

ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ



Αρχαίο Κείμενο
Απόδοση στη σύγχρονη Μαθηματική γλώσσα
Νίκος Ροκοπάνος, Αντώνης Τσολομύτης
Σάμος 2021–2024

ISBN: 978-618-00-5205-3

Έκδοση 1.0 ¶ 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Στοιχειοθετήθηκε με το Χ_εΛ^ΑΤ_εΧ

Απαγορεύεται η επαναδιανομή χωρίς άδεια από τους δημιουργούς.

Πηγαίος κώδικας διαθέσιμος υπό όρους.

© 2024, Ν. Ροκοπάνος, Α. Τσολομύτης
Σάμος, Ελλάδα.

Επικοινωνία: atsol@aegean.gr

24 σελ. A4 LCC: QA31 DDC: 510—dc23

ISBN: 978-618-00-5205-3

Version 1.0 ¶ 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Typeset with Χ_εΛ^ΑΤ_εΧ.

No redistribution allowed without the creators' permission.

Source code available with restrictions.

© 2024, Ν. Rokopanos, Α. Tsolomitis
Samos, Greece.

Contact: atsol@aegean.gr

24 σελ. A4 LCC: QA31 DDC: 510—dc23

ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

Μέρος I

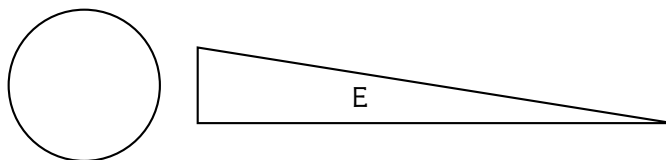
Σύγχρονη Μαθηματική Απόδοση

Πρόταση 1 (22). Έστω ένας κύκλος και ένα ορθογώνιο τρίγωνο ώστε:

- α) η ακτίνα του κύκλου να είναι ίση με μια από τις δύο κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και
- β) η περιφέρεια του κύκλου να είναι ίση με την άλλη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου.

Τότε ο κύκλος έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου αυτού.

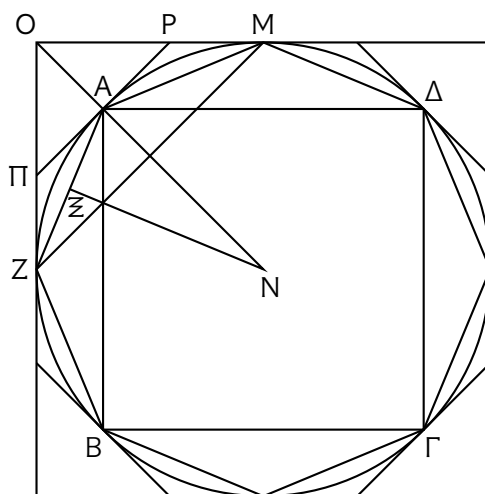
Απόδειξη. Θεωρούμε τον κύκλο $AB\Gamma$ και το ορθογώνιο τρίγωνο E σύμφωνα με την υπόθεση. Ισχυρίζομαι ότι ο κύκλος $AB\Gamma$ και το τρίγωνο E έχουν ίσα εμβαδά.



Υποθέτουμε αρχικά ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου E . Δηλαδή αν συμβολίσουμε με A το εμβαδόν του κύκλου έστω ότι ισχύει $A > |E|$.

Εγγράφουμε στον κύκλο το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και λαμβάνουμε τα μέσα των τόξων $\widehat{A\Delta}$, $\widehat{\Delta\Gamma}$, $\widehat{B\Gamma}$ και \widehat{AB} .

Ενώνοντας τα μέσα των παραπάνω τόξων έχουμε εγγράψει στον κύκλο ένα κανονικό οκτάγωνο.



Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία μέχρι η διαφορά του εμβαδού του κανονικού πολυγώνου που έχει εγγραφεί στον κύκλο από το εμβαδόν του κύκλου αυτού να είναι μικρότερη από $A - |E|$ (Στοιχεία Ευκλείδη, Βιβλίο ΙΟ, Πρόταση Ι).

Συμβολίζοντας με B το εμβαδόν του κανονικού αυτού πολυγώνου θα είναι $A - B < A - |E|$ οπότε $B > |E|$. Δηλαδή το κανονικό πολύγωνο έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου.

Στην συνέχεια λαμβάνουμε το κέντρο N του κύκλου και φέρνουμε το απόστημα NZ προς την πλευρά AZ .

Τότε η NZ θα είναι μικρότερη από την πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου E που είναι ίση με την ακτίνα.

Επίσης η περίμετρος του εγγεγραμμένου πολυγώνου είναι μικρότερη από την άλλη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου E καθώς αυτή είναι ίση με την περιφέρεια του κύκλου (Περί Σφαιρών και Κυλίνδρων, Βιβλίο Ι, Πρόταση Ι).

Έτσι το εμβαδόν του εγγεγραμμένου πολυγώνου είναι μικρότερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου E . Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς παραπάνω δείξαμε ότι $B > |E|$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο κύκλος $AB\Gamma\Delta$ έχει μικρότερο εμβαδόν από το ορθογώνιο τρίγωνο E . Δηλαδή έστω ότι $A < |E|$ και $\delta = |E| - A$.

Περιγράφουμε περί τον κύκλο τετράγωνο και διχοτομούμε τα τόξα του κύκλου που αντιστοιχούν στις γωνίες του τετραγώνου.

Στην συνέχεια φέρνουμε τις εφαπτόμενες στα μέσα των παραπάνω τόξων οπότε έχουμε περιγράψει περί τον κύκλο $AB\Gamma\Delta$ ένα κανονικό οκτάγωνο.

Τότε $|OAP| > |APM|$ καθώς $OP > PM$ και άρα

$$|OAP| + |OAP| > |OAP| + |APM|$$

ή

$$|OΠP| > |OAM|.$$

Συνεπώς το τρίγωνο $OΠP$ έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το μισό του εμβαδού του μεικτόγραμμου χωρίου $OZAM$.

Επαναλαμβάνοντας συνεχώς την ίδια διαδικασία (περιγραφής περί τον κύκλο κανονικών πολυγώνων με διχοτόμηση των τόξων που προκύπτουν κάθε φορά) η διαφορά του εμβαδού του τελευταίου κανονικού πολυγώνου και του εμβαδού του κύκλου θα είναι μικρότερη από το δ (Στοιχεία Ευκλείδη, Βιβλίο ΙΟ, Πρόταση Ι).

Συμβολίζοντας με δ' την διαφορά αυτή θα είναι $\delta' < |E| - A$.

Αν συμβολίσουμε με B το εμβαδόν του τελευταίου εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου από την παραπάνω έπεται $B - A < |E| - A$ ή $B < |E|$.

Η περίμετρος όμως του κανονικού πολυγώνου είναι μεγαλύτερη από την περιφέρεια του κύκλου και άρα από την μια κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου E .

