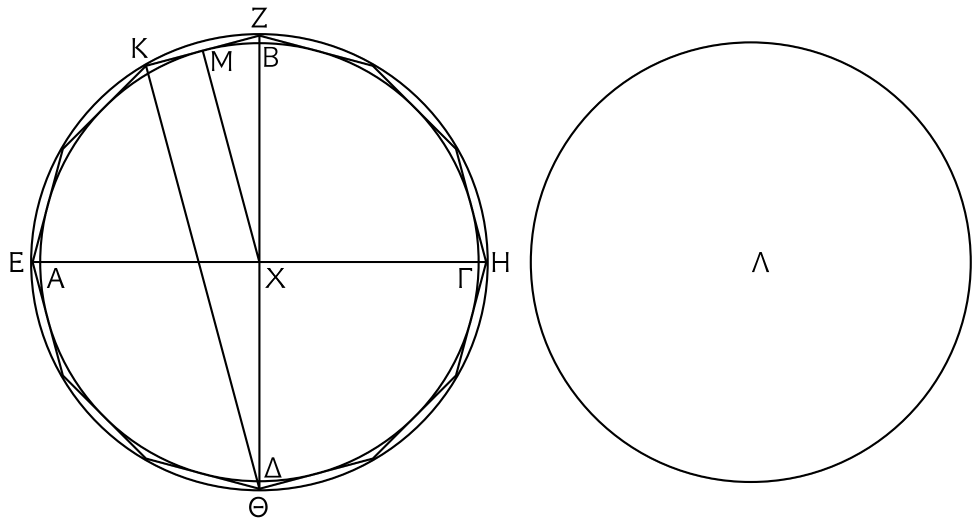
Επίσης, έχει δειχθεί (Πρόταση 24) ότι η επιφάνεια του στερεού σχήματος που είναι εγγεγραμμένο σε μια σφαίρα και περιέχεται σε κωνικές επιφάνειες έχει εμβαδόν ίσο με αυτό του κύκλου με ακτίνα τέτοια ώστε το τετράγωνο με πλευρά ίση με την ακτίνα αυτή είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που η μια πλευρά του είναι ίση με το εμβαδόν του πολυγώνου (στμ: που είναι εγγεγραμμένο στον μέγιστο κύκλο της σφαίρας και από την περιστροφή του οποίου έχει προκύψει το στερεό σχήμα) ενώ η άλλη πλευρά του είναι ίση με το άθροισμα όλων των διαγωνίων του πλυγώνου που είναι παράλληλες προς την διαγώνιο του που συνδέει δύο συνεχόμενες πλευρές του.

Είναι λοιπόν φανερό ότι η πρόταση έχει αποδειχθεί. ◘

Πρόταση 30 (137) *Η επιφάνεια ενός σχήματος που είναι περιγεγραμμένο περί μια σφαίρα (στμ: όπως στις προηγούμενες προτάσεις) έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό τεσσάρων μέγιστων κύκλων της σφαίρας.*

Απόδειξη. Έστω ΑΒΓΔ ο μέγιστος κύκλος της σφαίρας περί τον οποίο περιγράφουμε ισόπλευρο και ισογώνιο πολύγωνο με πλήθος πλευρών που να διαιρείται με το τέσσαρα.

Στην συνέχεια περιγράφουμε περί το πολύγωνο αυτό τον κύκλο ΕΖΗΘ που είναι ομόκεντρος του ΑΒΓΔ και διατηρώντας σταθερή την ΕΗ περιστρέφουμε το επίπεδο ΕΖΗΘ επί του οποίου βρίσκεται ο κύκλος και το πολύγωνο.



Τότε προκύπτει ένα γεωμετρικό στερεό που περιέχεται σε κωνικές επιφάνειες και είναι περιγεγραμμένο περί την μικρότερη σφαίρα και εγγεγραμμένο σε μια μεγαλύτερη (στμ: όπως στην απόδειξη της Πρότασης 28).

Θεωρούμε ακόμα τον κύκλο Λ που έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της επιφάνειας του στερεού σχήματος που είναι περιγεγραμμένο περί την μικρότερη σφαίρα.

Τότε στον κύκλο ΕΖΗΘ έχει εγγραφεί πολύγωνο ισόπλευρο και αρτιογώνιο οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 21, ο λόγος του αθροίσματος όλων των διαγωνίων του που είναι παράλληλες προς την ΖΘ είναι ίσος με τον λόγο ΘΚ/ΚΖ.

Τότε όμως το ορθογώνιο που η μια πλευρά του είναι ίση με την πλευρά του πολυγώνου και η άλλη ίση με το άθροισμα των διαγωνίων του πολυγώνου που είναι παράλληλες στην ΖΘ είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΖΘ και ΘΚ (Στοιχεία, Βιλίο 6, Πρόταση 16).

Έτσι λοιπόν, και το τετράγωνο που έχει την πλευρά του ίση με την ακτίνα του κύκλου Λ είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΖΘ και ΘΚ (Πρόταση 29).

Συμβολίζοντας με ρ_Λ είναι η ακτίνα του κύκλου Λ, ισχύει

$$\rho_\Lambda^2 = \mathrm{Z\Theta} \cdot \mathrm{\Theta K}$$

και άρα

$$\rho_\Lambda > \mathrm{\Theta K}$$

Όμως η ΘΚ είναι ίση με την διάμετρο του ΑΒΓΔ διότι είναι διπλάσια από την ΧΜ που είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου ΑΒΓΔ.

Είναι λοιπόν φανερό ότι το εμβαδόν του κύκλου Λ είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας του περιγεγραμμένου περί την μικρότερη σφαίρα σχήματος και άρα θα είναι και μεγαλύτερο από το εμβαδών τεσσάρων μέγιστων κύκλων της σφαίρας αυτής (Πρόταση 25). ◘

Πρόταση 31 (138) *Το στερεό σχήμα που είναι περιγεγραμμένο περί μια σφαίρα (στμ: και περιέχεται σε κωνικές επιφάνειες όπως κατασκευάστηκε στην απόδειξη της Πρότασης 28) είναι ισοδύναμο με τον κώνο που έχει βάση κύκλο με εμβαδόν ίσο με αυτό της επιφάνειας του σχήματος και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας περί την οποία αυτό είναι περιγεγραμμένο.*

Απόδειξη. Πράγματι, το περιγεγραμμένο περί την σφαίρα στερεό σχήμα θα είναι και εγγεγραμμένο σε μια μεγαλύτερη σφαίρα.

Έχει επίσης αποδειχθεί (Πρόταση 26) ότι το στερεό σχήμα που είναι εγγεγραμμένο σε μια σφαίρα και περιέχεται σε κωνικές επιφάνειες είναι ισοδύναμο με τον κώνο που έχει βάση ίσου εμβαδού με αυτό της επιφάνειας του και ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το κέντρο της σφαίρας προς την μια πλευρά του πολυγώνου (στμ: που είναι εγγεγραμμένο στον μέγιστο κύκλο της σφαίρας και αντιστοιχεί στο στερεό σχήμα που είναι εγγεγραμμένο σε αυτή).

Καθώς όμως η κάθετη αυτή είναι ίση με την ακτίνα της μικρότερης σφαίρας, η πρόταση έχει αποδειχθεί. ◘

Πόρισμα 3 (138) *Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι το σχήμα που είναι περιγεγραμμένο περί τη μικρότερη σφαίρα έχει όγκο μεγαλύτερο από το τετραπλάσιο του όγκου του κώνου που έχει βάση ίση με τον μέγιστο κύκλο της σφαίρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της.*

Πράγματι το στερεό αυτό σχήμα είναι ισοδύναμο με τον κώνο με βάση τον κύκλο ίσου εμβαδού με αυτό της επιφάνειας του σχήματος και ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το κέντρο της σφαίρας προς την πλευρά του αντίστοιχου πολυγώνου η οποία είναι ίση με την ακτίνα της μικρότερης σφαίρας (Πρόταση 31).

Όμως η επιφάνεια του στερεού αυτού σχήματος έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το τετραπλάσιο του εμβαδού του μέγιστου κύκλου της σφαίρας (Πρόταση 30).

Έτσι, αν $|\mathrm{A}|$ *είναι ο όγκος του σχήματος,* $|\mathrm{B}|$ *ο όγκος του κώνου,* ε *το εμβαδόν της επιφάνειας του σχήματος (που είναι ίσο και με το εμβαδόν της βάσης του κώνου) και* $\mathrm{E_M}$ *το εμβαδόν του μέγιστου κύκλου της σφαίρας, έχουμε*

$$|\mathrm{A}| = |\mathrm{B}| = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon \cdot \upsilon > \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \mathrm{E_M} \cdot \upsilon = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \mathrm{E_M} \cdot \upsilon.$$

Συνεπώς, το στερεό σχήμα που είναι περιγεγραμμένο περί την μικρότερη σφαίρα έχει όγκο μεγαλύτερο από το τετραπλάσιο του όγκου ενός κώνου που έχει βάση ίση με τον μέγιστο κύκλο της σφαίρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της.

Πρόταση 32 (138) *Έστω μια σφαίρα, ένα εγγεγραμμένο στερεό σχήμα σε αυτήν και ένα άλλο στερεό σχήμα περιγεγραμμένο περί αυτήν (στμ: όπως κατασκευάστηκαν στις αποδείξεις των προηγούμενων προτάσεων από την περιστροφή ομοίων πολυγώνων). Τότε ο λόγος του εμβαδού της επιφάνειας του περιγεγραμμένου σχήματος προς το εμβαδόν της επιφάνειας του εγγεγραμμένου είναι ίσος με τον λόγο του τετραγώνου της πλευράς του περιγεγραμμένου περί τον μέγιστο κύκλο της σφαίρας πολυγώνου προς το τετράγωνο της πλευράς του εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο πολυγώνου.*

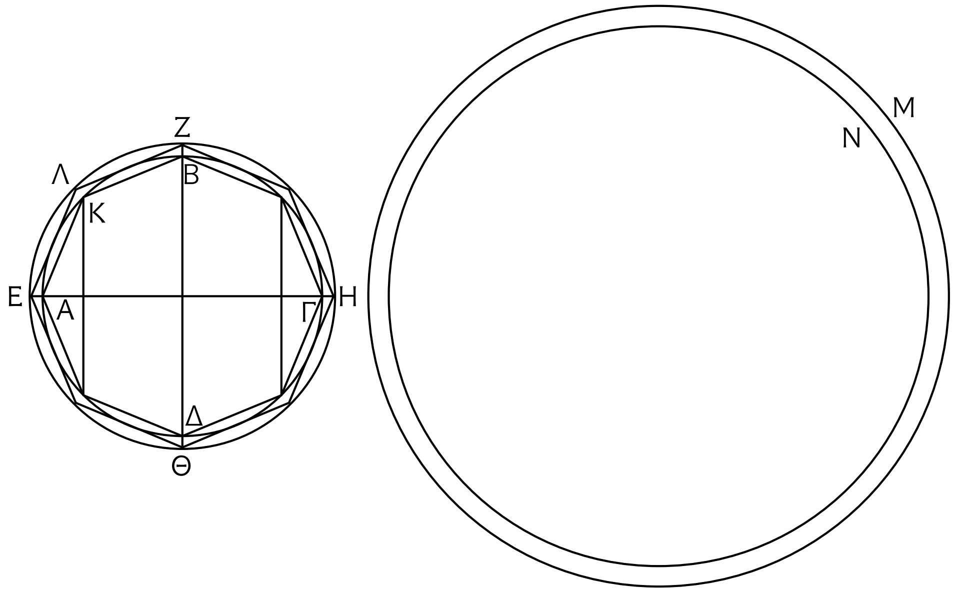
Επιπλέον, ο λόγος του όγκου του περιγεγραμμένου σχήματος προς τον όγκο του εγγεγραμμένου είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των πλευρών των δύο παραπάνω πολυγώνων (στμ: του περιγεγραμμένου περί τον μέγιστο κύκλο της σφαίρας και του εγγεγραμμένου σε αυτόν).

Απόδειξη. Έστω ΑΒΓΔ μέγιστος κύκλος της σφαίρας στον οποίο εγγράφουμε ισόπλευρο πολύγωνο με πλήθος πλευρών που διαιρείται με το τέσσαρα.

Περιγράφουμε περί τον κύκλο ΑΒΓΔ ένα άλλο πολύγωνο, όμοιο με το εγγεγραμμένο. Έτσι οι πλευρές του περιγεγραμμένου πολυγώνου εφάπτονται στον κύκλο ΑΒΓΔ στα μέσα των τόξων που αποτέμνουν οι πλευρές του εγγεγραμμένου πολυγώνου ενώ οι διάμετροι ΕΗ και ΖΘ του κύκλου ΕΖΗΘ (ο οποίος περιέχει το περιγεγραμμένο περί τον κύκλο ΑΒΓΔ πολύγωνο) είναι κάθετες μεταξύ τους και ομοίως τοποθετημένες με τις διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ του κύκλου ΑΒΓΔ.

Θεωρούμε ακόμα τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις απέναντι πλευρές του περιγεγραμμένου περί τον κύκλο ΑΒΓΔ πολυγώνου οι οποίες είναι παράλληλες με την ΖΒΔΘ.

Διατηρώντας σταθερή την διάμετρο ΕΗ περιστρέφουμε τα πολύγωνα περί αυτήν κατά μία περιφέρεια κύκλου. Από την περιστροφή αυτή δημιουργούνται ένα σχήμα που είναι εγγεγραμμένο στην σφαίρα και ένα άλλο που είναι περιγεγραμμένο περί αυτήν.



Αν ε_1 και ε_2 είναι τα εμβαδά των επιφανειών του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου σχήματος αντίστοιχα και o_1 και o_2 οι όγκοι του περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου σχήματος αντίστοιχα πρέπει να δείξουμε ότι

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\mathrm{Ε Λ}^2}{\mathrm{Α Κ}^2} \quad \text{και} \quad \frac{o_1}{o_2} = \frac{\mathrm{Ε Λ}^3}{\mathrm{Α Κ}^3}.$$

Έστω Μ ο κύκλος με εμβαδόν ίσο με ε_1 και Ν ο κύκλος με εμβαδόν ίσο με ε_2.

Τότε το τετράγωνο που η πλευρά του είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου Μ είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που η μια πλευρά του είναι ίση με την ΕΛ και η άλλη είναι ίση με το άθροισμα, έστω δ_1, των διαγωνίων του περιγεγραμμένου πολυγώνου που είναι παράλληλες προς την διαγώνιό του που συνδέει δύο συνεχόμενες πλευρές του (Πρόταση 29).

Επίσης, το τετράγωνο που έχει την πλευρά του ίση με την ακτίνα του κύκλου Ν είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που η μια πλευρά του είναι ίση με την ΑΚ ενώ η άλλη είναι ίση με το άθροισμα, έστω δ_2, των διαγωνίων του εγγεγραμμένου πολυγώνου που είναι παράλληλες με την διαγώνιο του που συνδέει δύο συνεχόμενες πλευρές του.

Καθώς τα περιγεγραμμένο και εγγεγραμμένο πολύγωνα είναι όμοια έπεται ότι και τα ορθογώνια που περιέχονται στις παραπάνω πλευρές (δηλαδή αυτά που έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα ίσες με ΕΛ και δ_1 το πρώτο και με ΑΚ και δ_2 το δεύτερο) είναι όμοια (στμ: είναι ισογώνια και έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες) ώστε ο λόγος των εμβαδών των δύο ορθογωνίων να είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των πλευρών των δύο πολυγώνων (Στοιχεία, Βιβλίο 6, Πρόταση 20). Δηλαδή,

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{\mathrm{E\Lambda}^2}{\mathrm{AK}^2},$$

όπου με $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ έχουμε συμβολίσει τα εμβαδά των δυο ορθογωνίων.

Επιπλέον, ο λόγος των εμβαδών δύο ορθογωνίων είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των ακτίνων των κύκλων Μ και Ν αντίστοιχα και άρα και λόγος των τετραγώνων των διαμέτρων των κύκλων Μ και Ν είναι ίσος με τον λόγο του τετραγώνου της πλευράς του περιγεγραμμένου πολυγώνου προς το τετράγωνο της πλευράς του εγγεγραμμένου.

Πράγματι,

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{\rho_{\mathrm{M}}^2}{\rho_{\mathrm{N}}^2} = \frac{\delta_{\mathrm{M}}^2}{\delta_{\mathrm{N}}^2},$$

όπου με δ_{M} και δ_{N} συμβολίζουμε τις διαμέτρους των κύκλων Μ και Ν αντίστοιχα έχουμε.

Έτσι,

$$\frac{\delta_{\mathrm{M}}^2}{\delta_{\mathrm{N}}^2} = \frac{\mathrm{E\Lambda}^2}{\mathrm{AK}^2} \tag{6}$$

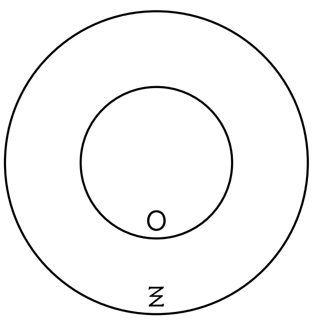
Όμως, ο λόγος των εμβαδών των δύο κύκλων είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 2) και καθώς $|\mathrm{M}| = \varepsilon_1$ και $|\mathrm{N}| = \varepsilon_2$ έχουμε ότι

$$\frac{|\mathrm{M}|}{|\mathrm{N}|} = \frac{\delta_{\mathrm{M}}^2}{\delta_{\mathrm{N}}^2} \quad \text{ή} \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\delta_{\mathrm{M}}^2}{\delta_{\mathrm{N}}^2},$$

οπότε λόγω της (6) παίρνουμε ότι

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\mathrm{E\Lambda}^2}{\mathrm{AK}^2}$$

που είναι η αποδεικτέα.



Στην συνέχεια λαμβάνουμε τους κώνους Ο και Ξ με βάσεις τους κύκλους Ο′ και Ξ′ αντίστοιχα ώστε να ισχύουν $|\Xi'| = |\mathrm{M}|$ και $|\mathrm{O}'| = |\mathrm{N}|$ ενώ για τα ύψη τους ισχύει ότι το ύψος του κώνου Ξ είναι ίσο με την ακτίνα της σφαίρας ενώ το ύψος του κώνου Ο είναι ίσο με την αγόμενη κάθετη από το κέντρο της σφαίρας προς την ΑΚ.

Τότε, από την Πρόταση 31 έπεται ότι ο κώνος Ξ είναι ισοδύναμος με το στερεό σχήμα που είναι περιγεγραμμένο περί την σφαίρα ενώ από την Προταση 26 έπεται αντίστοιχα ότι ο κώνος Ο είναι ισοδύναμος με το στερεό σχήμα που είναι εγγεγραμμένο στην σφαίρα.

Καθώς όμως και τα αντίστοιχα με τα στερεά σχήματα πολύγωνα είναι όμοια, έπεται ότι ο λόγος ΕΛ/ΑΚ είναι ίσος με τον λόγο της ακτίνας της σφαίρας προς την αγόμενη κάθετη από το κέντρο της σφαίρας προς την ΑΚ και άρα ισχύει

$$\frac{\mathrm{E\Lambda}}{\mathrm{AK}} = \frac{\upsilon_{\Xi}}{\upsilon_{\mathrm{O}}}$$

όπου με υ_{Ξ} και υ_{O} συμβολίζουμε τα ύψη των κώνων Ξ και Ο αντίστοιχα.

Έτσι, λόγω της (6) παίρνουμε

$$\frac{\delta_{\mathrm{M}}}{\delta_{\mathrm{N}}} = \frac{\upsilon_{\Xi}}{\upsilon_{\mathrm{O}}}.$$

Δηλαδή ο λόγος των διαμέτρων των βάσεων των κώνων Ξ και Ο είναι ίσος με τον λόγο των υψών τους.

Συνεπώς, οι κώνοι αυτοί είναι όμοιοι (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 12) και ισχύει

$$\frac{|\Xi|}{|\mathrm{O}|} = \frac{\delta_{\mathrm{M}}^3}{\delta_{\mathrm{O}}^3},$$

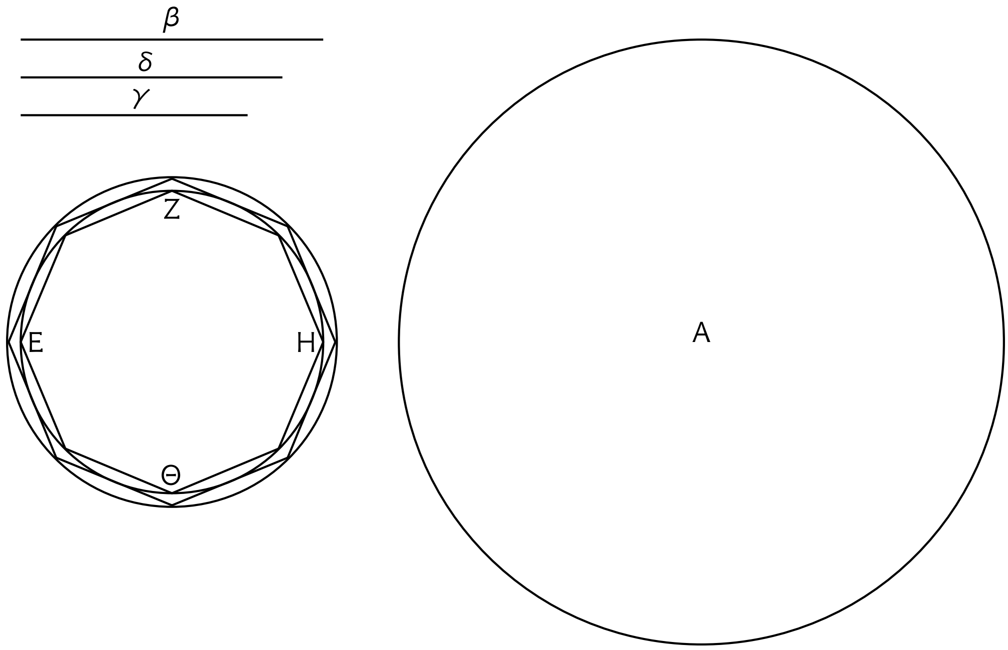
οπότε είναι φανερό και ότι ο λόγος του όγκου του περιγεγραμμένου περί την σφαίρα στερεού σχήματος προς τον όγκο του εγγεγραμμένου στην σφαίρα στερεού σχήματος είναι ίσος με $\mathrm{E\Lambda}^3/\mathrm{AK}^3$ καθώς

$$\frac{o_1}{o_2} = \frac{|\Xi|}{|\mathrm{O}|} = \frac{\delta_{\mathrm{M}}^3}{\delta_{\mathrm{O}}^3} = \frac{\upsilon_{\Xi}^3}{\upsilon_{\mathrm{O}}^3} = \frac{\mathrm{E\Lambda}^3}{\mathrm{AK}^3}.$$

◘

Πρόταση 33 (140) *Η επιφάνεια μιας σφαίρας έχει εμβαδόν ίσο το τετραπλάσιο του εμβαδού ενός μέγιστου κύκλου της.*

(Στμ: Το εμβαδόν της επιφάνειας μια σφαίρας δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E} = 4 \cdot \pi \cdot \rho^2$ όπου ρ η ακτίνα της σφαίρας).



Απόδειξη. Έστω η σφαίρα και ο κύκλος Α που έχει εμβαδόν ίσο με το τετραπλάσιο του εμβαδού του μέγιστου κύκλου της σφαίρας.

Ισχυρίζομαι ότι το εμβαδόν ε της επιφάνειας της σφαίρας είναι ίσο με $|\mathrm{A}|$.

Αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει $\varepsilon = |\mathrm{A}|$ τότε θα είναι είτε $\varepsilon > |\mathrm{A}|$ είτε $\varepsilon < |\mathrm{A}|$.

1η Περίπτωση: Έστω $\varepsilon > |\mathrm{A}|$.

Τότε υπάρχουν δύο άνισα μεγέθη: το εμβαδόν ε της επιφάνειας της σφαίρας και το εμβαδόν $|\mathrm{A}|$ του κύκλου Α και άρα είναι δυνατόν να πάρουμε δύο άνισα ευθύγραμμα τμήματα τέτοια ώστε ο λόγος του μεγαλύτερου προς το μικρότερο να είναι μικρότερος από τον λόγο $\varepsilon/|\mathrm{A}|$ (Πρόταση 2).

Δηλαδή αν β και γ είναι τα δύο τμήματα με $\beta > \gamma$ θα ισχύει

$$\frac{\beta}{\gamma} < \frac{\varepsilon}{|\mathrm{A}|}.$$

Έστω πάλι δ η μέση ανάλογος των β και γ και έστω ακόμα ότι η σφαίρα τέμνεται κατά τον κύκλο ΕΖΗΘ που βρίσκεται σε ένα επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της.

Θεωρούμε ακόμα ένα εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτό πολύγωνο και ένα άλλο περιγεγραμμένο περί αυτόν τέτοια ώστε να είναι όμοια και ο λόγος της πλευράς του περιγεγραμμένου πολυγώνου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου πολυγώνου να είναι μικρότερος από τον λόγο β/δ (Πρόταση 3).

Τότε όμως και ο λόγος των τετραγώνων των πλευρών των δύο πολυγώνων θα είναι μικρότερος από τον λόγο β^2/δ^2.

Αλλά, (Στοιχεία, Βιβλίο 5, Ορισμός 9),

$$\frac{\beta^2}{\delta^2} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Επιπλέον αν ε_1 είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του περιγεγραμμένου περί την σφαίρα στερεού (το οποίο αντιστοιχεί στο εγγεγραμμένο πολύγωνο) και ε_2 το εμβαδόν της επιφάνειας του εγγεγραμμένου στην σφαίρα στερεού σχήματος (το οποίο αντιστοιχεί στο εγγεγραμμένο πολύγωνο) τότε ο λόγος $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ θα είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των πλευρών των δύο πολυγώνων (Πρόταση 32).

Άρα θα είναι

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{\beta^2}{\delta^2} = \frac{\beta}{\gamma} < \frac{\varepsilon}{|\mathsf{A}|},$$

που όμως είναι αδύνατον να ισχύει διότι $\varepsilon_1 > \varepsilon$ και $\varepsilon_2 < |\mathsf{A}|$ καθώς έχει αποδειχτεί ότι

$$\varepsilon_2 < 4 \cdot \mathsf{E}_\mathsf{M}$$

όπου E_M το εμβαδόν του μέγιστου κύκλου της σφαίρας (Πρόταση 25) ενώ

$$4 \cdot \mathsf{E}_\mathsf{M} = |\mathsf{A}|.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν είναι δυνατόν να είναι $\varepsilon > |\mathsf{A}|$.

2^η Περίπτωση: Έστω $\varepsilon < |\mathsf{A}|$.

Εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη περίπτωση λαμβάνοντας τα ευθύγραμμα τμήματα β και γ με $\beta/\gamma < |\mathsf{A}|/\varepsilon$ και την μέση ανάλογο δ των β και γ για την οποία ισχύει

$$\frac{\beta}{\delta} = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Στην συνέχεια εγγράφουμε στον μέγιστο κύκλο της σφαίρας ένα πολύγωνο και περιγράφουμε περί αυτόν ένα άλλο ώστε ο λόγος της πλευράς του περιγεγραμμένου πολυγώνου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου πολυγώνου να είναι μικρότερος από τον λόγο β/δ (Πρόταση 3).

Αν τώρα ε_1 είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του περιγεγραμμένου περί την σφαίρα στερεού (το οποίο αντιστοιχεί στο περιγεγραμμένο πολύγωνο) και ε_2 το εμβαδόν της επιφάνειας του εγγεγραμμένου στην σφαίρα στερεού σχήματος (το οποίο αντιστοιχεί στο εγγεγραμμένο πολύγωνο) τότε όπως και στην προηγούμενη περίπτωση θα ισχύει ότι:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{\beta}{\gamma}$$

από όπου, καθώς

$$\frac{\beta}{\gamma} < \frac{|\mathrm{A}|}{\varepsilon},$$

παίρνουμε

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{|\mathrm{A}|}{\varepsilon}.$$

Η τελευταία ανισότητα όμως δεν είναι δυνατόν να ισχύει καθώς $\varepsilon_1 > |\mathrm{A}|$ και $\varepsilon_2 < \varepsilon$, οπότε συμπεραίνουμε ότι η επιφάνεια της σφαίρας δεν μπορεί να έχει εμβαδόν μικρότερο από το εμβαδόν του κύκλου Α.

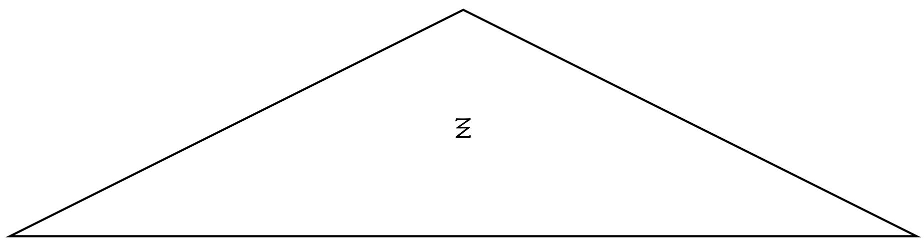
Συνεπώς, καθώς δεν μπορούν να ισχύουν οι $\varepsilon > |\mathrm{A}|$ και $\varepsilon < |\mathrm{A}|$ έπεται τελικά ότι $\varepsilon = |\mathrm{A}|$ που είναι η αποδεικτέα. ◙

Πρόταση 34 (141) *Κάθε σφαίρα έχει όγκο ίσο με το τετραπλάσιο του όγκου του κώνου που έχει βάση κύκλο ίσου εμβαδού με αυτό του μέγιστου κύκλου της σφαίρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της.*

Στμ: Αν ρ είναι η ακτίνα του μέγιστου κύκλου της σφαίρας τότε ο όγκος του κώνου με βάση κύκλο ακτίνας ίσης με ρ και ύψος ίσο με ρ είναι ίσος με $(1/3)\pi\rho^3$. Έτσι, η πρόταση αυτή δίνει τον τύπο του όγκου μιας σφαίρας ακτίνας ρ ως $(4/3)\pi\rho^3$.

Απόδειξη. Έστω σφαίρα και ο μέγιστος κύκλος της ΑΒΓΔ.

Έστω ακόμα Ξ ο κώνος με βάση εμβαδού τετραπλασίου του εμβαδού του ΑΒΓΔ και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας.



Υποθέτουμε ότι ο όγκος της σφαίρας, έστω Ο, δεν είναι ίσος με τον όγκο του κώνου Ξ.

Τότε θα ισχύει είτε $\mathrm{O} > |\Xi|$ είτε $\mathrm{O} < |\Xi|$.

1η Περίπτωση: Έστω $O > |\Xi|$.

Τότε υπάρχουν δύο άνισα μεγέθη: ο όγκος της σφαίρας και ο όγκος του κώνου οπότε μπορούμε να πάρουμε δύο άνισα ευθύγραμμα τμήματα κ και η με $\kappa > \eta$ ώστε ο λόγος του μεγαλύτερου προς το μικρότερο να είναι μικρότερος από τον λόγο $O/|\Xi|$ (Πρόταση 2).

Επιπλέον λαμβάνουμε και τα ευθύγραμμα τμήματα ι και θ ώστε να ισχύει

$$\kappa - \iota = \iota - \theta = \theta - \eta$$

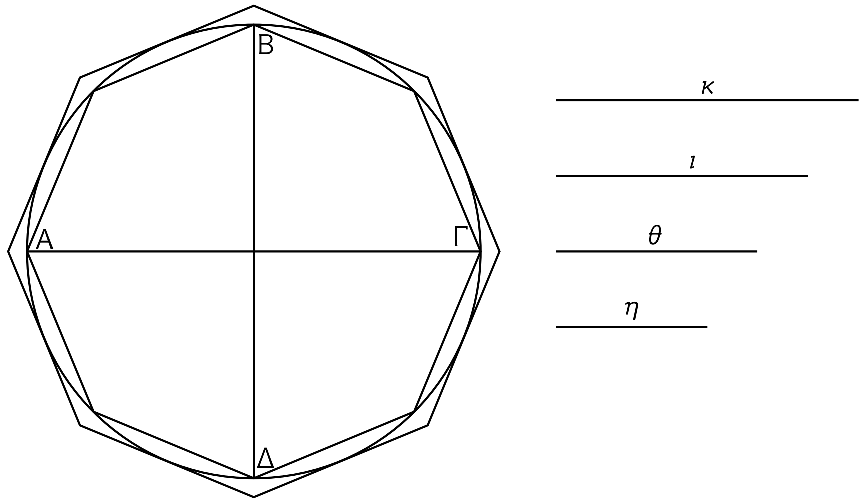
οπότε θα είναι

$$\iota = \frac{1}{3} \cdot (2\kappa + \eta) \quad \text{και} \quad \theta = \frac{1}{3} \cdot (2\eta + \kappa).$$

Στην συνέχεια θεωρούμε το πολύγωνο που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο ΑΒΓΔ με πλήθος πλευρών που να διαιρείται με το τέσσαρα και το περιγεγραμμένο περί τον κύκλο ΑΒΓΔ πολυγωνο που είναι όμοιο με το εγγεγραμμένο, ώστε ο λόγος της πλευράς του περιγεγραμμένου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου να είναι μικρότερος από τον λόγο κ/ι (Πρόταση 3).

Έστω ακόμα οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ με ΑΓ $\perp$ ΒΔ.

