ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ

Αρχαίο Κείμενο
Απόδοση στη σύγχρονη Μαθηματική γλώσσα
Νίκος Ροκοπάνος, Στέλλα Σακελλάρη, Αντώνης Τσολομύτης

Σάμος 2021–2024

ISBN: 978-618-00-5204-6

Έκδοση 1.0 ¶ 12 11 10 9 8 7 6 5 4

Στοιχειοθετήθηκε με το XΞLaTeX.

Απαγορεύεται η επαναδιανομή χωρίς άδεια από τους δημιουργούς.

Πηγαίος κώδικας διαθέσιμος υπό όρους.

© 2024, Ν. Ροκοπάνος, Σ. Σακελλάρη, Α. Τσολομύτης
Σάμος, Ελλάδα.

Επικοινωνία: atsol@aegean.gr

812 σελ. A4 LCC: QA31 and QA451 DDC: 510—dc23

ISBN: 978-618-00-5204-6

Version 1.0 ¶ 12 11 10 9 8 7 6 5 4

Typeset with XΞLaTeX.

No redistribution allowed without the creators' permission.

Source code available with restrictions.

© 2024, N. Rokopanos, S. Sakellari, A. Tsolomitis
Samos, Greece.

Contact: atsol@aegean.gr

Επικοινωνία: atsol@aegean.gr

812 σελ. A4 LCC: QA31 and QA451 DDC: 510—dc23

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Πολυύμνια
του Giuseppe Fagnani
•
Μούσα της Γεωμετρίας και των Μαθηματικών
Κόρη της Μνημοσύνης
•
Μητροπολιτικό Μουσείο Τέχνης, Νέα Υόρκη, ΗΠΑ
Πηγή:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polyhymnia_by_Giuseppe_Fagnani.jpg

Μνημοσύνην καλέω, Ζηνὸς σύλλεκτρον, ἄνασσαν,
ἣ Μούσας τέκνωσ' ἱερὰς, ὁσίας, λιγυφώνους,
ἐκτὸς ἔχουσα κάκης μνήμην βλαψίφρονος αἰεί,
πάντα νόον συνέχουσα βροτῶν ψυχῇσι σύνοικον,
εὐδύνατον κρατερὸν θνητῶν αὔξουσα λογισμόν,
ἡδυτάτη, φιλάγρυπνος, ὑπομνήσκουσά τε πάντα,
ὧν ἂν ἕκαστος ἀεὶ στέρνοις γνώμην κατάθηται·
οὔτι παρεκβαίνουσ', ἐπεγείρουσα φρένα πᾶσιν.
ἀλλά, μάκαιρα θεά, μύσταις μνήμην ἐπέγειρε
εὐϊέρου μελέτης[1], λήθην δ' ἀπὸ τῶνδ' ἀπόπεμπε.

[Καλώ τη Μνημοσύνη, τη βασίλισσα σύζυγο του Διός
που γέννησε τις ιερές Μούσες, όσιες, λυγερόφωνες,
που πάντα θυμάται έξω από την κακία που βλάπτει το νου,
που συγκρατεί το νου των βροτών σύνοικο με τις ψυχές
και αυξάνει τον δυνατό και ισχυρό λογισμό των θνητών.
Γλυκύτατη, αγαπά την αγρυπνία, υπενθυμίζει τα πάντα
για τα οποία ο καθένας [θέλει να] σχηματίσει γνώμη.
Δεν παρεκτρέπεται και διεγείρει σε όλους τη σκέψη.
Αλλά μακάρια θεά δυνάμωσε τη μνήμη αυτών που συμμετέχουν
στην ιερή αυτή μελέτη, και διώξε από αυτούς τη λησμοσύνη.]

1. στον πρωτότυπο Ορφικό Ύμνο: «τελετῆς» αντί για «μελέτης».

