3ο Συμπόσιο Ανάλυσης

με την ευκαιρία της αφυπηρέτησης

του Βαγγέλη Φελουζή

2–3 Ιουνίου 2023

Παρασκευή 2 Ιουνίου

- 15:30–16:20 Γιώργος Χασάπης
  Entropy maximisers for weighted sums of iid random variables
- 16:30–17:20 Βασιλική Φαρμάκη
  Συνδυαστική Θεωρία Ramsey στα σύνολα Schreier

Διάλειμμα για καφέ

- 18:00–18:50 Μιχάλης Κολουντζάκης
  Orthogonal exponential bases and geometric properties of domains
- 19:00–19:50 Στέλιος Νεγρεπόντης
  Η ερμηνεία της Πλατωνικής Φιλοσοφίας με βάση την Περιοδική Ανθυφαίρεση

Σάββατο 3 Ιουνίου

- 10:30–11:20 Απόστολος Γιαννόπουλος
  Threshold for the expected measure of random polytopes
- 11:30–12:20 Μαρία Χατζηνικολάου
  Μαθηματική μοντελοποίηση και μελέτη της επίδρασης του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό ενός ερυθροκυττάρου

Διάλλειμα για καφέ

- 13:00–13:50 Βασίλης Γρηγοριάδης
  Borel σύνολα τρίτης τάξης και εφαρμογές σε αλυσίδες χώρων

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Σχολή Θετικών Επιστημών & Τεχνολογίας

ε2M Applied Mathematics Laboratory

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Περιλήψεις

Γιώργος Χασάπης

Entropy maximisers for weighted sums of iid random variables

Let $n \in \mathbb{N}$ and $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be iid random variables. What is the unit vector $a = (a_1, \ldots, a_n)$ that maximises the entropy (or, more generally, Rényi entropies) of $\sum_{j=1}^{n} a_j X_j$? We will review some aspects of this general question, provide partial answers for certain classes of random variables and discuss related open problems. Based on joint works with K. Gurushankar, S. Singh and T. Tkocz.

Βασιλική Φαρμάκη

Συνδυαστική Θεωρία Ramsey στα σύνολα Schreier

Το 1929 ο Ramsey απέδειξε το απειροσυνδυαστικό θεώρημά του για όλα τα ν-σύνολα των φυσικών αριθμών, και το 1930 ο Schreier εισήγαγε τα σήμερα λεγόμενα σύνολα Schreier για τον πρώτο άπειρο διατακτικό αριθμό ω, ώστε να κατασκευάσει ένα φημισμένο αντιπαράδειγμα στη θεωρία των χώρων Banach, Το 1931 ο Godel απέδειξε ότι υπάρχει μια πρόταση που διατυπώνεται στην τυπική γλώσσα της αριθμητικής, η οποία δεν μπορεί ν' αποδειχθεί ούτε αυτή ούτε η λογική άρνησή της, αλλά για πολλά χρόνια δεν ήταν καθόλου γνωστή η φύση μιάς τέτοιας πρότασης μυστήριο.

Το 1977 οι Paris και Harrington συνεδύασαν με τρόπο θαυμαστό αυτά τα θεμελιώδη αποτελέσματα. Απέδειξαν ότι μια πρόταση πεπερασμένης μορφής τύπου Ramsey, στην οποία υπεισέρχεται ένα σύνολο Schreier για τον πρώτο άπειρο διατακτικό αριθμό ω αποτελεί μια πρόταση τύπου Godel. Το 1994 χωρίς να γνωρίζω την παραπάνω προϊστορία έδωσα τον ορισμό των συνόλων Schreier για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ και τον χρησιμοποίησα για την ταξινόμηση των πραγματικών συναρτήσεων Baire-1 και για την λύση κάποιων προβλημάτων που είχε θέσει ο Haskell Rosenthal στη θεωρία χώρων Banach.

Στην εργασία μου Ramsey dichotomies with ordinal index το 1998 επεξέτεινα το κλασικό θεώρημα Ramsey (1929) σε κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ. Προκειμένου να διατυπωθεί το γενικευμένο θεώρημα Ramsey, ορίζονται επαγωγικά κατάλληλες οικογένειες $A\xi$, για κάθε $\xi < \omega_1$, από πεπερασμένα υποσύνολα των φυσικών αριθμών χρησιμοποιώντας την κανονική αναπαράσταση των αριθμήσιμων διατακτικών αριθμών (πλήρες λεπτό Schreier σύστημα). Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι: για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ξ, κάθε αυθαίρετη οικογένεια F πεπερασμένων υποσυνόλων των φυσικών αριθμών και κάθε άπειρο υποσύνολο L των φυσικών αριθμών υπάρχει άπειρο υποσύνολο M του L ώστε όλα τα υποσύνολα του M που ανήκουν στην $A\xi$ ανήκουν είτε στην F είτε στο συμπλήρωμά της. Με την επιπλέον υπόθεση ότι η οικογένεια F είναι κατά σημείο κλειστή και καθολική (δηλαδή, περιέχει όλα τα υποσύνολα των στοιχείων της) βελτιώνεται το προαναφερόμενο γενικευμένο θεώρημα Ramsey διατυπώνοντας και ένα κριτήριο το οποίο καθορίζει ποια από τις δύο διχοτομικές συνθήκες μπορεί να συμβαίνει για καθένα $\xi < \omega_1$, χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οικογενειών $A\xi$, για κάθε $\xi < \omega_1$.