Διατηρώντας σταθερή την διάμετρο ΑΓ περιστρέφουμε το επίπεδο επί το οποίο βρίσκονται τα πολύγωνα οπότε προκύπτουν δύο γεωμετρικά στερεά από τα οποία το ένα είναι εγγεγραμμένο στην σφαίρα και το άλλο περιγεγραμμένο περί αυτήν και, σύμφωνα με την Πρόταση 32, ο λόγος του όγκου του περιγεγραμμένου προς τον όγκο του εγγεγραμμένου είναι ίσος με τον λόγο του κύβου της πλευράς του περιγεγραμμένου περί τον κύκλο ΑΒΓΔ πολυγώνου προς τον κύβο της πλευράς του εγγεγραμμένου στον κύκλο ΑΒΓΔ πολυγώνου (στμ: τα στερεά σχήματα έχουν προκύψει από την περιστροφή των δύο αυτών πολυγώνων).



Καθώς ο λόγος της πλευράς του περιγεγραμμένου περί τον κύκλο ΑΒΓΔ πολυγώνου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο πολυγώνου είναι μικρότερος από τον λόγο κ/ι έπεται ότι και ο λόγος του όγκου του περιγεγραμμένου περί την σφαίρα σχήματος προς τον όγκο του εγγεγραμμένου σε αυτήν στερεού σχήματος είναι μικρότερος από τον λόγο κ^3/ι^3 (Πρόταση 32).

Συμβολίζοντας με o_1 τον όγκο του περιγεγραμμένου περί την σφαίρα στερεού σχήματος, με o_2 τον όγκο του εγγεγραμμένου στην σφαίρα στερεού σχήματος, με λ_1 την πλευρά του περιγεγραμμένου περί τον κύκλο ΑΒΓΔ πολυγώνου και με λ_2 την πλευρά του εγγεγραμμένου στον κύκλο ΑΒΓΔ πολυγωνου έχουμε:

$$\frac{o_1}{o_2} = \frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3} < \frac{\kappa^3}{\iota^3}.$$

Επίσης είναι και

$$\frac{\kappa}{\eta} > \frac{\kappa^3}{\iota^3}$$

(στμ: η αναλυτική απόδειξη της ανισότητας αυτής όπως δόθηκε από τον Ευτόκιο παρατίθεται αμέσως μετά το τέλος της απόδειξης της πρότασης) οπότε από την προηγούμενη έπεται ότι

$$\frac{o_1}{o_2} < \frac{\kappa}{\eta}.$$

Όμως,

$$\frac{\kappa}{\eta} < \frac{\mathrm{O}}{|\Xi|}$$

και επομένως θα ισχύει

$$\frac{o_1}{o_2} < \frac{O}{|\Xi|},$$

που όμως είναι αδύνατον καθώς από την Πρόταση 28 έχουμε ότι $o_1 > O$ ενώ από την Πρόταση 27 έχουμε αντίστοιχα ότι $o_2 < |\Xi|$ διότι ο κώνος Ξ έχει όγκο τετραπλάσιο από τον όγκο του κώνου με βάση ίσου εμβαδού με αυτό του κύκλου ΑΒΓΔ και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας ενώ το εγγεγραμμένο στην σφαίρα στερεό σχήμα έχει όγκο μικρότερο από το τετραπλάσιο του όγκου του κώνου αυτού.

2η Περίπτωση: Έστω $O < |\Xi|$.

Λαμβάνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα κ και η με $\kappa > \eta$ και $\kappa/\eta < |\Xi|/O$ (Πρόταση 2) και τα θ, ι όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

Όπως και πριν θεωρούμε δυο όμοια πολύγωνα ένα εγγεγραμμένο στον κύκλο ΑΒΓΔ και ένα περιγεγραμμένο περί αυτόν με πλευρές λ_2 και λ_1 αντίστοιχα ώστε να ισχύει $\lambda_1/\lambda_2 < \kappa/\iota$.

Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως κατασκευάζουμε δυο στερεά σχήματα εκ περιστροφής, το ένα περιγεγραμμένο περί την σφαίρα και το άλλο εγγεγραμμένο σε αυτήν με όγκους o_1 και o_2 αντίστοιχα οπότε από την Πρόταση 32 έχουμε

$$\frac{o_1}{o_2} = \frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3}.$$

Όμως

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < \frac{\kappa}{\iota}$$

και άρα

$$\frac{o_1}{o_2} < \frac{\kappa^3}{\iota^3} < \frac{\kappa}{\eta} < \frac{|\Xi|}{O}.$$

Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς από την Πρόταση 28 έχουμε ότι $o_2 < O$ ενώ από το Πόρισμα της Πρότασης 31 έχουμε αντίστοιχα ότι $o_1 > |\Xi|$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο όγκος της σφαίρας δεν είναι μικρότερος από το τετραπλάσιο του όγκου του κώνου με βάση ίσου εμβαδού με τον κύκλο ΑΒΓΔ και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας.

Καθώς λοιπόν δεν μπορεί να ισχύει $O > |\Xi|$ και $O < |\Xi|$ έπεται τελικά ότι $O = |\Xi|$, δηλαδή η σφαίρα έχει όγκο ίσο με το τετραπλάσιο του όγκου ενός κώνου με βάση ίσου εμβαδού με αυτό του μέγιστου κύκλου της σφαίρας και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας. ◘

Στμ: Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήθηκε χωρίς απόδειξη η ανισότητα

$$\frac{\kappa}{\eta} > \frac{\kappa^3}{\iota^3}.$$

Η ανισότητα αυτή αποδεικνύεται από τον Ευτόκιο χρησιμοποιώντας τους Ορισμούς 9 και 10 του 5^{ου} Βιβλίου από τα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Αν τέσσαρες αριθμοί α, β, γ και δ είναι σε συνεχή αναλογία ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$$

οπότε από τον Ορισμό 10 του 5^{ου} Βιβλίου παίρνουμε

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3} = \frac{\alpha}{\delta}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΕΥΤΟΚΙΟΥ

Έστω τα τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα $\kappa > \iota > \theta > \eta$ με

$$\kappa - \iota = \iota - \theta = \theta - \eta$$

Λαμβάνουμε το λ που είναι η τρίτη ανάλογος των κ και ι, οπότε

$$\frac{\kappa}{\iota} = \frac{\iota}{\lambda}$$

και καθώς $\kappa > \iota$ θα είναι και $\iota > \lambda$.

Τότε θα είναι και

$$\frac{\kappa - \iota}{\kappa} = \frac{\iota - \lambda}{\iota}$$

από όπου καθώς $\kappa > \iota$ παίρνουμε

$$\kappa - \iota > \iota - \lambda$$

Όμως $\kappa - \iota = \iota - \theta$ και άρα $\iota - \theta > \iota - \lambda$ από την οποία έπεται ότι $\lambda > \theta$.

Στην συνέχεια λαμβάνουμε το μ που είναι η τρίτη ανάλογος των ι και λ, δηλαδή ισχύει

$$\frac{\iota}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu}$$

οπότε όπως προηγούμενως καταλήγουμε στην

$$\frac{\iota - \lambda}{\iota} = \frac{\lambda - \mu}{\lambda}$$

Επειδή $\iota > \lambda$ θα είναι και $\iota - \lambda > \lambda - \mu$ οπότε καθώς $\iota - \theta > \iota - \lambda$ θα είναι και $\iota - \theta > \lambda - \mu$. Αλλά $\iota - \theta = \theta - \eta$ δηλαδή $\theta - \eta > \lambda - \mu$.

Όμως, $\lambda > \theta$ και άρα $\mu > \eta$.

Τώρα όμως για τα κ, ι, λ και μ ισχύει:

$$\frac{\kappa}{\iota} = \frac{\iota}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu}$$

και επομένως σύμφωνα με τους Ορισμούς 9 και 10 του Ευδόξου (Στοιχεία, Βιβλίο 5) έχουμε:

$$\frac{\kappa^3}{\iota^3} = \frac{\kappa}{\mu}.$$

Παραπάνω όμως έχει δειχτεί ότι $\mu > \eta$ και άρα

$$\frac{\kappa}{\mu} < \frac{\kappa}{\eta}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{\kappa^3}{\iota^3} < \frac{\kappa}{\eta},$$

που είναι η αποδεικτέα. ◘

Πόρισμα 4 (142) *Με βάση τα παραπάνω είναι φανερό ότι ο κύλινδρος με βάση ίση με τον μέγιστο κύκλο μιας σφαίρας και ύψος ίσο με την διάμετρό της έχει όγκο ίσο με τα 3/2 του όγκου της σφαίρας ενώ το άθροισμα του εμβαδού της κυρτής επιφάνειάς του και των εμβαδών των δύο βασεών του είναι ίσο με τα 3/2 του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας.*

Πράγματι, ο κύλινδρος αυτός έχει όγκο ίσο με το εξαπλάσιο του όγκου του κώνου με την ίδια βάση και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας ενώ ο όγκος της σφαίρας είναι τετραπλάσιος από τον όγκο του κώνου.

Αν o_1, o_2 και o_3 είναι όγκοι του κυλίνδρου, του κώνου και της σφαίρας αντίστοιχα τότε έχουμε:

$$o_1 = 6 \cdot o_2 \quad \textit{και} \quad o_3 = 4 \cdot o_2$$

και άρα

$$o_1 = \frac{3}{2} \cdot o_3,$$

δηλαδή ο όγκος του κυλίνδρου είναι ίσος με τα 3/2 του όγκου της σφαίρας.

Επειδή πάλι η κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου έχει εμβαδόν ίσο με αυτό του κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι η μέση ανάλογος της πλευράς του κυλίνδρου (στμ: του ύψους του) και της διαμέτρου της βάσης του (Πρόταση 13) έπεται ότι η περί την σφαίρα πλευρά του (στμ: το ύψους του) είναι ίση με την διάμετρο της βάσης του.

Αν υ είναι το ύψος του κυλίνδρου και δ η διάμετρος της βάσης του τότε για την ακτίνα ρ του παραπάνω κύκλου ισχύει

$$\frac{\upsilon}{\rho} = \frac{\rho}{\delta}$$

από όπου καθώς $\upsilon = \delta$ είναι

$$\frac{\delta}{\rho} = \frac{\rho}{\delta}$$

και άρα $\rho = \delta$.

Επιπλέον ο κύκλος με ακτίνα ίση με την διάμετρο της βάσης του κυλίνδρου έχει εμβαδόν ίσο με το τετραπλάσιο του εμβαδού της βάσης του κυλίνδρου που είναι ο μέγιστος κύκλος της σφαίρας.

Ακόμα, η κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου θα έχει εμβαδόν ίσο με το τετραπλάσιο του εμβαδού του μέγιστου κύκλου της σφαίρας.

Έτσι, η συνολική επιφάνεια του κυλίνδρου θα έχει εμβαδόν ίσο με το εξαπλάσιο του εμβαδού του μέγιστου κύκλου της σφαίρας.

Καθώς όμως η συνολική επιφάνεια της σφαίρας έχει εμβαδόν ίσο με το τετραπλάσιο του εμβαδού του μέγιστου κύκλου της έπεται ότι η συνολική επιφάνεια του κυλίνδρου έχει εμβαδόν ίσο με τα $6/4 = 3/2$ του εμβαδού της συνολικής επιφάνειας της σφαίρας.

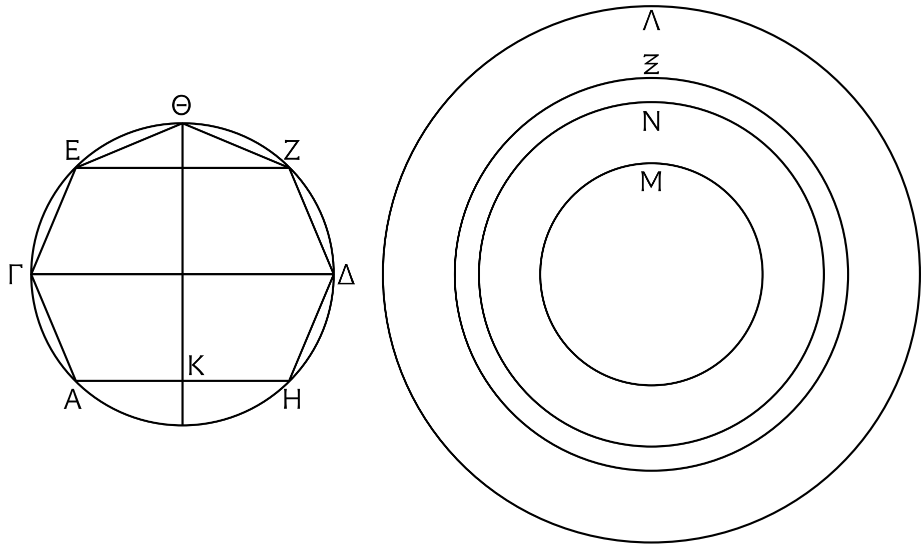
Πρόταση 35 (143) *Η επιφάνεια ενός σχήματος που είναι εγγεγραμμένο σε τμήμα σφαίρας έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν ενός κύκλου με ακτίνα ώστε το τετράγωνο που η πλευρά του είναι ίση με αυτήν είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που η μια πλευρά του είναι ίση με την πλευρά του πολυγώνου που είναι εγγεγραμμένο στο τμήμα του μέγιστου κύκλου* (*στμ: και που αντιστοιχεί στο σχήμα που είναι εγγεγραμμένο στο τμήμα της σφαίρας*) *ενώ η άλλη είναι ίση με το άθροισμα όλων των ευθύγραμμων τμημάτων που είναι παράλληλα στην βάση του τμήματος κύκλου και του μισού της βάσης του τμήματος του κύκλου.*

Απόδειξη. Έστω σφαίρα και σε αυτή τμήμα του οποίου η βάση είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΗ.

Εγγράφουμε στο τμήμα αυτό στερεό σχήμα που περιέχεται σε κωνικές επιφάνειες και έστω ακόμα ο μέγιστος κύκλος ΑΗΘ της σφαίρας και το αρτιόπλευρο πολύγωνο ΑΓΕΘΖΔΗ, χωρίς την ΑΗ.

Στην συνέχεια λαμβάνουμε τον κύκλο Λ με ακτίνα τέτοια που το τετράγωνο του οποίου η πλευρά είναι ίση με αυτή να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που η μια πλευρα του είναι ίση με ΑΓ και η άλλη ίση με το άθροισμα:

$$\mathrm{EZ} + \Gamma\Delta + \frac{\mathrm{AH}}{2} = \mathrm{EZ} + \Gamma\Delta + \mathrm{AK}$$



Πρέπει να δείξουμε ότι ο κύκλος Λ έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού σχήματος που έχει εγγραφεί στο σφαιρικό τμήμα.

Λαμβάνουμε πρώτα τον κύκλο Μ με ακτίνα τέτοια που το τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με αυτή να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που οι πλευρές του είναι ίσες με ΕΘ και ΕΖ/2.

Συμβολίζοντας με ρ_{M} την ακτίνα του κύκλου Μ έχουμε

$$\rho_{\mathrm{M}}^2 = \mathrm{E\Theta} \cdot \frac{\mathrm{EZ}}{2}$$

και άρα ο κύκλος Μ είναι ισοδύναμος με τον κώνο με βάση τον κύκλο διαμέτρου ΕΖ και κορυφή το Θ (Πρόταση 14).

Στην συνέχεια λαμβάνουμε τον κύκλο Ν με ακτίνα τέτοια που το τετράγωνο με πλευρά ίση με αυτή να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΕΓ και (ΕΖ + ΓΔ)/2.

Συμβολίζοντας με ρ_{N} την ακτίνα του κύκλου Ν έχουμε

$$\rho_{\mathrm{N}}^2 = \mathrm{E\Gamma} \cdot \frac{\mathrm{EZ} + \Gamma\Delta}{2}.$$

Τότε ο κύκλος Ν είναι ισοδύναμος με την κωνική επιφάνεια που βρίσκεται μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΕΖ και ΓΔ (Πρόταση 16).

Τέλος, λαμβάνουμε και τον κύκλο Ξ με ακτίνα τέτοια που το τετράγωνο που έχει την πλευρά του ίση με αυτήν να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΓ και (ΓΔ + ΑΗ)/2.

Συμβολίζοντας με ρ_{Ξ} την ακτίνα του κύκλου Ξ έχουμε

$$\rho_{\Xi}^2 = \mathrm{A\Gamma} \cdot \frac{\Gamma\Delta + \mathrm{AH}}{2},$$

και άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 16, ο κύκλος Ξ έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της κωνικής επιφάνειας που βρίσκεται μεταξύ των κύκλων διαμέτρων ΑΗ και ΓΔ.

Αθροίζοντας τα εμβαδά των τριών κύκλων Μ, Ν και Ξ παίρνουμε το εμβαδόν, έστω ε, της επιφάνειας του στερεού σχήματος που έχει εγγραφεί στο τμήμα της σφαίρας χωρίς την βάση του που είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΗ.

Δηλαδή,

$$|\mathrm{M}| + |\mathrm{N}| + |\Xi| = \varepsilon.$$

Επίσης αθροίζοντας τα τετράγωνα των ακτίνων των κύκλων Μ, Ν και Ξ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathrm{M}}^2 + \rho_{\mathrm{N}}^2 + \rho_{\Xi}^2 &= \frac{\mathrm{E\Theta} \cdot \mathrm{EZ}}{2} + \frac{\mathrm{E\Gamma} \cdot (\mathrm{EZ} + \Gamma\Delta)}{2} + \frac{\mathrm{A\Gamma} \cdot (\Gamma\Delta + \mathrm{AH})}{2} \\
&= \mathrm{A\Gamma} \cdot \frac{2 \cdot \mathrm{EZ} + 2 \cdot \Gamma\Delta + \mathrm{AH}}{2} \\
&= \mathrm{A\Gamma} \cdot (\mathrm{EZ} + \Gamma\Delta + \mathrm{AK}),
\end{aligned}$$

καθώς $\mathrm{E\Theta} = \mathrm{E\Gamma} = \mathrm{A\Gamma}$ και $\frac{\mathrm{AH}}{2} = \mathrm{AK}$.

Από την υπόθεση έχουμε όμως ότι το τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου Λ είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΓ και $\mathrm{EZ} + \Gamma\Delta + \mathrm{AK}$.

Συμβολίζοντας με ρ_Λ την ακτίνα του κύκλου Λ θα έχουμε

$$\rho_\Lambda^2 = \mathrm{A\Gamma} \cdot (\mathrm{EZ} + \Gamma\Delta + \mathrm{AK}),$$

οπότε από την παραπάνω ισότητα παίρνουμε

$$\rho_\Lambda^2 = \rho_{\mathrm{M}}^2 + \rho_{\mathrm{N}}^2 + \rho_{\Xi}^2$$

από την οποία προκύπτει βεβαίως ότι

$$|\Lambda| = |\mathrm{M}| + |\mathrm{N}| + |\Xi|$$

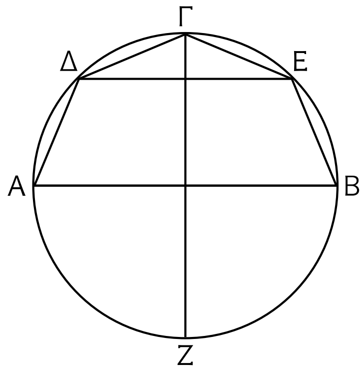
που είναι ισοδύναμη με την αποδεικτέα καθώς $|\mathrm{M}| + |\mathrm{N}| + |\Xi| = \varepsilon$. ◻

Πρόταση 36 (144) *Αν σε τμήμα ενός μέγιστου κύκλου μιας σφαίρας εγγραφεί ισόπλευρο και αρτιογώνιο (χωρίς την βάση) πολύγωνο το οποίο αφού περιστραφεί περί την διάμετρο του μέγιστου κύκλου που παραμένει ακίνητη επανέλθει στην αρχική του θέση τότε η επιφάνεια του εγγεγραμμένου στερεού σχήματος που προκύπτει έχει εμβαδόν μικρότερο από το εμβαδόν του αντίστοιχου σφαιρικού τμήματος.*

Απόδειξη. Έστω μια σφαίρα η οποία τέμνεται από ένα επίπεδο που δεν διέρχεται από το κέντρο της. Έστω ακόμα ΑΕΖ ο μέγιστος κύκλος της σφαίρας που τέμνει κάθετα το παραπάνω επίπεδο.

Εγγράφουμε στο τμήμα ΑΒΓ του κύκλου πολύγωνο ισόπλευρο και αρτιογώνιο (χωρίς να ληφθεί υπόψιν η βάση του ΑΒ).

Αν τώρα το πολύγωνο αυτό περιστραφεί περί την διάμετρο ΓΖ που παραμένει σταθερή οι κορυφές Δ, Ε, Α και Β θα γράψουν τους κύκλους με διαμέτρους ΔΕ και ΑΒ ενώ οι πλευρές θα γράψουν κωνικές επιφάνειες και το σχήμα που προκύπτει έχει βάση τον κύκλο διαμέτρου ΑΒ και κορυφή το Γ ενώ περιέχεται σε κωνικές επιφάνειες (με ανάλογο τρόπο εργαστήκαμε και στην απόδειξη της Πρότασης 23).



Τότε, όπως προηγουμένως, αποδεικνύεται ότι η κυρτή επιφάνεια του στερεού σχήματος έχει εμβαδόν μικρότερο από την επιφάνεια του αντίστοιχου σφαιρικού τμήματος που το περικλείει καθώς η περιφέρεια του κύκλου διαμέτρου ΑΒ είναι το κοινό σύνορο που βρίσκεται σε ένα επίπεδο του σφαιρικού τμήματος και του στερεού σχήματος που είναι εγγεγραμμένο σε αυτό ενώ οι αντίστοιχες επιφάνειες είναι κοίλες προς το ίδιο μέρος και η μια περιλαμβάνεται από την άλλη (Λαμβανόμενα 4). ◙

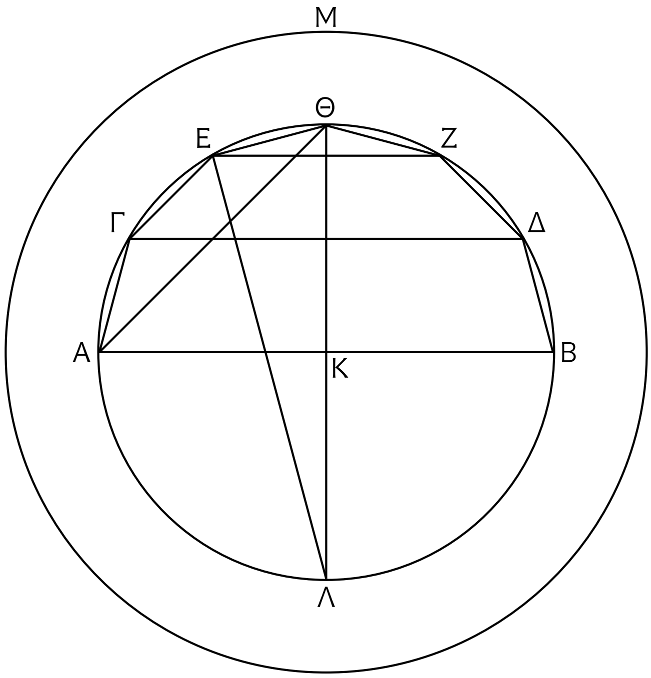
Πρόταση 37 (144) *Η κυρτή επιφάνεια του σχήματος που είναι εγγεγραμμένο σε ένα σφαιρικό τμήμα έχει εμβαδόν μικρότερο από αυτό του κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι ίση με το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή του σφαιρικού τμήματος προς την περιφέρεια του κύκλου που είναι η βάση του σφαιρικού τμήματος.*

Απόδειξη. Έστω η σφαίρα με μέγιστο κύκλο τον ΑΒΕΖ και το σφαιρικό τμήμα της του οποίου βάση είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ.

Εγγράφουμε στο σφαιρικό τμήμα όπως και στο τμήμα του μέγιστου κύκλου πολύγωνο ισόπλευρο και αρτιογώνιο (χωρίς να ληφθεί υπόψιν η βάση του) όπως στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης.

Έστω ΘΛ η διάμετρος της σφαίρας ενώ φέρνουμε και τις ΛΕ, ΘΑ και έστω ακόμα Μ να είναι ο κύκλος του οποίου η ακτίνα είναι ίση με ΑΘ (στμ: δηλαδή η ΑΘ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή του σφαιρικού τμήματος προς την περιφέρεια του κύκλου που είναι η βάση του σφαιρικού τμήματος).

Πρέπει να δειχτεί ότι το εμβαδόν του κύκλου Μ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του εκ περιστροφής σχήματος που προκύπτει όταν το πολύγωνο που έχει εγγραφεί στο τμήμα του μέγιστου κύκλου ΑΒΕΖ περιστραφεί περί την διάμετρο ΘΛ της σφαίρας που παραμένει σταθερή.



Σύμφωνα με την Πρόταση 35 η κυρτή επιφάνεια του εκ περιστροφής σχήματος έχει εμβαδόν ίσο με αυτό του κύκλου με ακτίνα τέτοια που το τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με αυτήν να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΕΘ και $\mathrm{EZ} + \Gamma\Delta + \mathrm{KA}$.

Συμβολίζοντας με ρ την ακτίνα του κύκλου αυτού έχουμε

$$\rho^2 = \mathrm{E}\Theta \cdot (\mathrm{EZ} + \Gamma\Delta + \mathrm{KA}).$$

Αλλά (Πρόταση 22 και Στοιχεία, Βιβλίο 6, Πρόταση 16) είναι και

$$\mathrm{E}\Theta \cdot (\mathrm{EZ} + \Gamma\Delta + \mathrm{KA}) = \mathrm{E}\Lambda \cdot \mathrm{K}\Theta,$$

ενώ ισχύει

$$\mathrm{E}\Lambda \cdot \mathrm{K}\Theta < \mathrm{A}\Theta^2$$

καθώς το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΕΛ και ΚΘ έχει εμβαδόν μικρότερο από αυτό του ορθογωνίου που έχει τις πλεύρες του αντίστοιχα ίσες με ΛΘ και ΚΘ.

Έτσι λοιπόν, είναι φανερό ότι η ακτίνα του κύκλου που έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της επιφάνειας του εκ περιστροφής στερεού σχήματος είναι μικρότερη από την ΑΘ που είναι η ακτίνα του κύκλου Μ.

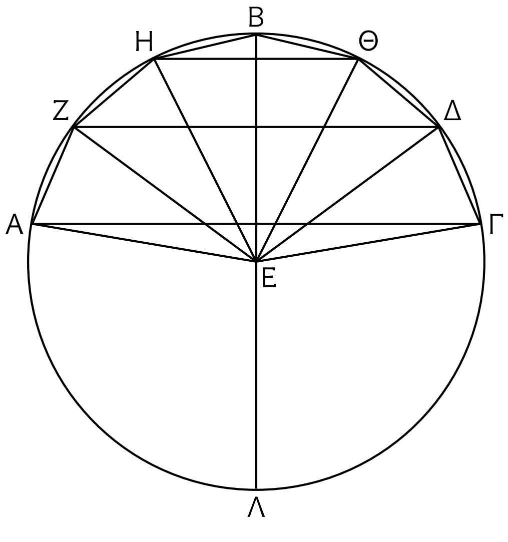
Άρα ο κύκλος Μ έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το εμβαδόν της επιφάνειας του εκ περιστροφής στερεού σχήματος (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 2).

◘

Πρόταση 38 (145) *Το άθροισμα του όγκου ενός στερεού σχήματος που είναι εγγεγραμμένο σε ένα σφαιρικό τμήμα (μικρότερο του ημισφαιρίου) και που περιέχεται σε κωνικές επιφάνειες καθώς και του όγκου του κώνου που έχει την ίδια βάση με το παραπάνω στερεό σχήμα και κορυφή το κέντρο της σφαίρας είναι ίσο με τον όγκο του κώνου με βάση ίσου εμβαδού με αυτό της επιφάνειας του στερεού σχήματος και ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το κέντρο της σφαίρας προς την μια πλευρά του πολυγώνου (στμ: που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο που είναι η βάση του σφαιρικού τμήματος και το οποίο αντιστοιχεί στο στερεό σχήμα).*

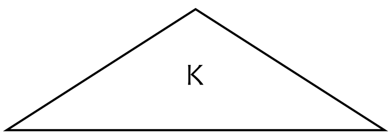
Απόδειξη. Έστω μια σφαίρα και το τμήμα ΑΒΓ του μέγιστου κύκλου της το οποίο είναι μικρότερο του ημικυκλίου. Έστω ακόμα Ε το κέντρο της σφαίρας.

Εγγράφουμε στο τμήμα ΑΒΓ πολύγωνο αρτιόπλευρο (χωρίς να ληφθεί υπόψιν η βάση του ΑΓ) και αφού η σφαίρα περιστραφεί περί τον σταθερό άξονα ΒΛ προκύπτει ένα στερεό σχήμα που περιέχεται σε κωνικές επιφάνειες.



Στην συνέχεια γράφουμε τον κώνο με βάση τον κύκλο διαμέτρου ΑΓ και κορυφή το κέντρο της σφαίρας Ε ενώ λαμβάνουμε και τον κώνο Κ του οποίου η βάση έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της επιφάνειας του εκ περιστροφής στερεού σχήματος και ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το κέντρο Ε της σφαίρας προς τη μια πλευρά του πολυγώνου (στμ: που έχει εγγραφεί στο τμήμα ΑΒΓ του μέγιστου κύκλου της σφαίρας).

Πρέπει να δείξουμε ότι ο όγκος του κώνου Κ είναι ίσος με το άθροισμα των όγκων του εκ περιστροφής στερεού σχήματος και του κώνου ΕΑΓ.



Γράφουμε τους κώνους με βάσεις τους κύκλους διαμέτρων ΘΗ και ΔΖ και κορυφή το κέντρο Ε της σφαίρας.

Τότε ο στερεός ρόμβος ΗΘΒΕ έχει όγκο ίσο με τον όγκο του κώνου που έχει βάση ίσου εμβαδού με αυτό της επιφάνειας του κώνου ΗΘΒ και ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το Ε προς την ΗΒ (Πρόταση 18).

Επίσης το υπόλοιπο μέρος του στερεού που περιέχεται μεταξύ των παραλλήλων επιπέδων των κύκλων ΗΘ και ΔΖ και των κωνικών επιφανειών ΖΕΔ και ΗΕΘ έχει όγκο ίσο με τον όγκο του κώνου του οποίου η βάση έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της επιφάνειας που βρίσκεται μεταξύ των παραλλήλων επιπέδων των κύκλων διαμέτρων ΗΘ και ΖΔ και ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το Ε προς την ΖΗ (Πρόταση 20).

Πάλι, το υπόλοιπο μέρος του στερεού σχήματος που περιέχεται μεταξύ των παράλληλων επιπέδων των κύκλων διαμέτρων ΖΔ και ΑΓ και των κωνικών επιφανειών ΑΕΓ και ΖΕΔ έχει όγκο ίσο με αυτόν του κώνου του οποίου η βάση έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της επιφάνειας που βρίσκεται μεταξύ των παράλληλων επιπέδων των κύκλων διαμέτρων ΖΔ και ΑΓ και ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το Ε προς την ΖΑ.

Έτσι, το άθροισμα των όγκων των παραπάνω κώνων είναι ίσο με το άθροισμα των όγκων του εκ περιστροφής στερεού σχήματος και του κώνου ΕΑΓ.

Οι κώνοι αυτοί όμως έχουν ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το Ε προς την μια πλευρά του πολυγώνου ενώ το άθροισμα των εμβαδών των βάσεών τους είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας του σχήματος ΑΖΗΒΘΔΓ.

Ο κώνος Κ είναι επίσης ισοϋψής με τους παραπάνω κώνους ενώ η βάση του έχει ίσο εμβαδόν με αυτό της επιφάνειας του εκ περιστροφής στερεού σχήματος.

Άρα ο κώνος Κ έχει όγκο ίσο με το άθροισμα των όγκων των παραπάνω κώνων το οποίο έχει δειχθεί ότι είναι ίσο με το άθροισμα των όγκων του εκ περιστροφής στερεού σχήματος και του κώνου ΕΑΓ.

Έτσι, αν συμβολίσουμε με o_1 είναι τον όγκο του εκ περιστροφής σχήματος τότε ισχύει

$$|\mathrm{K}| = |\mathrm{E A \Gamma}| + o_1$$

που είναι η αποδεικτέα. ◘

Πόρισμα 5 (145) *Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι ο κώνος με βάση τον κύκλο του οποίου η ακτίνα είναι ίση με την αγόμενη κάθετη από την κορυφή του σφαιρικού τμήματος προς την περιφέρεια του κύκλου ο οποίος είναι η βάση του σφαιρικού τμήματος και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας έχει όγκο μεγαλύτερο από το άθροισμα του όγκου του εγγεγραμμένου σχήματος και του κώνου* (*στμ: με βάση την βάση του εγγεγραμμένου σχήματος και κορυφή το κέντρο της σφαίρας*).

Πράγματι, ο παραπάνω κώνος έχει όγκο μεγαλύτερο από το άθροισμα του όγκου του κώνου που είναι ισοδύναμος με το στερεό σχήμα και του όγκου του κώνου με βάση την βάση του τμήματος και κορυφή το κέντρο της σφαίρας. Δηλαδή, η βάση του κώνου έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της επιφάνειας του σχήματος ενώ το ύψος του είναι ίσο με την αγόμενη κάθετη από το κέντρο της σφαίρας προς την μια πλευρά του πολυγώνου (*Πρόταση 38*).

Και αυτό διότι η βάση του πρώτου κώνου έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό της βάσης του δεύτερου κώνου (*Πρόταση 37*) *ενώ και το ύψος του πρώτου κώνου είναι μεγαλύτερο από το ύψος του δεύτερου κώνου* (*στμ: η ακτίνα είναι μεγαλύτερο από το απόστημα της πλευράς του εγγεγραμμένου σχήματος*).