Σύγχρονο άγαλμα του Ευκλείδη στο Μουσείο Φυσικής ιστορίας του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης, από τον γλύπτη Joseph Durham

Πρόλογος

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ανάμεσα στα επιστημονικά κείμενα έχουν εκδοθεί τις περισσότερες φορές παγκοσμίως σε κάθε σχεδόν γλώσσα. Συνεπώς η ερώτηση «γιατί άλλη μια έκδοση;» φαίνεται εντελώς λογική. Ο λόγος είναι απλούστατος. Τα *Στοιχεία* έχουν εν γένει δεχθεί μια κατά κάποιο τρόπο ιστορική ή μουσειολογική προσέγγιση. Τα κείμενα που κυκλοφορούν είτε έχουν ως στόχο τους ανθρώπους που ασχολούνται με την Ιστορία των Μαθηματικών είτε ενώ είναι εξαιρετικά έχουν πεπαλαιωμένη γλώσσα. Εξαίρετο παράδειγμα είναι η μετάφραση του Ευάγγελου Σταμάτη στην οποία η παρούσα ηλεκτρονική έκδοση χρωστάει πολλά.

Εκτός από τη γλώσσα, η έκδοση του Σταμάτη «μεταφράζει» τα *Στοιχεία*. Η παρούσα έκδοση δεν έχει τέτοιο στόχο. Δεν προσπαθεί ούτε να «μεταφράσει» το κείμενο ούτε να δώσει διευκρινίσεις επί διευκρινίσεων που προέκυψαν ανά τους αιώνες διογκώνοντάς το κατά πολύ όπως κάνουν άλλες εκδόσεις. Αυτές οι εκδόσεις έχουν ως στόχο (κατά τη γνώμη μας) τον Ιστορικό.

Ο στόχος είναι να καταστεί το κείμενο προσβάσιμο μένοντας, όσο αυτό είναι εφικτό, κοντά στο αρχαίο κείμενο και στον τρόπο απόδειξης· διότι οι σύγχρονοι μαθηματικοί πελαγοδρομούν εδώ και δεκαετίες τώρα ανάμεσα σε «Γεωμετρίες» που κυκλοφορούν όταν το θεμελιώδες κείμενο του Ευκλείδη παραμένει εν πολλοίς άγνωστο.

Το κείμενο αντιμετωπίζεται ως *ζωντανό* και όχι σαν αρχαίο έκθεμα. Ενώ κρατάμε τη λογική των αποδείξεων συχνά καταφεύγουμε σε σύγχρονο συμβολισμό ώστε η απόδειξη να είναι εύκολα και γρήγορα κατανοητή.

Για παράδειγμα, προφανώς κρατάμε την απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος ανέπαφη, αλλά ως προς τη λογική της δομή, και έτσι μια γωνία θα τη γράψουμε με σύγχρονο συμβολισμό ($\widehat{\mathrm{ABG}}$). Το ίδιο κάνουμε και σε θέματα «ονομάτων». Για παράδειγμα το κείμενο γράφει «λόγος αριθμών» και εννοεί λόγο φυσικών αριθμών. Εμείς δεν θα διστάσουμε να πούμε τους αριθμούς «φυσικούς» που αποτελεί σύγχρονη ορολογία, διότι στόχος μας είναι το κείμενο να είναι εύκολα κατανοητό στους Μαθηματικούς, και ταυτόχρονα δεν θεωρούμε ότι αλλοιώνουμε τις ιδέες χρησιμοποιώντας «φρέσκια» ορολογία. Επιπλέον υπάρχουν θέματα που δεν μας αφορούν.

Για παράδειγμα κάποιοι ιστορικοί φαίνεται να αναζητούν διαφορές ανάμεσα στη λέξη «αριθμός» και στη λέξη «μέγεθος»· αν το $\sqrt{2}$ είναι αριθμός ή δεν είναι κατά τους αρχαίους. Για εμάς αυτή η διάκριση,

$$\text{αριθμός} \longleftrightarrow \text{μέγεθος},$$

δεν είναι τίποτα άλλο παρά η ίδια με τη σημερινή διάκριση

$$\text{φυσικός αριθμός} \longleftrightarrow \text{πραγματικός αριθμός}.$$

Κάνοντας ένα βήμα ακόμα θα λέγαμε ότι δεν μας αφορά αυτή η συζήτηση. Ο Μαθηματικός ενδιαφέρεται για το πώς γίνεται ο χειρισμός των μαθηματικών αντικειμένων· πώς θα χειριστώ την πρόσθεση του 1 με το 2. Το τι είναι το 1 οντολογικά και αν οι αρχαίοι είχαν κάποια γνώση επί του θέματος ή όχι αφορά την επιστήμη της Φιλοσοφίας και της Ιστορίας.