Στις εργασίες μας 2006 και 2008 αποδείξαμε με τον Σ. Νεγρεπόντη ότι το σύνολο της απειροσυνδυαστικής θεωρίας Ramsey επεκτείνεται με την βοήθεια των συνόλων Schreier κάθε αριθμήσιμου διατακτικού αριθμού. Οι Carlucci Zdanowski σε μια σειρά εργασιών από το 2014 απέδειξαν ότι τα απειροσυνδυαστικά θεωρήματα που απέδειξα έχουν (αναπάντεχες για μένα) εφαρμογές στην τεχνητή νοημοσύνη.

Μιχάλης Κολουντζάκης

Orthogonal exponential bases and geometric properties of domains

Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ be a measurable set. We call it *spectral* if there exists a set $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ (the *spectrum*) such that the characters

$$e_\lambda(x) := e^{2\pi\lambda\cdot x}, \quad \lambda \in \Lambda,$$

form an orthogonal basis for $L^2(\Omega)$. As an example, a Euclidean ball in $\mathbb{R}^d$ is not spectral while a cube is spectral ($\Lambda = \mathbb{Z}^d$ is a spectrum for $[0,1]^d$ – this is the usual Fourier series). The main question that interests us is which domains Ω are spectral. The Fuglede conjecture from the 1970s stated that Ω is spectral if and only if Ω can tile space by translations, that is, when there exists $T \subseteq \mathbb{R}^d$ with

$$\sum_{t\in T} \mathbf{1}_\Omega(x-t) = 1, \quad \text{for almost every } x \in \mathbb{R}^d.$$

Since 2004 this is known to be false in both directions for $d \geq 3$. Still, the connections between spectrality and tiling have continued to be studied intensively for special classes of Ω as well as for abelian groups other than Euclidean space, where both spectrality and tiling can be defined analogously. A major development in recent years was the proof by M. Matolcsi and N. Lev that any spectral set Ω can *weak-tile* its complement Ω^c (weak-tiling is tiling with weighted copies of the set, with nonnegative weights). This led to the proof of the Fuglede Conjecture for the class of convex bodies in any dimension, a result that attracted researchers over at least two decades, work that had led to many partial results.

In this talk we will describe some of the background and show even more applications of the weak-tiling idea to spectrality (eg of Cantor-type sets). We will also point out some open problems. This is mostly joint work with M. Matolcsi and N. Lev.

Στέλιος Νεγρεπόντης

Η ερμηνεία της Πλατωνικής Φιλοσοφίας με βάση την Περιοδική Ανθυφαίρεση

Στην ομιλία μου θα σκιαγραφήσω την ερμηνεία της Πλατωνικής φιλοσοφίας, που έχω αναπτύξει τις τελευταίες δύο δεκαετίες και πλέον, με βάση το φιλοσοφικό ανάλογο της γεωμετρικής έννοιας της περιοδικής ανθυφαίρεσης (αντίστοιχης των σύγχρονών συνεχών κλασμάτων), η οποία—ανακαλύφθηκε από τους Πυθαγόρειους και χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, πιθανόν από τον Ίππασο από το Μεταπόντιο—χρησιμοποιήθηκε από τον Ζήνωνα τον Ελεάτη στα επιχειρήματα και παράδοξά του, με τα οποία επιχείρησε να υποστηρίξει την φιλοσοφία του δάσκαλού του Παρμενίδη, και α αποδείξει τον διαχωρισμό των νοητών και αισθητών, και—επεκτάθηκε αρχικά από τον Θεόδωρο τον Κυρηναίο αλλά κυρίως από τον μεγάλο μαθηματικό Θεαίτητο τον Αθηναίο, στην απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος παλινδρομικής περιοδικότητος και ασυμμετρίας της τετραγωνικής ρίζας κάθε μη τετράγωνου φυσικού αριθμού και πιθανόν χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του γενικού προβλήματος Pell.