Πρόταση 39 (146) *Η επιφάνεια ενός στερεού σχήματος που είναι περιγεγραμμένο περί έναν σφαιρικό τομέα έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό της επιφάνειας του μικρότερου σφαιρικού τμήματος* (*στμ: από τα δύο που έχουν βάση τον κύκλο που αντιστοιχεί στον σφαιρικό τομέα*).

Απόδειξη. Έστω σφαίρα και ο μέγιστος κύκλος της ΑΒΓ η οποία τέμνεται κατά κύκλο μικρότερο του ημικυκλίου από επίπεδο που διέρχεται από το ΑΒ.

Έστω ακόμα Δ το κέντρο της σφαίρας από το οποίο φέρνουμε τις ΑΔ και ΔΒ δημιουργώντας έτσι έναν σφαιρικό τομέα.

Περί τον σφαιρικό αυτό τομέα περιγράφουμε πολύγωνο και περί αυτό περιγράφουμε έναν κύκλο που είναι ομόκεντρος με τον κύκλο ΑΒΓ.

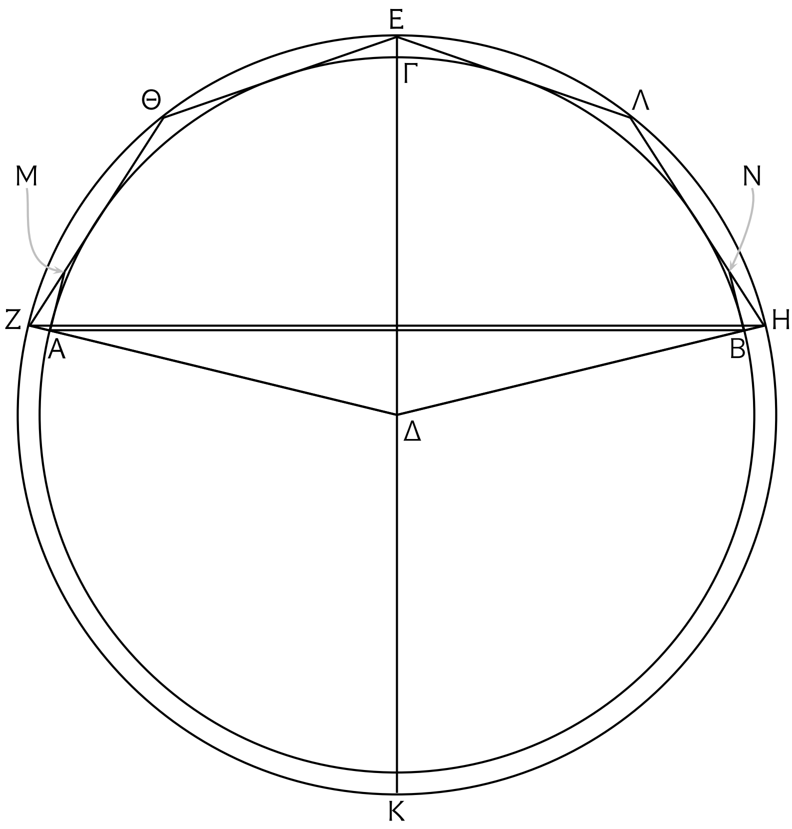
Αν τώρα το πολύγωνο αυτό περιστραφεί πλήρως περί τον σταθερό άξονα ΕΚ, που είναι η διάμετρος της σφαίρας, ο περιγεγραμμένος κύκλος γράφει επιφάνεια σφαίρας ενώ οι κορυφές του πολυγώνου γράφουν αντίστοιχα κύκλους των οποίων οι διάμετροι συνδέουν τις κορυφές του πολυγώνου ενώ είναι παράλληλες στην ΑΒ.

Επίσης τα σημεία επαφής των πλευρών του πολυγώνου με τον μικρότερο κύκλο γράφουν αντίστοιχα κύκλους στην μικρότερη σφαίρα ενώ οι διάμετροί τους συνδέουν τα σημεία επαφής και είναι παράλληλες στην ΑΒ.

Ακόμα οι πλευρές του πολυγώνου γράφουν κωνικές επιφάνειες και το περιγραφέν στερεό σχήμα που περιέχεται στις κωνικές επιφάνειες αυτές έχει βάση τον κύκλο διαμέτρου ΖΗ.

Έτσι, η επιφάνεια του σχήματος αυτού θα έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό της επιφάνειας του μικρότερου σφαιρικού τμήματος με βάση τον κύκλο διαμέτρου ΑΒ.

Πράγματι αν φέρουμε τις εφαπτόμενες ΑΜ και ΒΝ αυτές κατά την περιστροφή γράφουν κωνικές επιφάνειες και το στερεό σχήμα που δημιουργείται από το πολύγωνο ΑΜΘΕΛΝΒ έχει επιφάνεια με εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό του μικρότερου σφαιρικού τμήματος με βάση τον κύκλο διαμέτρου ΑΒ καθώς οι επιφάνειες αυτές έχουν κοινό σύνορο στο ίδιο επίπεδο (που είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ) και το ένα σχήμα περιλαμβάνεται από το άλλο (Λαμβανόμενα 4).



Αλλά η κωνική επιφάνεια που γράφεται από τις ΖΜ και ΗΝ έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό της επιφάνειας που γράφεται αντίστοιχα από τις ΜΑ και ΝΒ καθώς είναι ΖΜ > ΜΑ (διότι είναι υποτείνουσα ορθής γωνίας) και ΝΗ > ΝΒ (Στοιχεία, Βιβλίο 3, Πρόταση 18 και Βιβλίο 1, Πρόταση 19) όπως αποδεικνύεται από τα Λήμματα.

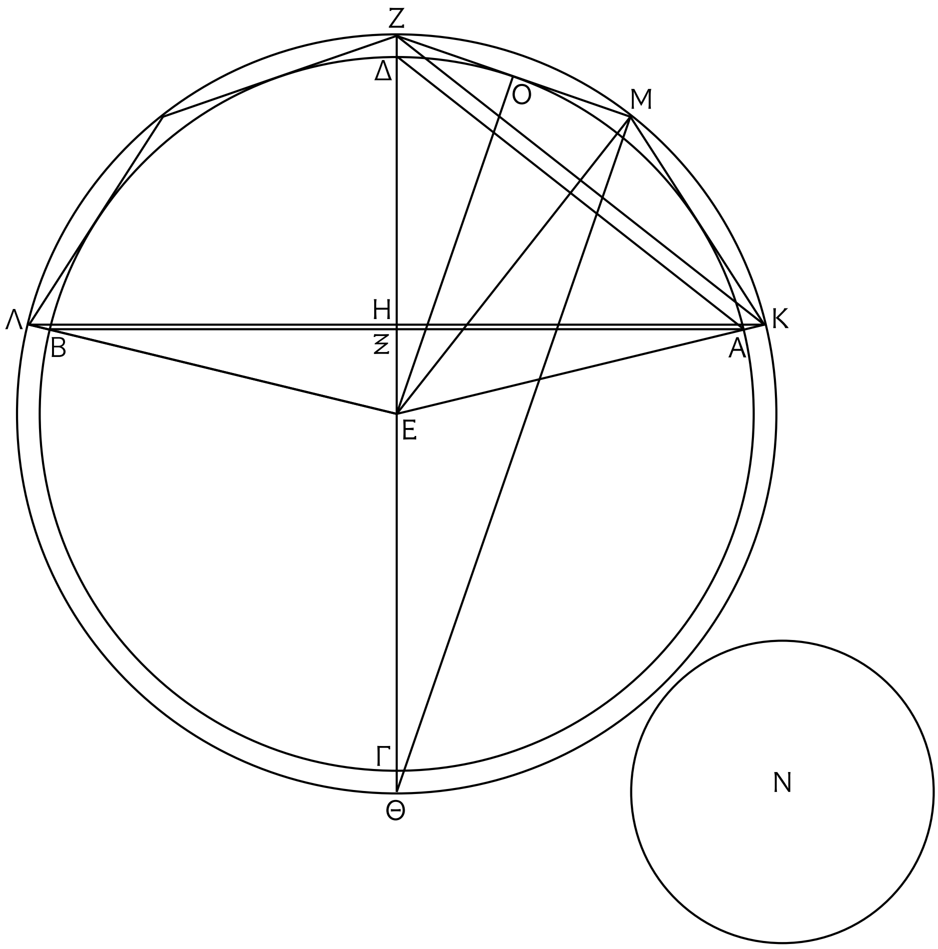
Συνεπώς η επιφάνεια του περιγραφόμενου στερεού σχήματος έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό της επιφάνειας του σφαιρικού τμήματος της μικρότερης σφαίρας. ◘

Πόρισμα 6 (147) *Η επιφάνεια του περιγεγραμμένου περί έναν σφαιρικό τομέα στερεού σχήματος έχει εμβαδόν ίσο με αυτό του κύκλου με ακτίνα τέτοια ώστε το τετράγωνο που έχει την πλευρά του ίση με αυτήν να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που η μια πλευρά του είναι ίση με την πλευρά του πολυγώνου ενώ η άλλη είναι ίση με το άθροισμα των διαγωνίων του πολυγώνου που είναι παράλληλες στην βάση του και του μισού της βάσης του πολυγώνου καθώς το στερεό σχήμα που προέκυψε από την περιστροφή* *του πολυγώνου είναι εγγεγραμμένο στο τμήμα της μεγαλύτερης σφαίρας* (*Πρόταση 35*).

Πρόταση 40 (147) *Η κυρτή επιφάνεια ενός στερεού σχήματος που είναι περιγεγραμμένο περί έναν σφαιρικό τομέα έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από αυτό του κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι ίση με το αγόμενο ευθύγραμμο τμήμα από την κορυφή του σφαιρικού τμήματος προς την περιφέρεια του κύκλου που είναι η βάση του σφαιρικού τμήματος.*

Απόδειξη. Έστω σφαίρα με μέγιστο κύκλο τον ΑΒΓΔ και κέντρο το Ε.

Περιγράφουμε περί τον τομέα το πολύγωνο ΛΚΖ και στην συνέχεια περιγράφουμε περί αυτό κύκλο και κατασκευάζουμε όπως στην προηγούμενη απόδειξη το εκ περιστροφής στερεό σχήμα.



Έστω ακόμα ο κύκλος Ν με ακτίνα ώστε το τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με αυτήν να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που η μια πλευρά του είναι ίση με την πλευρά του πολυγώνου ενώ η άλλη είναι ίση με το άθροισμα των διαγωνίων του που είναι παράλληλες στην ΚΛ και του μισού της ΚΛ.

Το ορθογώνιο όμως αυτό είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΜΘ και ΖΗ (Πρόταση 22 και Στοιχεία, Βιβλίο 6, Πρόταση 16) ενώ το ΖΗ είναι το ύψος του τμήματος της μεγαλύτερης σφαίρας (όπως έχει αποδειχθεί).

Έτσι το τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου Ν είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με τις ΜΘ και ΖΗ.

Αλλά $ΗΖ > ΔΞ$ η οποία είναι ίση με το ύψος του μικρότερου σφαιρικού τμήματος διότι $ΚΖ /\!/ ΔΑ$ ενώ ισχύει και $ΑΒ /\!/ ΚΛ$ οπότε τα τρίγωνα ΖΚΗ και ΔΑΞ είναι όμοια καθώς έχουν την ΖΕ κοινή (Στοιχεία, Βιβλίο 1, Πρόταση 29 και Βιβλίο 6, Πρόταση 4 και Βιβλίο 5, Προτάσεις 14 και 16).

Επειδή είναι $ΖΚ > ΑΔ$ θα είναι και $ΖΗ > ΔΞ$ ενώ ισχύει και $ΜΘ = ΓΔ$ διότι αν φέρουμε την ΕΟ και $ΜΟ = ΟΖ$, $ΘΕ = ΕΖ$ θα είναι και $ΕΟ /\!/ ΜΘ$ (Στοιχεία, Βιβλίο 6, Πρόταση 2) οπότε $ΜΘ = 2 \cdot ΕΟ$ και άρα $ΜΘ = ΓΔ$.

Καθώς όμως το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΓΔ και ΔΞ είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο πλευράς ΑΔ, δηλαδή ισχύει

$$ΓΔ \cdot ΔΞ = ΑΔ^2$$

έπεται ότι η κυρτή επιφάνεια του σχήματος ΚΖΛ έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το εμβαδόν του κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι ίση με την αγόμενη κάθετη από την κορυφή του τμήματος προς την περιφέρεια του κύκλου ο οποίος είναι η βάση του τμήματος, δηλαδή του κύκλου διαμέτρου ΑΒ.

Και αυτό διότι ο κύκλος Ν έχει εμβαδόν ίσο με αυτό της επιφάνειας του σχήματος που έχει περιγραφεί περί τον σφαιρικό τομέα (Πόρισμα Πρότασης 39). ◘

Πόρισμα 7 (147) *Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι το άθροισμα του όγκου του στερεού σχήματος που είναι περιγεγραμμένο περί έναν σφαιρικό τομέα και του όγκου του κώνου του οποίου η βάση είναι ο κύκλος διαμέτρου* ΚΛ *και κορυφή το κέντρο της σφαίρας είναι ίσο με τον όγκο του κώνου του οποίου η βάση έχει εμβαδόν ίσο με την επιφάνεια του στερεού σχήματος και του οποίου το ύψος είναι ίσο με την αγόμενη κάθετη από το κέντρο της σφαίρας προς την πλευρά του πολυγώνου η οποία είναι ίση με την ακτίνα της σφαίρας διότι το περιγεγραμμένο περί τον σφαιρικό τομέα στερεό σχήμα είναι εγγεγραμμένο στο σφαιρικό τμήμα της μεγαλύτερης σφαίρας η οποία έχει το ίδιο κέντρο* (*Πρόταση 38*).

Πόρισμα 8 (148) *Από τα προηγούμενα είναι επίσης φανερό ότι το άθροισμα των όγκων του περιγεγραμμένου περί τον τομέα στερεού σχήματος και του κώνου του οποίου η βάση είναι ο κύκλος διαμέτρου* ΚΛ *και κορυφή το κέντρο* *της σφαίρας είναι μεγαλύτερο από τον όγκο του κώνου ο οποίος έχει βάση τον κύκλο του οποίου η ακτίνα είναι ίση με την αγόμενη κάθετη από την κορυφή του τμήματος της μικρότερης σφαίρας προς την περιφέρεια του κύκλου που είναι η βάση του σφαιρικού τμήματος και του οποίου το ύψος είναι ίσο με την ακτίνα της σφαίρας καθώς ο κώνος που έχει όγκο ίσο με το άθροισμα του όγκου του στερεού σχήματος και του όγκου του κώνου με βάση τον κύκλο διαμέτρου* ΚΛ *και κορυφή το κέντρο της σφαίρας έχει βάση με εμβαδόν μεγαλύτερο από το εμβαδόν του κύκλου* (*Πρόταση 40*) *ενώ το ύψος του είναι ίσο με την ακτίνα της μικρότερης σφαίρας* (*Πόρισμα 1, Πρόταση 40*).

Πρόταση 41 (148) *Ο λόγος του εμβαδού της επιφάνειας ενός στερεού σχήματος που είναι περιγεγραμμένο περί ένα σφαιρικό τμήμα* (*μικρότερο του ημισφαιρίου*) *προς το εμβαδόν της επιφάνειας του όμοιου εγγεγραμμένου στο σφαιρικό τμήμα σχήματος είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου της πλευράς του αντίστοιχου περιγεγραμμένου περί το αντίστοιχο τμήμα κύκλου πολυγώνου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου στο ίδιο τμήμα κύκλου πολυγώνου.*

Επιπλέον, ο λόγος του αθροίσματος των όγκων του περιγεγραμμένου περί το σφαιρικό τμήμα σχήματος και του κώνου με βάση την βάση του σφαιρικού τμήματος και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας προς το άθροισμα των όγκων του εγγεγραμμένου στο σφαιρικό τμήμα σχήματος και του κώνου με βάση την βάση του σφαιρικού τμήματος και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας είναι ίσος με τον κύβο του λόγου της πλευράς του περιγεγραμμένου περί το αντίστοιχο τμήμα κύκλου πολυγώνου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου στο ίδιο τμήμα κύκλου πολυγώνου.

Απόδειξη. Έστω σφαίρα κέντρου Δ και το τμήμα ΑΒΓ ενός μέγιστου κύκλου της.

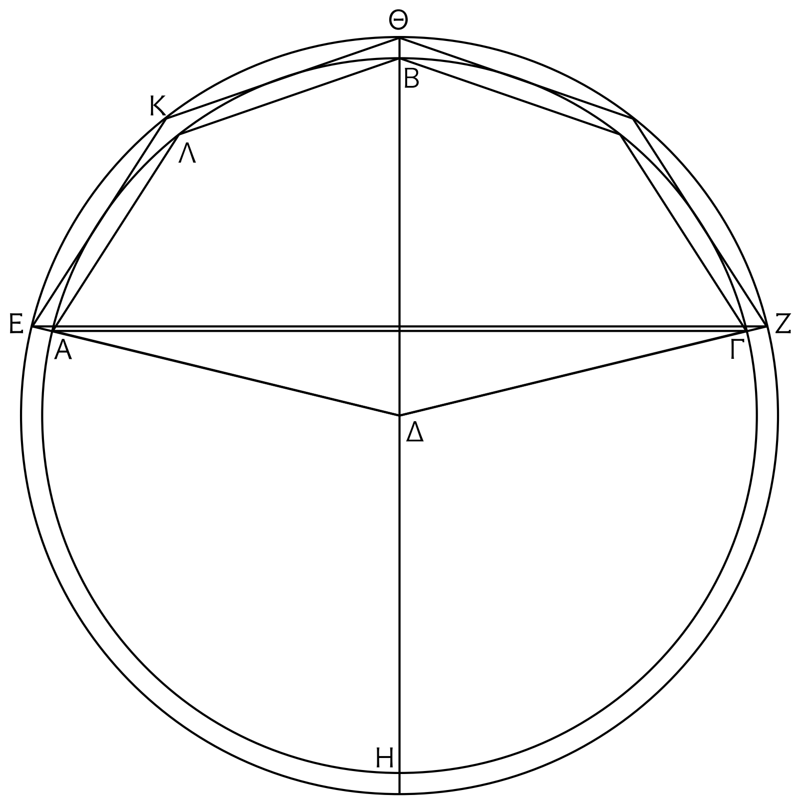
Εγγράφουμε στο τμήμα ΑΒΓ πολυγώνο ισόπλευρο και αρτιόπλευρο ενώ περιγράφουμε περί αυτό ένα άλλο πολύγωνο όμοιο με το προηγούμενο ώστε οι πλευρές των πολυγώνων να είναι παράλληλες.

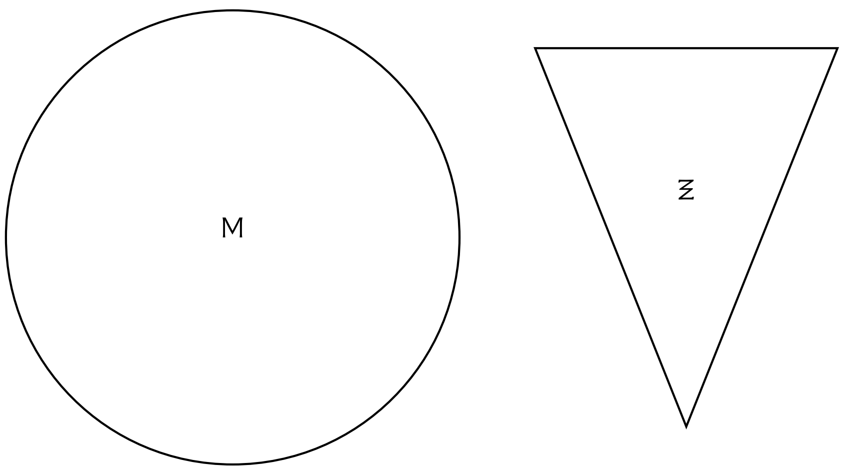
Περί το περιγεγραμμένο πολύγωνο γράφουμε κύκλο οπότε περιστρέφοντας περί τον σταθερό άξονα ΗΒ του δύο κύκλους προκύπτουν δύο στερεά σχήματα εκ περιστροφής που περιέχονται σε κωνικές επιφάνειες.

Πρέπει να δείξουμε ότι ο λόγος του εμβαδού της επιφάνειας του περιγεγραμμένου περί το σφαιρικό τμήμα σχήματος προς το εμβαδόν της επιφάνειας του εγγεγραμμένου στο σφαιρικό τμήμα σχήματος είναι ίσος με τον λόγο του τετραγώνου της πλευράς του περιγεγραμμένου περί το τμήμα ΑΒΓ του μέγιστου κύκλου πολυγώνου προς το τετράγωνο της πλευράς του εγγεγραμμένου στο ίδιο τμήμα κύκλου πολυγώνου.

Έστω Μ ο κύκλος με ακτίνα ώστε το τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με αυτήν να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που η μια πλευρά του είναι ίση με την πλευρά του περιγεγραμμένου περί το τμήμα ΑΒΓ του κύκλου πολυγώνου και η άλλη είναι ίση με το άθροισμα των διαγωνίων του περιγεγραμμένου αυτού πολυγώνου που είναι παράλληλες στην ΕΖ και του μισού της ΕΖ.

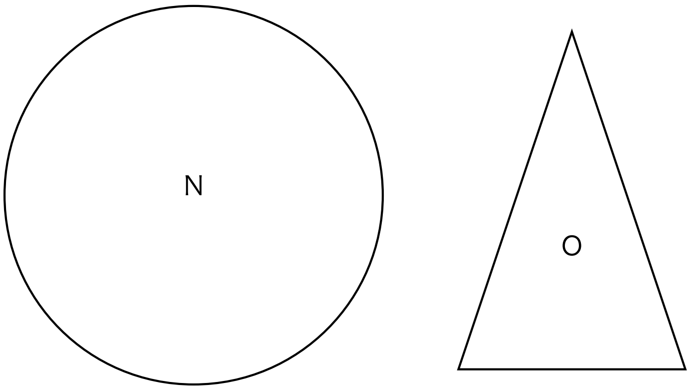
Τότε το εμβαδόν του κύκλου Μ είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας του περιγεγραμμένου περί το σφαιρικό τμήμα σχήματος (Πρόταση 35 και Πόρισμα Πρότασης 39).





Λαμβάνουμε ακόμα τον κύκλο Ν με ακτίνα ώστε το τετράγωνο με πλευρά την ακτίνα αυτή να είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που η μια πλευρά του είναι ίση με την πλευρά του εγγεγραμμένου στο τμήμα ΑΒΓ του κύκλου πολυγώνου και η άλλη είναι ίση με το άθροισμα των διαγωνίων του εγγεγραμμένου αυτού πολυγώνου που είναι παράλληλες στην ΑΓ και του μισού της ΑΓ.

Τότε το εμβαδόν του κύκλου Ν είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας του εγγεγραμμένου στο σφαιρικό τμήμα στερεού σχήματος (Πρόταση 35).



Όμως, ο λόγος των εμβαδών των κύκλων Μ και Ν είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των ακτίνων τους (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 2) οπότε αν συμβολίσουμε με ρ_M και ρ_N τις ακτίνες των κύκλων Μ και Ν αντίστοιχα, θα έχουμε:

$$\frac{|M|}{|N|} = \frac{\rho_M^2}{\rho_N^2}.$$

Συμβολίζοντας επιπλέον με ε_1 και ε_2 τα εμβαδά των επιφανειών του περιγεγραμμένου περί το σφαιρικό τμήμα σχήματος και του εγγεγραμμένου στο σφαιρικό τμήμα σχήματος έχουμε

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\rho_M^2}{\rho_N^2}.$$

Αν τώρα δ_1 είναι το άθροισμα των διαγωνίων του περιγεγραμμένου περί το τμήμα ΑΒΓ του κύκλου πολυγώνου οι οποίες είναι παράλληλες στην ΕΖ και δ_2 είναι το άθροισμα των διαγωνίων του εγγεγραμμένου στο ίδιο τμήμα πολυγώνου οι οποίες είναι παράλληλες στην ΑΓ θα έχουμε:

$$\frac{\rho_M^2}{\rho_N^2} = \frac{\mathrm{EK} \cdot \delta_1}{\mathrm{A\Lambda} \cdot \delta_2}$$

ενώ καθώς τα δύο αυτά πολύγωνα είναι όμοια ισχύει και ότι

$$\frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{A\Lambda}} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\delta_1}{\delta_2}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{\rho_M^2}{\rho_N^2} = \frac{ΕΚ}{ΑΛ} \cdot \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{ΕΚ^2}{ΑΛ^2}$$

και άρα

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{ΕΚ^2}{ΑΛ^2}$$

που είναι η αποδεικτέα.

Πρέπει ακόμα να δειχθεί ότι ο λόγος του αθροίσματος του όγκου του περιγεγραμμένου περί το σφαιρικό τμήμα σχήματος και του κώνου με βάση την βάση του σφαιρικού τμήματος και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας προς το άθροισμα των όγκων του εγγεγραμμένου στο ίδιο σφαιρικό τμήμα σχήματος και του κώνου με βάση την βάση του σφαιρικού τμήματος και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των πλευρών του του περιγεγραμμένου περί το τμήμα ΑΒΓ του μέγιστου κύκλου πολυγώνου και του εγγεγραμμένου στο ίδιο τμήμα κύκλου πολυγώνου.

Θεωρούμε τον κώνο Ξ που έχει βάση κύκλου με εμβαδόν ίσο με αυτό του κύκλου Μ και ύψος ίσο με την ακτίνα της μικρότερης σφαίρας.

Τότε ο όγκος του κώνου Ξ είναι ίσος με το άθροισμα των όγκων του περιγεγραμμένου περί το σφαιρικό τμήμα σχήματος και του κώνου που έχει βάση τον κύκλο διαμέτρου ΕΖ και κορυφή το κέντρο Δ της σφαίρας (Πόρισμα 7, Πρότασης 40).

Έστω ακόμα ο κώνος Ο με βάση κύκλο ίσου εμβαδού με αυτό του κύκλου Ν και ύψος ίσο με την αγόμενη κάθετη από το Δ προς της ΑΛ.

Έτσι, ο όγκος του κώνου Ο είναι ίσος με το άθροισμα των όγκων του εγγεγραμμένου στο σφαιρικό τμήμα σχήματος και του κώνου με βάση τον κύκλο διαμέτρου ΑΓ και κορυφή το κέντρο Δ της σφαίρας (Πρόταση 38).

Αν συμβολίσουμε με ρ την ακτίνα της αρχικής σφαίρας και με κ την κάθετη από το Δ προς την ΑΛ από την ομοιότητα των τριγώνων ΔΑΛ και ΔΕΚ έχουμε:

$$\frac{ΕΚ}{ΑΛ} = \frac{\rho}{\kappa}$$

ενώ καθώς παραπάνω έχουμε δείξει ότι

$$\frac{\rho_M^2}{\rho_N^2} = \frac{ΕΚ^2}{ΑΛ^2}$$

θα είναι και

$$\frac{ΕΚ}{ΑΛ} = \frac{\rho_M}{\rho_N} = \frac{\delta_M}{\delta_N}.$$

Άρα

$$\frac{ΕΚ}{ΑΛ} = \frac{\rho}{\kappa} = \frac{\delta_M}{\delta_N}$$

Καθώς όμως το ύψος του κώνου Ξ είναι ίσο με ρ και η διάμετρος της βάσης του είναι ίση με δ_M ενώ αντίστοιχα το ύψος του κώνου Ο είναι ίσο με κ και η διάμετρος της βάσης του ίση με δ_N, από την αναλογία

$$\frac{\rho}{\kappa} = \frac{\delta_M}{\delta_N},$$

συμπεραίνουμε ότι οι κώνοι Ξ και Ο είναι όμοιοι και άρα (Λήμμα 5, Πρόταση 16 και Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 12) ισχύει:

$$\frac{|\Xi|}{|O|} = \frac{\delta_M^3}{\delta_N^3} = \frac{EK^3}{A\Lambda^3}$$

Συμβολίζοντας με o_1 τον όγκο του περιγεγραμμένου περί το σφαιρικό τμήμα σχήματος, με o_2 τον όγκο του εγγεγραμμένου στο σφαιρικό τμήμα σχήματος, με κ_1 τον όγκο του κώνου με βάση τον κύκλο διαμέτρου ΕΖ και κορυφή το Δ και κ_2 τον όγκο του κώνου με βάση τον κύκλο διαμέτρου ΑΓ και κορυφή το Δ από την παραπάνω καθώς $|\Xi| = |o_1| + |\kappa_1|$ και $|O| = |o_2| + |\kappa_2|$ προκύπτει ότι

$$\frac{|o_1| + |\kappa_1|}{|o_2| + |\kappa_2|} = \frac{EK^3}{A\Lambda^3}$$

που είναι η αποδεικτέα. ◘

Πρόταση 42 (149) *Η επιφάνεια ενός σφαιρικού τμήματος που είναι μικρότερο του ημισφαιρίου έχει εμβαδόν ίσο με αυτό του κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι ίση με το αγόμενο ευθύγραμμο τμήμα από την κορυφή του τμήματος προς την περιφέρεια του κύκλου που είναι η βάση του σφαιρικού τμήματος.*

Απόδειξη. Έστω σφαίρα, ο μέγιστος κύκλος της ΑΒΓ και το σφαιρικό τμήμα της (που είναι μικρότερο του ημισφαιρίου) με βάση τον κύκλο διαμέτρου ΑΓ που είναι κάθετος στον κύκλο ΑΒΓ.

Λαμβάνουμε ακόμα τον κύκλο Ζ του οποίου η ακτίνα είναι ίση με ΑΒ.

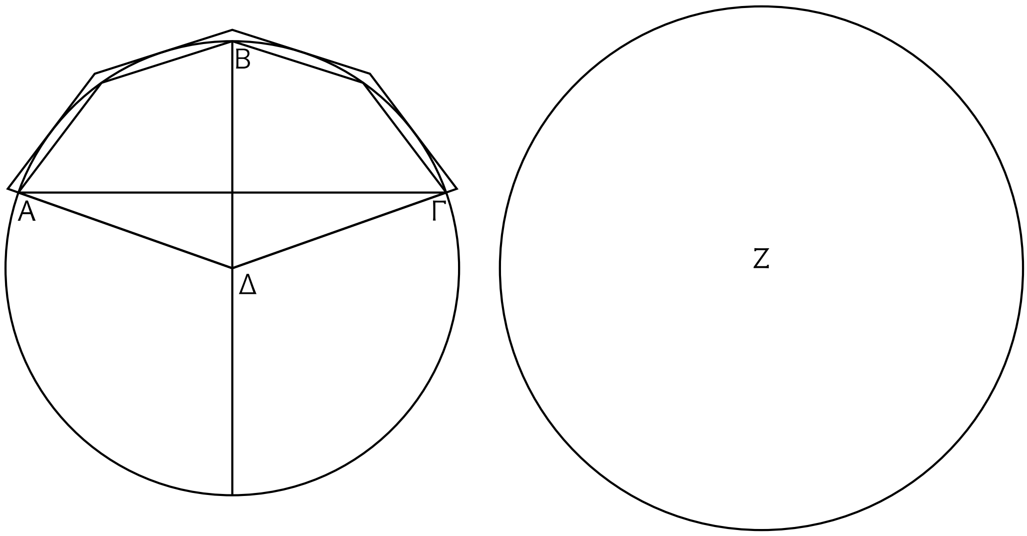
Πρέπει να δείξουμε ότι η επιφάνεια του σφαιρικού τμήματος ΑΒΓ έχει εμβαδόν ίσο με αυτό του κύκλου Ζ.

Αν υποθέσουμε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας του σφαιρικού τμήματος, έστω ε, δεν είναι ίσο με $|Z|$ τότε θα ισχύει είτε $\varepsilon > |Z|$ είτε $\varepsilon < |Z|$.

1^{η} Περίπτωση: Έστω $\varepsilon < |Z|$.

Λαμβάνουμε το κέντρο Δ της σφαίρας και φέρνουμε τις ΔΑ, ΔΓ τις οποίες προεκτείνουμε.

Επειδή τώρα έχουμε δύο άνισα μεγέθη, τα ε και $|Z|$, από την Πρόταση 6 έπεται ότι μπορούμε να εγγράψουμε στον σφαιρικό τομέα ΑΒΓ πολύγωνο ισόπλευρο και αρτιογώνιο και να περιγράψουμε περί αυτόν ένα άλλο πολύγωνο όμοιο με το προηγούμενο τέτοια ώστε ο λόγος των εμβαδών τους να είναι μικρότερος από τον λόγο $\varepsilon/|\mathrm{Z}|$.



Συμβολίζοντας με ε_1 το εμβαδόν του περιγεγραμμένου πολυγώνου και με ε_2 αυτό του εγγεγραμμένου έχουμε

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{\varepsilon}{|\mathrm{Z}|}.$$

Αν τώρα ο μέγιστος κύκλος της σφαίρας περιστραφεί δημιουργούνται δύο στερεά σχήματα εκ περιστροφής που περιέχονται σε κωνικές επιφάνειες και το ένα είναι περιγεγραμένο περί το σφαιρικό τμήμα ενώ το άλλο είναι εγγεγραμμένο σε αυτό.

Αν συμβολίσουμε με E_1 το εμβαδόν της επιφάνειας του περιγεγραμμένου περί το σφαιρικό τμήμα στερεού σχήματος και με E_2 το εμβαδόν της επιφάνειας του εγγεγραμμένου στο σφαιρικό τμήμα στερεού σχήματος θα ισχύει

$$\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

καθώς καθένας από τους λόγους αυτούς είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου της πλευράς του περιγεγραμμένου περί τον τομέα πολυγώνου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου σε αυτόν πολυγώνου.