Συνάδελφε και συναδέλφισσα, το κείμενο του Ευκλείδη είναι εκπληκτικό από κάθε άποψη και σε καλούμε να το μελετήσεις προσεκτικά. Η άριστη οργάνωση του υλικού, η λογικά αυστηρή και «σφικτά» δεμένη λογική αλληλουχία των προτάσεων, οι εκπλήξεις που συχνά κρύβονται σε φαινομενικά απλές προτάσεις και διάφορα άλλα χαρακτηριστικά κάνουν την μελέτη του μια συναρπαστική εμπειρία. Για παράδειγμα, η Πρόταση 21, σελ. 33 του πρώτου βιβλίου («βιβλίο» ονομάζεται το σημερινό «κεφάλαιο») ενώ φαίνεται απλοϊκή, εν τούτοις είναι εκεί στη σωστή θέση, ώστε να συνεπάγεται την μονοτονία της περιμέτρου κάτι διόλου προφανές: Αν το K είναι ένα κυρτό γεωμετρικό σχήμα υποσύνολο του L τότε το K έχει μικρότερη περίμετρο από το L. Ή οι πρώτες ιδέες για την επαγωγή κατευθείαν από τους Πυθαγόρειους (και πολύ αργότερα από τον Μαυρόλυκο, τον Pascal, και τον Peano).

Στο κείμενο θα βρεις Προτάσεις που σίγουρα θα σε εκπλήξουν. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η Πρόταση 1 στο Βιβλίο 10, σελ. 229 στην οποία ο Ευκλείδης σε μία πρόταση εισάγει τις κεντρικότερες έννοιες της ανάλυσης, όπως όριο με έψιλον επιχείρημα, σειρές και άπειρες διαδικασίες. Πολλοί θα πουν «εννοείτε ότι ο Ευκλείδης ήξερε όρια;». Εμείς λέμε ότι αυτή είναι η λάθος ερώτηση. Η σωστή ερώτηση είναι αν ο Bolzano που χρησιμοποίησε την έννοια του ορίου στα γραπτά του, αν ο Cauchy που έγραψε αποδείξεις με αυτό στο *Cours d'Analyse*, και τέλος αν ο Weierstrass που έδωσε τον ε-ορισμό για το όριο, είχαν ή όχι διαβάσει τα *Στοιχεία*; Και αν στο έργο τους έχουν τις πρέπουσες αναφορές; Και αν τις έχουν γιατί εμείς δεν τις πληροφορηθήκαμε ποτέ; Και το ίδιο ισχύει για σειρά άλλων θεμάτων όπως ο ορισμός των πραγματικών αριθμών με τις «τομές Dedekind» της σύγχρονης εποχής, το ολοκλήρωμα Riemann και πολλά άλλα. Ή μήπως τα *Στοιχεία* ήταν απλώς κλειδωμένα στις διάφορες βιβλιοθήκες και υπόγεια μοναστηριών, εν πολλοίς ανυπεράσπιστα, και παραμένουν στην αφάνεια για τη σύγχρονη Μαθηματική κοινότητα;

Θα διαβάσεις ή θα έχεις διαβάσει διάφορα πράγματα που μιλούν για ατέλειες, για προτάσεις που ίσως λείπουν, για αξιώματα που ίσως θα μπορούσαν να είναι καλύτερα κλπ κλπ. Κανένας από αυτούς τους λόγους (ακόμα και αν είναι αληθείς, που δεν είναι) δεν πρέπει να μας αποτρέψει από το να γνωρίσουμε ένα τόσο θαυμάσιο κείμενο.

Πώς είναι δυνατόν να μας «αναγκάζουν» για παράδειγμα να διδάσκουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα με τον σύντομο τρόπο των όμοιων τριγώνων όταν η απόδειξη του Ευκλείδη είναι όχι μόνο απολύτως φυσιολογική και κατανοητή (για το τι πραγματικά συμβαίνει) αλλά προπάντων πανέμορφη, και στους περισσότερους από εμάς άγνωστη.