Έτσι αν συμβολίσουμε με λ , την πλευρά του κανονικού πολυγώνου που έχει περιγραφεί περί τον κύκλο και κ_1 την κάθετη πλευρά του ορθογωνίου

τριγώνου που είναι ίση με την περιφέρεια του κύκλου θα είναι $\nu \cdot \lambda_\nu > \kappa_1$ οπότε

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \nu \cdot \lambda_\nu > \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \kappa_1$$

όπου με ρ έχουμε συμβολίσει την ακτίνα του κύκλου.

Έτσι θα είναι $B > |E|$ που όμως είναι αδύνατον να ισχύει καθώς παραπάνω δείξαμε ότι $B < |E|$.

Συνεπώς $A = |E|$ δηλαδή ο κύκλος και το ορθογώνιο τρίγωνο έχουν ίσα εμβαδά. □

Πρόταση 2 (22). Ο λόγος του εμβαδού ενός κύκλου προς το τετράγωνο της διαμέτρου του είναι μικρότερος από $11/14$.

Απόδειξη. Έστω ο κύκλος με διάμετρο AB . Περιγράφουμε περί αυτόν το τετράγωνο ΓH και έστω τα σημεία E και Z ώστε $DE = 2 \cdot \Delta\Gamma$ και $EZ = \frac{1}{7} \cdot \Gamma\Delta$. Επειδή $|A\Gamma E|/|A\Gamma\Delta| = 3 = 21/7$ και $|A\Gamma E Z|/|A\Gamma\Delta| = 1/7$ έπεται προσθέτοντας ότι

$$\frac{|A\Gamma Z|}{|A\Gamma\Delta|} = \frac{22}{7}.$$

Όμως $|\Gamma H| = 4 \cdot |A\Gamma\Delta|$ οπότε από την προηγούμενη έπεται

$$\frac{|A\Gamma Z|}{|\Gamma H|/4} = \frac{22}{7}$$

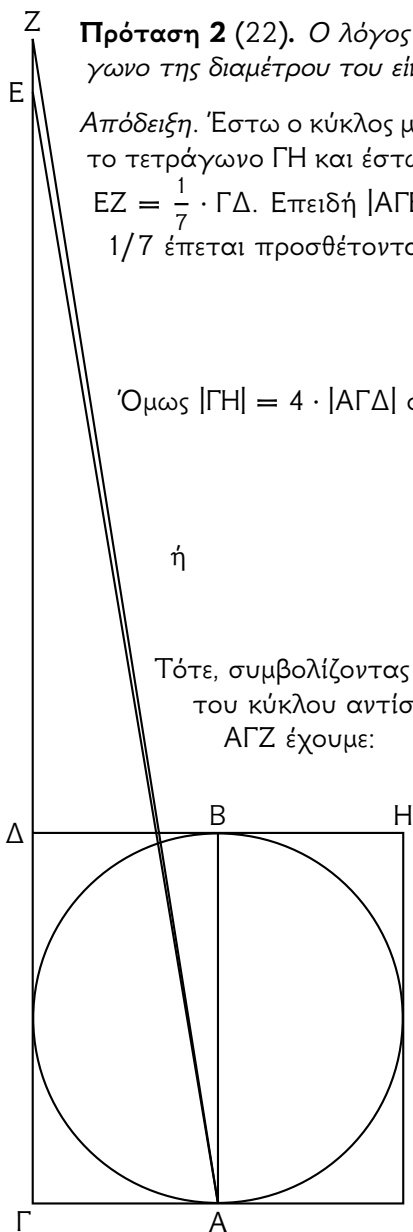
ή

$$\frac{|A\Gamma Z|}{|\Gamma H|} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}.$$

Τότε, συμβολίζοντας με ρ και δ την ακτίνα και την διάμετρο του κύκλου αντίστοιχα, για το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma Z$ έχουμε:

$$|A\Gamma Z| = \frac{1}{2} \cdot A\Gamma \cdot \Gamma Z = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{22}{7} \delta = \frac{22}{7} \rho^2$$

Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma Z$ καθώς η κάθετη πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου ενώ η βάση του ΓZ είναι ίση με τα $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ της διαμέτρου του κύκλου. Επειδή όπως αποδεικνύεται στην αμέσως επόμενη πρόταση, για την περιφέρεια Π του κύκλου ισχύει $\Pi < 3\frac{1}{7} \delta$, αν συμβολίσου-



με με A το εμβαδόν του κύκλου έχουμε $A < |ΑΓΖ|$ καθώς $A < \frac{22}{7}\rho^2$.

Συνεπώς

$$\frac{A}{\delta^2} < \frac{|ΑΓΖ|}{|ΓΗ|} = \frac{11}{14}.$$

□

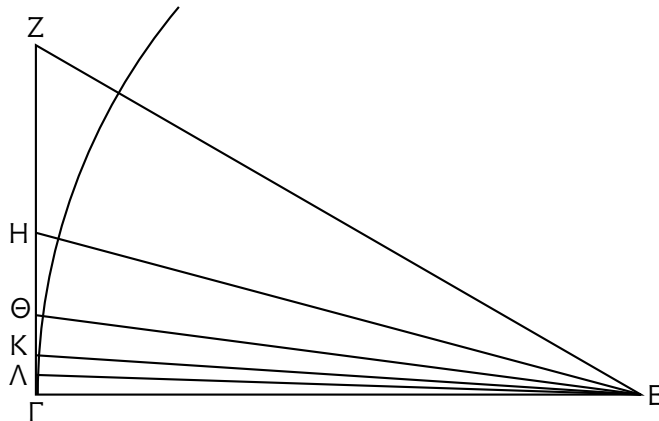
Πρόταση 3 (22). Η περιφέρεια ενός κύκλου είναι μικρότερη από τα $3 + 1/7$ της διαμέτρου του και μεγαλύτερη από τα $3 + 10/71$ της διαμέτρου του. Δηλαδή αν Π είναι η περιφέρεια ενός κύκλου διαμέτρου δ ισχύει

$$3\frac{10}{71}\delta < \Pi < 3\frac{1}{7}\delta.$$

Απόδειξη. Έστω κύκλος κέντρου E και διάμετρο $ΑΓ = \delta$ και έστω Π η περιφέρειά του.

Ισχυρισμός 1: Ισχύει ότι $\Pi < 3\frac{1}{7}\delta$.

Φέρνουμε την εφαπτόμενη $ΓΖ$ στο Γ ώστε $\widehat{ΖΕΓ} = 1/3$ της ορθής, οπότε $ΖΕ = 2 \cdot ΖΓ$.



(Στμ: από την Πρόταση 1 παραπάνω και την Πρόταση 2 του Βιβλίου 12 των Στοιχείων του Ευκλείδη αρκεί να γίνει η απόδειξη για οποιαδήποτε συγκεκριμένη ακτίνα. Έτσι, ο Αρχιμήδης επιλέγει να κάνει την απόδειξη για κύκλο ακτίνας $ΕΓ = 256$.)