Αλλά

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{\varepsilon}{|\mathrm{Z}|}$$

και καθώς $\mathrm{E}_1 > \varepsilon$ (Πρόταση 39) από την προηγούμενη έπεται ότι $\mathrm{E}_2 > |\mathrm{Z}|$.

Αυτό όμως είναι αδύνατον να ισχύει καθώς έχει αποδειχθεί ότι $E_2 < |Z|$ (Πρόταση 37).

$2^η$ Περίπτωση: Έστω $\varepsilon < |Z|$.

Όπως προηγουμένως περιγράφουμε περί τον τομέα πολύγωνο ισόπλευρο και αρτιογώνιο και εγγράφουμε σε αυτόν ένα άλλο πολύγωνο όμοιο με το προηγούμενο με εμβαδά ε_1 και ε_2 αντίστοιχα ώστε

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{|Z|}{\varepsilon}$$

Εργαζόμενοι όπως προηγούμενως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν μπορεί να ισχύει $|Z| > \varepsilon$.

Καθώς λοιπόν δεν μπορεί να ισχύει είτε $|Z| < \varepsilon$ είτε $|Z| > \varepsilon$ συμπεραίνουμε ότι $|Z| = \varepsilon$ που είναι η αποδεικτέα. ◙

Πρόταση 43 (150) *Η επιφάνεια ενός σφαιρικού τμήματος που είναι μεγαλύτερο του ημισφαιρίου έχει εμβαδόν ίσο με αυτό του κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι ίση με το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή του σφαιρικού τμήματος προς την περιφέρεια του κύκλου ο οποίος είναι η βάση του σφαιρικού τμήματος.*

Απόδειξη. Έστω σφαίρα και σε αυτήν μέγιστος κύκλος. Θεωρούμε ότι η σφαίρα έχει τμηθεί από επίπεδο κάθετο στον μέγιστο κύκλο της ΑΒΓΔ που διέρχεται από την ΑΔ.

Έστω ακόμα το σφαιρικό τμήμα ΑΒΔ που είναι μικρότερο του ημισφαιρίου και η διάμετρος $ΒΓ \perp ΑΔ$.

Από το Β φέρνουμε τις ΒΑ και ΒΓ και θεωρούμε τον κύκλο Ε που έχει την ακτίνα του ίση με ΑΒ, τον κύκλο Ζ που έχει την ακτίνα του ίση με ΑΓ και τον κύκλο Η που έχει την ακτίνα του ίση με ΒΓ.

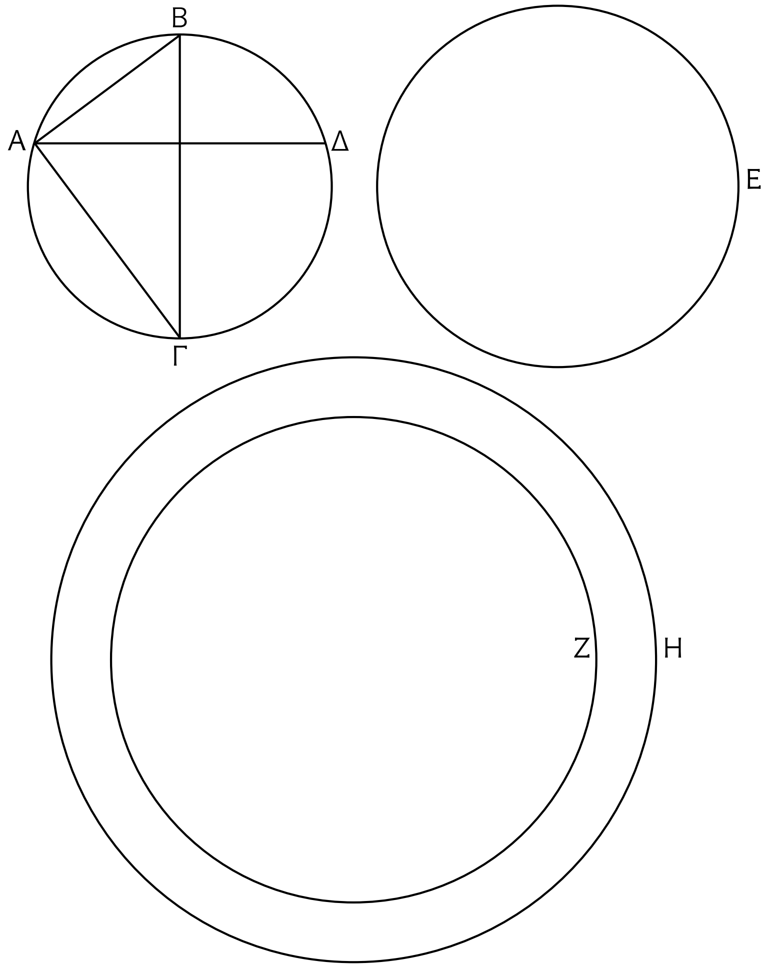
Τότε, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Στοιχεία, Βιβλίο 1, Πρόταση 47) έπεται ότι $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ καθώς $\widehat{ΒΑΔ} = 1$ ορθή διότι βαίνει σε ημικύκλιο (Στοιχεία, Βιβλίο 3, Πρόταση 43) και άρα θα είναι και $|H| = |E| + |Z|$ (Στοιχεία, Βιβλίο 12, Πρόταση 2).

Αν συμβολίσουμε με ε το εμβαδόν της συνολικής επιφάνειας της σφαίρας τότε θα είναι $\varepsilon = |H|$.

Πράγματι από την Πρόταση 33 έχουμε ότι αυτή είναι ίση με το τετραπλάσιο του εμβαδού του μέγιστου κύκλου (διαμέτρου ΒΓ), δηλαδή $\varepsilon = 4 \cdot E_M$, όπου με E_M συμβολιζουμε το εμβαδόν του μέγιστου κύκλου της σφαίρας.

Και επειδή $\rho_H = ΒΓ = 2 \cdot \rho$ όπου με ρ_H συμβολίζουμε την ακτίνα του κύκλου Η ενώ με ρ την ακτίνα της σφαίρας, θα είναι και $\rho_H^2 = 4 \cdot \rho^2$. Έτσι $|H| = 4 \cdot E_M = \varepsilon$.

Επίσης $|\mathrm{E}| = \varepsilon_{\mathrm{AB\Delta}}$ (όπου με $\varepsilon_{\mathrm{AB\Delta}}$ συμβολίζουμε το εμβαδόν του σφαιρικού τμήματος) καθώς το σφαιρικό τμήμα ΑΒΔ είναι μικρότερο του ημισφαιρίου (Πρόταση 42).



Συνεπώς

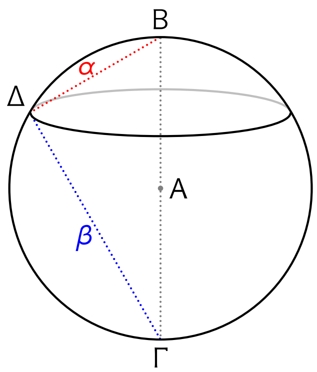
$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{AB\Delta}} + |\mathrm{Z}| \quad \text{ή} \quad |\mathrm{Z}| = \varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{AB\Delta}}$$

Άρα το εμβαδόν του κύκλου Ζ είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας του τμήματος που προκύπτει όταν από την συνολική επιφάνεια της σφαίρας αφαιρεθεί η επιφάνεια του σφαιρικού τμήματος ΑΒΔ.

Και αυτή είναι η επιφάνεια του σφαιρικού τμήματος ΑΓΔ που είναι μεγαλύτερο του ημισφαιρίου. ◘

Στμ: Αν α είναι το μήκος του αγόμενου ευθύγραμμου τμήματος από την κορυφή του σφαιρικού τμήματος που είναι μικρότερο του ημισφαιρίου προς την περιφέρεια του κύκλου που είναι η βάση του, σύμφωνα με την Πρόταση 42 το εμβαδόν του σφαιρικού τμήματος είναι ίσο με $\pi\alpha^2$.

Αν αντίστοιχα β είναι το μήκος του αγόμενου ευθύγραμμου τμήματος από την κορυφή του σφαιρικού τμήματος που είναι μεγαλύτερο του ημισφαιρίου προς την περιφέρεια του κύκλου που είναι η βάση του, σύμφωνα με την Πρόταση 43 το εμβαδόν του σφαιρικού τμήματος είναι ίσο με $\pi\beta^2$.



Αθροίζοντας τα εμβαδά των δύο σφαιρικών τμημάτων προκύπτει το εμβαδόν της επιφάνειας ολόκληρης της σφαίρας:

$$\pi\alpha^2 + \pi\beta^2 = \pi(\alpha^2 + \beta^2) = \pi(2\rho)^2 = 4\pi\rho^2.$$

Πρόταση 44 (150) *Ο όγκος ενός σφαιρικού τομέα είναι ίσος με τον όγκο ενός κώνου που έχει βάση ίσου εμβαδού με αυτό της επιφάνειας του σφαιρικού τμήματος το οποίο αντιστοιχεί στον σφαιρικό τομέα και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας.*

Στμ: Αν α είναι το μήκος του αγόμενου ευθύγραμμου τμήματος από την κορυφή του σφαιρικού τμήματος (που αντιστοιχεί στον σφαιρικό τομέα) προς την περιφέρεια του κύκλου που είναι η βάση του, η πρόταση αυτή μας δίνει ότι ο όγκος του σφαιρικού τομέα είναι ίσος με $(1/3)\pi\alpha^2\rho$, όπου ρ η ακτίνα της σφαίρας.

Απόδειξη. Έστω σφαίρα που έχει μέγιστο κύκλο τον ΑΒΔ και κέντρο το Γ.

Θεωρούμε ακόμα τον κώνο Θ που έχει βάση ίσου εμβαδού με αυτό της επιφάνειας του σφαιρικού τμήματος ΑΒΔ και ύψος ίσο με την ΒΓ.

Πρέπει να δείξουμε ότι ο σφαιρικός τομέας ΑΒΓΔ είναι ισοδύναμος με τον κώνο Θ.

Δηλαδή αν o είναι ο όγκος του σφαιρικού τομέα ΑΒΓΔ τότε ισχύει $o = |\Theta|$.

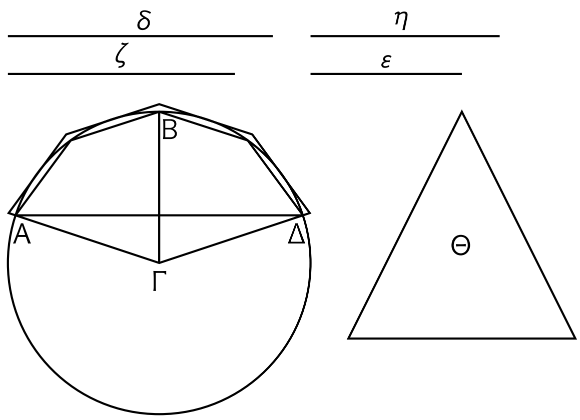
1η Περίπτωση: Έστω ότι $o > |\Theta|$.

Τότε υπάρχουν δύο άνισα μεγέθη, τα o και $|\Theta|$, οπότε είναι δυνατόν να ληφθούν τα ευθύγραμμα τμήματα δ και ε με $\delta > \varepsilon$ ώστε να ισχύει

$$\frac{\delta}{\varepsilon} < \frac{o}{|\Theta|}$$

ενώ είναι δυνατόν να ληφθούν ακόμα δύο ευθύγραμμα τμήματα ζ και η τέτοια ώστε όσο υπερέχει το δ του ζ να υπερέχει και το ζ του η όπως και το η του ε, δηλαδή να ισχύει

$$\delta - \zeta = \zeta - \eta = \eta - \varepsilon.$$



Στην συνέχεια περιγράφουμε περί τον επίπεδο τομέα του κύκλου (τον κυκλικό τομέα ΑΓΔ) ένα πολύγωνο ισόπλευρο και αρτιογώνιο και εγγραφουμε στον ίδιο κυκλικό τομέα ένα άλλο πολύγωνο όμοιο με το προηγούμενο ώστε ο λόγος των πλευρών των δύο πολυγώνων να είναι μικρότερος από τον λόγο δ/ζ (Πρόταση 4).

Δηλαδή αν συμβολίσουμε με λ_1 και λ_2 τις πλευρές του περιγεγραμμένου περί τον κυκλικό τομέα ΑΓΔ πολυγώνου και του εγγεγραμμένου στον ίδιο κυκλικό τομέα πολυγώνου θα ισχύει:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < \frac{\delta}{\zeta}.$$

Αν τώρα ο κύκλος περιστραφεί θα γραφτούν δύο στερεά σχήματα που περιέχονται σε κωνικές επιφάνειες και άρα ο λόγος του αθροίσματος των όγκων του περιγεγραμμένου περί τον τομέα στερεού σχήματος και του κώνου με κορυφή το Γ προς το άθροισμα των όγκων του εγγεγραμμένου στον τομέα σχήματος και του κώνου με κορυφή το Γ είναι ίσος με τον λόγο του κύβου της πλευράς του περιγεγραμμένου περί τον κυκλικό τομέα ΑΓΔ πολυγώνου προς τον κύβο της πλευράς του εγγεγραμμένου στον ίδιο τομέα πολυγώνου.

Έτσι, συμβολίζοντας με o_1, o_2 τους όγκους του περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου στερεού αντίστοιχα και με κ τον όγκο του κώνου με κορυφή το Γ και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανισότητα έχουμε:

$$\frac{o_1 + \kappa}{o_2 + \kappa} = \frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3} < \frac{\delta^3}{\zeta^3}.$$

Καθώς όμως (Πρόταση 34, Απόδειξη Ευτόκιου),

$$\frac{\delta^3}{\zeta^3} < \frac{\delta}{\varepsilon},$$

από την προηγούμενη έπεται ότι

$$\frac{o_1 + \kappa}{o_2 + \kappa} < \frac{\delta}{\varepsilon}$$

και άρα

$$\frac{o_1 + \kappa}{o_2 + \kappa} < \frac{\mathrm{O}}{|\Theta|}$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{o_1 + \kappa}{o} < \frac{o_2 + \kappa}{|\Theta|}.$$

Καθώς όμως $o_1 + \kappa > o$ θα είναι και $o_2 + \kappa > |\Theta|$ (Στοιχεία, Βιβλίο 5, Πρόταση 16) που όμως είναι αδύνατον καθώς έχουμε αποδείξει ότι το εγγεγραμμένο σχήμα έχει όγκο μικρότερο από αυτόν του κώνου με βάση τον κύκλο του οποίου η ακτίνα είναι ίση με το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή του σφαιρικού τμήματος προς την περιφέρεια του κύκλου που είναι η βάση του σφαιρικού τμήματος και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας, δηλαδή του κώνου Θ που έχει βάση κύκλο ίσου εμβαδού με την επιφάνεια του τμήματος και ύψος ίσο με την ακτίνα της σφαίρας (Προτάσεις 42, 43 και Πόρισμα 5 της Πρότασης 38).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν είναι δυνατόν ο όγκος του σφαιρικού τομέα ΑΒΓΔ να είναι μεγαλύτερος από τον όγκο του κώνου Θ.

2^{η} Περίπτωση: Έστω ότι $o < |\Theta|$.

Όπως πριν υπάρχουν δυο άνισα μεγέθη, τα o και $|\Theta|$, οπότε είναι δυνατόν να ληφθούν τα ευθύγραμμα τμήματα δ και ε με $\delta > \varepsilon$ ώστε να ισχύει

$$\frac{\delta}{\varepsilon} < \frac{|\Theta|}{o}$$

ενώ είναι δυνατόν να ληφθούν ακόμα δύο ευθύγραμμα τμήματα ζ και η ώστε

$$\delta - \zeta = \zeta - \eta = \eta - \varepsilon,$$

δηλαδή τα δ, ζ, η και ε αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Εργαζόμενοι όπως και στην προηγούμενη περίπτωση βρίσκουμε ότι

$$\frac{o_1 + \kappa}{o_2 + \kappa} < \frac{\delta}{\varepsilon}$$

οπότε καθώς
$$\frac{\delta}{\varepsilon} < \frac{|\Theta|}{o}$$
έχουμε
$$\frac{o_1 + \kappa}{o_2 + \kappa} < \frac{|\Theta|}{o}.$$
Έτσι θα είναι και
$$\frac{o_1 + \kappa}{|\Theta|} < \frac{o_2 + \kappa}{o}.$$

Αλλά $o > o_2 + \kappa$ οπότε θα είναι και $|\Theta| > o_1 + \kappa$.

Η τελευταία όμως δεν είναι δυνατόν να ισχύει καθώς από το Πόρισμα 8 της Πρότασης 40 έχουμε αποδείξει ότι ο κώνος Θ έχει όγκο μικρότερο από το στερεό σχήμα που έχει περιγραφεί περί τον τομέα και άρα $|\Theta| < o_1 + \kappa$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο όγκος του σφαιρικού τομέα ΑΒΓΔ δεν μπορεί να είναι ούτε μικρότερος από τον όγκο του κώνου Θ.

Τελικά επειδή δεν μπορεί να ισχύει είτε $o > |\Theta|$ είτε $o < |\Theta|$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $o = |\Theta|$ που είναι η αποδεικτέα. ◙

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

Αρχαίο Κείμενο

Εισαγωγή (9)

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ χαίρειν

Πρότερον μὲν ἀπέσταλκά σοι τῶν ὑφ᾽ ἡμῶν τεθεωρημένων γράψας μετὰ ἀποδείξεως, ὅτι πᾶν τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον: ὕστερον δὲ ἡμῖν ὑποπεσόντων θεωρημάτων ἀξίων λόγου πεπραγματεύμεθα περὶ τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν. Ἔστιν δὲ τάδε: πρῶτον μέν, ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶν τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ: ἔπειτα δέ, ὅτι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος: πρὸς δὲ τούτοις, ὅτι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστιν τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ταῦτα δὲ τὰ συμπτώματα τῇ φύσει προυπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, ἠγνοεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινενοηκότος ὅτι τούτων τῶν σχημάτων ἐστὶν συμμετρία: διόπερ οὐκ ἂν ὀκνήσαιμι ἀντιπαραβαλεῖν αὐτὰ πρός τε τὰ τοῖς ἄλλοις γεωμέτραις τεθεωρημένα καὶ πρὸς τὰ δόξαντα πολὺ ὑπερέχειν τῶν ὑπὸ Εὐδόξου περὶ τὰ στερεὰ θεωρηθέντων, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον ἐστὶ μέρος πρίσματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῇ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὅτι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον: καὶ γὰρ τούτων προυπαρχόντων φυσικῶς περὶ ταῦτα τὰ σχήματα, πολλῶν πρὸ Εὐδόξου γεγενημένων ἀξίων λόγου γεωμετρῶν συνέβαινεν ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι μηδ᾽ ὑφ᾽ ἑνὸς κατανοηθῆναι. Ἐξέσται δὲ περὶ τούτων ἐπισκέψασθαι τοῖς δυνησομένοις. Ὤφειλε μὲν οὖν Κόνωνος ἔτι ζῶντος ἐκδίδοσθαι ταῦτα: τῆνον γὰρ ὑπολαμβάνομέν που μάλιστα ἂν δύνασθαι κατανοῆσαι ταῦτα καὶ τὴν ἁρμόζουσαν ὑπὲρ αὐτῶν ἀπόφασιν ποιήσασθαι: δοκιμάζοντες δὲ καλῶς ἔχειν μεταδιδόναι τοῖς οἰκείοις τῶν μαθημάτων ἀποστέλλομέν σοι τὰς ἀποδείξεις ἀναγράψαντες, ὑπὲρ ὧν ἐξέσται τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφομένοις ἐπισκέψασθαι. Ἐρρωμένως. Γράφονται πρῶτον τά τε ἀξιώματα καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν.

Ὀρισμοί καὶ Ἀξιώματα

Ὀρισμοί 1 (10)

(όρ. 1) Εἰσί τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

(όρ. 2) Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμήν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ᾽ αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

(όρ. 3) Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπιφάνειαί τινές εἰσιν πεπερασμέναι, αὐταὶ μὲν οὐκ ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσαι ἐν ἐπιπέδῳ, αἳ τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσιν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

(όρ. 4) Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς ἐπιφανείας, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ᾽ αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

(όρ. 5) Τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ κορυφὴν ἔχων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κώνου.

(όρ. 6) Ῥόμβον δὲ καλῶ στερεόν, ἐπειδὰν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες τὰς κορυφὰς ἔχωσιν ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ᾽ εὐθείας ὦσι κείμενοι, τὸ ἐξ ἀμφοῖν τοῖν κώνοιν συγκείμενον στερεὸν σχῆμα.

Λαμβάνω δὲ ταῦτα:

Λαμβανόμενα 2 (12)

(κ.ἔν. 1) Τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν.

(κ.ἐν. 2) Τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας, ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας καὶ τῆς εὐθείας τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην.

(κ.ἐν. 3) Ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ἔχωσιν, ἐλάσσονα εἶναι τὴν ἐπίπεδον.

(κ.ἐν. 4) Τῶν δὲ ἄλλων ἐπιφανειῶν καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ᾖ, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας, ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἡ ἑτέρα ἐπιφάνεια καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην.

(κ.ἐν. 5) Ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων.

Τούτων δὲ ὑποκειμένων, ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ, φανερὸν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἐλάσσων ἐστὶν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας: ἑκάστη γὰρ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτεμνομένης.

Τούτων δὲ ὑποκειμένων, ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ, φανερὸν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἐλάσσων ἐστὶν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας: ἑκάστη γὰρ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτεμνομένης.

Πρότασις 1 (12) *Ἐὰν περὶ κύκλον πολύγωνον περιγραφῇ, ἡ τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου περίμετρος μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.*

Ἀπόδειξις. Περὶ γὰρ κύκλον πολύγωνον περιγεγράφθω τὸ ὑποκείμενον. Λέγω ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

Ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ ΒΑΛ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΛ περιφερείας διὰ τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαν περιλαμβάνειν τὴν περιφέρειαν, ὁμοίως δὲ καὶ συναμφότερος μὲν ἡ ΔΓ, ΓΒ τῆς ΔΒ, συναμφότερος δὲ ἡ ΛΚ, ΚΘ τῆς ΛΘ, συναμφότερος δὲ ἡ ΖΗΘ τῆς ΖΘ, ἔτι δὲ συναμφότερος ἡ ΔΕ, ΕΖ τῆς ΔΖ, ὅλη ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. ◘

Πρότασις 2 (13) *Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Δ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ. Λέγω ὅτι δυνατόν ἐστι δύο εὐθείας ἀνίσους εὑρεῖν τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα ποιούσας.

Κείσθω διὰ τὸ β′ τοῦ α′ τῶν Εὐκλείδου τῷ Δ ἴσον τὸ ΒΓ, καὶ κείσθω τις εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΖΗ: τὸ δὴ ΓΑ ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ Δ. Πεπολλαπλασιάσθω οὖν, καὶ ἔστω τὸ ΑΘ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΘ τοῦ ΑΓ, τοσαυταπλάσιος ἔστω ἡ ΖΗ τῆς ΗΕ: ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΘΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ: καὶ ἀνάπαλίν ἐστιν, ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς ΑΘ. Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστιν τὸ ΑΘ τοῦ Δ, τουτέστι τοῦ ΓΒ, τὸ ἄρα ΓΑ πρὸς τὸ ΑΘ λόγον ἐλάσσονα ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑ πρὸς ΓΒ. Ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΓΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ: ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑ πρὸς ΓΒ: καὶ συνθέντι ἡ ΕΖ [ἄρα] πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ [διὰ λῆμμα]. Ἴσον δὲ τὸ ΒΓ τῷ Δ: ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ.

Εὑρημέναι εἰσὶν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι ποιοῦσαι τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα [τουτέστιν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον]. ◘

Πρότασις 3 (14) *Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων καὶ κύκλου δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι, ὅπως ἡ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ὑποκείμενος. Λέγω οὖν ὅτι δυνατόν ἐστι ποιεῖν τὸ ἐπίταγμα.

Εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ Θ, ΚΛ, ὧν μείζων ἔστω ἡ Θ, ὥστε τὴν Θ πρὸς τὴν ΚΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Λ τῇ ΛΚ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΛΜ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ Θ ἴση κατήχθω ἡ ΚΜ [δυνατὸν γὰρ τοῦτο], καὶ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΓΕ, ΔΖ. Τέμνοντες οὖν τὴν ὑπὸ τῶν ΔΗΓ γωνίαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ αἰεὶ τοῦτο ποιοῦντες λείψομέν τινα γωνίαν ἐλάσσονα ἢ διπλασίαν τῆς ὑπὸ ΛΚΜ. Λελείφθω καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ΝΗΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΓ: ἡ ἄρα ΝΓ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου [ἐπείπερ ἡ ὑπὸ ΝΗΓ γωνία μετρεῖ τὴν ὑπὸ ΔΗΓ ὀρθὴν οὖσαν, καὶ ἡ ΝΓ ἄρα περιφέρεια μετρεῖ τὴν ΓΔ τέταρτον οὖσαν κύκλου: ὥστε καὶ τὸν κύκλον μετρεῖ. Πολυγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου: φανερὸν γάρ ἐστι τοῦτο]. Καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΓΗΝ γωνία δίχα τῇ ΗΞ εὐθείᾳ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ ἐφαπτέσθω τοῦ κύκλου ἡ ΟΞΠ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΗΝΠ, ΗΓΟ: ὥστε καὶ ἡ ΠΟ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον καὶ ἰσοπλεύρου [φανερὸν ὅτι καὶ ὁμοίου τῷ ἐγγραφομένῳ, οὗ πλευρὰ ἡ ΝΓ]. Ἐπεὶ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία ἡ ὑπὸ ΝΗΓ τῆς ὑπὸ ΛΚΜ, διπλασία δὲ τῆς ὑπὸ ΤΗΓ, ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΤΗΓ τῆς ὑπὸ ΛΚΜ. Καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Λ, Τ: ἡ ἄρα ΜΚ πρὸς ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΤ. Ἴση δὲ ἡ ΓΗ τῇ ΗΞ: ὥστε ἡ ΗΞ πρὸς ΗΤ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τουτέστιν ἡ ΠΟ πρὸς ΝΓ, ἤπερ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ: ἔτι δὲ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Α πρὸς τὸ Β. Καί ἐστιν ἡ μὲν ΠΟ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου, ἡ δὲ ΓΝ τοῦ ἐγγραφομένου: ὅπερ προέκειτο εὑρεῖν. ◘

Πρότασις 4 (15) *Πάλιν δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων καὶ τομέως δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομεὰ πολύγωνον περιγράψαι καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ πάλιν δύο μεγέθη ἄνισα τὰ Ε, Ζ, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ Ε, κύκλος δέ τις ὁ ΑΒΓ κέντρον ἔχων τὸ Δ, καὶ πρὸς τῷ Δ τομεὺς συνεστάτω ὁ ΑΔΒ: δεῖ δὴ περιγράψαι καὶ ἐγγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν ΑΒΔ τομέα ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῶν ΒΔΑ, ὅπως γένηται τὸ ἐπίταγμα. Εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ Η, ΘΚ ἄνισοι καὶ μείζων ἡ Η, ὥστε τὴν Η πρὸς τὴν ΘΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον [δυνατὸν γὰρ τοῦτο], καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ὁμοίως ἀχθείσης πρὸς ὀρθὰς τῇ ΚΘ προσβεβλήσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΛ [δυνατὸν γάρ, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ Η τῆς ΘΚ]. Τεμνομένης δὴ τῆς ὑπὸ τῶν ΑΔΒ γωνίας δίχα καὶ τῆς ἡμισείας δίχα καὶ ἀεὶ τούτου γινομένου λειφθήσεταί τις γωνία ἐλάσσων οὖσα ἢ διπλασία τῆς ὑπὸ ΛΚΘ. Λελείφθω οὖν ἡ ὑπὸ ΑΔΜ: ἡ ΑΜ οὖν γίνεται πολυγώνου πλευρὰ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον. Καὶ ἐὰν τέμωμεν τὴν ὑπὸ ΑΔΜ γωνίαν δίχα τῇ ΔΝ καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου τὴν ΝΞΟ, αὕτη πλευρὰ ἔσται τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον ὁμοίου τῷ εἰρημένῳ: καὶ ὁμοίως τοῖς προειρημένοις ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΑΜ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε μέγεθος πρὸς τὸ Ζ. ◘

Πρότασις 5 (16) *Κύκλου δοθέντος καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω κύκλος ὁ Α καὶ δύο μεγέθη ἄνισα τὰ Ε, Ζ, καὶ μεῖζον τὸ Ε: δεῖ οὖν πολύγωνον ἐγγράψαι εἰς τὸν κύκλον καὶ ἄλλο περιγράψαι, ἵνα γένηται τὸ ἐπιταχθέν.

Λαμβάνω γὰρ δύο εὐθείας ἀνίσους τὰς Γ, Δ, ὧν μείζων ἔστω ἡ Γ, ὥστε τὴν Γ πρὸς τὴν Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὴν Ε πρὸς τὴν Ζ: καὶ τῶν Γ, Δ μέσης ἀνάλογον ληφθείσης τῆς Η μείζων ἄρα καὶ ἡ Γ τῆς Η. Περιγεγράφθω δὴ περὶ κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὴν τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὴν Γ πρὸς τὴν Η [καθὼς ἐμάθομεν]: διὰ τοῦτο δὴ καὶ ὁ διπλάσιος λόγος τοῦ διπλασίου ἐλάσσων ἐστί. Καὶ τοῦ μὲν τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν διπλάσιός ἐστι ὁ τοῦ πολυγώνου πρὸς τὸ πολύγωνον [ὅμοια γάρ], τῆς δὲ Γ πρὸς τὴν Η ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ: καὶ τὸ περιγραφὲν ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ: πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. ◘

Πρότασις 6 (18) *Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων καὶ τομέως δυνατόν ἐστιν περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ὅμοιον αὐτῷ, ἵνα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.*

Ἀπόδειξις. Φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο ὅτι, ἐὰν δοθῇ κύκλος ἢ τομεὺς καὶ χωρίον τι, δυνατόν ἐστιν ἐγγράφοντα εἰς τὸν κύκλον ἢ τὸν τομέα πολύγωνα ἰσόπλευρα καὶ ἔτι ἀεὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα λείπειν τινὰ τμήματα τοῦ κύκλου ἢ τομέως, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προκειμένου χωρίου: ταῦτα γὰρ ἐν τῇ Στοιχειώσει παραδέδοται.

Δεικτέον δὲ ὅτι καὶ κύκλου δοθέντος ἢ τομέως καὶ χωρίου δυνατόν ἐστι περιγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν κύκλον ἢ τὸν τομέα, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τῆς περιγραφῆς τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου: ἔσται γὰρ ἐπὶ κύκλου δείξαντα μεταγαγεῖν τὸν ὅμοιον λόγον καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως.

Δεδόσθω κύκλος ὁ Α καὶ χωρίον τι τὸ Β. Δυνατὸν δὴ περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὰ ἀπολειφθέντα τμήματα μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου ἐλάσσονα εἶναι τοῦ Β χωρίου: καὶ γὰρ ὄντων δύο μεγεθῶν ἀνίσων, μείζονος μὲν συναμφοτέρου τοῦ τε χωρίου καὶ τοῦ κύκλου, ἐλάσσονος δὲ τοῦ κύκλου, περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ εἰρημένον μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. Τοῦτο δὴ τὸ περιγραφόμενον πολύγωνόν ἐστιν, οὗ τὰ περιλείμματα ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου τοῦ Β.

Εἰ γὰρ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ Β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον, τοῦ δὲ ἐγγραφομένου μείζων ὁ κύκλος, πολλῷ μᾶλλον τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ Β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον: καὶ διελόντι ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον: ἐλάσσονα ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ Β χωρίου. Ἢ οὕτως: ἐπεὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ Β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον, διὰ τοῦτο δὴ ἔλασσον ἔσται τὸ περιγραφὲν συναμφοτέρου: ὥστε καὶ ὅλα τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἔσται τοῦ χωρίου τοῦ Β. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως. ◘

Πρότασις 7 (19) *Ἐὰν ἐν ἰσοσκελεῖ κώνῳ πυραμὶς ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστι τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως κάθετον ἀγομένην.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ εἰς αὐτὸν ἐγγεγράφθω πυραμὶς ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν τὸ ΑΒΓ: λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, καὶ ἰσόπλευρος ἡ βάσις τῆς πυραμίδος, τὰ ὕψη τῶν περιεχόντων τριγώνων τὴν πυραμίδα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. Καὶ βάσιν μὲν ἔχει τὰ τρίγωνα τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ὕψος δὲ τὸ εἰρημένον: ὥστε τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ὕψος δὲ τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν [τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου].

[Σαφέστερον ἄλλως ἡ δεῖξις.

Ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν κῶνον πυραμὶς βάσιν [μὲν] ἔχουσα ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΓ, ΔΒ: λέγω ὅτι τὰ ΑΔΒ, ΑΔΓ, ΒΔΓ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἴση τῇ καθέτῳ τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἀγομένῃ.