Θα ακούσεις επίσης διάφορα στερεότυπα όπως για παράδειγμα ότι «απέφευγαν το άπειρο». Καλύτερα να διαβάσεις και να αποφασίσεις μόνος σου αν τέτοια στερεότυπα είναι αληθή ή όχι. Γιατί η δική μας εντύπωση είναι ότι ο χειρισμός του απείρου τότε και σήμερα είναι ακριβώς ο ίδιος. Διάλειμμα ήταν η μη αυστηρή χρήση του από σπουδαίους Μαθηματικούς όπως Newton, Euler, Leibniz που δικαίως προκάλεσε τότε την κριτική από τους διανοούμενους της εποχής, αναγκάζοντας για παράδειγμα τον George Berkeley (στο *The Analyst*, 1734) να γράψει προς τον Newton για την παράγωγο (fluxion) και προς τον Leibniz για τον λογισμό απειροστών (infinitesimal calculus): «αν μπορείς να καταπιείς μια παράγωγο (fluxion) δεν καταλαβαίνω τι σε εμποδίζει να αποδεχθείς τον θεό»[2]. Βεβαίως η κατάσταση διορθώθηκε αργότερα με την εισαγωγή της αυστηρής έννοιας του ορίου από τον Weierstrass, που βρίσκουμε όμως και στον Ευκλείδη.

Εντύπωση επίσης προκαλεί ο «αλγεβρικός» χειρισμός των μεγεθών. Δεν επιλέγεται μια *συγκεκριμένη* μονάδα (πχ το 1 του $\mathbb{R}$) και ως προς αυτό να μελετηθούν οι έννοιες του ρητού ή του άρρητου και ως προς αυτό το συγκεκριμένο «ένα» να μελετηθούν οι αλγεβρικές πράξεις. Αντιθέτως, η μελέτη όλων αυτών των εννοιών είναι σχετική· με τη μονάδα να ορίζεται με καθαρά αφηρημένο τρόπο. Είτε εξετάζεις τα μεγέθη δηλαδή με βάση το $1 \in \mathbb{R}$ είτε τα εξετάζεις με βάση το e ως μοναδιαίο στοιχείο μιας ομάδας τα αποτελέσματα είναι σε ισχύ. Και ίσως αυτό να είναι το πιο ξεκάθαρο παράδειγμα της εκπληκτικής αφαίρεσης στην οποία οδήγησε τα μαθηματικά ο στενός εναγκαλισμός τους με τη Φιλοσοφία. Από την άλλη μεριά όμως πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι η προσέγγιση σε όλα τα θέματα του Ευκλείδη είναι γεωμετρική και όχι αλγεβρική. Αυτό δεν πρέπει να ερμηνεύεται ως ένα είδους μειονέκτημα. Η Γεωμετρία ήταν η γλώσσα της εποχής στα Μαθηματικά. Ούτε πρέπει να διαχωρίζουμε όμως τις ιδέες από την

2. Ο Berkeley δεν αμφισβητούσε την ορθότητα του Απειροστικού Λογισμού και των αποτελεσμάτων του. Με την κριτική του όμως, ήθελε να τονίσει ότι η θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού της εποχής δεν ήταν λογικά αυστηρότερη από τη θεμελίωση της χριστιανικής θρησκείας.

αλγεβρική τους ή αναλυτική τους έκφραση. Για παράδειγμα, η ιδέα του ορίου με τον σημερινό *ε*-ορισμό περιγράφεται με ακρίβεια στην Πρόταση 1 του Βιβλίου 10. Περιγράφεται γεωμετρικά, δηλαδή στην οικεία γλώσσα του Ευκλείδη. Η αναλυτική της περιγραφή με αλγεβρικά σύμβολα δεν την κάνει μια *νέα* ιδέα, αλλά μια «μετάφραση» της ιδέας από την γεωμετρική γλώσσα.