Αν $ΖΓ = 153$ από την προηγούμενη έπεται ότι $ΕΖ = 306$ ενώ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Στοιχεία Ευκλείδη, Βιβλίο 1, Πρόταση 47) έπεται $ΕΓ = \sqrt{306^2 - 153^2} = 265$.

Φέρνουμε την διχοτόμο $ΕΗ$ της $\widehat{ΖΕΓ}$ και άρα από το Θεώρημα της Εσωτερικής Διχοτόμου στο τρίγωνο $ΖΕΓ$ (Στοιχεία Ευκλείδη, Βιβλίο 6, Πρόταση 3) έχουμε

$$\frac{ΖΕ}{ΕΓ} = \frac{ΖΗ}{ΗΓ}.$$

Έτσι θα είναι και

$$\frac{ZE + E\Gamma}{E\Gamma} = \frac{ZH + H\Gamma}{H\Gamma} = \frac{Z\Gamma}{H\Gamma},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\frac{ZE + E\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{E\Gamma}{H\Gamma} \quad (1)$$

Όμως

$$\frac{ZE}{Z\Gamma} = \frac{306}{153}.$$

και άρα

$$\frac{ZE^2}{Z\Gamma^2} = \frac{93636}{23409}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{ZE^2 - Z\Gamma^2}{Z\Gamma^2} = \frac{93636 - 23409}{23409}.$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα όμως (Στοιχεία Ευκλείδη, Βιβλίο Ι, Πρόταση 47) είναι $ZE^2 - Z\Gamma^2 = \Gamma E^2$ και έτσι από την παραπάνω έπεται ότι

$$\frac{\Gamma E^2}{Z\Gamma^2} = \frac{70227}{23409}.$$

Έτσι,

$$\frac{\Gamma E}{Z\Gamma} = \sqrt{\frac{70227}{23409}} = \frac{\sqrt{70225 + 2}}{\sqrt{23409}} = \frac{\sqrt{265^2 + 2}}{\sqrt{153^2}} > \frac{265}{153}, \quad (2)$$

και επειδή $ZE/Z\Gamma = 306/153$ έπεται ότι

$$\frac{\Gamma E + ZE}{Z\Gamma} > \frac{265 + 306}{153} = \frac{571}{153}.$$

Έτσι λόγω της (1) προκύπτει

$$\frac{E\Gamma}{H\Gamma} > \frac{571}{153}. \quad (3)$$

Υψώνοντας τώρα στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\frac{E\Gamma^2}{H\Gamma^2} > \frac{326041}{23409},$$

και άρα

$$\frac{E\Gamma^2 + H\Gamma^2}{H\Gamma^2} > \frac{326041 + 23409}{23409},$$

ενώ καθώς $E\Gamma^2 + H\Gamma^2 = HE^2$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα), από την τελευταία προκύπτει

$$\frac{HE^2}{H\Gamma^2} > \frac{349450}{23409}.$$

Τότε

$$\frac{HE}{HG} > \sqrt{\frac{349450}{23409}} > \frac{\sqrt{349428\frac{49}{64}}}{\sqrt{23409}} = \frac{\sqrt{(591\frac{1}{8})^2}}{\sqrt{153^2}} = \frac{591\frac{1}{8}}{153},$$

δηλαδή

$$\frac{HE}{HG} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}. \quad (4)$$

Στη συνέχεια θα επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία άλλες τρεις φορές (σύνολο τέσσερες).

2η επανάληψη:

Φέρνουμε την διχοτόμο ΕΘ της \widehat{HEG} οπότε από το Θεώρημα της Εσωτερικής Διχοτόμου στο ΗΕΓ έχουμε

$$\frac{HE}{GE} = \frac{HO}{GO},$$

οπότε ισχύει

$$\frac{HE + GE}{GE} = \frac{HO + GO}{GO} = \frac{HG}{GO}.$$

Άρα

$$\frac{HE + GE}{HG} = \frac{GE}{GO}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) και (4) παίρνουμε

$$\frac{EG + HE}{HG} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153},$$

και έτσι από την παραπάνω έπεται ότι

$$\frac{GE}{GO} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153} \quad (5)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\frac{GE^2}{GO^2} > \frac{1350534\frac{33}{64}}{23409},$$

και άρα

$$\frac{GE^2 + GO^2}{GO^2} > \frac{1350534\frac{33}{64} + 23409}{23409}.$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι $GE^2 + GO^2 = OE^2$, και έτσι

$$\frac{OE^2}{GO^2} > \frac{1373943\frac{33}{64}}{23409},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\Theta\text{E}}{\Gamma\Theta} > \sqrt{\frac{1373943\frac{33}{64}}{23409}} > \frac{\sqrt{1373877\frac{1}{64}}}{\sqrt{23409}} = \frac{\sqrt{(1172\frac{1}{8})^2}}{\sqrt{153^2}} = \frac{1172\frac{1}{8}}{153},$$

δηλαδή ισχύει

$$\frac{\Theta\text{E}}{\Gamma\Theta} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}. \quad (6)$$

3η επανάληψη:

Φέρνουμε την διχοτόμο ΕΚ της $\widehat{\Theta\text{E}\Gamma}$ και άρα από το Θεώρημα της Εσωτερικής Διχοτόμου στο $\Theta\text{E}\Gamma$ έχουμε

$$\frac{\Theta\text{E}}{\Gamma\text{E}} = \frac{\Theta\text{K}}{\Gamma\text{K}},$$

οπότε

$$\frac{\Theta\text{E} + \Gamma\text{E}}{\Gamma\text{E}} = \frac{\Theta\text{K} + \Gamma\text{K}}{\Gamma\text{K}} = \frac{\Gamma\Theta}{\Gamma\text{K}}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{\Theta\text{E} + \Gamma\text{E}}{\Gamma\Theta} = \frac{\Gamma\text{E}}{\Gamma\text{K}}.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (5) και (6) και παίρνουμε

$$\frac{\Theta\text{E} + \Gamma\text{E}}{\Gamma\Theta} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153},$$

οπότε από την παραπάνω έπεται ότι

$$\frac{\Gamma\text{E}}{\Gamma\text{K}} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}. \quad (7)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο λαμβάνουμε

$$\frac{\Gamma\text{E}^2}{\Gamma\text{K}^2} > \frac{5448723\frac{1}{16}}{23409},$$

από την οποία προκύπτει και ότι

$$\frac{\Gamma\text{E}^2 + \Gamma\text{K}^2}{\Gamma\text{K}^2} > \frac{5448723\frac{1}{16} + 23409}{23409}.$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα όμως είναι $\Gamma\text{E}^2 + \Gamma\text{K}^2 = \text{K}\text{E}^2$ και επομένως είναι και

$$\frac{\text{K}\text{E}^2}{\Gamma\text{K}^2} > \frac{5472132\frac{1}{16}}{23409}.$$