Ἤχθωσαν γὰρ κάθετοι αἱ ΔΚ, ΔΛ, ΔΜ: αὗται ἄρα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Καὶ κείσθω τρίγωνον τὸ ΕΖΗ ἔχον τὴν μὲν ΕΖ βάσιν τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἴσην, τὴν δὲ ΗΘ κάθετον τῇ ΔΛ ἴσην. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΔΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΒΓ τριγώνου, ἔστιν δὲ καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΔΚ διπλάσιον τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΓ, ΔΜ διπλάσιον τοῦ

ΑΔΓ τριγώνου, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, τουτέστι τῆς ΕΖ, καὶ τῆς ΔΛ, τουτέστι τῆς ΗΘ, διπλάσιόν ἐστι τῶν ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΔΓ τριγώνων. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΕΖ, ΗΘ διπλάσιον τοῦ ΕΖΗ τριγώνου: ἴσον ἄρα τὸ ΕΖΗ τρίγωνον τοῖς ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΔΓ τριγώνοις]. ◘

Πρότασις 8 (21) *Ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶν τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κῶνος, οὗ βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ πυραμὶς περιγεγράφθω, ὥστε τὴν βάσιν αὐτῆς, τουτέστι τὸ ΔΕΖ πολύγωνον, περιγεγραμμένον περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον εἶναι: λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ [ὁ ἄξων τοῦ κώνου ὀρθός ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, τουτέστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον, καὶ] αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας, ἔσονται ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΔΕ, ΖΕ, ΖΔ. Αἱ ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ ἄρα αἱ εἰρημέναι κάθετοι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις: πλευραὶ γάρ εἰσιν τοῦ κώνου. Κείσθω δὴ τὸ τρίγωνον τὸ ΘΚΛ ἴσην ἔχον τὴν μὲν ΘΚ τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΔΕΖ τριγώνου, τὴν δὲ ΛΜ κάθετον ἴσην τῇ ΗΑ. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ ΔΕ, ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΕΔΗ τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΖ, ΗΒ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΖΗ τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ ΕΖ, ΓΗ διπλάσιόν ἐστιν τοῦ ΕΗΖ τριγώνου, ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ΘΚ καὶ τῆς ΑΗ, τουτέστι τῆς ΜΛ, διπλάσιον τῶν ΕΔΗ, ΖΔΗ, ΕΗΖ τριγώνων. Ἔστιν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΚ, ΛΜ διπλάσιον τοῦ ΛΚΘ τριγώνου: διὰ τοῦτο δὴ ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΔΕΖ, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου. ◘

Πρότασις 9 (22) *Ἐὰν κώνου τινὸς ἰσοπλεύρου εἰς τὸν κύκλον, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, εὐθεῖα γραμμὴ ἐμπέσῃ, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῆς εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, τὸ περιληφθὲν τρίγωνον ὑπό τε τῆς ἐμπεσούσης καὶ τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἔλασσον ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐπιζευχθεισῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κώνου ἰσοσκελοῦς βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ, καὶ διήχθω τις εἰς αὐτὸν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ Α, Γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ: λέγω ὅτι τὸ ΑΔΓ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστιν τῆς ἐπιφανείας τῆς κωνικῆς τῆς μεταξὺ τῶν ΑΔΓ.

Τετμήσθω ἡ ΑΒΓ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΒ, ΔΒ: ἔσται δὴ τὰ ΑΒΔ, ΒΓΔ τρίγωνα μείζονα τοῦ ΑΔΓ τριγώνου. Ὧι δὴ ὑπερέχει τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, ἔστω τὸ Θ. Τὸ δὴ Θ ἤτοι τῶν ΑΒ, ΒΓ τμημάτων ἔλασσόν ἐστι ἢ οὔ.

Ἔστω μὴ ἔλασσον πρότερον. Ἐπεὶ οὖν δύο εἰσὶν ἐπιφάνειαι ἥ τε κωνικὴ ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ΑΕΒ τμήματος καὶ ἡ τοῦ ΑΔΒ τριγώνου τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ, μείζων ἔσται ἡ περιλαμβάνουσα τῆς περιλαμβανομένης: μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ΑΕΒ τμήματος τοῦ ΑΒΔ τριγώνου. Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ μεταξὺ τῶν ΒΔΓ μετὰ τοῦ ΓΖΒ τμήματος μείζων ἐστὶν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου: ὅλη ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια μετὰ τοῦ Θ χωρίου μείζων ἐστὶ τῶν εἰρημένων τριγώνων. Τὰ δὲ εἰρημένα τρίγωνα ἴσα ἐστὶν τῷ τε ΑΔΓ τριγώνῳ καὶ τῷ Θ χωρίῳ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ Θ χωρίον: λοιπὴ ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΔΓ τριγώνου.

Ἔστω δὴ τὸ Θ ἔλασσον τῶν ΑΒ, ΒΓ τμημάτων. Τέμνοντες δὴ τὰς ΑΒ, ΒΓ περιφερείας δίχα καὶ τὰς ἡμισείας αὐτῶν δίχα λείψομεν τμήματα ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Θ χωρίου. Λελείφθω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ. Πάλιν τοίνυν κατὰ τὰ αὐτὰ ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΕ μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΕ τμήματος μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΔΕ τριγώνου, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ΕΔΒ μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς ΕΒ τμήματος μείζων ἐστὶν τοῦ ΕΔΒ τριγώνου: ἡ ἄρα ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ τμημάτων μείζων ἐστὶν τῶν ΑΔΕ, ΕΒΔ τριγώνων. Ἐπεὶ δὲ τὰ ΑΕΔ, ΔΕΒ τρίγωνα μείζονά ἐστιν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, καθὼς δέδεικται, πολλῷ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ τμημάτων μείζων ἐστὶ τοῦ ΑΔΒ τριγώνου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΒΔΓ μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν ΒΖ, ΖΓ τμημάτων μείζων ἐστὶν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου: ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ μετὰ τῶν εἰρημένων τμημάτων μείζων ἐστὶ τῶν ΑΒΔ, ΔΒΓ τριγώνων. Ταῦτα δέ ἐστιν ἴσα τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ καὶ τῷ Θ χωρίῳ: ὧν τὰ εἰρημένα τμήματα ἐλάσσονα τοῦ Θ χωρίου: λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΔΓ τριγώνου. ◘

Πρότασις 10 (26) *Ἐὰν ἐπιψαύουσαι ἀχθῶσιν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι τῷ κύκλῳ καὶ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν καὶ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, τὰ περιεχόμενα τρίγωνα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν μείζονά ἐστιν τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κῶνος οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου, ὅ ἐστιν κορυφὴ τοῦ κώνου, ἐπὶ τὰ Α, Δ, Γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΔ, ΕΓ: λέγω ὅτι τὰ ΑΔΕ, ΔΕΓ τρίγωνα μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕ, ΓΕ εὐθειῶν καὶ τῆς ΑΒΓ περιφερείας.

Ἤχθω γὰρ ἡ ΗΒΖ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου καὶ παράλληλος οὖσα τῇ ΑΓ δίχα τμηθείσης τῆς ΑΒΓ περιφερείας κατὰ τὸ Β, καὶ ἀπὸ τῶν Η, Ζ ἐπὶ τὸ Ε ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΕ, ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ μείζους εἰσὶν αἱ ΗΔ, ΔΖ τῆς ΗΖ, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ ΗΑ, ΖΓ: ὅλαι ἄρα αἱ ΑΔ, ΔΓ μείζους εἰσὶν τῶν ΑΗ, ΗΖ, ΖΓ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ πλευραί εἰσιν τοῦ κώνου, ἴσαι εἰσὶν διὰ τὸ ἰσοσκελῆ εἶναι τὸν κῶνον: ὁμοίως δὲ καὶ κάθετοί εἰσιν [ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι, τὰ δὲ ὑπὸ τῶν καθέτων καὶ τῶν βάσεων διπλασιόνά ἐστιν τῶν τριγώνων]: μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΕΔ, ΔΕΓ τρίγωνα τῶν ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τριγώνων [εἰσὶν γὰρ αἱ μὲν ΑΗ, ΗΖ, ΖΓ ἐλάσσους τῶν ΓΔ, ΔΑ, τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν ἴσα] [φανερὸν γὰρ ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπὶ τὴν ἐφαπὴν τῆς βάσεως ἐπιζευγνυμένη κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην]. Ὧι δὴ μείζονά ἐστιν τὰ ΑΕΔ, ΔΓΕ τρίγωνα τῶν ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τριγώνων, ἔστω τὸ Θ χωρίον. Τὸ δὴ Θ χωρίον ἤτοι ἔλαττόν ἐστιν τῶν ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ ἀποτμημάτων ἢ οὐκ ἔλαττον.

Ἔστω πρότερον μὴ ἔλαττον. Ἐπεὶ οὖν εἰσιν ἐπιφάνειαι σύνθετοι, ἥ τε τῆς πυραμίδος τῆς ἐπὶ βάσεως τοῦ ΗΑΓΖ τραπεζίου κορυφὴν ἔχουσα τὸ Ε καὶ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΕΓ μετὰ τοῦ ΑΒΓ τμήματος, καὶ πέρας ἔχουσι τὴν αὐτὴν περίμετρον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου, δῆλον ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ ΑΕΓ τριγώνου μείζων ἐστὶν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ τμήματος τοῦ ΑΒΓ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΒΓ τμῆμα: λοιπὰ ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ μετὰ τῶν ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ περιλειμμάτων μείζονά ἐστιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕ, ΕΓ. Τῶν δὲ ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ περιλειμμάτων οὐκ ἔλασσόν ἐστιν τὸ Θ χωρίον: πολλῷ ἄρα τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα μετὰ τοῦ Θ μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ. Ἀλλὰ τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα μετὰ τοῦ Θ ἐστὶν τὰ ΑΕΔ, ΔΕΓ τρίγωνα: τὰ ἄρα ΑΕΔ, ΔΕΓ τρίγωνα μείζονα ἔσται τῆς εἰρημένης κωνικῆς ἐπιφανείας.

Ἔστω δὴ τὸ Θ ἔλασσον τῶν περιλειμμάτων. Ἀεὶ δὴ περιγράφοντες πολύγωνα περὶ τὰ τμήματα ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων λείψομέν τινα ἀπολείμματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Θ χωρίου. Λελείφθω καὶ ἔστω τὰ ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ, ΛΟΓ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Θ χωρίου, καὶ ἐπεζεύχθω ἐπὶ τὸ Ε. Πάλιν δὴ φανερὸν ὅτι τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα τῶν ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ τριγώνων ἔσται μείζονα [αἵ τε γὰρ βάσεις τῶν βάσεών εἰσι μείζους καὶ τὸ ὕψος ἴσον]. Ἔτι δὲ πάλιν ὁμοίως μείζονα ἔχει ἐπιφάνειαν ἡ πυραμὶς ἡ βάσιν μὲν ἔχουσα τὸ ΑΜΝΞΟΓ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ε, χωρὶς τοῦ ΑΕΓ τριγώνου, τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ μετὰ τοῦ ΑΒΓ τμήματος. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΒΓ τμῆμα: λοιπὰ ἄρα τὰ ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ τρίγωνα μετὰ τῶν ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ, ΛΟΓ περιλειμμάτων μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ. Ἀλλὰ τῶν μὲν εἰρημένων περιλειμμάτων μεῖζόν ἐστιν τὸ Θ χωρίον, τῶν δὲ ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ τριγώνων μείζονα ἐδείχθη τὰ ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα: πολλῷ ἄρα τὰ ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα μετὰ τοῦ Θ χωρίου, τουτέστι τὰ ΑΔΕ, ΔΕΓ τρίγωνα, μείζονά ἐστιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ εὐθειῶν. ◘

Πρότασις 11 (29) *Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ ὀρθοῦ κυλίνδρου δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν μείζων ἐστὶν τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου εὐθειῶν καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύλινδρος ὀρθός, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒ κύκλος, ἀπεναντίον δὲ ὁ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ: λέγω ὅτι ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ τῆς ΑΒ [διαμέτρου] μείζους εἰσίν, καί ἐστιν ἰσουψῆ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπ᾽ αὐτῶν, μείζονα οὖν ἐστιν τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν [αἱ] βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τοῦ ΑΒΔΓ παραλληλογράμμου. Τίνι ἄρα μείζονά ἐστιν; Ἔστω τῷ Η χωρίῳ. Τὸ δὴ Η χωρίον ἤτοι ἔλασσον τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἐπιπέδων ἐστὶ τμημάτων ἢ οὐκ ἔλασσον.

Ἔστω πρότερον μὴ ἔλασσον. Καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ [τρίγωνα] πέρας ἔχει τὸ τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ [ἐπίπεδα] πέρας ἔχει τὸ τοῦ ΑΔΒΓ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν περιλαμβάνει, καὶ ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαί εἰσιν, μείζων οὖν ἐστιν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ ἐπίπεδα τμήματα τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν [αἱ] βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τῶν ΑΕΒ, ΓΖΔ τριγώνων. Κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ τρίγωνα: λοιπὴ οὖν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστι τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. Τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, ἴσα ἐστὶν τῷ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμῳ καὶ τῷ Η χωρίῳ: λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν μείζων ἐστὶ τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ Η χωρίον τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἐπιπέδων τμημάτων. Καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ περιφερειῶν δίχα κατὰ τὰ Θ, Κ, Λ, Μ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ [τῶν δὲ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἄρα ἐπιπέδων τμημάτων ἀφαιρεῖται οὐκ ἔλασσον ἢ τὸ ἥμισυ τὰ ΑΘΕ, ΕΚΒ, ΓΛΖ, ΖΜΔ τρίγωνα]. Τούτου οὖν ἑξῆς γινομένου καταλειφθήσεταί τινα τμήματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Η χωρίου. Καταλελείφθω καὶ ἔστω τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονα ἔσται τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ ἐπίπεδα τμήματα πέρας ἔχει τὸ τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τῶν ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ εὐθυγράμμων, κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ εὐθύγραμμα: λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστιν τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. Τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονά ἐστιν τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ: καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστιν τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. Τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, ἴσα ἐστὶν τῷ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμῳ καὶ τῷ Η χωρίῳ: καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστιν τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ Η χωρίου. Ἀφαιρεθέντα δὲ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ τμήματα τοῦ Η χωρίου ἐλάσσονα λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου.

Πρότασις 12 (33) *Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων τῶν εὐθειῶν ἀχθῶσίν τινες ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων, οἵ εἰσιν βάσεις τοῦ κυλίνδρου, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν οὖσαι καὶ συμπέσωσιν, τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπό τε τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονα ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ ἔστωσαν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι, ὧν πέρατα τὰ Α, Γ, ἀπὸ δὲ τῶν Α, Γ ἤχθωσαν ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η, νοείσθωσαν δὲ καὶ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τῶν περάτων τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εὐθεῖαι ἠγμέναι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου: δεικτέον ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονά ἐστι τῆς κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Ἤχθω γὰρ ἡ ΕΖ ἐπιψαύουσα, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ σημείων ἤχθωσάν τινες εὐθεῖαι παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου ἕως [τῆς ἐπιφανείας] τῆς ἑτέρας βάσεως: τὰ δὴ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΓ καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονά ἐστιν τῶν παραλληλογράμμων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τῶν ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου [ἐπεὶ γὰρ αἱ ΕΗ, ΗΖ τῆς ΕΖ μείζους εἰσίν, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ ΑΕ, ΖΓ]. Ὧι δὴ μείζονά ἐστιν, ἔστω τὸ Κ χωρίον. Τοῦ δὴ Κ χωρίου τὸ ἥμισυ ἤτοι μεῖζόν ἐστι τῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ εὐθειῶν καὶ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ΒΘ, ΘΓ περιφερειῶν ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον μεῖζον. Τῆς δὴ ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τοῦ ΑΕΖΓ τραπεζίου καὶ τοῦ κατεναντίον αὐτοῦ ἐν τῇ ἑτέρα βάσει τοῦ κυλίνδρου πέρας ἐστὶν ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ κατὰ τὴν ΑΓ. Ἔστιν δὲ καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν καὶ τῶν τμημάτων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ πέρας ἡ αὐτὴ περίμετρος: αἱ οὖν εἰρημέναι ἐπιφάνειαι τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τυγχάνουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ, καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καί τινα μὲν περιλαμβάνει ἡ ἑτέρα αὐτῶν, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχουσιν: ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ περιλαμβανομένη. Ἀφαιρεθέντων οὖν κοινῶν τοῦ τε ΑΒΓ τμήματος καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡ κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τῶν σχημάτων τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ καὶ τῶν ἀπεναντίον αὐτῶν. Αἱ δὲ τῶν εἰρημένων παραλληλογράμμων ἐπιφάνειαι μετὰ τῶν εἰρημένων σχημάτων ἐλάττους εἰσὶν τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς ΑΗ, ΗΓ [μετὰ γὰρ τοῦ Κ μείζονος ὄντος τῶν σχημάτων ἴσαι ἦσαν αὐτοῖς]: δῆλον οὖν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΓΗ καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονά ἐστι τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν.

Εἰ δὲ μή ἐστιν μεῖζον τὸ ἥμισυ τοῦ Κ χωρίου τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἀχθήσονται εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ τμήματος, ὥστε γενέσθαι τὰ περιλειπόμενα σχήματα ἐλάσσονα τοῦ ἡμίσους τοῦ Κ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν δειχθήσεται. ◘

Πόρισμα 9 (37) *Τούτων δὴ δεδειγμένων φανερὸν [ἐπὶ μὲν τῶν προειρημένων] ὅτι, ἐὰν εἰς κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας [ἕκαστον γὰρ τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα τριγώνων ἔλασσόν ἐστιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν: ὥστε καὶ ὅλη ⟨ἡ⟩ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως], καὶ ὅτι, ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως μείζων ἐστὶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως [κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκείνῳ].*

Πόρισμα 10 (38) *Φανερὸν δὲ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ὅτι τε, ἐὰν εἰς κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένη ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως [ἔλασσον γὰρ ἕκαστον παραλληλόγραμμον τοῦ πρίσματός ἐστι τῆς καθ᾿ αὑτὸ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας], καὶ ὅτι, ἐὰν περὶ κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένη μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως.*

Πρότασις 13 (38) *Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ Α κύκλος, καὶ ἔστω τῇ μὲν διαμέτρῳ τοῦ Α κύκλου ἴση ἡ ΓΔ, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΕΖ, ἐχέτω δὲ μέσον λόγον τῶν ΔΓ, ΕΖ ἡ Η, καὶ κείσθω κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ Η, ὁ Β: δεικτέον ὅτι ὁ Β κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶ ἢ ἐλάσσων. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων. Δύο δὴ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ Β κύκλου δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν Β κύκλον ἰσόπλευρον πολύγωνον ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν Β κύκλον. Νοείσθω δὴ περιγεγραμμένον καὶ ἐγγεγραμμένον, καὶ περὶ τὸν Α κύκλον περιγεγράφθω εὐθύγραμμον ὅμοιον τῷ περὶ τὸν Β περιγεγραμμένῳ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ εὐθυγράμμου πρίσμα: ἔσται δὴ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον. Ἔστω δὲ καὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ περὶ τὸν Α κύκλον ἴση ἡ ΚΔ καὶ τῇ ΚΔ ἴση ἡ ΔΖ, τῆς δὲ ΓΔ ἡμίσεια ἔστω ἡ ΓΤ: ἔσται δὴ τὸ ΚΔΤ τρίγωνον ἴσον τῷ περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ περὶ τὸν Α κύκλον [ἐπειδὴ βάσιν μὲν ἔχει τῇ περιμέτρῳ ἴσην, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α κύκλου], τὸ δὲ ΕΛ παραλληλόγραμμον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένου [ἐπειδὴ περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος]. Κείσθω δὴ τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΕΡ: ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ΖΡΛ τρίγωνον τῷ ΕΛ παραλληλογράμμῳ, ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστιν τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς Α, Β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον [τὰ εὐθύγραμμα], ὅνπερ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει: ἕξει ἄρα τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ περὶ τὸν Β κύκλον εὐθύγραμμον λόγον, ὃν ἡ ΤΔ πρὸς Η δυνάμει [αἱ γὰρ ΤΔ, Η ἴσαι εἰσὶν ταῖς ἐκ τῶν κέντρων]. Ἀλλ᾽ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΤΔ πρὸς Η δυνάμει, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ ΤΔ πρὸς ΡΖ μήκει [ἡ γὰρ Η τῶν ΤΔ, ΡΖ μέση ἐστὶ ἀνάλογον διὰ τὸ καὶ τῶν ΓΔ, ΕΖ: πῶς δὲ τοῦτο; ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΓ, ἡ δὲ ΡΕ τῇ ΕΖ, διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς ΤΔ, καὶ ἡ ΡΖ τῆς ΡΕ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΔΤ, οὕτως ἡ ΡΖ πρὸς ΖΕ. Τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΤΔ, ΡΖ. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ Η: καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΤΔ, ΡΖ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΤΔ πρὸς Η, οὕτως ἡ Η πρὸς ΡΖ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΤΔ πρὸς ΡΖ, τὸ ἀπὸ τῆς ΤΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Η: ἐὰν γὰρ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας εἶδος τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον]: ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΤΔ πρὸς ΡΖ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΛΖ [ἐπειδήπερ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΚΔ, ΛΖ]: τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον, ὅνπερ τὸ ΤΚΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΖΛ τρίγωνον. Ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ΖΛΡ τρίγωνον τῷ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ: ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν Α κύλινδρον περιγεγραμμένου τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν Β κύκλον ἴση ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Α κυλίνδρου πρὸς τὸν Β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένου πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ κύκλῳ τῷ Β ἐγγεγραμμένον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν Β κύκλον: καὶ ἐναλλάξ: ὅπερ ἀδύνατον [ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ Β κύκλῳ ἔλασσόν ἐστιν τοῦ Β κύκλου]. Οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ Β κύκλος ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Ἔστω δή, εἰ δυνατόν, μείζων. Πάλιν δὴ νοείσθω εἰς τὸν Β κύκλον εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸν Β κύκλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν Α κύκλον πολύγωνον ὅμοιον τῷ εἰς τὸν Β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, καὶ πρίσμα ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου: καὶ πάλιν ἡ ΚΔ ἴση ἔστω τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου, καὶ ἡ ΖΛ ἴση αὐτῇ ἔστω. Ἔσται δὴ τὸ μὲν ΚΤΔ τρίγωνον μεῖζον τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου [διότι βάσιν μὲν ἔχει τὴν περίμετρον αὐτοῦ, ὕψος δὲ μεῖζον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου πλευρᾶς ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένης καθέτου], τὸ δὲ ΕΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος τῇ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένῃ [διότι περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, ὅ ἐστιν βάσις τοῦ πρίσματος]: ὥστε καὶ τὸ ΡΛΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ ἐν τοῖς Α, Β κύκλοις ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν δυνάμει. Ἔχει δὲ καὶ τὰ ΚΤΔ, ΖΡΔ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων δυνάμει: τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Β ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΖΡ τρίγωνον. Ἔλασσον δέ ἐστι τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τοῦ ΚΤΔ τριγώνου: ἔλασσον ἄρα καὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τοῦ ΖΡΛ τριγώνου: ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος τοῦ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένου: ὅπερ ἀδύνατον [ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον περὶ τὸν Β κύκλον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἢ ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐναλλάξ, μεῖζον δέ ἐστι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν Β κύκλον τοῦ Β κύκλου, μεῖζον ἄρα ἐστὶν τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ Β κύκλῳ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου: ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος]. Οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ Β κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων: ἴσος ἄρα ἐστίν. ◘

Πρότασις 14 (42) *Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς χωρὶς τῆς βάσεως ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν βάσις τοῦ κώνου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ Α κύκλος, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἔστω ἡ Γ, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου ἔστω ἴση ἡ Δ, τῶν δὲ Γ, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε, ὁ δὲ Β κύκλος ἐχέτω τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ Ε ἴσην: λέγω ὅτι ὁ Β κύκλος ἐστὶν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. Ἔστω πρότερον ἐλάσσων. Ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα ἥ τε ἐπιφάνεια τοῦ κώνου καὶ ὁ Β κύκλος, καὶ μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου: δυνατὸν ἄρα εἰς τὸν Β κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Β κύκλον. Νοείσθω δὴ καὶ περὶ τὸν Α κύκλον πολύγωνον περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένῳ, καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν Α κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου πυραμὶς ἀνεστάτω ἀναγεγραμμένη τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστιν τὰ πολύγωνα τὰ περὶ τοὺς Α, Β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάμει πρὸς ἀλλήλας, τουτέστιν ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς Ε δυνάμει, τουτέστιν ἡ Γ πρὸς Δ μήκει. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ Γ πρὸς Δ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον περὶ τὸν Α κύκλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον [ἡ μὲν γὰρ Γ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτῳ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, ἡ δὲ Δ τῇ πλευρᾷ τοῦ κώνου: κοινὸν δὲ ὕψος ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὰ ἡμίση τῶν ἐπιφανειῶν]: τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Α κύκλον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον καὶ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον: ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένῳ. Ἐπεὶ οὖν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν κῶνον περιγεγραμμένης πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Β κύκλον: ὅπερ ἀδύνατον [ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ Β κύκλῳ ἔλασσον ἔσται τοῦ Β κύκλου]. Οὐκ ἄρα ὁ Β κύκλος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ μείζων. Εἰ γὰρ δυνατόν ἐστιν, ἔστω μείζων. Πάλιν δὴ νοείσθω εἰς τὸν Β κύκλον πολύγωνον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, καὶ εἰς τὸν Α κύκλον νοείσθω ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ὅμοιον τῷ εἰς τὸν Β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ᾽ αὐτοῦ πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ ἐν τοῖς Α, Β κύκλοις ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας: τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ μήκει. Ἡ δὲ Γ πρὸς τὴν Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον [ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου]: μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ Β ἐγγεγραμμένον ἢ αὐτὸ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος: μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τοῦ ἐν τῷ Β πολυγώνου ἐγγεγραμμένου. Ἐλάσσονα δὲ λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἢ ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου: πολλῷ ἄρα τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ ἐγγεγραμμένης ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου: ὅπερ ἀδύνατον [τὸ μὲν γὰρ περιγεγραμμένον πολύγωνον μεῖζόν ἐστιν τοῦ Β κύκλου, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου]. Οὐκ ἄρα οὐδὲ μείζων ἐστὶν ὁ κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων: ἴσος ἄρα. ◘

Πρότασις 15 (47) *Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ Α κύκλος, ἔστω δὲ τῇ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α ἴση ἡ Β, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου ἡ Γ: δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Α κύκλον καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Β.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Β, Γ μέση ἀνάλογον ἡ Ε, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ Δ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ Ε: ὁ Δ ἄρα κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου [τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ τούτου]. Ἐδείχθη δὲ ὁ Δ κύκλος πρὸς τὸν Α κύκλον λόγον ἔχων τὸν αὐτὸν τῷ τῆς Γ πρὸς Β μήκει [ἑκάτερος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς Ε πρὸς Β δυνάμει διὰ τὸ τοὺς κύκλους πρὸς ἀλλήλους εἶναι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων: εἰ γὰρ αἱ διάμετροι, καὶ τὰ ἡμίση, τουτέστιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων: ταῖς δὲ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν αἱ Β, Ε]. Δῆλον οὖν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Α κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ Γ πρὸς Β μήκει. ◘

Πρότασις 16 (48) *Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε πλευρᾶς τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταῖς ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κῶνος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν ΔΕ, ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἔστω ὁ ΒΗ, κύκλος δέ τις ἐκκείσθω, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τε ΑΔ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΗΑ, ἔστω δὲ κύκλος ὁ Θ: λέγω ὅτι ὁ Θ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ Λ, Κ, καὶ τοῦ μὲν Κ κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ ὑπὸ ΒΔΖ, τοῦ δὲ Λ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ ὑπὸ ΒΑΗ: ὁ μὲν ἄρα Λ κύκλος ἴσος ἐστὶν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΓ κώνου, ὁ δὲ Κ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΒ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΖ καὶ τῷ ὑπὸ τῆς ΑΔ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν ΔΖ τῇ ΑΗ, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΑΗ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΔ, ΔΖ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Κ κύκλου, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Θ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν Κ, Θ κύκλων: ὥστε καὶ ὁ Λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τοῖς Κ, Θ κύκλοις. Ἀλλ᾽ ὁ μὲν Λ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΒΑΓ κώνου, ὁ δὲ Κ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΒΕ κώνου: λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΔΕ, ΑΓ ἴση ἐστὶ τῷ Θ κύκλῳ.

[Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΒΑΗ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΗ. Τετμήσθω ἡ ΒΑ πλευρά, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἤχθω παράλληλος τῇ ΑΗ ἡ ΔΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΒΑ ἡ ΚΛ: λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΒΑΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΒΔΖ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ ΒΑΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΒΗ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΔΖ τὸ ΒΖ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ ὁ ΜΝΞ γνώμων: τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ ΔΑΗ ἴσον ἐστὶν τῷ ΚΗ διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ΚΘ παραπλήρωμα τῷ ΔΛ παραπληρώματι, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑ, ΔΖ τῷ ΔΛ: ὅλον ἄρα τὸ ΒΗ, ὅπερ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΑΗ, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΒΔΖ καὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ ὑπὸ ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΑΗ, ΔΖ]. ◘

Λήμματα 2 (49) *1. Οἱ κῶνοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς βάσεσιν: καὶ οἱ ἴσας ἔχοντες βάσεις τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον τοῖς ὕψεσιν.*

2. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παρὰ τὴν βάσιν, ἔστιν, ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

3. Τοῖς δὲ κυλίνδροις ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν οἱ κῶνοι οἱ ἔχοντες τὰς αὐτὰς βάσεις τοῖς κυλίνδροις.

4. *Καὶ τῶν ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν: καὶ ὧν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσίν.*
5. *Καὶ οἱ κῶνοι, ὧν αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν τοῖς ἄξοσιν [τουτέστιν τοῖς ὕψεσι], πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶν τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.*

Ταῦτα δὲ πάντα ὑπὸ τῶν πρότερον ἀπεδείχθη. ◘

◘

Πρότασις 17 (50) *Ἐὰν ὦσιν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου κάθετος ἀγομένη τῷ ὕψει ἴση ᾖ, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ τοῦ ΑΒΓ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ, τὸ δὲ ὕψος τὸ ΑΗ ἴσον ἔστω τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ Θ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, οἷον ἐπὶ τὴν ΔΕ, καθέτῳ ἠγμένῃ τῇ ΚΘ: λέγω ὅτι ἴσοι εἰσὶν οἱ κῶνοι.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βάσις τοῦ ΑΒΓ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ [τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον], ὡς ἄρα ἡ τοῦ ΒΑΓ βάσις πρὸς τὴν τοῦ ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΔΕΖ. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΚ [ἐδείχθη γὰρ τοῦτο, ὅτι παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἡ ΔΕ τουτέστι πρὸς ΕΘ. Ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΘΔ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΚ: ἰσογώνια γάρ ἐστι τὰ τρίγωνα]. Ἴση δέ ἐστιν ἡ ΘΚ τῇ ΑΗ: ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ΒΑΓ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ΑΒΓ. Τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν: ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΑΓ τῷ ΔΕΖ κώνῳ. ◘

Πρότασις 18 (51) *Παντὶ ῥόμβῳ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένῳ ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου κώνου τῶν περιεχόντων τὸν ῥόμβον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ ΑΒΓΔ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΓ κύκλος, ὕψος δὲ τὸ ΑΔ, ἐκκείσθω δέ τις ἕτερος ὁ ΗΘΚ τὴν μὲν βάσιν ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΓ κώνου ἴσην, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου καθέτῳ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἢ τὴν ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ ἠγμένῃ, ἔστω δὲ ἡ ΔΖ, τὸ δὲ ὕψος τοῦ ΘΗΚ κώνου ἔστω τὸ ΘΛ: ἴσον δή ἐστιν τὸ ΘΛ τῇ ΔΖ: λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ ῥόμβῳ.