Έχεις στα χέρια σου πραγματικά ένα Αριστούργημα της Μαθηματικής Επιστήμης. Και δεν αναφερόμαστε βεβαίως στην δική μας απόδοση, αλλά στο έργο που πρωτογράφτηκε από τον Ευκλείδη και δέχθηκε πάμπολλες βελτιώσεις ανά τους αιώνες.

Μάθε και δίδαξε από Εκείνον.

Σάμος 2022

Ευχαριστούμε τον Γιώργο Ματθιόπουλο για τη σχεδίαση της γραμματοσειράς GFSNeohellenic της Εταιρείας Ελληνικών Τυπογραφικών Στοιχείων με την οποία στοιχειοθετήθηκε το κείμενο.

Παρατηρήσεις

(α) Κάθε παραπομπή από πρόταση σε πρόταση είναι δεσμός (link) που μας μεταφέρει στην πρόταση που παραπέμπουμε. Επιστρέφουμε στην αρχική πρόταση με το «Back» του pdf viewer.

(β) Δίπλα σε κάθε πρόταση υπάρχει σε παρένθεση ένας αριθμός. Αυτός είναι η σελίδα στην οποία βρίσκεται το αρχαίο κείμενο και είναι και αυτός δεσμός (link). Επιστρέφουμε από το αρχαίο κείμενο πίσω στην σύγχρονη απόδοση είτε με το «Back» του pdf viewer είτε με τον αριθμό που υπάρχει σε παρένθεση δίπλα στην πρόταση στην αρχαία γλώσσα.

(γ) Τα σχήματα είναι τα ίδια που υπάρχουν στον πάπυρο. Ελάχιστα έχουν διαφορά από τον πάπυρο, κυρίως σε θέματα τοποθέτησης των ονομάτων των σημείων αν δεν χωρούσαν καλά.

(δ) Στη σύγχρονη απόδοση πιθανώς να υπάρχουν λάθη. Η αναφορά τους, και εφόσον βεβαιωθούν και διορθωθούν, θα βάλουν το όνομά σας σε ειδική σελίδα με εκείνους ή εκείνες που συνεισέφεραν στο κείμενο.

Αιτήματα 21
Πρώτη χρήση της απαγωγής στο άτοπο 23
Κριτήριο ισότητας τριγώνων: πγπ 23
Κριτήριο ισότητας τριγώνων: ππ 25
Κατακορυφήν γωνίες 29
Τριγωνική ανισότητα 32
Μονοτονία περιμέτρου 33
Κριτήριο ισότητας τριγώνων: γπγ 36
Άθροισμα γωνιών τριγώνου 40
Πυθαγόρειο Θεώρημα 51
Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος 52
Ο Πάπυρος της Γενεύης 53
Γνώμων 59
Ταυτότητα: τετράγωνο αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ 62
Ταυτότητα: διαφορά τετραγώνων: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ 63
Επίλυση της δευτεροβάθμιας $x^2+\alpha x+\gamma=0$ 64
Ταυτότητα: τετράγωνο διαφοράς: $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ 65
Πολική ταυτότητα: $\alpha\beta=\frac{1}{4}\big((\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2\big)$ 66
Κανόνας Παραλληλογράμμου: $2(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2$ 68
Θεώρημα της Χρυσής Τομής 73
Γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος στα αμβλυγώνια 74
Γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος στα οξυγώνια 74
Κατασκευή εφαπτομένης κύκλου 95
Γωνία χορδής και εφαπτομένης 104
Κατασκευή κανονικού πενταγώνου 119
Κατασκευή κανονικού εξαγώνου 122
Κατασκευή κανονικού δεκαπεντάγωνου 123
Αξίωμα συνέχειας του Ευδόξου (Αρχιμήδεια ιδιότητα) 125
Ορισμός των Πραγματικών Αριθμών 125
Ισότητα και διάταξη πραγματικών αριθμών 125
Επιμεριστική και προσεταιριστική ιδιότητα 128–129
Πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς 131
Όμοια κλάσματα 134
Ιδιότητες αναλογιών 131–137
Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων 138
Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου 138
Χιαστί γινόμενο από αναλογία 153
Πυθαγόρειο Θεώρημα για γενικά σχήματα 169
Ορισμός μονάδας 173