Από την τελευταία έχουμε:

$$\frac{KE}{\Gamma K} > \sqrt{\frac{5472132\frac{1}{16}}{23409}} > \frac{\sqrt{5472090\frac{9}{16}}}{\sqrt{23409}} = \frac{\sqrt{(2339\frac{1}{4})^2}}{\sqrt{153^2}} = \frac{2339\frac{1}{4}}{153},$$

δηλαδή ισχύει

$$\frac{KE}{\Gamma K} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}. \quad (8)$$

4η επανάληψη:

Τέλος, φέρνουμε και την διχοτόμο ΛΕ της $\widehat{\Gamma EK}$ οπότε από το Θεώρημα της Εσωτερικής Διχοτόμου στο τρίγωνο ΓΕΚ είναι:

$$\frac{KE}{\Gamma E} = \frac{KL}{\Gamma L}$$

και άρα

$$\frac{KE + \Gamma E}{\Gamma E} = \frac{KL + \Gamma L}{\Gamma L} = \frac{\Gamma K}{\Gamma L}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{KE + \Gamma E}{\Gamma K} = \frac{\Gamma E}{\Gamma L}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (7) και (8) παίρνουμε

$$\frac{KE + \Gamma E}{\Gamma K} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153},$$

οπότε από την προηγούμενη έπεται:

$$\frac{\Gamma E}{\Gamma L} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}. \quad (9)$$

Συνοψίζοντας, για τις ΓΖ, ΓΗ, ΓΘ, ΓΚ και ΓΛ ισχύουν οι επόμενες ανισότητες:

$$\frac{\Gamma E}{\Gamma Z} > \frac{265}{153} \quad (\text{η σχέση 2})$$

$$\frac{\Gamma E}{\Gamma H} > \frac{571}{153} \quad (\text{η σχέση 3})$$

$$\frac{\Gamma E}{\Gamma \Theta} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153} \quad (\text{η σχέση 5})$$

$$\frac{\Gamma E}{\Gamma K} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153} \quad (\text{η σχέση 7})$$

$$\frac{\Gamma E}{\Gamma L} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153} \quad (\text{η σχέση 9})$$

Η ΓΕ όμως είναι η ακτίνα του κύκλου ενώ οι ΓΖ, ΓΗ, ΓΘ, ΓΚ και ΓΛ είναι ίσες με τα μισά των πλευρών των περιγεγραμμένων περί τον κύκλο εξαγώνου, δωδεκαγώνου, εικοσιτετραγώνου, σαρανταοκταγώνου και ενενηταεξαγώνου αντίστοιχα καθώς η $\widehat{ΖΕΓ}$ είναι ίση με το $1/3$ της ορθής διχοτομήθηκε διαδοχικά τέσσερες φορές (και άρα η $\widehat{ΛΕΓ}$ είναι ίση με το $1/48$ της ορθής.)

Από τις παραπάνω ανισότητες παίρνουμε:

$$\frac{\delta}{2\Gamma Z} > \frac{265}{153}$$

$$\frac{\delta}{2\Gamma H} > \frac{571}{153}$$

$$\frac{\delta}{2\Gamma \Theta} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{\delta}{2\Gamma K} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}$$

$$\frac{\delta}{2\Gamma \Lambda} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

όπου $\delta = 2\Gamma E$ είναι η διάμετρος του κύκλου.

Συμβολίζοντας με Π_6 , Π_{12} , Π_{24} , Π_{48} και Π_{96} τις περιμέτρους των περιγεγραμμένων περί τον κύκλο εξαγώνου, δωδεκαγώνου, εικοσιτετραγώνου, σαρανταοκταγώνου και ενενηταεξαγώνου αντίστοιχα από τις παραπάνω ανισότητες προκύπτουν:

$$\frac{\delta}{\Pi_6} > \frac{265}{6 \cdot 153}$$

$$\frac{\delta}{\Pi_{12}} > \frac{571}{12 \cdot 153}$$

$$\frac{\delta}{\Pi_{24}} > \frac{1162\frac{1}{8}}{24 \cdot 153}$$

$$\frac{\delta}{\Pi_{48}} > \frac{2334\frac{1}{4}}{48 \cdot 153}$$

$$\frac{\delta}{\Pi_{96}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{96 \cdot 153}$$

και άρα

$$\begin{aligned}\frac{\Pi_6}{\delta} &< \frac{918}{265} \\ \frac{\Pi_{12}}{\delta} &< \frac{1836}{571} \\ \frac{\Pi_{24}}{\delta} &< \frac{3672}{1162\frac{1}{8}} \\ \frac{\Pi_{48}}{\delta} &< \frac{7344}{2334\frac{1}{4}} \\ \frac{\Pi_{96}}{\delta} &< \frac{14688}{4673\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Συνεπώς, για την περίμετρο του περιγεγραμμένου περί τον κύκλο εννεη-
νταεξάγωνου ισχύει

$$\Pi_{96} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} \cdot \delta.$$

Όμως

$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7},$$

και άρα από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι:

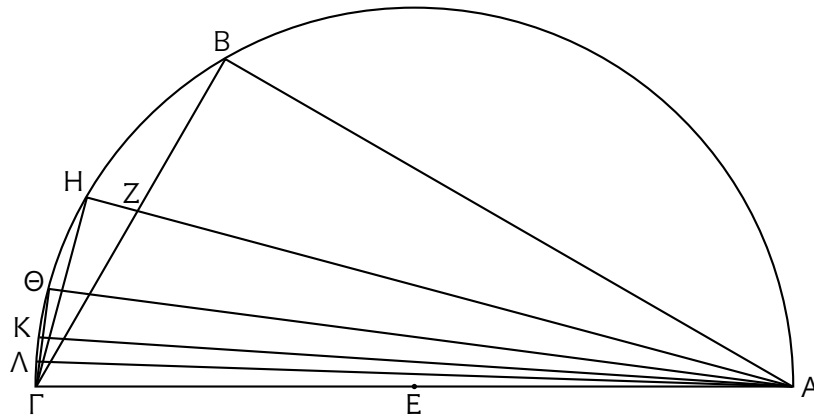
$$\Pi_{96} < 3\frac{1}{7} \cdot \delta.$$

Αλλά το εννεηνταεξάγωνο είναι περιγεγραμμένο περί τον κύκλο και
έτσι συμπεραίνουμε ότι για την περιφέρεια Π του κύκλου ισχύει $\Pi < \Pi_{96}$,
οπότε από την προηγούμενη, έπεται τελικά ότι

$$\Pi < 3\frac{1}{7} \cdot \delta.$$

Ισχυρισμός 2: Ισχύει ότι $\Pi > 3\frac{10}{71}\delta$.