Ἐκκείσθω γὰρ ἕτερος κῶνος ὁ ΜΝΞ τὴν μὲν βάσιν ἔχων ἴσην τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ κώνου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΑΔ, καὶ ἔστω τὸ ὕψος αὐτοῦ τὸ ΝΟ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΝΟ τῇ ΑΔ ἴση ἐστίν, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΝΟ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ ῥόμβος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον, ὡς δὲ ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ ΜΝΞ κῶνος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον [διὰ τὸ τὰς βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσας]: ὡς ἄρα ὁ ΜΝΞ κῶνος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ ῥόμβος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον: ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΜΝΞ τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΗΘΚ, ὡς ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ [ἡ γὰρ βάσις τοῦ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΜΝΞ]. Ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, τουτέστιν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΖ [ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα]: ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΖ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΔ τῇ ΝΟ [ὑπέκειτο γάρ], ἡ δὲ ΔΖ τῇ ΘΛ: ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ, οὕτως τὸ ΝΟ ὕψος πρὸς τὸ ΘΛ. Τῶν ΗΘΚ, ΜΝΞ ἄρα κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν: ἴσοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι. Ἐδείχθη δὲ ὁ ΜΝΞ ἴσος τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ: καὶ ὁ ΗΘΚ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ. ◘

Πρότασις 19 (52) *Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον τῆς βάσεως, ὁ δὲ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς ὁ ΑΒΓ καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν ΔΕ, κέντρον δὲ τῆς βάσεως ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΔΕ κύκλου κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ Ζ: ἔσται δὴ ῥόμβος ὁ ΒΔΖΕ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος. Ἐκκείσθω δή τις κῶνος ὁ ΚΘΛ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἔστω ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ, τὸ δὲ ὕψος, ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ τῆς ΖΗ, ἔστω ἴσον τῇ ΖΗ: λέγω ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κώνου νοηθῇ ἀφῃρημένος ὁ ΒΔΖΕ ῥόμβος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ ΘΚΛ κῶνος.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι οἱ ΜΝΞ, ΟΠΡ, ὥστε τὴν μὲν τοῦ ΜΝΞ βάσιν ἴσην εἶναι τοῦ ΑΒΓ κώνου τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΖΗ [διὰ δὴ τοῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ ΜΝΞ κῶνος τῷ ΑΒΓ κώνῳ: ἐὰν γὰρ ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει, ἔτι δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου ἀγομένη κάθετος τῷ ὕψει ἴση, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι], τὴν δὲ τοῦ ΟΠΡ κώνου βάσιν ἴσην εἶναι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΒΕ κώνου, ὕψος δὲ τῇ ΖΗ [διὰ δὴ τοῦτο καὶ ἴσος ἐστὶν ὁ ΟΠΡ κῶνος τῷ ΒΔΖΕ ῥόμβῳ: τοῦτο γὰρ προαπεδείχθη]. Ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ ΑΒΓ κώνου ἐπιφάνεια σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ΔΒΕ ἐπιφανείας καὶ τῆς μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ, ἀλλ᾽ ἡ μὲν τοῦ ΑΒΓ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΜΝΞ κώνου, ἡ δὲ τοῦ ΔΒΕ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν τῇ βάσει τοῦ ΟΠΡ, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΘΚΛ, ἡ ἄρα τοῦ ΜΝΞ βάσις ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσιν τῶν ΘΚΛ, ΟΠΡ. Καί εἰσιν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος: ἴσος ἄρα ἐστὶν καὶ ὁ ΜΝΞ κῶνος τοῖς ΘΚΛ, ΟΠΡ κώνοις. Ἀλλ᾽ ὁ μὲν ΜΝΞ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΑΒΓ κώνῳ, ὁ δὲ ΠΟΡ τῷ ΒΔΕΖ ῥόμβῳ: λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚΛ κῶνος τῷ περιλείμματι ἴσος ἐστίν. ◘

Πρότασις 20 (54) *Ἐὰν ῥόμβου ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένου ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ κορυφὴν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ ἑτέρῳ κώνῳ, ἀπὸ δὲ τοῦ ὅλου ῥόμβου ὁ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ τμηθήτω ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν ΕΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλου κῶνος ἀναγεγράφθω τὴν κορυφὴν ἔχων τὸ Δ σημεῖον: ἔσται δὴ γεγονὼς ῥόμβος ὁ ΕΒΔΖ. Καὶ νοείσθω ἀφῃρημένος ἀπὸ τοῦ ὅλου ῥόμβου, ἐκκείσθω δέ τις κῶνος ὁ ΘΚΛ τὴν μὲν βάσιν ἴσην ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν ΑΓ, ΕΖ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν ΒΑ ἢ τὴν ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ: λέγω ὅτι ὁ ΘΚΛ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ περιλείμματι. Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι οἱ ΜΝΞ, ΟΠΡ, καὶ ἡ μὲν βάσις τοῦ ΜΝΞ κώνου ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΓ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΔΗ [διὰ δὴ τὰ προδειχθέντα ἴσος ἐστὶν ὁ ΜΝΞ κῶνος τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ], τοῦ δὲ ΟΠΡ κώνου ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΕΒΖ κώνου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΔΗ [ὁμοίως δὴ ἴσος ἐστὶν ὁ ΟΠΡ κῶνος τῷ ΕΒΔΖ ῥόμβῳ]. Ἐπεὶ δὲ ὁμοίως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ κώνου σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ΕΒΖ καὶ τῆς μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΑΓ, ἀλλὰ ἡ μὲν τοῦ ΑΒΓ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΜΝΞ, ἡ δὲ τοῦ ΕΒΖ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΟΡΠ κώνου, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΘΚΛ, ἡ ἄρα βάσις τοῦ ΜΝΞ ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσιν τῶν ΟΠΡ, ΘΚΛ. Καί εἰσιν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος: καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τοῖς ΘΚΛ, ΟΠΡ κώνοις. Ἀλλ᾽ ὁ μὲν ΜΝΞ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ, ὁ δὲ ΟΠΡ κῶνος τῷ ΕΒΔΖ ῥόμβῳ: λοιπὸς ἄρα ὁ κῶνος ὁ ΘΚΛ ἴσος ἐστὶ τῷ περιλείμματι τῷ λοιπῷ. ◘

Πρότασις 21 (56) *Ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἰσόπλευρον, καὶ διαχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσα τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ὥστε αὐτὰς παραλλήλους εἶναι μιᾷ ὁποιαοῦν τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν, αἱ ἐπιζευγνύουσαι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τοῦτον ἔχουσι τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑποτείνουσα τὰς μιᾷ ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ: δῆλον δὴ ὅτι παράλληλοί εἰσιν τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ: λέγω οὖν ὅτι αἱ εἰρημέναι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τὴν ΑΓ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τῷ τῆς ΓΕ πρὸς ΕΑ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΖΚ, ΛΒ, ΗΔ, ΘΝ: παράλληλος ἄρα ἡ μὲν ΖΚ τῇ ΕΑ, ἡ δὲ ΒΛ τῇ ΖΚ, καὶ ἔτι ἡ μὲν ΔΗ τῇ ΒΛ, ἡ δὲ ΘΝ τῇ ΔΗ, καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΘΝ [καὶ ἐπεὶ δύο παράλληλοί εἰσιν αἱ ΕΑ, ΚΖ, καὶ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΕΚ, ΑΟ], ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΕΞ πρὸς ΞΑ, ἡ ΚΞ πρὸς ΞΟ. Ὡς δ' ἡ ΚΞ πρὸς ΞΟ, ἡ ΖΠ πρὸς ΠΟ, ὡς δὲ ἡ ΖΠ πρὸς ΠΟ, ἡ ΛΠ πρὸς ΠΡ, ὡς δὲ ἡ ΛΠ πρὸς ΠΡ, οὕτως ἡ ΒΣ πρὸς ΣΡ, καὶ ἔτι ὡς ἡ μὲν ΒΣ πρὸς ΣΡ, ἡ ΔΣ πρὸς ΣΤ, ὡς δὲ ἡ ΔΣ πρὸς ΣΤ, ἡ ΗΥ πρὸς ΥΤ, καὶ ἔτι ὡς ἡ μὲν ΗΥ πρὸς ΥΤ, ἡ ΝΥ πρὸς ΥΦ, ὡς δὲ ἡ ΝΥ πρὸς ΥΦ, ἡ ΘΧ πρὸς ΧΦ, καὶ ἔτι ὡς μὲν ἡ ΘΧ πρὸς ΧΦ, ἡ ΜΧ πρὸς ΧΓ [καὶ πάντα ἄρα πρὸς πάντα ἐστὶν ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα]: ὡς ἄρα ἡ ΕΞ πρὸς ΞΑ, οὕτως αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ πρὸς τὴν ΑΓ διάμετρον. Ὡς δὲ ἡ ΕΞ πρὸς ΞΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ: ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ, οὕτω πᾶσαι αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ πρὸς τὴν ΑΓ διάμετρον.

Πρότασις 22 (58) *Ἐὰν εἰς τμῆμα κύκλου πολύγωνον ἐγγραφῇ τὰς πλευρὰς ἔχον χωρὶς τῆς βάσεως ἴσας καὶ ἀρτίους, ἀχθῶσιν δὲ εὐθεῖαι παρὰ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος αἱ τὰς πλευρὰς ἐπιζευγνύουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἀχθεῖσαι πᾶσαι καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς βάσεως πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἐπιζευγνυμένη πρὸς τὴν τοῦ πολυγώνου πλευράν.*

Ἀπόδειξις. Εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ πολύγωνον ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΑΒΓ τμῆμα ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῆς βάσεως τῆς ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΗ, ΕΘ, αἵ εἰσιν παράλληλοι τῇ βάσει τοῦ τμήματος: λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ πρὸς ΒΞ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ.

Πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΕ, ΑΘ: παράλληλοι ἄρα εἰσὶν τῇ ΒΖ: διὰ δὴ ταὐτά ἐστιν, ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΚΒ, ἥ τε ΗΚ πρὸς ΚΛ καὶ ἡ ΕΜ πρὸς ΜΛ καὶ ἡ ΜΘ πρὸς ΜΝ καὶ ἡ ΞΑ πρὸς ΞΝ [καὶ ὡς ἄρα πάντα πρὸς πάντα, εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα]: ὡς ἄρα αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ πρὸς ΒΞ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΒ. Ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΒ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ: ὡς ἄρα ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ, οὕτως αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ πρὸς ΞΒ. ◘

Πρότασις 23 (59) ⟨*Ἐὰν ἐν μεγίστῳ κύκλῳ σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετράδος μετρεῖται, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.*⟩

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, αἱ δὲ ΑΓ, ΔΒ διάμετροι ἔστωσαν. Ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΑΓ διαμέτρου περιενεχθῇ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἔχων τὸ πολύγωνον, δῆλον ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια αὐτοῦ κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐνεχθήσεται, αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου γωνίαι χωρὶς τῶν πρὸς τοῖς Α, Γ σημείοις κατὰ κύκλων περιφερειῶν ἐνεχθήσονται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον: διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔσονται αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου παρὰ τὴν ΒΔ οὖσαι. Αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου πλευραὶ κατά τινων κώνων ἐνεχθήσονται, αἱ μὲν ΑΖ, ΑΝ κατ᾽ ἐπιφανείας κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΖΝ, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, αἱ δὲ ΖΗ, ΜΝ κατά τινος κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΜΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ ΖΗ, ΜΝ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΑΓ, αἱ δὲ ΒΗ, ΜΔ πλευραὶ κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ ΒΗ, ΔΜ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΓΑ: ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ πλευραὶ κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται πάλιν ὁμοίων ταύταις. Ἔσται δή τι σχῆμα ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον τῶν προειρημένων, οὗ ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Διαιρεθείσης γὰρ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν ΒΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου ἡμισφαιρίου καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ: ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν πέρας ἐστὶν τοῦ κύκλου ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον: καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ περιλαμβάνεται αὐτῶν ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ. Ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ σχήματος ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἐστὶν τῆς τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφανείας: καὶ ὅλη οὖν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. ◘

Πρότασις 24 (61) *Ἡ τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ σχήματος καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου παραλλήλοις οὔσαις τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται, καὶ ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου νοείσθω τι εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφὲν σχῆμα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ παράλληλοι οὖσαι τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ, κύκλος δέ τις ἐκκείσθω ὁ Ξ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ τῆς ἴσης ταῖς ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ: λέγω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφομένου σχήματος.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ, καὶ τοῦ μὲν Ο ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΕΖ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Π δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΕΖ, ΗΘ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΗΘ, ΓΔ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Σ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΓΔ, ΚΛ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Τ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΚΛ, ΜΝ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Υ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΜΝ. Διὰ δὴ ταῦτα ὁ μὲν Ο κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΕΖ κώνου, ὁ δὲ Π τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΗΘ, ὁ δὲ Ρ τῇ μεταξὺ τῶν ΗΘ, ΓΔ, ὁ δὲ Σ τῇ μεταξὺ τῶν ΔΓ, ΚΛ, καὶ ἔτι ὁ μὲν Τ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΚΛ, ΜΝ, ὁ δὲ Υ τῇ τοῦ ΜΒΝ κώνου ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστίν: οἱ πάντες ἄρα κύκλοι ἴσοι εἰσὶν τῇ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. Καὶ φανερὸν ὅτι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν Ο, Π, Ρ, Σ, Τ κύκλων δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ δὶς τῶν ἡμίσεων τῆς ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ, αἳ ὅλαι εἰσὶν αἱ ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ: αἱ ἄρα ἐκ τῶν κέντρων τῶν Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλων δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ πασῶν τῶν ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ξ κύκλου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς ΑΕ καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ πασῶν τῶν ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ: ἡ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ξ κύκλου δύναται τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλων: καὶ ὁ κύκλος ἄρα ὁ Ξ ἴσος ἐστὶ τοῖς Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλοις. Οἱ δὲ Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλοι ἀπεδείχθησαν ἴσοι τῇ εἰρημένῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ: καὶ ὁ Ξ ἄρα κύκλος ἴσος ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ◘

Πρότασις 25 (62) *Τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγράφθω πολύγωνον [ἀρτιόγωνον] ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται, καὶ ἀπ' αὐτοῦ νοείσθω ἐπιφάνεια ἡ ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχομένη: λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσαι τοῦ πολυγώνου αἱ ΕΙ, ΘΜ καὶ ταύταις παράλληλοι αἱ ΖΚ, ΔΒ, ΗΛ, ἐκκείσθω δέ τις κύκλος ὁ Ρ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ΕΙ, ΖΚ, ΒΔ, ΗΛ, ΘΜ: διὰ δὴ τὸ προδειχθὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος τῇ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ἴση πάσαις ταῖς ΕΙ, ΖΚ, ΒΔ, ΗΛ, ΘΜ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς εἰρημέναις καὶ τῆς ΕΑ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ κύκλου, ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ. Ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΓΕ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ: ἔλασσον ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ [ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ τῆς ΑΓ: ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ Ρ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ δύο ἄρα τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου διάμετροι μείζους εἰσὶ τῆς διαμέτρου τοῦ Ρ κύκλου, καὶ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, τουτέστι τῆς ΑΓ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ Ρ κύκλου διαμέτρου. Ὡς δὲ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τοῦ Ρ κύκλου διαμέτρου, οὕτως τέσσαρες κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ πρὸς τὸν Ρ κύκλον: τέσσαρες ἄρα κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ μείζους εἰσὶν τοῦ Ρ κύκλου]: ὁ ἄρα κύκλος ὁ Ρ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου. Ὁ δὲ Ρ κύκλος ἴσος ἐδείχθη τῇ εἰρημένῃ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος: ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ◘

Πρότασις 26 (64) *Τῷ ἐγγραφομένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν ἴσος ἐστὶν κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγραφέντος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ σφαῖρα καὶ ὁ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον, ἔστω δὲ κῶνος ὀρθὸς ὁ Ρ βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ: δεικτέον ὅτι ὁ κῶνος ὁ Ρ ἴσος ἐστὶν τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι.

Ἀπὸ γὰρ τῶν κύκλων, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ ΖΝ, ΗΜ, ΘΛ, ΙΚ, κῶνοι ἀναγεγράφθωσαν κορυφὴν ἔχοντες τὸ τῆς σφαίρας κέντρον: ἔσται δὴ ῥόμβος στερεὸς ἔκ τε τοῦ κώνου, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν ΖΝ, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, καὶ τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ αὐτὸς κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Χ σημεῖον: ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΝΑΖ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ καθέτῳ ἠγμένῃ. Πάλιν δὲ καὶ τὸ περιλελειμμένον τοῦ ῥόμβου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΖΝ, ΗΜ καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων τοῦ τε ΖΝΧ καὶ τοῦ ΗΜΧ ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΜΗ, ΖΝ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὴν ΖΗ καθέτῳ ἠγμένῃ: δέδεικται γὰρ ταῦτα. Ἔτι δὲ καὶ τὸ περιλειπόμενον τοῦ κώνου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΜ, ΒΔ καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ΜΗΧ κώνου καὶ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ἴσον τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΜ, ΒΔ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὴν ΒΗ καθέτῳ ἠγμένῃ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ ὅ τε ῥόμβος ὁ ΧΚΓΙ καὶ τὰ περιλείμματα τῶν κώνων ἴσα ἔσται τοσούτοις καὶ τηλικούτοις κώνοις, ὅσοι καὶ πρότερον ἐρρήθησαν: δῆλον οὖν ὅτι καὶ ὅλον τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ ἴσον ἐστὶν πᾶσιν τοῖς εἰρημένοις κώνοις. Οἱ δὲ κῶνοι ἴσοι εἰσὶν τῷ Ρ κώνῳ, ἐπειδὴ ὁ Ρ κῶνος ὕψος μὲν ἔχει ἑκάστῳ ἴσον τῶν εἰρημένων κώνων, βάσιν δὲ ἴσην πάσαις ταῖς βάσεσιν αὐτῶν: δῆλον οὖν ὅτι τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐστὶν τῷ ἐκκειμένῳ κώνῳ. ◘

Πρότασις 27 (66) *Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ γινόμενος κῶνος ἴσος τῷ σχήματι τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῷ σφαίρᾳ τὴν βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ὁ Ρ, ὁ δὲ κῶνος ὁ Ξ ἔστω βάσιν ἔχων ἴσην τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.

Ἐπεὶ οὖν ὁ Ρ κῶνος βάσιν ἔχει ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν ΑΖ, ἐδείχθη δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ μεγίστου κύκλου, ἔσται ἄρα ἡ τοῦ Ρ κώνου βάσις ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τῆς βάσεως τοῦ Ξ κώνου. Ἔστιν δὲ καὶ τὸ ὕψος τοῦ Ρ ἔλασσον τοῦ ὕψους τοῦ Ξ κώνου: ἐπεὶ οὖν ὁ Ρ κῶνος τὴν μὲν βάσιν ἔχει ἐλάσσονα ἢ τετραπλασίαν τῆς τοῦ Ξ βάσεως, τὸ δὲ ὕψος ἔλασσον τοῦ ὕψους, δῆλον ὡς καὶ αὐτὸς ὁ Ρ κῶνος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ Ξ κώνου. Ἀλλὰ καὶ ὁ Ρ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι: τὸ ἄρα ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ Ξ κώνου. ◘

Πρότασις 28 (67) ⟨*Ἐὰν ἐν μεγίστῳ κύκλῳ σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον περιγραφῇ, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετράδος μετρεῖται, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.*⟩

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, περὶ δὲ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, τὸ δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον κύκλος περιγεγραμμένος περιλαμβανέτω περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον γενόμενος τῷ ΑΒΓΔ. Μενούσης δὴ τῆς ΕΗ περιενεχθήτω τὸ ΕΖΗΘ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τό τε πολύγωνον καὶ ὁ κύκλος: δῆλον οὖν ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας οἰσθήσεται, ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ ΕΖΗΘ κατ' ἄλλης ἐπιφανείας σφαίρας τὸ αὐτὸ κέντρον ἐχούσης τῇ ἐλάσσονι οἰσθήσεται, αἱ δὲ ἁφαί, καθ' ἃς ἐπιψαύουσιν αἱ πλευραί, γράφουσιν κύκλους ὀρθοὺς πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, αἱ δὲ γωνίαι τοῦ πολυγώνου χωρὶς τῶν πρὸς τοῖς Ε, Η σημείοις κατὰ κύκλων περιφερειῶν οἰσθήσονται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρὸ τούτου: ἔσται οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν περὶ μὲν τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν περιγεγραμμένον, ἐν δὲ τῇ μείζονι ἐγγεγραμμένον. Ὅτι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας οὕτως δειχθήσεται: ἔστω γὰρ ἡ ΚΔ διάμετρος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ τῶν Κ, Δ σημείων ὄντων, καθ' ἃ ἅπτονται τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου. Διῃρημένης δὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν ΚΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν διαιρεθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. Καὶ φανερὸν ὅτι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ: ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιπέδων πέρας ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΚΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον: καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης: ἐλάσσων οὖν ἐστιν ἡ περιλαμβανομένη τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν: δῆλον οὖν ὅτι καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. ◘

Πρότασις 29 (69) *Τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν.*

Ἀπόδειξις. Τὸ γὰρ περιγεγραμμένον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἐγγέγραπται εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν: τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν δέδεικται ὅτι τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινουσῶν: δῆλον οὖν ἐστι τὸ προειρημένον. ◘

Πρότασις 30 (69) *Τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κύκλος καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον προκειμένοις, καὶ ὁ Λ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ ἔστω τοῦ προκειμένου περιγεγραμμένου περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν.

Ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ ΕΖΗΘ κύκλῳ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγέγραπται καὶ ἀρτιογώνιον, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ πολυγώνου πλευρὰς παράλληλοι οὖσαι τῇ ΖΘ πρὸς τὴν ΖΘ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ΘΚ πρὸς ΚΖ: ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ΖΘΚ: ὥστε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ ΖΘΚ: μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου τῆς ΘΚ. Ἡ δὲ ΘΚ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου [διπλασία γάρ ἐστιν τῆς ΧΣ οὔσης ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου]: δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος ὁ Λ κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ◘

Πρότασις 31 (71) *Τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.*

Ἀπόδειξις. Τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἐγγέγραπται ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ: τῷ δὲ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν δέδεικται ἴσος κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ: αὕτη δέ ἐστιν ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας: δῆλον οὖν ἐστι τὸ προτεθέν. ◘

Πόρισμα 11 (71) *Ἐκ τούτου δὲ φανερὸν ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιγραφόμενον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν μεῖζόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Ἐπειδὴ γὰρ ἴσος ἐστὶ τῷ σχήματι κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ὕψος δὲ ἴσον [τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ, τουτέστιν] τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ἔστι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν μείζων ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, μεῖζον ἄρα ἢ τετραπλάσιον ἔσται τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπειδὴ καὶ ὁ κῶνος ὁ ἴσος αὐτῷ μείζων ἢ τετραπλάσιος γίνεται τοῦ εἰρημένου κώνου [βάσιν τε γὰρ μείζονα ἢ τετραπλασίαν ἔχει καὶ ὕψος ἴσον].*

Πρότασις 32 (72) *Ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ σχῆμα ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὑπὸ ὁμοίων πολυγώνων τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον* *κατεσκευασμένα, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου περὶ τὸν μέγιστον κύκλον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ, αὐτὸ δὲ τὸ σχῆμα [τὸ περιγεγραμμένον] πρὸς τὸ σχῆμα τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ἔτι δὲ αἱ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευραὶ ἐπιψαυέτωσαν τοῦ κύκλου κατὰ μέσα τῶν περιφερειῶν τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου πλευρῶν, αἱ δὲ ΕΗ, ΖΘ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν ἀλλήλαις τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον καὶ ὁμοίως κείμεναι ταῖς ΑΓ, ΒΔ διαμέτροις, καὶ νοείσθωσαν ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰς ἀπεναντίον γωνίας τοῦ πολυγώνου, αἳ γίγνονται ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΖΒΔΘ παράλληλοι. Μενούσης δὴ τῆς ΕΗ διαμέτρου καὶ περιενεχθεισῶν τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔσται ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον: δεικτέον οὖν ὅτι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ, τὸ δὲ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου.

Ἔστω γὰρ ὁ μὲν Μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν, ὁ δὲ Ν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου: δύναται ἄρα τοῦ μὲν Μ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΕΛ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγεγραμμένου, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν τὸ ὑπὸ τῆς ΑΚ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστιν τὰ πολύγωνα, ὅμοια ἂν εἴη καὶ τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν [τουτέστι τῶν ἐπὶ τὰς γωνίας καὶ τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων, ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχουσιν αἱ τῶν πολυγώνων πλευραὶ δυνάμει. Ἀλλὰ καὶ ὃν ἔχει λόγον τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τοῦτον ἔχουσιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν Μ, Ν κύκλων πρὸς ἀλλήλας δυνάμει: ὥστε καὶ αἱ τῶν Μ, Ν διάμετροι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς τῶν πολυγώνων πλευραῖς. Οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχουσιν τῶν διαμέτρων, οἵτινες ἴσοι εἰσὶν ταῖς ἐπιφανείαις τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου]: δῆλον οὖν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ.

Εἰλήφθωσαν δὴ δύο κῶνοι οἱ Ο, Ξ, καὶ ἔστω ὁ μὲν Ξ κῶνος βάσιν ἔχων τὸν Ξ κύκλον ἴσον τῷ Μ, ὁ δὲ Ο βάσιν ἔχων τὸν Ο κύκλον ἴσον τῷ Ν, ὕψος δὲ ὁ μὲν Ξ κῶνος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ δὲ Ο τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετον ἠγμένην: ἴσος ἄρα ὁ μὲν Ξ κῶνος τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὴν σφαῖραν, ὁ δὲ Ο τῷ ἐγγεγραμμένῳ [δέδεικται οὖν ταῦτα]. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΕΛ πρὸς τὴν ΑΚ, ὃν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετον ἀγομένην: τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ὕψος τοῦ Ξ κώνου πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ο κώνου, ὃν ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ. Ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ Μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ Ν κύκλου λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ: τῶν ἄρα Ξ, Ο κώνων αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τοῖς ὕψεσι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον [ὅμοιοι ἄρα εἰσίν], καὶ διὰ τοῦτο τριπλασίονα λόγον ἕξει ὁ Ξ κῶνος πρὸς τὸν Ο κῶνον ἤπερ ἡ διάμετρος τοῦ Μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ Ν κύκλου. Δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ. ◘

Πρότασις 33 (75) *Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ σφαῖρά τις καὶ ἔστω τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου ὁ Α: λέγω ὅτι ὁ Α ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. Ἔστω πρότερον μείζων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ κύκλου. Ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα ἥ τε ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καὶ ὁ Α κύκλος: δυνατὸν ἄρα ἐστὶ λαβεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. Εἰλήφθωσαν αἱ Β, Γ, καὶ τῶν Β, Γ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ Δ, νοείσθω δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τετμημένη διὰ τοῦ κέντρου κατὰ τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον πολύγωνον, ὥστε ὅμοιον εἶναι τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ πολυγώνῳ καὶ τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ Β πρὸς Δ [καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα λόγος τοῦ διπλασίου λόγου ἐστὶν ἐλάσσων. Καὶ τοῦ μὲν τῆς Β πρὸς Δ διπλάσιός ἐστιν ὁ τῆς Β πρὸς τὴν Γ, τῆς δὲ πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλάσιος ὁ τῆς ἐπιφανείας τοῦ περιγεγραμμένου στερεοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου]: ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν Α κύκλον: ὅπερ ἄτοπον: ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ Α κύκλου ἐλάσσων ἐστί [δέδεικται γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἢ τετραπλασία, τοῦ δὲ μεγίστου κύκλου τετραπλάσιός ἐστιν ὁ Α κύκλος]. Οὐκ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μείζων ἐστὶ τοῦ Α κύκλου.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω: καὶ ὁμοίως εὑρήσθωσαν αἱ Β, Γ εὐθεῖαι ὥστε τὴν Β πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ὁ Α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, καὶ τῶν Β, Γ μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ ἐγγεγράφθω καὶ περιγεγράφθω πάλιν, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ τῆς Β πρὸς Δ [καὶ τὰ διπλάσια ἄρα]: ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ [ἡ Β πρὸς Γ. Ἡ δὲ Β πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ] ὁ Α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας: ὅπερ ἄτοπον: ἡ μὲν γὰρ τοῦ περιγεγραμμένου ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ Α κύκλου, ἡ δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ Α κύκλου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων: ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ τῷ Α κύκλῳ, τουτέστι τῷ τετραπλασίῳ τοῦ μεγίστου κύκλου. ◘

Πρότασις 34 (78) *Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστω κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ σφαῖρά τις καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ. Εἰ οὖν μή ἐστιν ἡ σφαῖρα τετραπλασία τοῦ εἰρημένου κώνου, ἔστω, εἰ δυνατόν, μείζων ἢ τετραπλασία: ἔστω δὲ ὁ Ξ κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τετραπλασίαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας: μείζων οὖν ἐστιν ἡ σφαῖρα τοῦ Ξ κώνου. Ἔσται δὴ δύο μεγέθη ἄνισα ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κῶνος: δυνατὸν οὖν δύο εὐθείας λαβεῖν ἀνίσους, ὥστε ἔχειν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἐλάσσονα λόγον τοῦ ὃν ἔχει ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν Ξ κῶνον. Ἔστωσαν οὖν αἱ Κ, Η, αἱ δὲ Ι, Θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν τὴν Κ τῆς Ι καὶ τὴν Ι τῆς Θ καὶ τὴν Θ τῆς Η, νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρότερον, ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς Ι, καὶ ἔστωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. Εἰ οὖν μενούσης τῆς ΑΓ διαμέτρου περιενεχθείη τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τὰ πολύγωνα, ἔσται σχήματα τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον, καὶ ἕξει τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. Ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Κ πρὸς τὴν Ι: ὥστε τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τριπλασίονα τοῦ Κ πρὸς Ι. Ἔχει δὲ καὶ ἡ Κ πρὸς Η μείζονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς Ι [τοῦτο γὰρ φανερὸν διὰ λημμάτων]: πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς Η. Ἡ δὲ Κ πρὸς Η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν Ξ κῶνον: καὶ ἐναλλάξ: ὅπερ ἀδύνατον: τὸ γὰρ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον μεῖζόν ἐστι τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ Ξ κώνου [διότι ὁ μὲν Ξ κῶνος τετραπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον τοῦ εἰρημένου κώνου ἢ τετραπλάσιον]. Οὐκ ἄρα μείζων ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ εἰρημένου.

Ἔστω, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἢ τετραπλασία: ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ σφαῖρα τοῦ Ξ κώνου. Εἰλήφθωσαν δὴ αἱ Κ, Η εὐθεῖαι, ὥστε τὴν Κ μείζονα εἶναι τῆς Η καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν πρὸς αὐτὴν τοῦ ὃν ἔχει ὁ Ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν, καὶ αἱ Θ, Ι ἐκκείσθωσαν, καθὼς πρότερον, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον νοείσθω πολύγωνον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ ἡ Κ πρὸς Ι, καὶ τὰ ἄλλα κατεσκευασμένα τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον: ἕξει ἄρα καὶ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. Ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Κ πρὸς Ι: ἕξει οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Ι. Ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Η μείζονα λόγον ἔχει ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Ι: ὥστε ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἢ ἡ Κ πρὸς τὴν Η. Ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὁ Ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν: ὅπερ ἀδύνατον: τὸ μὲν γὰρ ἐγγεγραμμένον ἔλασσόν ἐστι τῆς σφαίρας, τὸ δὲ περιγεγραμμένον μεῖζον τοῦ Ξ κώνου. Οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων: τετραπλασία ἄρα. ◘

Πόρισμα 12 (83) *Προδεδειγμένων δὲ τούτων φανερὸν ὅτι πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ μετὰ τῶν βάσεων ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ὁ μὲν γὰρ κύλινδρος ὁ προειρημένος ἑξαπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ σφαῖρα δέδεικται τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα: δῆλον οὖν ὅτι ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων ἴση δέδεικται κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τοῦ κυλίνδρου πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως, τοῦ δὲ εἰρημένου κυλίνδρου τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν ἡ* *πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως [δῆλον ὅτι ἡ μέση αὐτῶν ἀνάλογον ἴση γίνεται τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως], ὁ δὲ κύκλος ὁ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τετραπλάσιός ἐστι τῆς βάσεως, τουτέστι τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἔσται ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου: ὅλη ἄρα μετὰ τῶν βάσεων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἑξαπλασία ἔσται τοῦ μεγίστου κύκλου. Ἔστιν δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. Ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.*

Πρότασις 35 (84) *Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ τμήματι τοῦ μεγίστου κύκλου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς παραλλήλοις τῇ βάσει τοῦ τμήματος σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς τοῦ τμήματος βάσεως.*

Ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ τμῆμα, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΑΗ κύκλος [ἐγγεγράφθω σχῆμα εἰς αὐτό, οἷον εἴρηται, περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν], καὶ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΗΘ καὶ ἀρτιόπλευρον πολύγωνον τὸ ΑΓΕΘΖΔΗ χωρὶς τῆς ΑΗ πλευρᾶς, καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ Λ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΑΓ πλευρᾶς καὶ ὑπὸ πασῶν τῶν ΕΖ, ΓΔ καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως, τουτέστι τῆς ΑΚ: δεικτέον ὅτι ὁ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ.

Εἰλήφθω γὰρ κύκλος ὁ Μ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΘ πλευρᾶς καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΕΖ: γίνεται δὴ ὁ Μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν ΕΖ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον. Εἰλήφθω δὲ καὶ ἄλλος ὁ Ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΕΓ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ΕΖ, ΓΔ: ἔσται οὖν οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΕΖ, ΓΔ. Καὶ ἄλλος ὁμοίως ὁ Ξ εἰλήφθω κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΓ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρων τῶν ΓΔ, ΑΗ: καὶ αὐτὸς οὖν ἴσος ἐστὶ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΑΗ, ΓΔ. Πάντες οὖν οἱ κύκλοι ἴσοι ἔσονται τῇ ὅλῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ, καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσον δυνήσονται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ΑΓ καὶ τῆς ἴσης ταῖς ΕΖ, ΓΔ καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως τῇ ΑΚ. Ἐδύνατο δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου ἴσον τῷ αὐτῷ χωρίῳ: ὁ ἄρα Λ κύκλος ἴσος ἔσται τοῖς Μ, Ν, Ξ κύκλοις: ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος.

Ἀπόδειξις.