Ορισμός του φυσικού αριθμού 173
Ορισμός των πρώτων αριθμών 174
Ορισμός των τέλειων αριθμών 175
Ανθυφαίρεση 175
Εύρεση ΜΚΔ 176–177
Αντιμεταθετική ιδιότητα πολλαπλασιασμού 183
Χιαστί γινόμενο ίσων κλασμάτων 183
Τετράγωνο και κύβος πρώτου 187
δ πρώτος και $\delta|\alpha\beta \Rightarrow (\delta|\alpha$ ή $\delta|\beta)$ 188
Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων 189
Εύρεση ΕΚΠ, 190, 192
Ομώνυμος 193
Πρώτη χρήση της ιδέας της Επαγωγής 213
Πρώτη χρήση της ιδέας της Πλήρους Επαγωγής 213
Ιδιότητα δυνάμεων: $\lambda^k\lambda^{n-k} = \lambda^n$ 214
Αν p πρώτος τότε $p|\lambda^n \Rightarrow p|\lambda$ 215
Υπάρχει άπειρο πλήθος πρώτων αριθμών 219
Άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου 223
Τέλειοι από πρώτους του Mersenne 223
Ρητοί, σύμμετροι, ασύμμετροι, άλογοι 225
Όριο, σειρά, σύγκλιση, ε-επιχειρήματα 229
Αλγεβρικές επεκτάσεις 244
Κατασκευή όλων των πυθαγόρειων τριάδων 252
Το Θεώρημα των τριών καθέτων 357
Το Θεώρημα του Θαλή στις τρεις διαστάσεις 361
«Τύπος» όγκου παραλληλεπιπέδου 374
Όγκος κώνου και κυλίνδρου 404–417
Όγκος σφαίρας 424
Κατασκευή κανονικού τετραέδρου 440
Κατασκευή κανονικού οκταέδρου 442
Κατασκευή κύβου 444
Κατασκευή κανονικού εικοσαέδρου 445
Κατασκευή κανονικού δωδεκαέδρου 449
Δεν υπάρχουν άλλα κανονικά πολύεδρα 455

LANDMARKS

Axioms 21
First use of abduction to absurd 23
Criterion for equality of triangles: SAS 23
Criterion for equality of triangles: SSS 25
Opposite (vertical) angles 29

Triangle inequality 32
Monotonicity of circumference 33
Criterion for equality of triangles: ASA 36
Sum of triangle angles 40
Pythagorean Theorem 51
Reverse of the Pythagorean Theorem 52
The Geneva papyrus 53
Gnomon 59
Identity: the square of a sum: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ 62
Identity: difference of squares: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ 63
Solving the 2nd degree equation $x^2+\alpha x+\gamma=0$ 64
Identity: the square of a difference: $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ 65
Polarization identity: $\alpha\beta=\frac{1}{4}\left((\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2\right)$ 66
The Parallelogram Law: $2(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2$ 68
The theorem of Golden Section 73
Generalization of the Pythagorean Theorem to obtuse-angled triangles 74
Generalization of the Pythagorean Theorem to acute-angled triangles 74
Construction of a circle tangent line 95
Angle of chord and tangent 104
Construction of the regular pentagon 119
Construction of the regular hexagon 122
Construction of the regular pentadecagon 123
The Axiom of Eudoxus (Archimedean property) 125
Definition of the Real Numbers 125
Equality and order of the Real Numbers 125
Distributive and Associative law 128–129
Density of the rational numbers in the Reals 131
Equivalent fraction 134
Properties of analogies 131–137
Addition of homonymous fractions 138
Arithmetic-Geometric Mean inequality 138
Cross product from analogy 153
Pythagorean Theorem for general shapes 169
Definition of a unit 173
Definition of the natural numbers 173
Definition of prime numbers 174
Definition of the perfect numbers 175
Anthyphairesis 175
Finding the greatest common divisor 176–177
Abelian property of multiplication 183
Cross product of the terms of equal fractions 183