Θεωρούμε τον κύκλο διαμέτρου $ΑΓ$ και την εγγεγραμμένη σε αυτόν
γωνία $\widehat{ΒΑΓ} = 1/3$ της ορθής.



Τότε θα είναι

$$\frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{2}{1}, \quad (10)$$

οπότε αν $ΒΓ = 780$ παίρνουμε

$$\frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{1560}{780},$$

και άρα υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε

$$\frac{ΑΓ^2}{ΒΓ^2} = \frac{1560^2}{780^2}.$$

Τότε είναι και

$$\frac{ΑΓ^2 - ΒΓ^2}{ΒΓ^2} = \frac{1560^2 - 780^2}{780^2}$$

ή

$$\frac{ΑΒ^2}{ΒΓ^2} = \frac{1825200}{608400} = 3.$$

Έτσι

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \sqrt{\frac{1825200}{608400}} < \frac{\sqrt{1825201}}{780} = \frac{1351}{780},$$

δηλαδή ισχύει

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ} < \frac{1351}{780}. \quad (11)$$

1η επανάληψη:

Στην συνέχεια φέρνουμε την διχοτόμο ΑΗ της $\widehat{ΒΑΓ}$ οπότε $\widehat{ΒΑΗ} = \widehat{ΗΑΓ}$.
 Όμως $\widehat{ΒΑΗ} = \widehat{ΗΓΒ}$ καθώς είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο

ίδιο τόξο και άρα τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΓΗΖ είναι ισογώνια καθώς έχουν κοινή την \widehat{AHG} και $\widehat{HAG} = \widehat{HGZ} = \widehat{HGB}$. Συνεπώς,

$$\frac{AH}{HG} = \frac{GH}{HZ} = \frac{AG}{GZ}. \quad (12)$$

Επειδή όμως

$$\frac{AB}{BG} < \frac{1351}{780}$$

και $AG/BG = 1560/780$ θα είναι

$$\frac{AB + AG}{BG} < \frac{1351 + 1560}{780}$$

ή

$$\frac{AB + AG}{BG} < \frac{2911}{780}. \quad (13)$$

Επιπλέον η ΑΗ είναι διχοτόμος της \widehat{BAG} και επομένως από το Θεώρημα της Εσωτερικής Διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$\frac{AB}{AG} = \frac{BZ}{GZ},$$

οπότε θα είναι και

$$\frac{AB + AG}{AG} = \frac{BZ + ZG}{ZG} = \frac{BG}{ZG}.$$

Άρα

$$\frac{AB + AG}{BG} = \frac{AG}{ZG},$$

και επομένως λόγω της (13) ισχύει

$$\frac{AG}{ZG} < \frac{2911}{780}.$$

Τότε όμως λόγω της (12) παίρνουμε

$$\frac{AH}{HG} < \frac{2911}{780}, \quad (14)$$

από όπου, υψώνοντας στο τετράγωνο

$$\frac{AH^2}{HG^2} < \frac{8473921}{608400}.$$

Από την παραπάνω έπεται όμως ότι

$$\frac{AH^2 + HG^2}{HG^2} < \frac{8473921 + 608400}{608400},$$

και καθώς από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι $AH^2 + HG^2 = AG^2$, παίρνουμε

$$\frac{AG^2}{HG^2} < \frac{9082321}{608400}.$$

Από την τελευταία ανισότητα προκύπτει

$$\frac{AG}{GH} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}, \quad (15)$$

καθώς $9082321 < 9082689\frac{1}{16} = (3013\frac{3}{4})^2$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (14) και (15) παίρνουμε

$$\frac{AH + AG}{HG} < \frac{5924\frac{3}{4}}{780} = \frac{23699}{3120} = \frac{1823}{240},$$

δηλαδή ισχύει

$$\frac{AH + AG}{HG} < \frac{1823}{240}. \quad (16)$$

2η επανάληψη:

Στην συνέχεια φέρνουμε τη διχοτόμο $A\Theta$ της $\widehat{\Gamma A H}$ και έστω Z_1 το σημείο τομής των $A\Theta$ και $H\Gamma$, τη διχοτόμο $A\Lambda$ της $\widehat{\Theta A \Gamma}$ και έστω Z_2 το σημείο τομής των $A\Lambda$ και $\Theta\Gamma$, και τη διχοτόμο $A\Lambda$ της $\widehat{K A \Gamma}$ και έστω Z_3 το σημείο τομής των $A\Lambda$ και $K\Gamma$.

Τότε από το Θεώρημα Εσωτερικής Διχοτόμου στο τρίγωνο $AH\Gamma$ είναι

$$\frac{AH}{A\Gamma} = \frac{HZ_1}{\Gamma Z_1},$$

και άρα

$$\frac{AH + A\Gamma}{A\Gamma} = \frac{HZ_1 + \Gamma Z_1}{\Gamma Z_1} = \frac{H\Gamma}{\Gamma Z_1}.$$

Άρα

$$\frac{AH + A\Gamma}{H\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Gamma Z_1}.$$

Όμως τα τρίγωνα $A\Theta\Gamma$ και $\Gamma\Theta Z_1$ είναι ισογώνια καθώς έχουν την $\widehat{A\Theta\Gamma}$ κοινή και $\widehat{\Theta A \Gamma} = \widehat{H A \Theta} = \widehat{\Theta \Gamma H}$, οπότε ισχύει

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma Z_1} = \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma}.$$

Έτσι από την προηγούμενη αναλογία παίρνουμε

$$\frac{AH + A\Gamma}{H\Gamma} = \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma},$$

οπότε λόγω της (16) είναι

$$\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{1823}{240}. \quad (17)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\frac{A\Theta^2}{\Theta\Gamma^2} < \frac{3323329}{57600},$$

και άρα

$$\frac{A\Theta^2 + \Theta\Gamma^2}{\Theta\Gamma^2} < \frac{3323329 + 57600}{57600}$$

Καθώς όμως από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι $A\Theta^2 + \Theta\Gamma^2 = A\Gamma^2$ από την προηγούμενη έπεται

$$\frac{A\Gamma^2}{\Theta\Gamma^2} < \frac{3380929}{57600}.$$

Έτσι,

$$\frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \frac{\sqrt{3380929}}{\sqrt{57600}} < \frac{\sqrt{3381252\frac{37}{121}}}{\sqrt{57600}} = \frac{\sqrt{(1838\frac{9}{11})^2}}{\sqrt{240^2}} = \frac{1838\frac{9}{11}}{240}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}. \quad (18)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (17) και (18) παίρνουμε

$$\frac{A\Theta + A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \frac{3661\frac{9}{11}}{240} = \frac{1007}{66}.$$

3η επανάληψη:

Από το Θεώρημα της Εσωτερικής Διχοτόμου στο τρίγωνο $\Theta A\Gamma$ έχουμε

$$\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{\Theta Z_2}{\Gamma Z_2},$$