◘

Πρότασις 36 (86) ⟨*Ἐὰν ἐν τμήματι μεγίστου κύκλου σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόγωνον ἐγγραφῇ χωρὶς τῆς βάσεως, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος.*⟩

Ἀπόδειξις. Τετμήσθω σφαῖρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕΖ τέμνων πρὸς ὀρθὰς τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΑΒΓ τμῆμα πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόγωνον χωρὶς τῆς βάσεως τῆς ΑΒ. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον, ἐὰν μενούσης τῆς ΓΖ περιενεχθῇ τὸ σχῆμα, αἱ μὲν Δ, Ε, Α, Β γωνίαι κατὰ κύκλων οἰσθήσονται, ὧν διάμετροι αἱ ΔΕ, ΑΒ, αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τμήματος κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἔσται τὸ γενηθὲν σχῆμα στερεὸν ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον βάσιν μὲν ἔχον κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, κορυφὴν δὲ τὸ Γ. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον τὴν ἐπιφάνειαν ἐλάσσονα ἕξει τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τοῦ περιλαμβάνοντος: τὸ γὰρ αὐτὸ πέρας αὐτῶν ἐστιν ἐν ἐπιπέδῳ τοῦ τε τμήματος καὶ τοῦ σχήματος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι ἀμφότεραί εἰσιν αἱ ἐπιφάνειαι, καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας. ◘

Πρότασις 37 (87) *Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΕΖ, καὶ ἔστω τμῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ [καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τὸ εἰρημένον σχῆμα, καὶ ἐν τῷ τμήματι τοῦ κύκλου πολύγωνον], καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ διαμέτρου μὲν τῆς σφαίρας οὔσης τῆς ΘΛ, ἐπεζευγμένων δὲ τῶν ΛΕ, ΘΑ, καὶ ἔστω κύκλος ὁ Μ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΑΘ: δεικτέον ὅτι ὁ Μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ σχήματος ἐπιφανείας.

Ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος δέδεικται ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΕΘ καὶ τῶν ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ: τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ΕΘ καὶ τῶν ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΕΛ, ΚΘ περιεχομένῳ: τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΛ, ΚΘ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΘ [καὶ γὰρ τοῦ ΛΘ, ΚΘ]: φανερὸν οὖν ὅτι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ: δῆλον ἄρα ὅτι ὁ Μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος. ◘

Πρότασις 38 (89) *Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν ἔχοντι τῷ σχήματι, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῶν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ ΑΒΓ καὶ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΑΒΓ τμῆμα πολύγωνον ἀρτιόπλευρον χωρὶς τῆς ΑΓ ὁμοίως τοῖς πρότερον, καὶ μενούσης τῆς ΒΛ περιενεχθεῖσα ἡ σφαῖρα ποιείτω σχῆμά τι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον, καὶ εἰλήφθω κῶνος ὁ Κ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ: δεικτέον ὅτι ὁ Κ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τῷ ΑΕΓ.

Ἀναγεγράφθωσαν δὴ καὶ κῶνοι ἀπὸ τῶν κύκλων τῶν περὶ διαμέτρους τὰς ΘΗ, ΔΖ κορυφὴν ἔχοντες τὸ Ε σημεῖον: οὐκοῦν ὁ μὲν ΗΒΘΕ ῥόμβος στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΗΒΘ κώνου, τὸ ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΗΒ ἀγομένῃ καθέτῳ, τὸ δὲ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΘ, ΖΔ καὶ τῶν κωνικῶν τῶν ΖΕΔ, ΗΕΘ ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ βάσις μέν ἐστιν ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΘ, ΖΔ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΖΗ καθέτῳ ἠγμένῃ. Πάλιν τὸ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΖΔ, ΑΓ καὶ τῶν κωνικῶν τῶν ΑΕΓ, ΖΕΔ ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΖΔ, ΑΓ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΖΑ καθέτῳ ἠγμένῃ: οἱ οὖν εἰρημένοι κῶνοι ἴσοι ἔσονται τῷ σχήματι μετὰ τοῦ ΑΕΓ κώνου. Καὶ ὕψος μὲν ἴσον ἔχουσιν τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ, τὰς δὲ βάσεις ἴσας τῇ ἐπιφανείᾳ του ΑΖΗΒΘΔΓ σχήματος: ἔχει δὲ καὶ ὁ Κ κῶνος τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος: ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τοῖς εἰρημένοις κώνοις. Οἱ δὲ εἰρημένοι κῶνοι ἐδείχθησαν ἴσοι τῷ σχήματι καὶ τῷ ΑΕΓ κώνῳ: καὶ ὁ Κ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τε σχήματι καὶ τῷ ΑΕΓ κώνῳ. ◘

Πόρισμα 13 (90) *Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, μείζων ἐστὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος σὺν τῷ κώνῳ: ὁ γὰρ προειρημένος κῶνος μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ ἴσου* *τῷ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὴν δὲ κορυφὴν πρὸς τῷ κέντρῳ, τουτέστι τοῦ τὴν βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ: ἥ τε γὰρ βάσις τῆς βάσεως μείζων ἐστὶ [δέδεικται γὰρ τοῦτο] καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὕψους.*

Πρότασις 39 (91) ⟨*Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφανείας.*⟩

Ἀπόδειξις. Ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἔλασσον ἡμικυκλίου, ὃ ἀποτέμνει ἡ ΑΒ, καὶ κέντρον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Δ ἐπὶ τὰ Α, Β ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ περὶ τὸν γεννηθέντα τομέα περιγεγράφθω πολύγωνον καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος: ἕξει δὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ΑΒΓ κύκλῳ. Ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΕΚ περιενεχθὲν τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος κατὰ ἐπιφανείας οἰσθήσεται σφαίρας, καὶ αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου κύκλους γράψουσιν, ὧν αἱ διάμετροι ἐπιζευγνύουσιν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου οὖσαι παράλληλοι τῇ ΑΒ, τὰ δὲ σημεῖα, καθ᾽ ἃ ἅπτονται τοῦ ἐλάσσονος κύκλου αἱ τοῦ πολυγώνου πλευραί, κύκλους γράφουσιν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, ὧν διάμετροι ἔσονται αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἁφὰς παράλληλοι οὖσαι τῇ ΑΒ, αἱ δὲ πλευραὶ κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, καὶ ἔσται τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΖΗ κύκλος: ἡ δὴ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ἐπιφανείας, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΑΒ κύκλος.

Ἤχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΜ, ΒΝ: κατὰ κωνικῆς ἄρα ἐπιφανείας οἰσθήσονται, καὶ τὸ σχῆμα τὸ γενηθὲν ὑπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ΑΜΘΕΛΝΒ μείζονα ἕξει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κύκλος [πέρας γὰρ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ τὸ αὐτὸ ἔχουσιν τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κύκλον, καὶ περιλαμβάνεται τὸ τμῆμα ὑπὸ τοῦ σχήματος]. Ἀλλ᾽ ἡ γεγενημένη ὑπὸ τῶν ΖΜ, ΗΝ ἐπιφάνεια κώνου μείζων ἐστὶ τῆς γεγενημένης ὑπὸ τῶν ΜΑ, ΝΒ: ἡ μὲν γὰρ ΖΜ τῆς ΜΑ μείζων ἐστὶ [ὑπὸ γὰρ ὀρθὴν ὑποτείνει], ἡ δὲ ΝΗ τῆς ΝΒ, ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων γίνεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας [ταῦτα γὰρ δέδεικται ἐν τοῖς λήμμασιν]. Δῆλον οὖν ὅτι καὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ΠΟΡΙΣΜΑ. Καὶ φανερὸν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τοῦ περὶ τὸν τομέα ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν πασῶν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ εἰρημένου πολυγώνου [τὸ γὰρ ὑπὸ τοῦ πολυγώνου γεγραμμένον σχῆμα ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας, τοῦτο δὲ δῆλον διὰ τὸ προγεγραμμένον]. ◘

Πόρισμα 14 (92) *Καὶ φανερὸν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τοῦ περὶ τὸν τομέα ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν πασῶν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ εἰρημένου πολυγώνου [τὸ γὰρ ὑπὸ τοῦ πολυγώνου γεγραμμένον σχῆμα ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας, τοῦτο δὲ δῆλον διὰ τὸ προγεγραμμένον].*

Πρότασις 40 (93) *Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἠγμένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ σφαῖρα καὶ μέγιστος κύκλος ἐπ᾽ αὐτῆς ὁ ΑΒΓΔ καὶ κέντρον τὸ Ε, καὶ περὶ τὸν τομέα περιγεγράφθω τὸ ΛΚΖ πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος περιγεγράφθω, καὶ γεγενήσθω σχῆμα, καθάπερ πρότερον, καὶ ἔστω κύκλος ὁ Ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΚΛ. Ἀλλὰ τὸ εἰρημένον χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ΜΘ καὶ ΖΗ [ὅ δή ἐστιν ὕψος τοῦ τμήματος τῆς μείζονος σφαίρας: τοῦτο γὰρ προδέδεικται]. Τοῦ ἄρα Ν κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ ΜΘ, ΗΖ περιεχομένῳ. Ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΗΖ μείζων ἐστὶ τῆς ΔΞ [ὅ ἐστιν ὕψος τοῦ ἐλάσσονος τμήματος: ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΚΖ, ἔσται παράλληλος τῇ ΔΑ. Ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΚΛ παράλληλος, καὶ κοινὴ ἡ ΖΕ: ὅμοιον ἄρα τὸ ΖΚΗ τρίγωνον τῷ ΔΑΞ τριγώνῳ. Καί ἐστιν μείζων ἡ ΖΚ τῆς ΑΔ: μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῆς ΔΞ], ἴση δὲ ἡ ΜΘ τῇ διαμέτρῳ τῇ ΓΔ [ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΟ, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΜΟ τῇ ΟΖ, ἡ δ ΘΕ τῇ ΕΖ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΟ τῇ ΜΘ: διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΘ τῇ ΕΟ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΔ διπλασία ἐστὶν τῆς ΕΟ: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΘ τῇ ΓΔ], τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΞ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ: ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ ΚΖΛ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ: ὁ γὰρ Ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν τομέα σχήματος. ◘

Πόρισμα 15 (94) *Γίνεται δὴ καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸν τομέα σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ* *κέντρον, ἴσον κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν πλευρὰν καθέτῳ ἠγμένῃ [ἣ δὴ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας: τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα τῷ τομεῖ ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας, ἧς κέντρον ἐστὶ τὸ αὐτό: δῆλον οὖν τὸ λεγόμενόν ἐστιν ἐκ τοῦ προγεγραμμένου].*

Πόρισμα 16 (94) *Ἐκ τούτου δὲ φανερὸν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ μεῖζόν ἐστι κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου: ὁ γὰρ ἴσος κῶνος τῷ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τὴν μὲν βάσιν μείζονα ἕξει τοῦ εἰρημένου κύκλου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας.*

Πρότασις 41 (95) ⟨*Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας ἐλάσσονι ἡμισφαιρίου περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εγγεγραμμένου ὁμοίου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὴν πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὴν πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ.*⟩

Ἀπόδειξις. Ἔστω πάλιν σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ ΑΒΓ καὶ κέντρον τὸ Δ, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓ τομέα ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον, καὶ τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω, καὶ παράλληλοι ἔστωσαν αἱ πλευραὶ ταῖς πλευραῖς, καὶ κύκλος περιγεγράφθω περὶ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον μενούσης τῆς ΗΒ περιενεχθέντες οἱ κύκλοι ποιείτωσαν σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα: δεικτέον ὅτι ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ ἡ πλευρὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τὸ δὲ σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ.

Ἔστω γὰρ ὁ Μ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς ΕΖ: ἔσται δὴ ὁ Μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. Εἰλήφθω δὴ καὶ ὁ Ν κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΑΓ: ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία ἐστὶ πρὸς ἄλληλα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ πλευρᾶς [καὶ ὡς ἄρα τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, ὁ Μ κύκλος πρὸς τὸν Ν κύκλον]: φανερὸν οὖν ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ [τὸν δὲ αὐτόν, ὃν καὶ τὸ πολύγωνον].

Ἔστω πάλιν κῶνος ὁ Ξ βάσιν μὲν ἔχων τῷ Μ ἴσην, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας: ἴσος δὴ οὗτός ἐστιν ὁ κῶνος τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΕΖ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ. Καὶ ἔστω ἄλλος κῶνος ὁ Ο βάσιν μὲν ἴσην ἔχων τῷ Ν, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΑΛ κάθετον ἠγμένην: ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ κέντρον: ταῦτα γὰρ πάντα προγέγραπται. Καὶ [ἐπεί] ἐστιν ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας οὕτως ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου [τοῦ Δ] ἐπὶ τὴν ΑΛ κάθετον ἠγμένην, ἐδείχθη δὲ ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΑΛ οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου [καὶ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον]: ἔσται ἄρα ὡς ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ Ξ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ Ο, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ Ξ κώνου πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ο κώνου [ὅμοιοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι]. Ὁ Ξ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν Ο κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον: φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ. ◘

Πρότασις 42 (99) *Παντὸς τμήματος σφαίρας ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω σφαῖρα καὶ μέγιστος ἐν αὐτῇ κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ τμῆμα ἐν αὐτῇ ἔλασσον ἡμισφαιρίου, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΑΓ κύκλος πρὸς ὀρθὰς ὢν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ, καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ Ζ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ: δεῖ δὴ δεῖξαι ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ τμήματος ἴση ἐστὶ τῷ Ζ κύκλῳ.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Ζ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ Δ κέντρον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰ Α, Γ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν: καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ τμήματος καὶ τοῦ Ζ κύκλου, ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓ τομέα πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ ἄλλο τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸν Ζ κύκλον, περιενεχθέντος δὲ τοῦ κύκλου, ὡς καὶ πρότερον, ἔσται δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, ὧν τὸ μὲν περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον, καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔσται ὡς τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον: ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιός ἐστι τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευράν. Ἀλλὰ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τοῦ εἰρημένου τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν Ζ κύκλον, μείζων δέ ἐστιν ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος: καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια ἄρα μείζων ἐστὶ τοῦ Ζ κύκλου: ὅπερ ἀδύνατον: δέδεικται γὰρ ἡ εἰρημένη τοῦ σχήματος ἐπιφάνεια ἐλάσσων οὖσα τοῦ τηλικούτου κύκλου.

Ἔστω πάλιν ὁ κύκλος μείζων τῆς ἐπιφανείας, καὶ περιγεγράφθω καὶ ἐγγεγράφθω ὅμοια πολύγωνα, καὶ τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ὁ κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος. Οὐκ ἄρα μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Ζ κύκλου. Ἐδείχθη δὲ ὡς οὐδὲ ἐλάσσων: ἴση ἄρα. ◙

Πρότασις 43 (101) *Καὶ ἐὰν μεῖζον ἡμισφαιρίου ᾖ τμῆμα, ὁμοίως αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ νοείσθω τετμημένη ἐπιπέδῳ ὀρθῷ τῷ κατὰ τὴν ΑΔ, καὶ τὸ ΑΒΔ ἔλασσον ἔστω ἡμισφαιρίου, καὶ διάμετρος ἡ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΔ, καὶ ἀπὸ τῶν Β, Γ ἐπὶ τὸ Α ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ, καὶ ἔστω ὁ μὲν Ε κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ, ὁ δὲ Ζ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΓ, ὁ δὲ Η κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΒΓ: καὶ ὁ Η ἄρα κύκλος ἴσος ἐστὶ τοῖς δυσὶ κύκλοις τοῖς Ε, Ζ. Ὁ δὲ Η κύκλος ἴσος ἐστὶν ὅλῃ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας [ἐπειδήπερ ἑκατέρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΓ κύκλου], ὁ δὲ Ε κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΔ τμήματος [δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου]: λοιπὸς ἄρα ὁ Ζ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ ΑΓΔ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ὃ δή ἐστι μεῖζον ἡμισφαιρίου. ◙

Πρότασις 44 (103) *Παντὶ τομεῖ σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ κατὰ τὸν τομέα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΔ καὶ κέντρον τὸ Γ καὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ κατὰ τὴν ΑΒΔ περιφέρειαν ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ΒΓ: δεικτέον ὅτι ὁ τομεὺς ὁ ΑΒΓΔ ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ κώνῳ. Εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ὁ τομεὺς τοῦ κώνου, καὶ κείσθω ὁ Θ κῶνος, οἷος εἴρηται: δύο δὴ μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, τοῦ τομέως καὶ τοῦ Θ κώνου, εὑρήσθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ Δ, Ε, μείζων δὲ ἡ Δ τῆς Ε, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἡ Δ πρὸς Ε ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον, καὶ εἰλήφθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ Ζ, Η, ὅπως τῷ ἴσῳ ὑπερέχῃ ἡ Δ τῆς Ζ καὶ ἡ Ζ τῆς Η καὶ ἡ Η τῆς Ε, καὶ περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα τοῦ κύκλου περιγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγεγράφθω, ὅπως ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ζ, καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον περιενεχθέντος τοῦ κύκλου γεγενήσθω δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα: τὸ ἄρα περιγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τῷ κορυφὴν ἔχοντι τὸ Γ σημεῖον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. Ἀλλὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Δ πρὸς Ζ: ἐλάσσονα λόγον ἄρα ἕξει ἢ τριπλάσιον τὸ εἰρημένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τῆς Δ πρὸς Ζ. Ἡ δὲ Δ πρὸς Ε μείζονα λόγον ἔχει ἢ τριπλάσιον τοῦ τῆς Δ πρὸς Ζ: τὸ ἄρα περιγεγραμμένον σχῆμα στερεὸν τῷ τομεῖ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ε. Ἡ δὲ Δ πρὸς Ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν Θ κῶνον: μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν Θ κῶνον ἢ τὸ περιγεγραμμένον τῷ τομεῖ σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον. Καὶ ἐναλλάξ: μεῖζον δέ ἐστι τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τμήματος: καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα σχῆμα ἐν τῷ τομεῖ μεῖζόν ἐστι τοῦ Θ κώνου: ὅπερ ἀδύνατον: δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς ἄνω ἔλασσον ὂν τοῦ τηλικούτου κώνου [τουτέστι τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας: οὗτος δέ ἐστιν ὁ εἰρημένος κῶνος ὁ Θ: βάσιν τε γὰρ ἔχει κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος, τουτέστι τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ, καὶ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας]: οὐκ ἄρα ὁ στερεὸς τομεὺς μείζων ἐστὶ τοῦ Θ κώνου.

Ἔστω δὴ πάλιν ὁ Θ κῶνος τοῦ στερεοῦ τομέως μείζων. Πάλιν δὴ ὁμοίως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε μείζων αὐτῆς οὖσα ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ὁ κῶνος πρὸς τὸν τομέα, καὶ ὁμοίως εἰλήφθωσαν αἱ Ζ, Η, ὥστε εἶναι τὰς διαφορὰς τὰς αὐτάς, καὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα πολυγώνου ἀρτιογώνου ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ζ [καὶ γεγενήσθω τὰ περὶ τὸν στερεὸν τομέα στερεὰ σχήματα]: ὁμοίως οὖν δείξομεν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν τομέα στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ε καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ Θ κῶνος πρὸς τὸν τομέα [ὥστε καὶ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον στερεὸν ἐν τῷ τμήματι πρὸς τὸ περιγεγραμμένον]. Μείζων δέ ἐστιν ὁ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν σχήματος: μείζων ἄρα ὁ Θ κῶνος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος: ὅπερ ἀδύνατον [δέδεικται γὰρ τοῦτο ὅτι ὁ τηλικοῦτος κῶνος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὸν τομέα]: ἴσος ἄρα ὁ τομεὺς τῷ Θ κώνῳ. ◘

Παράρτημα 1

Η ανισότητα της Πρότασης 9

Μετά την Πρόταση 9 παραθέσαμε μια απόδειξη του Ευτόκιου, σχολιαστή του Αρχιμήδη, για την ανισότητα που χρησιμοποιεί ο Αρχιμήδης χωρίς να την αποδεικνύει. Όπως γράφτηκε εκεί πολλοί μαθηματικοί και ιστορικοί θεώρησαν ότι αυτή η απόδειξη του Ευτόκιου δεν ήταν πλήρης ή επαρκής και προσπάθησαν να δώσουν δικές τους αποδείξεις μιας ελαφρά γενικότερης ανισότητας ή και πολύ γενικότερης.

Θα παρουσιάσουμε αυτές τις προσπάθειες στη συνέχεια καθώς και ένα γενικότερο ερώτημα με ιστορικό και γεωμετρικό ενδιαφέρον.

1.1 Η απόδειξη του Netz

Στο [Ne2004] ο Netz δίνει μια κομψή απόδειξη που καλύπτει και την περίπτωση που το σημείο Β είναι στο μη κυρτό τόξο $\widehat{\mathrm{A\Gamma}}$ (χωρίς αυτό να είναι απαραίτητο για την απόδειξη της Πρότασης 9).

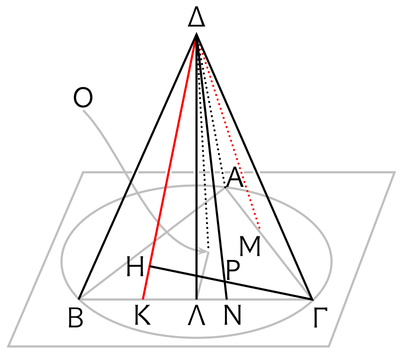
Αν Κ το κέντρο του κύκλου, φέρνουμε τη ΒΚ που (η ίδια ή η επέκτασή της) τέμνει τη χορδή ΑΓ στο Ε. Επειδή το Β είναι μέσον του τόξου $\widehat{\mathrm{A\Gamma}}$ το Ε είναι μέσο της χορδής ΑΓ και η ΒΕ είναι κάθετη στην ΑΓ. Επειδή το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές το ΔΕ είναι κάθετο στη χορδή ΑΓ. Άρα το ΑΕ είναι κάθετο στο επίπεδο ΔΒΕ (Στοιχεία, Βιβλίο 11, Πρόταση 4). Φέρνουμε από το Α και το ύψος ΑΖ του τριγώνου ΔΑΒ. Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ορθογώνιο στο Ε (αφού η ΑΕ είναι κάθετη στο επίπεδο ΔΒΕ (Στοιχεία, Βιβλίο 11, Ορισμός 3)) με υποτείνουσα την ΑΖ. Συνεπώς $\mathrm{AZ} > \mathrm{AE}$, οπότε $|\Delta\mathrm{AB}| > |\Delta\mathrm{AE}|$. Ομοίως $|\Delta\Gamma\mathrm{B}| > |\Delta\Gamma\mathrm{E}|$, και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε τη ζητούμενη

$$|\Delta\mathrm{AB}| + |\Delta\Gamma\mathrm{B}| > |\Delta\mathrm{A}\Gamma|.$$

1.2 Η απόδειξη του Κατσουρίδη

Μια άλλη απόδειξη, την οποία επιμελήθηκε ο μαθηματικός Αλέξανδρος Κατσουρίδης από την κοινότητα του www.mathematica.gr έχει ως εξής:

Έστω Ο το κέντρο της βάσης του κώνου, Μ το μέσο του ΑΓ και Λ το μέσο του ΒΓ.



Αρκεί να δείξουμε ότι για τα εμβαδά των τριγώνων ΔΒΓ και ΔΓΜ ισχύει $|\Delta\Gamma M| < |\Delta B\Gamma|$.

Τότε, καθώς $|B\Delta\Gamma| = |B\Delta A|$, θα είναι:

$$\begin{aligned}|B\Delta\Gamma| + |B\Delta A| &= 2\cdot|B\Delta\Gamma| > 2\cdot|\Delta\Gamma M|\\ &= 2\cdot\frac{|A\Delta\Gamma|}{2} = |A\Delta\Gamma|.\end{aligned}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση: $OM \leq O\Lambda$

Τότε θα είναι $\Delta M \leq \Delta\Lambda$ και για τα εμβαδά θα έχουμε:

$$2\cdot|\Delta\Gamma M| = \Delta M\cdot M\Gamma \leq \Delta\Lambda\cdot M\Gamma < \Delta\Lambda\cdot B\Gamma = 2\cdot|\Delta B\Gamma|$$

αφού $B\Gamma > M\Gamma$, καθώς το πρώτο τμήμα είναι η υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΓ.

Άρα $|\Delta\Gamma M| < |\Delta B\Gamma|$.

2η περίπτωση: $OM > O\Lambda$

Τότε θα είναι $\Delta M > \Delta\Lambda$. Επίσης ισχύει $\Delta M < \Delta B = \Delta\Gamma$. Επομένως θα υπάρχει εσωτερικό του τμήματος ΛΒ, έστω το Κ, για το οποίο θα ισχύει $\Delta K = \Delta M$ (το ΔΛΒ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με ορθή γωνία την $\hat{\Lambda}$).

Επειδή $OM > O\Lambda$, θα είναι $M\Gamma < \Lambda\Gamma$. Άρα θα υπάρχει εσωτερικό σημείο του τμήματος ΛΓ, έστω το Ν, για το οποίο $\Gamma M = \Gamma N$. Έστω Ρ το σημείο τομής των τμημάτων ΔΝ και ΓΗ όπου ΓΗ το ύψος του τριγώνου ΔΚΓ από την κορυφή Γ. Τα τμήματα αυτά τέμνονται επειδή η γωνία $\widehat{B\Gamma\Delta}$ είναι οξεία στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΒΓ.

Το τρίγωνο ΝΡΓ είναι αμβλυγώνιο στη γωνία $\hat{N}$, άρα $\Gamma P > \Gamma N = \Gamma M$.

Επομένως για τα εμβαδά των τριγώνων έχουμε:

$$\begin{aligned} 2 \cdot |\Delta\mathrm{B}\Gamma| > 2 \cdot |\Delta\mathrm{K}\Gamma| = \Delta\mathrm{K} \cdot \Gamma\mathrm{H} &= \Delta\mathrm{M} \cdot \Gamma\mathrm{H} \\ &> \Delta\mathrm{M} \cdot \mathrm{P}\Gamma \\ &> \Delta\mathrm{M} \cdot \mathrm{N}\Gamma \\ &= \Delta\mathrm{M} \cdot \Gamma\mathrm{M} \\ &= 2 \cdot |\Delta\Gamma\mathrm{M}| \end{aligned}$$

Άρα $|\Delta\Gamma\mathrm{M}| < |\Delta\mathrm{B}\Gamma|$ και στην δεύτερη περίπτωση.

1.3 Γενίκευση

Σε όλες τις παραπάνω αποδείξεις έπαιξε καθοριστικό ρόλο ότι το B ήταν το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma}$. Είναι εντελώς φυσιολογικό να αναρωτηθεί κανείς αν το ίδιο ισχύει στην περίπτωση που το B δεν είναι μέσον αυτού του τόξου. Η ανισότητα παραμένει σωστή και σε αυτή την περίπτωση και είναι ισοδύναμη με την Cauchy-Schwarz. Όπως θα δούμε παρακάτω η απόδειξη της γενικής ανισότητας μπορεί να γίνει με λεπτομερέστερη Ανάλυση αλλά επί της ουσίας με το ίδιο το επιχείρημα του Ευτόκιου.

Ξεκινάμε με κάποιος προτάσεις που θα χρειαστούν από τα Στοιχεία του Ευκλείδη:

Πρόταση 1 (Στοιχεία, Βιβλίο 1, Πρόταση 25) *Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές ίσες και η βάση του ενός είναι μεγαλύτερη της βάσης του άλλου, τότε και η περιεχόμενη μεταξύ των ίσων πλευρών γωνία, του ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη της αντίστοιχης γωνίας του άλλου.* ◘

Πρόταση 2 (Στοιχεία, Βιβλίο 3, Πρόταση 7) *Αν από ένα τυχόν σημείο της διαμέτρου ενός κύκλου (αλλά όχι το κέντρο του) αχθούν ευθύγραμμα τμήματα προς την περιφέρεια του κύκλου τότε:*

α) *το μεγαλύτερο από αυτά τα τμήματα είναι εκείνο στο οποίο ανήκει το κέντρο του κύκλου,*

β) *το μικρότερο τμήμα είναι εκείνο που προκύπτει αν από τη διάμετρο αφαιρεθεί το μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα που αναφέρεται στο α),*

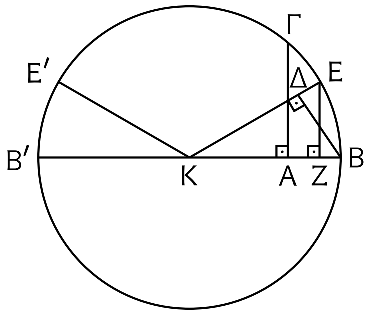
γ) *μεταξύ δυο οποιονδήποτε άλλων από αυτά τα τμήματα μεγαλύτερο είναι εκείνο που βρίσκεται πλησιέστερα στο κέντρο του κύκλου και*

δ) *υπάρχουν μόνο δυο ίσα τέτοια ευθύγραμμα τμήματα και αυτά βρίσκονται εκατέρωθεν του μικρότερου ευθύγραμμου τμήματος.* ◘

Πρόταση 3 (Στοιχεία, Βιβλίο 11, Πρόταση 20) *Αν μια στερεά γωνία περιέχεται σε τρεις επίπεδες γωνίες τότε το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτές είναι μεγαλύτερο από την τρίτη γωνία.* $\square$

Πρόταση 4 (Στοιχεία, Βιβλίο 11, Πρόταση 21) *Κάθε στερεά γωνία περιέχεται σε επίπεδες γωνίες το άθροισμα των οποίων είναι μικρότερο από τέσσαρες ορθές.* $\square$

Πρόταση 5 (Στοιχεία, Βιβλίο 11, Πρόταση 23) *Να κατασκευαστεί στερεά γωνία από τρεις επίπεδες γωνίες αν είναι γνωστό ότι το άθροισμά τους είναι μικρότερο από τέσσαρες ορθές και ότι το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτές είναι μεγαλύτερο από την τρίτη γωνία όπως και αν λαμβάνονται.* $\square$



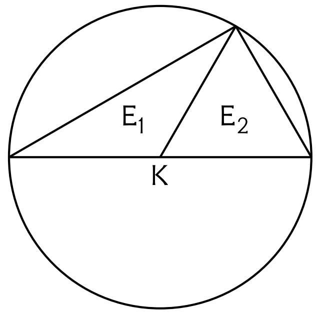
Πρόταση 6 *Θεωρούμε κύκλο κέντρου* K *και έστω ότι η* BB' *είναι μια διάμετρος. Από τυχόν σημείο* E *του τόξου* BB' *φέρνουμε την* KE *και την* KE' *στην ίδια πλευρά της* BB' *ώστε* $\widehat{EKB} = \widehat{E'KB'} < 1\llcorner$. *Φέρνουμε και την* $B\Delta$ *κάθετη στην* KE. *Τότε για τυχόν σημείο* Γ *στο κυρτό τόξο* EE' *η απόσταση* ΓA *του* Γ *από τη* BB' *είναι μεγαλύτερη από τη* $B\Delta$.

Απόδειξη. Από το E φέρνουμε EZ κάθετη στην KB. Τότε $B\Delta = EZ$ ως ύψη από τις κορυφές βάσης του ισοσκελούς τριγώνου BKE. Αλλά φανερά $EZ < \Gamma A$ (Πρόταση 2(γ)). $\square$

Πρόταση 7 *Έστω* $\Delta'\Delta$ *διάμετρος κύκλου κέντρου* K· A, B *σημεία στο ίδιο τόξο* $\overset{\frown}{\Delta'\Delta}$ *και* Γ *στο κυρτό τόξο* AB. *Φέρνουμε τις* AE, ΓZ, BH *κάθετες στη* $\Delta'\Delta$. *Τότε είτε* $AE \leq \Gamma Z$ *είτε* $BH \leq \Gamma Z$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 2(γ) ανάλογα τη θέση του κέντρου του κύκλου ως προς τα σημεία E, Z και H. $\square$

Πρόταση 8 *Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος από την κορυφή της ορθής γωνίας χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.*



Απόδειξη: Τα δύο τρίγωνα είναι ισεμβαδικά, αφού έχουν κοινό το ύψος από την κορυφή της ορθής και ίσες βάσεις. ◘

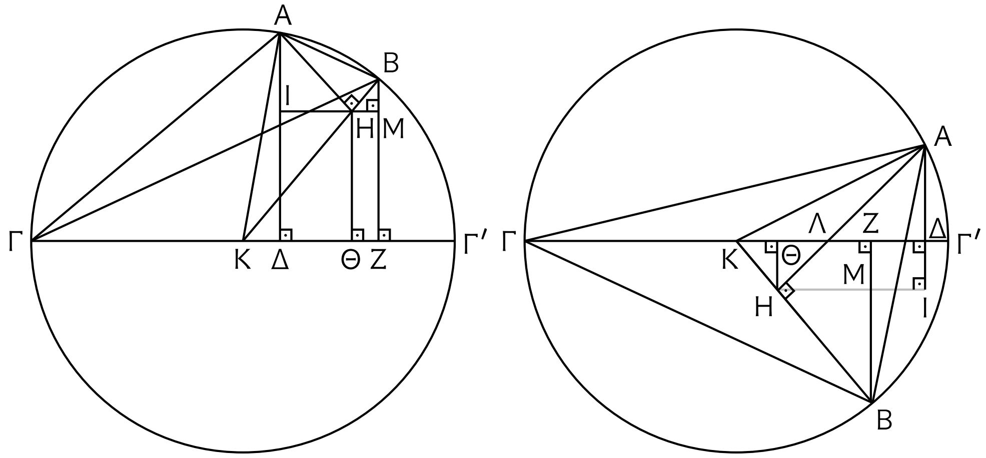
Η επόμενη είναι το βασικό εργαλείο για την απόδειξη του Θεωρήματος 11. Μπορεί να ιδωθεί ως γενίκευση της Πρότασης 8 ή ως ειδική περίπτωση της ζητούμενης ανισότητας (όπου το τετράπλευρο στο Θεώρημα 10 και 11 είναι «εκφυλισμένο» με την κορυφή του να ταυτίζεται με το κέντρο του κύκλου). Για λόγους απλότητας θα γράφουμε Γ' για το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ και ομοίως για κάθε άλλο σημείο που εμφανίζεται.