Square and cube of a prime 187
δ prime and $\delta|\alpha\beta \Rightarrow (\delta|\alpha$ or $\delta|\beta$ 188
Factorization with primes 189
Finding the least common multiple, 190, 192
Homonymous 193
First use of the idea of Induction 213
First use of the idea of Complete Induction 213
Property of powers: $\lambda^k\lambda^{n-k} = \lambda^n$ 214
If p is a prime then $p|\lambda^n \Rightarrow p|\lambda$ 215
There exists an infinite number of primes 219
The sum of the terms of geometric progressions 223
Perfect numbers coming from Mersenne primes 223
Rationals, commensurables, incommensurables, inexpressibles 225
Limit, series, convergence, ε-arguments 229
Algebraic extensions 244
Construction of all Pythagorean triples 252
The Theorem of three perpendiculars 357
Thales Theorem in three dimensions 361
A «Formula» for the volume of parallelepiped 374
Volume of cone and cylinder 404–417
Volume of the sphere 424
Construction of regular tetrahedron 440
Construction of regular octahedron 442
Construction of cube 444
Construction of regular icosahedron 445
Construction of regular dodecahedron 449
There are no other regular polyhydra 455

Περιεχόμενα

I Συγχρονη Μαθηματικη Αποδοση 17

Βιβλίο 1ο 19

Βιβλίο 2ο 59

Βιβλίο 3ο 79

Βιβλίο 4ο 111

Βιβλίο 5ο 125

Βιβλίο 6ο 141

Βιβλίο 7ο 173

Βιβλίο 8ο 195

Βιβλίο 9ο 209

Βιβλίο 10ο 225

Βιβλίο 11ο 345

Βιβλίο 12ο 389

Βιβλίο 13ο 427

II Αρχαιο Κειμενο 457

Βιβλίο 1ο 459

Βιβλίο 2ο 489

Βιβλίο 3ο 501

Βιβλίο 4ο 527

Βιβλίο 5ο 539

Βιβλίο 6ο 557

Βιβλίο 7ο 583

Βιβλίο 8ο 605

Βιβλίο 9ο 623

Βιβλίο 10ο 643

Βιβλίο 11ο 731

Βιβλίο 12ο 763

Βιβλίο 13ο 789

ΜΕΡΟΣ Ι

Σύγχρονη Μαθηματική Απόδοση

Βιβλίο 1ο

Ορισμοί και Αξιώματα

Ορισμοί 1 (459)

(ορ. 1) «Σημείο» είναι ό,τι δεν μπορεί να χωρισθεί σε μικρότερα μέρη.

(ορ. 2) «Γραμμή» είναι καθετί που έχει μήκος αλλά όχι πλάτος.

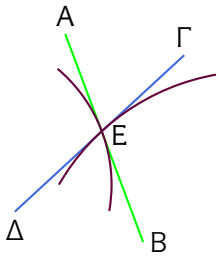
(ορ. 3) Τα άκρα κάθε γραμμής είναι σημεία.

(ορ. 4) «Ευθεία» είναι η γραμμή που κείτεται εξίσου ως προς τα σημεία της[3].

(ορ. 5) «Επιφάνεια» είναι ό,τι έχει μόνο μήκος και πλάτος.

(ορ. 6) Κάθε επιφάνεια έχει άκρα γραμμές.

(ορ. 7) «Επίπεδη επιφάνεια» είναι εκείνη που κείτεται εξίσου ως προς τις ευθείες της.



(Στμ: στον επόμενο ορισμό ο Ευκλείδης δεν θέλει να δεσμεύσει την έννοια της γωνίας μόνο ανάμεσα σε ευθείες/ημιευθείες γιατί για παράδειγμα, αργότερα, θα ορίσει τη γωνία χορδής και τόξου με κοινά άκρα στους κύκλους. Στα σύγχρονα Μαθηματικά η γωνία αυτή ορίζεται ως η γωνία των εφαπτομένων στο σημείο τομής (όταν αυτές υπάρχουν). Δες σχετική παρατήρηση στο Β3, Ορ7, σελ. 80.)

(ορ. 8) «Επίπεδη γωνία» είναι η κλίση πάνω σε ένα επίπεδο μεταξύ δύο τεμνόμενων γραμμών που δεν βρίσκονται και οι δύο πάνω σε μια ευθεία.