οπότε είναι και

$$\frac{A\Theta + A\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Theta Z_2 + \Gamma Z_2}{\Gamma Z_2} = \frac{\Theta\Gamma}{\Gamma Z_2}.$$

Έτσι,

$$\frac{A\Theta + A\Gamma}{\Theta\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Gamma Z_2}. \quad (19)$$

Επιπλέον τα τρίγωνα $AK\Gamma$ και ΓKZ_2 είναι όμοια ως ισογώνια και άρα

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma Z_2} = \frac{AK}{K\Gamma},$$

οπότε από την προηγούμενη έπεται

$$\frac{A\Theta + A\Gamma}{\Theta\Gamma} = \frac{AK}{K\Gamma},$$

και άρα

$$\frac{AK}{K\Gamma} < \frac{1007}{66}. \quad (20)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο προκύπτει

$$\frac{AK^2}{K\Gamma^2} < \frac{1007^2}{66^2} = \frac{1014049}{4356},$$

και επομένως

$$\frac{AK^2 + K\Gamma^2}{K\Gamma^2} < \frac{1014049 + 4356}{4356}.$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα όμως είναι $AK^2 + K\Gamma^2 = A\Gamma^2$ οπότε από την παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{A\Gamma^2}{K\Gamma^2} < \frac{1018405}{4356}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{A\Gamma}{K\Gamma} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}. \quad (21)$$

διότι

$$1018405 < 1018417\frac{13}{36} = \left(1009\frac{1}{6}\right)^2$$

Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη τις (20) και (21) παίρνουμε

$$\frac{AK + K\Gamma}{K\Gamma} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}. \quad (22)$$

4η επανάληψη:

Από το Θεώρημα της Εσωτερικής Διχοτόμου στο KAG έχουμε

$$\frac{AK}{A\Gamma} = \frac{KZ_3}{\Gamma Z_3},$$

και άρα

$$\frac{AK + A\Gamma}{A\Gamma} = \frac{KZ_3 + \Gamma Z_3}{\Gamma Z_3}.$$

Έτσι,

$$\frac{AK + ΚΓ}{ΚΓ} = \frac{ΑΓ}{ΓΖ_3}.$$

Επειδή τα τρίγωνα ΑΛΓ και ΓΛΖ είναι όμοια, ως ισογώνια, ισχύει

$$\frac{ΑΓ}{ΓΖ_3} = \frac{ΑΛ}{ΛΓ},$$

και άρα από την παραπάνω παίρνουμε $\frac{AK + ΚΓ}{ΚΓ} = \frac{ΑΛ}{ΛΓ}$, και άρα λόγω της (22) θα είναι και

$$\frac{ΑΛ}{ΛΓ} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε

$$\frac{ΑΛ^2}{ΛΓ^2} < \frac{4064928\frac{1}{36}}{4356}, \text{ οπότε } \frac{ΑΛ^2 + ΛΓ^2}{ΛΓ^2} < \frac{4064928\frac{1}{36} + 4356}{4356}.$$

Από την παραπάνω επειδή $ΑΛ^2 + ΛΓ^2 = ΑΓ^2$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα) προκύπτει ότι

$$\frac{ΑΓ^2}{ΛΓ^2} < \frac{4069284\frac{1}{36}}{4356}.$$

Έτσι θα είναι και

$$\frac{ΑΓ}{ΛΓ} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}, \quad (23)$$

διότι

$$4069284\frac{1}{36} < 4069297\frac{9}{16} = \left(2017\frac{1}{4}\right)^2.$$

Συνοψίζοντας έχουμε:

$$\frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{1560}{780} = 2 \quad (\text{η σχέση 10})$$

$$\frac{ΑΓ}{ΗΓ} = \frac{3013\frac{3}{4}}{780} \quad (\text{η σχέση 15})$$

$$\frac{ΛΓ}{ΘΓ} = \frac{1838\frac{9}{11}}{240} \quad (\text{η σχέση 18})$$

$$\frac{ΑΚ}{ΚΓ} = \frac{1009\frac{1}{6}}{66} \quad (\text{η σχέση 21})$$

$$\frac{ΑΓ}{ΛΓ} = \frac{2017\frac{1}{4}}{66} \quad (\text{η σχέση 23})$$

με τις ΒΓ, ΗΓ, ΘΓ, ΚΓ, ΛΓ να είναι οι πλευρές των εγγεγραμμένων στον κύκλο διαμέτρου ΑΓ = δ εξαγώνου, δωδεκαγώνου, εικοσιτετραγώνου, σαρανταοκταγώνου και ενενηταεξαγώνου αντίστοιχα.

Έτσι από τις παραπάνω προκύπτουν οι

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{6 \cdot \text{ΒΓ}} &= \frac{1560}{6 \cdot 780} \\ \frac{\delta}{12 \cdot \text{ΗΓ}} &< \frac{3013\frac{3}{4}}{12 \cdot 780} \\ \frac{\delta}{24 \cdot \text{ΘΓ}} &< \frac{1838\frac{9}{11}}{24 \cdot 240} \\ \frac{\delta}{48 \cdot \text{ΚΓ}} &< \frac{1009\frac{1}{6}}{48 \cdot 66} \\ \frac{\delta}{96 \cdot \text{ΛΓ}} &< \frac{2017\frac{1}{4}}{96 \cdot 66}\end{aligned}$$

Αν τώρα συμβολίσουμε με π_6 , π_{12} , π_{24} , π_{48} και π_{96} τις περιμέτρους των εγγεγραμμένων στον κύκλο εξαγώνου, δωδεκαγώνου, εικοσιτετραγώνου, σαρανταοκταγώνου και ενενηταεξαγώνου αντίστοιχα έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\pi_6}{\delta} &= \frac{4680}{1560} = 3 \\ \frac{\pi_{12}}{\delta} &> \frac{9360}{3013\frac{3}{4}} \\ \frac{\pi_{24}}{\delta} &> \frac{5760}{1838\frac{9}{11}} \\ \frac{\pi_{48}}{\delta} &> \frac{3168}{1009\frac{1}{6}} \\ \frac{\pi_{96}}{\delta} &> \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

Συνεπώς για την περίμετρο του εγγεγραμμένου στον κύκλο ενενηταεξαγώνου ισχύει

$$\frac{\pi_{96}}{\delta} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}$$

καθώς

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} \simeq 3,1409\dots \quad \text{και} \quad 3\frac{10}{71} \simeq 3,1408\dots$$