Η φιλοσοφία του Πλάτωνος βασίσθηκε αφενός στις μαθηματικές ανακαλύψεις των Πυθαγορείων και του Θεαίτητου και αφετέρου στην φιλοσοφική χρήση της Πυθαγόρειας ανακάλυψης της ασυμμετρίας από τον Ζήνωνα. Με αυτή την ερμηνεία to έργο του Πλάτωνος γίνεται το ίδιο για πρώτη φορά στην σύγχρονη εποχή κατανοητό, και επίσης οδηγεί σε μια σημαντική επανεκτίμηση της Ιστορίας των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών.

Απόστολος Γιαννόπουλος

Threshold for the expected measure of random polytopes

We discuss the question how to obtain a threshold for the expected measure of a random polytope defined as the convex hull of independent random points with a log-concave distribution. For a precise formulation of the problem, let μ be a log-concave probability measure on $\mathbb{R}^n$ and for any $N > n$ consider the random polytope $K_N = \mathrm{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$, where $X_1, X_2, \dots$ are independent random points in $\mathbb{R}^n$ distributed according to μ. The question is if there exists a threshold for the expected measure $\mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)]$ of K_N.

Our approach is based on the Cramer transform Λ_μ^* of μ. We examine the existence of moments of all orders for Λ_μ^* and establish, under some conditions, a sharp threshold for $\mathbb{E}_{\mu^N}[\mu(K_N)]$: It is close to 0 if $\ln N \leq (1 - o_n(1))\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$ and close to 1 if $\ln N \geq (1 + o_n(1))\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*)$. The main condition is that the parameter $\beta(\mu) = \mathrm{Var}_\mu(\Lambda_\mu^*)/(\mathbb{E}_\mu(\Lambda_\mu^*))^2$ should be small. We shall describe the main ideas of this approach and state a number of concrete conjectures (or rather open questions) that might lead to a complete affirmative answer in full generality. The talk is based on joint works with S. Brazitikos and M. Pafis.

Μαρία Χατζηνικολάου

Μαθηματική μοντελοποίηση και μελέτη της επίδρασης του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό ενός ερυθροκυττάρου

Στις μέρες μας, ολοένα και περισσότερο φαίνεται η ανάγκη της χρήσης των μαθηματικών σε επιστήμες που «παραδοσιακά» θεωρούντο ξένες προς αυτά, όπως η Ιατρική. Η κατασκευή και χρήση μαθηματικών μοντέλων βοηθά στην βαθύτερη κατανόηση των αιτίων και της εξέλιξης των ασθενειών, και μπορεί να συνεισφέρει στην εύρεση μεθόδων και τεχνικών για την έγκαιρη διάγνωση και τη θεραπεία τους. Στην ομιλία αυτή θα μελετήσουμε πως επιδρά ένα μαγνητικό πεδίο στο βασικότερο συστατικό του αίματος που είναι το ερυθρό κύτταρο, κατασκευάζοντας ένα μαθηματικό μοντέλο Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων. Αναπαριστώντας μαθηματικά το ερυθροκύτταρο με δυο διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα, σφαιροειδές και αντεστραμμένο σφαιροοιεδές, η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών παράγεται με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών και του R-χωρισμού των μεταβλητών αντίστοιχα και δίνεται με μορφή σειρών τριγωνομετρικών συναρτήσεων και συναρτήσεων Legendre πρώτου και δευτέρου είδους. Η γεωμετρική διαφοροποίηση, ανταναλκάται στη διαφορετική έκφραση της λύσης αποκαλύπτοντας «κρυμμένα» ποιοτικά φυσικά χαρακτηριστικά, ερμηνεύοντας πειραματικά αποτελέσματα. Λέξεις κλειδιά: Συναρτήσεις Legendre, Εξίσωση Laplace, μαγνητικό πεδίο, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, αντίστροφο επίμηκες σφαιροειδές

Βασίλης Γρηγοριάδης

Borel σύνολα τρίτης τάξης και εφαρμογές σε αλυσίδες χώρων

Δεδομένων $0 < a < q$ η τομή όλων των ακολουθιακών χώρων ℓ^p για $p > a$ είναι Borel υποσύνολο του ℓ^q, το οποίο βρίσκεται γνήσια στην τρίτη πολλαπλασιαστική τάξη της συνηθισμένης ιεραρχίας των Borel συνόλων. Αυτό απαντά σε μια ερώτηση του Β. Νεστορίδη. Η τεχνική της απόδειξης δίνει έναν χαρακτηρισμό των Borel συνόλων που βρίσκονται γνήσια στην τρίτη πολλαπλασιαστική τάξη, ο οποίος εφαρμόζεται επίσης σε αλυσίδες χώρων πέραν των ℓ^p.