Πρόταση 9 *Έστω ότι το τρίγωνο* ΑΒΓ *είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο* Κ. *Τότε ισχύει*

$$|\mathrm{AK\Gamma}| \leq |\mathrm{AKB}| + |\mathrm{BK\Gamma}|.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το ΑΒΓ *είναι ορθογώνιο.*

Απόδειξη. Από το Α φέρνουμε κάθετη στη $\Gamma\Gamma'$ την οποία τέμνει στο Δ. Φέρνουμε τη ΒΖ κάθετη στη $\Gamma\Gamma'$, την ΑΗ κάθετη στην ΚΒ, την ΗΘ κάθετη στη $\Gamma\Gamma'$ και την ΗΙ και ΗΜ κάθετες στην ΑΔ και ΒΖ αντίστοιχα.



Φανερά ισχύει

$$\begin{aligned} \mathrm{A\Delta} &= \mathrm{AI} \pm \mathrm{I\Delta} \quad &&\text{(ανάλογα αν το I είναι στο ΑΔ ή στην επέκτασή του)} \\ &\leq \mathrm{AI} + \mathrm{I\Delta} \\ &= \mathrm{AI} + \mathrm{MZ} \\ &\leq \mathrm{AH} + \mathrm{MZ} &&\text{(Η ΑΗ είναι υποτείνουσα στο ΑΗΙ)} \\ &\leq \mathrm{AH} + \mathrm{BZ}, \end{aligned}$$

διότι η ΗΜ είναι παράλληλη στην $\Gamma\Gamma'$ οπότε από το Θεώρημα του Θαλή ισχύει

$$\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{BZ}} = \frac{\mathrm{HK}}{\mathrm{KB}} < 1.$$

Άρα $\mathrm{A\Delta} \leq \mathrm{AH}+\mathrm{BZ}$. Ως προς αυτά τα ύψη όμως τα τρίγωνα στη ζητούμενη σχέση έχουν ίσες βάσεις.

Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει η ισότητα. Τότε, αφού $|\mathrm{AK\Gamma}| \leq |\mathrm{AKB}| + |\mathrm{BK\Gamma}|$, απαλοίφοντας την κοινή βάση βρίσκουμε ότι $\mathrm{AI} + \mathrm{MZ} = \mathrm{AH} + \mathrm{BZ}$. Συνεπώς

$$0 \leq \mathrm{BZ} - \mathrm{MZ} = \mathrm{AI} - \mathrm{AH} \leq 0.$$

Άρα, $\mathrm{AI} = \mathrm{AH}$ οπότε το Ι ταυτίζεται με το Η, αλλιώς, $\mathrm{AH} > \mathrm{AI}$ καθώς το ΑΗ είναι υποτείνουσα. Έτσι το ΑΗ είναι κάθετο στο ΚΒ αλλά και στο $\Gamma\Gamma'$. Δηλαδή το ΚΒ είναι παράλληλο με το $\Gamma\Gamma'$, και αφού έχουν κοινό σημείο (το Κ), είτε το Β είναι το Γ ή το Β είναι το Γ'. Αλλά το Β δεν είναι το Γ εξ υποθέσεως (τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο), έτσι το Β είναι το Γ' και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β. ◙

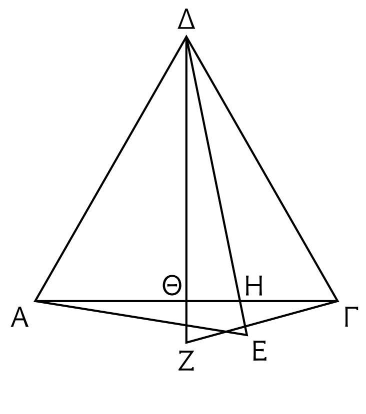
Πρόταση 10 *Αν* Β *σημείο στο κυρτό* $\widehat{\mathrm{A\Gamma}}$ *σε κέντρο κύκλου* Κ *και* ΔΚ *κάθετη στο επίπεδο του κύκλου. Τότε ισχύει*

$$|\mathrm{\Delta A\Gamma}| \leq |\mathrm{\Delta AB}| + |\mathrm{\Delta B\Gamma}|.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3 ισχύει

$$\widehat{\mathrm{\Gamma\Delta B}} + \widehat{\mathrm{B\Delta A}} > \widehat{\mathrm{\Gamma\Delta A}}.$$

Επειδή το Β είναι στο κυρτό τόξο $\widehat{\mathrm{A\Gamma}}$ ισχύει $\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{AB}$ και $\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{B\Gamma}$. Όπως και στην απόδειξη του Ευτόκιου, μεταφέρουμε τα τρίγωνα ΔΑΓ και ΔΑΒ στο ίδιο επίπεδο στην ίδια πλευρά της ΔΑ ονομάζοντας Ε το σημείο στο επίπεδο του ΑΔΓ για το οποίο $\mathrm{A\Delta B} = \mathrm{A\Delta E}$. Επειδή $\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{AE}$ ισχύει $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}} > \widehat{\mathrm{A\Delta E}}$ (Πρόταση 1), άρα η ΔΕ τέμνει την ΑΓ έστω στο Η.



Στο ίδιο αυτό επίπεδο μεταφέρουμε και το τρίγωνο ΒΔΓ στην ίδια πλευρά της ΔΓ που βρίσκεται το σημείο Α. Ονομάζουμε Ζ το σημείο του επιπέδου ΑΔΓ για το οποίο $\widehat{\text{ΒΔΓ}} = \widehat{\text{ΖΔΓ}}$, και όπως και πριν η ΔΖ τέμνει την ΑΓ έστω στο Θ.

Το Θ αναγκαστικά θα ανήκει στην ΑΗ αλλιώς, αν το Θ είναι στην ΗΓ θα ισχύει

$$\widehat{\text{ΑΔΓ}} < \widehat{\text{ΑΔΒ}} + \widehat{\text{ΒΔΓ}} = \widehat{\text{ΑΔΗ}} + \widehat{\text{ΘΔΓ}} < \widehat{\text{ΑΔΓ}},$$

το οποίο είναι άτοπο. Φανερά τώρα

$$|\text{ΑΔΓ}| = |\text{ΑΔΗ}| + |\text{ΗΔΓ}| < |\text{ΑΔΗ}| + |\text{ΘΔΓ}| \leq |\text{ΑΔΕ}| + |\text{ΖΔΓ}| = |\text{ΑΔΒ}| + |\text{ΒΔΓ}|,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ◘

Πρόταση 11 *Αν* Β *σημείο στο μη κυρτό* $\widehat{\text{ΑΓ}}$ *σε κέντρο κύκλου* Κ *και* ΔΚ *κάθετη στο επίπεδο του κύκλου. Τότε ισχύει*

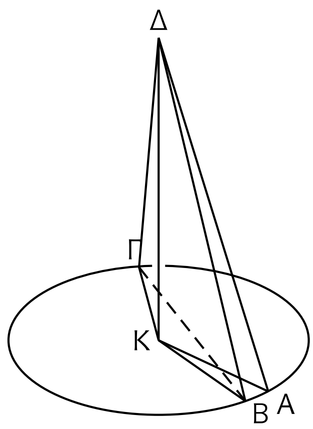
$$|\text{ΔΑΓ}| \leq |\text{ΔΑΒ}| + |\text{ΔΒΓ}|.$$

Απόδειξη. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $\widehat{\text{ΒΔΓ}} \leq \widehat{\text{ΑΔΓ}}$ και $\widehat{\text{ΒΔΑ}} \leq \widehat{\text{ΑΔΓ}}$.

Σε αυτή την περίπτωση μεταφέρουμε τα τρίγωνα όπως στο Θεώρημα 10 και ακολουθούμε την ίδια απόδειξη.

Περίπτωση 2: Μόνο μία από τις δύο γωνίας της Περίπτωσης 1 είναι μεγαλύτερη ή ίση της ΑΔΓ.



Παρατηρούμε ότι όλες οι γωνίες είναι μικρότερες από δύο ορθές διότι αν το Β είναι σε θέση ώστε το $\widehat{\text{ΓΒ}}$ (που δεν περιέχει το Α) είναι μη κυρτό, το τρίγωνο ΒΔΓ αντιστοιχεί στο κυρτό $\widehat{\text{ΓΒ}}$ (δείτε το παραπάνω σχήμα).

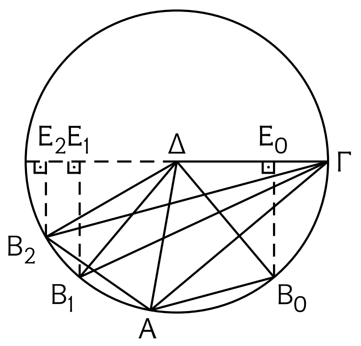
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $\widehat{\text{ΒΔΑ}} < \widehat{\text{ΑΔΓ}} < 2\text{L}$ και $2\text{L} > \widehat{\text{ΒΔΓ}} > \widehat{\text{ΑΔΓ}}$.

Μεταφέρουμε το τρίγωνο ΒΔΑ στο επίπεδο του ΑΔΓ στην ίδια πλευρά της ΑΔ με το Γ και την ΑΔ κοινή, έστω ότι αυτό είναι το τρίγωνο $B_0ΔΑ$. Μεταφέρουμε το τρίγωνο ΔΒΓ στο προηγούμενο επίπεδο στην ίδια πλευρά της ΔΓ με το Α με την ΔΓ κοινή, έστω ότι αυτό είναι το τρίγωνο $B_1ΔΓ$. Έστω B_2 το συμμετρικό του B_0 ως προς την ΔΑ. Από την Πρόταση 3 ισχύει

$$\widehat{ΒΔΓ} \leq \widehat{ΒΔΑ} + \widehat{ΑΔΓ}.$$

Άρα το B_1 βρίσκεται στο κυρτό τόξο $\overset{\frown}{B_2A}$. Φέρνουμε και τα κάθετα τμήματα B_2E_2, B_1E_1, B_0E_0 στη $ΓΓ'$.

Υποπερίπτωση α: $\widehat{ΑΔΓ} + \widehat{ΑΔB_2} < 2\llcorner$.



Σε αυτή την περίπτωση το τόξο B_2AB_0 είναι κυρτό και συνεπώς, από την Πρόταση 7, είτε $B_1E_1 > B_2E_2$ είτε $B_1E_1 > B_0E_0$. Αν ισχύει το πρώτο, τότε εφαρμόζουμε την Πρόταση 9 στο τρίγωνο $ΓΑB_2$ και παίρνουμε

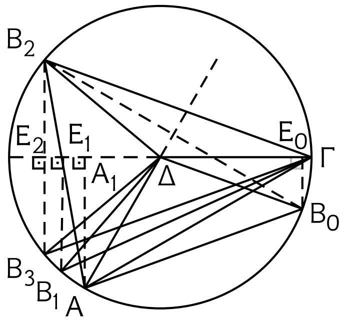
$$|ΑΔΓ| \leq |ΑΔB_2|+|B_2ΔΓ| = |ΑΔΒ|+|B_2ΔΓ| \leq |ΑΔΒ|+|B_1ΔΓ| = |ΑΔΒ|+|ΒΔΓ|.$$

Αν ισχύει το δεύτερο, τότε εφαρμόζουμε την Πρόταση 9 στο τρίγωνο $ΓΑB_0$ και παίρνουμε

$$|ΑΔΓ| \leq |ΑΔB_0|+|B_0ΔΓ| = |ΑΔΒ|+|B_0ΔΓ| \leq |ΑΔΒ|+|B_1ΔΓ| = |ΑΔΒ|+|ΒΔΓ|.$$

Υποπερίπτωση β: $\widehat{ΑΔΓ} + \widehat{ΑΔB_2} > 2\llcorner$.

Τώρα η $\widehat{ΑΔΓ}$ είναι αναγκαστικά αμβλεία, αφού $\widehat{ΒΔΑ} < \widehat{ΑΔΓ}$. Φέρνουμε και την $ΔB_3$ όπου το B_3 είναι το συμμετρικό του B_2 ως προς τη $ΓΓ'$ και την AA_1 κάθετη στη $ΓΓ'$.



Επειδή από την Πρόταση 4 ισχύει $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}}+\widehat{\mathrm{A\Delta B}}+\widehat{\mathrm{B\Delta\Gamma}} < 4\llcorner$, συνεπάγεται $\widehat{\mathrm{B_1\Delta\Gamma}} < \widehat{\mathrm{B_2\Delta\Gamma}} = \widehat{\mathrm{B_3\Delta\Gamma}}$. Αλλά εξ υποθέσεως $\widehat{\mathrm{B_1\Delta\Gamma}} > \widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$ άρα το $\mathrm{B_1}$ ανήκει στο κυρτό τόξο $\widehat{\mathrm{B_3A}}$. Αφού τώρα η $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$ είναι αμβλεία ισχύει $\mathrm{B_3E_2} < \mathrm{B_1E_1} < \mathrm{AA_1}$. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 9 στο τρίγωνο $\mathrm{A\Gamma B_2}$, οπότε

$$\begin{aligned}|\mathrm{A\Delta\Gamma}| &\leq |\mathrm{A\Delta B_2}| + |\mathrm{B_2\Delta\Gamma}| = |\mathrm{A\Delta B}| + |\mathrm{B_2\Delta\Gamma}| = |\mathrm{A\Delta B}| + |\mathrm{B_3\Delta\Gamma}| \\ &\leq |\mathrm{A\Delta B}| + |\mathrm{B_1\Delta\Gamma}| = |\mathrm{A\Delta B}| + |\mathrm{B\Delta\Gamma}|.\end{aligned}$$

Περίπτωση 3: Και οι δυο γωνίες της Περίπτωσης 1 είναι μεγαλύτερες της $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$.

Θα διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

Υποπερίπτωση γ: Είτε η $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}} + \widehat{\mathrm{B\Delta A}}$ είτε η $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}} + \widehat{\mathrm{B\Delta\Gamma}}$ είναι μεγαλύτερη από δύο ορθές.

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}} + \widehat{\mathrm{B\Delta A}} > 2\llcorner$ και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία της Υποπερίπτωσης β για το τρίγωνο $\mathrm{A\Gamma B_2}$ ως εξής:

$$|\mathrm{A\Delta\Gamma}| \leq |\mathrm{B_2\Delta A}| + |\mathrm{B_2\Delta\Gamma}| = |\mathrm{B\Delta A}| + |\mathrm{B_2\Delta\Gamma}|, \tag{1.1}$$

Αν $\widehat{\mathrm{B_1\Delta\Gamma}} = \widehat{\mathrm{B\Delta\Gamma}}$, το $\mathrm{B_1}$ πρέπει να είναι στο τόξο $\widehat{\mathrm{B_3A}}$ (όπου το $\mathrm{B_3}$ είναι το συμμετρικό του $\mathrm{B_2}$ ως προς τη $\mathrm{\Gamma\Gamma'}$) διότι πρέπει $\mathrm{A\Delta\Gamma}+\mathrm{A\Delta B_2}+\mathrm{B_1\Delta\Gamma} \leq 4\llcorner$, άρα το $\mathrm{B_1}$ είναι στο κυρτό $\widehat{\mathrm{B_3\Gamma}}$ αλλά δεν μπορεί να είναι στο κυρτό $\widehat{\mathrm{A\Gamma}}$ αφού είμαστε στην περίπτωση $\widehat{\mathrm{B\Delta\Gamma}} > \widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$. Το συμμετρικό του $\mathrm{B_2}$ ως προς το κέντρο Δ ανήκει στο $\widehat{\mathrm{A\Gamma}}$, αλλιώς το A ανήκει στο $\widehat{\mathrm{\Gamma B_2'}}$ και η γωνία $\widehat{\mathrm{A\Delta B_2}}$ που περιέχει το $\mathrm{B_1}$ είναι μεγαλύτερη από 2 ορθές, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, επειδή τα $\mathrm{B_3}$ και $\mathrm{B_2'}$ ισαπέχουν από τη $\mathrm{\Gamma\Gamma'}$ και το $\mathrm{B_1}$ ανήκει στο $\widehat{\mathrm{B_3B_2'}}$, η κάθετη στη $\mathrm{\Gamma\Gamma'}$ από το $\mathrm{B_1}$ είναι μεγαλύτερη απο το ύψος του τριγώνου $\mathrm{B_2\Delta\Gamma}$ και συνεπώς $|\mathrm{B_2\Delta\Gamma}| \leq |\mathrm{B_1\Delta\Gamma}|$. Επιστρέφοντας στην (1.1) παίρνουμε

$$|\mathrm{A\Delta\Gamma}| \leq |\mathrm{B\Delta A}| + |\mathrm{B_2\Delta\Gamma}| \leq |\mathrm{B\Delta A}| + |\mathrm{B\Delta\Gamma}|.$$

Υποπερίπτωση δ: Και η $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}}+\widehat{\mathrm{B\Delta A}}$ και η $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}}+\widehat{\mathrm{B\Delta\Gamma}}$ είναι μικρότερες από δύο ορθές.

Σε αυτή την περίπτωση η $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$ είναι οξεία, διότι αν είναι αμβλεία τότε επειδή εξ υποθέσεως $\widehat{\mathrm{B\Delta A}} > \widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$ θα έπρεπε $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}} + \widehat{\mathrm{B\Delta A}} > 2\llcorner$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}} < \widehat{\mathrm{B\Delta A}} < \widehat{\mathrm{B\Delta\Gamma}}$, οπότε επαναλαμβάνουμε την απόδειξη της Υποπερίπτωσης α γράφοντας όπου Β το Γ και όπου Γ το Β, τόσο στην απόδειξη όσο και στα σχήματα. Για λόγους πληρότητας οι λεπτομέρειες είναι οι εξής:

Στο επίπεδο του τριγώνου ΒΔΑ μεταφέρουμε το ΑΔΓ με κοινή ΔΓ ώστε να είναι διαδοχικά με το τρίγωνο ΒΔΑ. Ας είναι αυτό το τρίγωνο το $\Gamma_2\Delta\mathrm{A}$. Έστω Γ_0 το συμμετρικό του Γ_2 ως προς την ΔΑ εντός του $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ αφού $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma_2}}$ οξεία και μικρότερη της $\widehat{\mathrm{B\Delta A}}$. Έστω τώρα ότι η μεταφορά σε αυτό το επίπεδο του τριγώνου ΒΔΓ με κοινή την ΔΓ στην ίδια πλευρά με το τρίγωνο ΑΔΒ, και ας είναι το τρίγωνο $\mathrm{B\Delta\Gamma_1}$. Το Γ_1 βρίσκεται στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma_2\mathrm{A}}$, αφού θα πρέπει

$$\widehat{\mathrm{B\Delta\Gamma_1}} = \widehat{\mathrm{B\Delta\Gamma}} \leq \widehat{\mathrm{B\Delta A}} + \widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}} = \widehat{\mathrm{B\Delta A}} + \widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma_2}}.$$

Έτσι όπως και στην Υποπερίπτωση α, αν $\Gamma_2\mathrm{E}_2$, $\Gamma_1\mathrm{E}_1$ και $\Gamma_0\mathrm{E}_0$ οι κάθετες στη BB' είτε θα ισχύει $\Gamma_1\mathrm{E}_1 > \Gamma_2\mathrm{E}_2$ είτε $\Gamma_1\mathrm{E}_1 > \Gamma_0\mathrm{E}_0$. Αν ισχύει το πρώτο, εφαρμόζουμε την Πρόταση 9 στο τρίγωνο $\Gamma_2\mathrm{AB}$, και παίρνουμε

$$|\mathrm{A\Delta\Gamma}| = |\Gamma_2\Delta\mathrm{A}| \leq |\mathrm{B\Delta A}| + |\mathrm{B\Delta\Gamma_2}| \leq |\mathrm{B\Delta A}| + |\mathrm{B\Delta\Gamma_1}| = |\mathrm{B\Delta A}| + |\mathrm{B\Delta\Gamma}|.$$

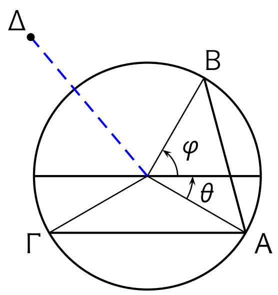
Ενώ αν ισχύει το δεύτερο, εφαρμόζουμε την Πρόταση 9 στο τρίγωνο $\mathrm{A\Gamma_0B}$, και παίρνουμε

$$|\mathrm{A\Delta\Gamma}| = |\mathrm{A\Delta\Gamma_2}| = |\mathrm{A\Delta\Gamma_0}| \leq |\mathrm{B\Delta A}|+|\mathrm{B\Delta\Gamma_0}| \leq |\mathrm{B\Delta A}|+|\mathrm{B\Delta\Gamma_1}| = |\mathrm{B\Delta A}|+|\mathrm{B\Delta\Gamma}|,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ◘

1.4 Αποδείξεις με σύγχρονα εργαλεία

Δίνουμε πρώτα μια απόδειξη με τριγωνομετρία



Απόδειξη. (Η απόδειξη ακολουθεί το [Ba2023]) Χωρίς βλάβη της γενικότητας ο κύκλος έχει ακτίνα 1 και η ΓΑ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα που καταλήγει στο Α με τον $x'x$ και φ η ακτίνα που καταλήγει στο Β, όπως στο διπλανό σχήμα. Τα σημεία Α, Β, Γ έχουν συντεταγμένες

$$\mathrm{A}(\cos\theta, -\sin\theta, 0) \qquad \mathrm{B}(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \qquad \Gamma(-\cos\theta, -\sin\theta, 0).$$

Φανερά οι γωνίες ικανοποιούν τις $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ και $\theta < \varphi < \pi - \theta$. Έστω ότι το Δ βρίσκεται σε ύψος $h > 0$ από το επίπεδο του κύκλου, οπότε έχει συντεταγμένες $\Delta(0, 0, h)$. Επίσης, από το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει

$$\mathrm{\Delta A} = \mathrm{\Delta B} = \Delta\Gamma = \sqrt{h^2+1}.$$

Επιπλέον έχουμε,

$$\cos\widehat{\mathrm{A\Delta B}} = \frac{\langle \mathrm{\Delta A}, \mathrm{\Delta B}\rangle}{h^2+1} = \frac{\langle \mathrm{\Delta K}+\mathrm{KA}, \mathrm{\Delta K}+\mathrm{KB}\rangle}{h^2+1} = \frac{h^2+\cos(\varphi+\theta)}{h^2+1}.$$

Άρα

$$\sin^2\widehat{\mathrm{A\Delta B}} = 1 - \frac{\left(h^2+\cos(\theta+\varphi)\right)^2}{(h^2+1)^2}.$$

Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΑΒ με το μήκος του εξωτερικού γινομένου $\mathrm{\Delta A} \times \mathrm{\Delta B}$. Δηλαδή έχουμε

$$\begin{aligned}|\mathrm{\Delta AB}| &= \frac{1}{2}|\mathrm{\Delta A}|\,|\mathrm{\Delta B}|\,|\sin\widehat{\mathrm{A\Delta B}}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(h^2+1)^2 - \left(h^2+\cos(\theta+\varphi)\right)^2}\end{aligned}$$

$(\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2))$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(h^2+1)^2 - \left(h^2+1-2\sin^2\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\right)^2}$$

(διαφορά τετραγώνων)

$$= \left|\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right|\sqrt{h^2+\cos^2\frac{\theta+\varphi}{2}}.$$

Για τα άλλα δύο τρίγωνα αντί για τη γωνία $\varphi+\theta$ έχουμε την $\theta+\pi/2+(\pi/2-\varphi)$ για το ΔΒΓ, και την $\pi - 2\theta$ για το ΔΑΓ. Ανάλογα λοιπόν βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}|\Delta\mathrm{B}\Gamma| &= \left|\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right|\sqrt{h^2+\sin^2\frac{\theta-\varphi}{2}}, \\ |\Delta\mathrm{A}\Gamma| &= |\cos\theta|\sqrt{h^2+\sin^2\theta}.\end{aligned}$$

Έτσι η ζητούμενη ανισότητα είναι η

$$|a|\sqrt{h^2+b^2} + |c|\sqrt{h^2+d^2} \geq |\cos\theta|\sqrt{h^2+\sin^2\theta},$$

όπου θέσαμε

$$a = \sin\tfrac{\theta+\varphi}{2} \quad b = \cos\tfrac{\theta+\varphi}{2}$$
$$c = \cos\tfrac{\theta-\varphi}{2} \quad d = \sin\tfrac{\theta-\varphi}{2}.$$

Από την ανισότητα Minkoswski για τα διανύσματα $\vec{x} = (|a|h, |ab|)$ και $\vec{y} = (|c|h, |cd|)$ έχουμε όμως ότι

$$|a|\sqrt{h^2+b^2} + |c|\sqrt{h^2+d^2} \geq \sqrt{(|a|+|c|)^2h^2 + (|ab|+|cd|)^2} \tag{1.2}$$

Επίσης, παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned}
|\cos\theta| &= \left|\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2} + \frac{\theta-\varphi}{2}\right)\right| \\
&= \left|\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2} - \sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right| \\
&\leq \left|\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right| + \left|\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right| \qquad (1.3) \\
&= |a| + |c|
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
|\sin\theta\cos\theta| &= \frac{1}{2}\big|\sin(2\theta)\big| = \frac{1}{2}\Big|\sin\big((\theta+\varphi)+(\theta-\varphi)\big)\Big| \\
&= \frac{1}{2}\big|\sin(\theta+\varphi)\cos(\theta-\varphi) + \cos(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)\big| \\
&\leq \frac{1}{2}\big(|\sin(\theta+\varphi)| + |\sin(\theta-\varphi)|\big) \qquad (1.4) \\
&= \left|\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\right| + \left|\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right| \\
&= |ab| + |cd|
\end{aligned}$$

έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(|a|+|c|)^2h^2 + (|ab|+|cd|)^2} &\geq \sqrt{\cos^2\theta\cdot h^2 + \sin^2\theta\cdot\cos^2\theta} \\
&= |\cos\theta|\sqrt{h^2+\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

Έτσι, από την (1.2) προκύπτει

$$|a|\sqrt{h^2+b^2} + |c|\sqrt{h^2+d^2} \geq |\cos\theta|\sqrt{h^2+\sin^2\theta},$$

που είναι η αποδεικτέα.

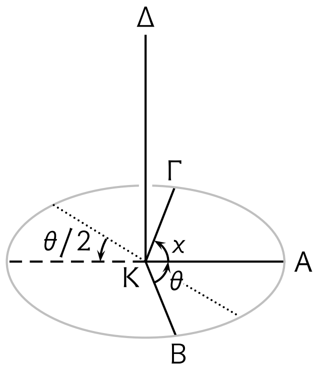
Προφανώς δε, υψώνοντας στο τετράγωνο την (1.2) μετά από απλοποιήσεις οδηγούμαστε στην

$$\sqrt{h^2+b^2}\sqrt{h^2+d^2} \geq h^2 + |bd|$$

που είναι η ανισότητα Cauchy-Schwarz. (Ο έλεγχος της ισοδυναμίας—η εύρεση γωνιών που οι ανισότητες (1.3) και (1.4) είναι περίπου ισότητες—αφήνεται στον αναγνώστη.) ◘

Στη συνέχεια δίνουμε μια απόδειξη με εργαλεία του Απειροστικού Λογισμού.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σημεία Α$(1,0,0)$, Β$(\cos(-\theta),\sin(-\theta),0)$ με $\theta \in [0,\pi]$ και Γ$(\cos x, \sin x, 0)$. Αρκεί, λόγω συμμετρίας, να μελετήσουμε την περίπτωση $-\theta/2 \leq x \leq \pi-\theta/2$. Αν h το μήκος της ΚΔ, τότε $\Delta\Gamma = \Delta\mathrm{A} = \Delta\mathrm{B} = \sqrt{h^2+1}$. Θα δείξουμε ότι $|\Delta\mathrm{B}\Gamma| + |\Delta\Gamma\mathrm{A}| \geq |\Delta\mathrm{AB}|$.



Το ύψος του τριγώνου ΔΓΑ από το Γ είναι η απόσταση του Γ από το ΔΑ. Το τυχόν σημείο της ευθείας ΔΑ έχει συντεταγμένες

$$(1-t)(0,0,h) + t(1,0,0) = (t, 0, (1-t)h),$$

με $t \in \mathbb{R}$, και απόσταση από το Γ την

$$d(t) = \sqrt{(t-\cos x)^2 + \sin^2 x + (1-t)^2 h^2},$$

όπου $t \in \mathbb{R}$. Ελαχιστοποιώντας την $d^2(t)$ βρίσκουμε ότι έχει ολικό ελάχιστο στο $t_0 = (h^2+\cos x)/(h^2+1)$. Έτσι το ύψος $\upsilon_{\Gamma,\Delta\Gamma\mathrm{A}}$ από το Γ στο τρίγωνο ΔΓΑ μετά από απλές πράξεις είναι

$$\begin{aligned}\upsilon_{\Gamma,\Delta\Gamma\mathrm{A}} &= \sqrt{(1-\cos x)^2\frac{h^2}{h^2+1} + \sin^2 x} \\ &= \left\| \left((1-\cos x)\frac{h}{\sqrt{h^2+1}}, \quad |\sin x| \right) \right\|_2 .\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned}\upsilon_{\Gamma,\Delta\Gamma\mathrm{B}} &= \sqrt{\big(1-\cos(x+\theta)\big)^2\frac{h^2}{h^2+1} + \sin^2(x+\theta)} \\ &= \left\| \left(\big(1-\cos(x+\theta)\big)\frac{h}{\sqrt{h^2+1}}, \quad |\sin(x+\theta)| \right) \right\|_2 .\end{aligned}$$

και

$$\upsilon_{\mathrm{B},\Delta\mathrm{BA}} = \sqrt{(1-\cos\theta)^2\frac{h^2}{h^2+1}+\sin^2\theta}. \tag{1.5}$$

Επειδή ως προς αυτά τα ύψη οι βάσεις είναι ίσες ($\Delta\mathrm{A} = \Delta\mathrm{B}$), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\upsilon_{\Gamma,\Delta\Gamma\mathrm{A}} + \upsilon_{\Gamma,\Delta\Gamma\mathrm{B}} \geq \upsilon_{\mathrm{B},\Delta\mathrm{BA}},$$

και λόγω της τριγωνικής ανισότητας (και της (1.5)), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned}\left\|\left(\big(2-\cos x-\cos(x+\theta)\big)\frac{h}{\sqrt{h^2+1}}, |\sin x| + \big|\sin(x+\theta)\big|\right)\right\|_2 \\ \geq \upsilon_{\mathrm{B},\Delta\mathrm{BA}} = \sqrt{(1-\cos\theta)^2\frac{h^2}{h^2+1}+\sin^2\theta}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Αλλά

$$\begin{aligned}|\sin\theta| &= \Big|\sin\big((x+\theta)-x\big)\Big| = \big|\sin(x+\theta)\cos x - \cos(x+\theta)\sin x\big| \\ &\leq \big|\sin(x+\theta)\big| + |\sin x|.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Ισχυριζόμαστε επίσης ότι

$$2-\cos x-\cos(x+\theta) \geq 1-\cos\theta. \tag{1.8}$$

[Πράγματι, θέτουμε $g(x) = 1+\cos\theta-\cos x-\cos(x+\theta)$ και πρέπει να δείξουμε ότι $g(x) \geq 0$ για $-\theta/2 \leq x \leq \pi-\theta/2$ με $\theta \in [0,\pi]$. Αν $\theta = \pi$, φανερά $g(x) = 0$ και το συμπέρασμα ισχύει. Αν $\theta \in [0,\pi)$ τοε η g έχει κρίσιμα σημεία στα $k\pi - \theta/2$ για $k \in \mathbb{Z}$, και αφού πρέπει $-\theta/2 \leq x \leq \pi-\theta/2$ συμπεραίνουμε ότι είτε $k = 0$ είτε $k = 1$ και έτσι έχουμε κρίσιμα σημεία στα $-\theta/2$ και $\pi - \theta/2$. Όμως

$$g\left(-\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$$

και

$$g\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right) \geq 0.$$

Συνεπώς $g(x) \geq 0$.]

Από τις (1.7) και (1.8) προκύπτει άμεσα η ζητούμενη (1.6). ◘

Βιβλιογραφία

[Ba2023] George Baloglou, *Archimedian right triangular pyramid face area inequality*, 2023, DOI: 10.13140/RG.2.2.19921.20327

[Be1977] J. L. Berggren, *A lacuna in Book I of Archimedes' Sphere and Cylinder*, Historia Mathematica 4, pp. 1–5, 1977.

[Ma2010] R. Masià-Fornos, *A "lacuna" in Proposition 9 of Archimedes' On the Sphere and the Cylinder, Book I*, Historia Mathematica 37, pp. 568–578, 2010.

[Ne2004] R. Netz, *The Works of Archimedes*, Cambridge University Press, vol. 1, pp. 64, 2004.


TRANSIRE SVVM PECTVS MVNDOQVE POTIRI
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