Επειδή το ενενηταεξάγωνο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο ακτίνας ΑΓ έπεται ότι η περιφέρεια Π του κύκλου είναι μεγαλύτερη από την περιφέρεια του ενενηταεξαγώνου, δηλαδή $\Pi > \pi_{96}$ και άρα ισχύει

$$\Pi > 3\frac{10}{71}\delta$$

Από τους ισχυρισμούς 1 και 2 προκύπτει η αποδεικτέα. \square

Στμ: Οι παραπάνω Προτάσεις είναι αυτές που μας δίνουν τους γνωστούς τύπους για το μήκος κύκλου (Π) και εμβαδόν (E) του κυκλικού δίσκου

$$\Pi = 2\pi\rho \quad \text{και} \quad E = \pi\rho^2.$$

Πράγματι, αν έχουμε ένα κύκλο ακτίνας ρ , κατ' αρχάς η Πρόταση 1 παραπάνω, μαζί με την Πρόταση 2 του Βιβλίου 12 των Στοιχείων του Ευκλείδη, συνεπάγονται ότι το πηλίκο Π/δ είναι σταθερό και ανεξάρτητο της διαμέτρου του κύκλου. Πράγματι, αν θεωρήσουμε δύο κύκλους διαμέτρου δ_1 και δ_2 αντίστοιχα με εμβαδά E_{δ_1} , E_{δ_2} και περιμέτρους Π_{δ_1} , Π_{δ_2} , τότε η Πρόταση 2 του Βιβλίου 12 των Στοιχείων του Ευκλείδη λέει ότι

$$\frac{E_{\delta_1}}{E_{\delta_2}} = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2},$$

ενώ η Πρόταση 1 παραπάνω, λέει ότι

$$E_{\delta_1} = \frac{1}{2} \frac{\delta_1}{2} \Pi_{\delta_1} \quad \text{και} \quad E_{\delta_2} = \frac{1}{2} \frac{\delta_2}{2} \Pi_{\delta_2}.$$

Άρα

$$\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} = \frac{E_{\delta_1}}{E_{\delta_2}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\delta_1}{2} \Pi_{\delta_1}}{\frac{1}{2} \frac{\delta_2}{2} \Pi_{\delta_2}},$$

απ' όπου απλοποιώντας προκύπτει ότι

$$\frac{\Pi_{\delta_1}}{\delta_1} = \frac{\Pi_{\delta_2}}{\delta_2},$$

επιβεβαιώνοντας την ανεξαρτησία του πηλίκου Π/δ από τη διάμετρο δ του κύκλου.

Ας το ονομάσουμε λοιπόν αυτό το σταθερό πηλίκο π . Η Πρόταση 3 τώρα μας λέει ότι $\pi \stackrel{\text{ορσ.}}{=} \Pi/(2\rho) \simeq 3,14$, ισοδύναμα $\Pi = 2\pi\rho$ όπου $\pi \simeq 3,14$. Και η Πρόταση 1 μας λέει ότι

$$E = \frac{1}{2}\rho \cdot \Pi = \frac{1}{2}\rho \cdot 2\pi\rho = \pi\rho^2.$$

Μέρος II

Αρχαίο Κείμενο

Πρότασις 1 (4). Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περι τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.

Ἀπόδειξις. Ἐχέτω ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τριγώνῳ τῷ Ε, ὡς ὑπόκειται· λέγω ὅτι ἴσος ἐστίν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μείζον. Εἰλήφθω κέντρον τὸ Ν καὶ κάθετος ἡ ΝΖ· ἐλάσσω ἄρα ἡ ΝΖ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. Ἔστιν δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων, ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου· ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ Ε τριγώνου· ὅπερ ἄτοπον.

Ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων τοῦ Ε τριγώνου, καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΟΑΡ. Ἡ ΟΡ ἄρα τῆς ΜΡ ἐστὶν μείζων· ἡ γὰρ ΡΜ τῇ ΡΑ ἴση ἐστὶ· καὶ τὸ ΡΟΠ τρίγωνον ἄρα τοῦ ΟΖΑΜ σχήματος μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ. Λελείφθωσαν οἱ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἔτι ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον τοῦ Ε ἐστὶν ἐλάσσον· ὅπερ ἄτοπον· ἔστιν γὰρ μείζον, ὅτι ἡ μὲν ΝΑ ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. Ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ Ε τριγώνῳ. ◻

Πρότασις 2 (6). Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ἰᾶ πρὸς ἰδ.

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ ΓΗ, καὶ τῆς ΓΔ διπλῆ ἡ ΔΕ, ἔβδομον δὲ ἡ ΕΖ τῆς ΓΔ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΓΕ πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\kappa\alpha}$ πρὸς $\overline{\zeta}$, πρὸς δὲ τὸ ΑΕΖ τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ πρὸς ἓν, τὸ ΑΓΖ πρὸς τὸ ΑΓΔ ἐστίν, ὡς $\overline{\kappa\beta}$ πρὸς $\overline{\zeta}$. Ἀλλὰ τοῦ ΑΓΔ τετραπλάσιόν ἐστὶ τὸ ΓΗ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΓΔΖ τρίγωνον τῷ ΑΒ κύκλῳ ἴσον ἐστίν [ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΓ κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων καὶ τῷ $\overline{\zeta}$ ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται]· ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ ΓΗ τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ἰᾶ πρὸς ἰδ. ◻

Πρότασις 3 (7). Παντός κύκλου ή περίμετρος τής διαμέτρου τριπλασίων έστι και έτι υπερέχει έλάσσονι μέν ή έβδόμω μέρει τής διαμέτρου, μείζονι δέ ή δέκα έβδομηκοστομόνοις.

Άπόδειξις. Έστω κύκλος και διάμετρος ή ΑΓ και κέντρον τὸ Ε και ή ΓΛΖ έφαπτομένη και ή υπό ΖΕΓ τρίτου ὀρθής· ή ΕΖ άρα πρὸς ΖΓ λόγον έχει, ὄν $\overline{τζ}$ πρὸς $\overline{ρνγ}$, ή δέ ΕΓ πρὸς [τήν] ΓΖ λόγον έχει, ὄν $\overline{σξε}$ πρὸς $\overline{ρνγ}$. Τετμήσθω οὖν ή υπό ΖΕΓ δίχα τῆ ΕΗ· έστιν άρα, ὡς ή ΖΕ πρὸς ΕΓ, ή ΖΗ πρὸς ΗΓ [και έναλλάξ και συνθέντι]. Ὡς άρα συναμφοτέρος ή ΖΕ, ΕΓ πρὸς ΖΓ, ή ΕΓ πρὸς ΓΗ· ὡστε ή ΓΕ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον έχει ήπερ $\overline{φσα}$ πρὸς $\overline{ρνγ}$. Η ΕΗ άρα πρὸς ΗΓ δυναμει λόγον έχει, ὄν $\overline{Μ^{\lambda\delta}θυν}$ πρὸς $\overline{Μ^{\beta}γυθ}$ μήκει άρα, ὄν $\overline{φσα}$ η' πρὸς $\overline{ρνγ}$. Πάλιν δίχα ή υπό ΗΕΓ τῆ ΕΘ· δια τὰ αὐτὰ άρα ή ΕΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον έχει ή ὄν $\overline{αρξβ}$ η' πρὸς $\overline{ρνγ}$ · ή ΘΕ άρα πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον έχει ή ὄν $\overline{αροβ}$ η' πρὸς $\overline{ρνγ}$. Έτι δίχα ή υπό ΘΕΓ τῆ ΕΚ· ή ΕΓ άρα πρὸς ΓΚ μείζονα λόγον έχει ή ὄν $\overline{βτλδ}$ δ' πρὸς $\overline{ρνγ}$ · ή ΕΚ άρα πρὸς ΓΚ μείζονα ή ὄν $\overline{βτλθ}$ δ' πρὸς $\overline{ρνγ}$. Έτι δίχα ή υπό ΚΕΓ τῆ ΛΕ· ή ΕΓ άρα πρὸς ΛΓ μείζονα [μήκει] λόγον έχει ήπερ τὰ $\overline{δχογ}$ <' πρὸς $\overline{ρνγ}$. Έπει οὖν ή υπό ΖΕΓ τρίτου οὔσα ὀρθής τέτμηται τετράκις δίχα, ή υπό ΛΕΓ ὀρθής έστι μη'. Κείσθω οὖν αὐτῆ ἴση πρὸς τῷ Ε ή υπό ΓΕΜ· ή άρα υπό ΛΕΜ ὀρθής έστι κδ'. Και ή ΛΜ άρα εὐθεῖα τοῦ περι τὸν κύκλον έστι πολυγώνου πλευρὰ πλευρὰς έχοντος $\overline{Οζ}$. Έπει οὖν ή ΕΓ πρὸς τήν ΓΛ έδείχθη μείζονα λόγον έχουσα ήπερ $\overline{δχογ}$ <' πρὸς $\overline{ρνγ}$, αλλά τής μέν ΕΓ διπλῆ ή ΑΓ, τής δέ ΓΛ διπλασίων ή ΛΜ, και ή ΑΓ άρα πρὸς τήν τοῦ $\overline{Οζ}$ γώνου περίμετρον μείζονα λόγον έχει ήπερ $\overline{δχογ}$ <' πρὸς $\overline{Μ^{\alpha}δχπη}$. Και έστιν τριπλασία, και υπερέχουσιν $\overline{χζζ}$ <', άπερ τῶν $\overline{δχογ}$ <' έλάττονα έστιν ή τὸ έβδομον· ὡστε τὸ πολύγωνον τὸ περι τὸν κύκλον τής διαμέτρου έστι τριπλασίον και έλάττονη ή τῷ έβδόμω μέρει μείζον· ή τοῦ κύκλου άρα περίμετρος πολὺ μάλλον έλάσσων έστιν ή τριπλασίων και έβδόμω μέρει μείζων.

Έστω κύκλος και διάμετρος ή ΑΓ, ή δέ υπό ΒΑΓ τρίτου ὀρθής· ή ΑΒ άρα πρὸς ΒΓ έλάσσονα λόγον έχει ή ὄν $\overline{ατνα}$ πρὸς $\overline{ψπ}$ [ή δέ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ὄν $\overline{αφξ}$ πρὸς $\overline{ψπ}$]. Δίχα ή υπό ΒΑΓ τῆ ΑΗ. Έπει οὖν ἴση έστιν ή υπό ΒΑΗ τῆ υπό ΗΓΒ, αλλά και τῆ υπό ΗΑΓ, και ή υπό ΗΓΒ τῆ υπό ΗΑΓ έστιν ἴση. Και κοινή ή υπό ΑΗΓ ὀρθή· και τρίτη άρα ή υπό ΗΖΓ τρίτη τῆ υπό ΑΓΗ ἴση. Ἰσογώνιον άρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΓΗΖ τριγώνω· έστιν άρα, ὡς ή ΑΗ πρὸς ΗΓ, ή ΓΗ πρὸς ΗΖ και ή ΑΓ πρὸς ΓΖ. Άλλ' ὡς ή ΑΓ πρὸς ΓΖ, [και] συναμφοτέρος ή ΓΑΒ πρὸς ΒΓ· και ὡς συναμφοτέρος άρα ή ΒΑΓ πρὸς ΒΓ, ή ΑΗ πρὸς ΗΓ. Δια τοῦτο οὖν ή ΑΗ πρὸς [τήν] ΗΓ έλάσσονα λόγον έχει ήπερ $\overline{βλζια}$ πρὸς $\overline{ψπ}$, ή δέ ΑΓ πρὸς τήν ΓΗ έλάσσονα ή ὄν $\overline{γιγ}$ <' δ' πρὸς $\overline{ψπ}$. Δίχα ή υπό ΓΑΗ τῆ ΑΘ· ή ΑΘ άρα δια τὰ αὐτὰ πρὸς τήν ΘΓ έλάσσονα λόγον έχει ή ὄν $\overline{ελκδ}$ <' δ' πρὸς $\overline{ψπ}$ ή ὄν $\overline{αωκγ}$ πρὸς $\overline{σμ}$ · έκατέρα γάρ έκατέρας δ $\overline{ιγ}$ · ὡστε ή ΑΓ πρὸς τήν ΓΘ ή ὄν $\overline{αωλη θ ια}$ πρὸς $\overline{σμ}$. Έτι δίχα ή υπό ΘΑΓ τῆ ΚΑ· και ή ΑΚ πρὸς τήν ΚΓ έλάσσονα [άρα] λόγον έχει ή

ὄν $\overline{\alpha\zeta}$ πρὸς $\overline{\xi\zeta}$. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας $\overline{\iota\alpha}$ μ'. Ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς [τὴν] ΚΓ ἢ
 ὄν $\overline{\alpha\theta}$ ζ' πρὸς $\overline{\xi\zeta}$. Ἐτι δίχα ἢ ὑπὸ ΚΑΓ τῆς ΛΑ· ἢ ΑΛ ἄρα πρὸς [τὴν] ΛΓ
 ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὄν τὰ $\overline{\beta\iota\zeta}$ ζ' πρὸς $\overline{\xi\zeta}$, ἢ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα
 ἢ τὰ $\overline{\beta\iota\zeta}$ δ' πρὸς $\overline{\xi\zeta}$. Ἀνάπαλιν ἄρα ἢ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς
 τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ $\overline{\zeta\tau\lambda\zeta}$ πρὸς $\overline{\beta\iota\zeta}$ δ', ἄπερ τῶν $\overline{\beta\iota\zeta}$
 δ' μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα'. καὶ ἢ περίμετρος ἄρα τοῦ
 $\overline{\rho\zeta}$ γώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου τριπλασίον ἐστὶ καὶ μείζων ἢ $\overline{\iota}$
 οα'. ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίον ἐστὶ καὶ μείζων ἢ $\overline{\iota}$ οα'. Ἡ
 ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίον ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι
 μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ $\overline{\iota}$ οα' μείζων. ◻