---

3. Στμ: το πρωτότυπο κείμενο δεν ξεχωρίζει ευθείες, ημιευθείες και ευθύγραμμα τμήματα πάντα. Κάποιες φορές γράφει «πεπερασμένη ευθεία» για το ευθύγραμμο τμήμα αλλά συχνά γράφει απλώς «ευθεία». Για την άνετη μελέτη από τους σύγχρονους Μαθηματικούς, στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τους σύγχρονους αυτούς όρους, και όλοι αυτοί αναφέρονται σε αυτόν τον ορισμό.

(ορ. 9) Όταν δε οι γραμμές που περιέχουν την γωνία είναι ευθείες η γωνία λέγεται «ευθύγραμμη».

(ορ. 10) Όταν ευθεία στέκεται ορθά πάνω σε άλλη ευθεία οι εφεξής γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες και ονομάζονται «ορθές γωνίες». Η δε ευθεία που στέκεται ορθά πάνω στην άλλη ονομάζεται «κάθετος» σε αυτή στην οποία στέκεται.

Ορισμοί 2 (459)

(ορ. 11) «Αμβλεία» είναι η γωνία που είναι μεγαλύτερη από την ορθή.

(ορ. 12) «Οξεία» είναι η γωνία που είναι μικρότερη από την ορθή.

(ορ. 13) «Σύνορο» είναι ό,τι είναι άκρο σε οτιδήποτε.

(ορ. 14) «Σχήμα» είναι οτιδήποτε περιέχεται ανάμεσα σε σύνορα.

(ορ. 15) Ο «κύκλος» είναι ένα επίπεδο σχήμα που περικλείεται από μια γραμμή (που λέγεται περιφέρεια) για την οποία υπάρχει ένα σημείο μέσα στο σχήμα από όπου κάθε δύο ευθύγραμμα τμήματα με το ένα άκρο το σημείο αυτό και το άλλο άκρο στην περιφέρεια είναι ίσα.

(ορ. 16) Αυτό το σημείο λέγεται «κέντρο» του κύκλου.

(ορ. 17) «Διάμετρος» του κύκλου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που περνάει από το κέντρο και έχει άκρα στην περιφέρεια του κύκλου, και το οποίο χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη.

(ορ. 18) «Ημικύκλιο» είναι το περιεχόμενο σχήμα ανάμεσα στη διάμετρο και στο τμήμα της περιφέρειας που αποκόπτει. Ονομάζουμε κέντρο του ημικυκλίου το κέντρο του κύκλου.

(ορ. 19) «Ευθύγραμμα σχήματα» ονομάζουμε τα σχήματα που περιέχονται σε ευθείες. Αν περιέχονται σε τρεις ευθείες τα λέμε «τρίπλευρα», αν περιέχονται σε τέσσαρες ευθείες «τετράπλευρα», και αν σε περισσότερες ευθείες «πολύπλευρα».

(ορ. 20) Από τα τρίπλευρα σχήματα ονομάζουμε «ισόπλευρο τρίγωνο» εκείνο που έχει τρεις ίσες πλευρές, «ισοσκελές τρίγωνο» εκείνο που έχει δύο πλευρές ίσες και «σκαληνό τρίγωνο» εκείνο που έχει και τις τρεις πλευρές άνισες.

Ορισμοί 3 (460)

(ορ. 21) Από τα τρίπλευρα σχήματα «ορθογώνιο τρίγωνο» είναι αυτό που έχει ορθή γωνία, «αμβλυγώνιο τρίγωνο» αυτό που έχει αμβλεία γωνία και «οξυγώνιο τρίγωνο» αυτό που έχει τρεις γωνίες οξείες.

(ορ. 22) Από τα τετράπλευρα σχήματα «τετράγωνο» είναι αυτό που είναι ισόπλευρο και ορθογώνιο, «ετερομήκες» είναι το ορθογώνιο που δεν είναι ισόπλευρο, «ρόμβος» είναι το ισόπλευρο που δεν είναι ορθογώνιο και «ρομβοειδές» (στο εξής «πλάγιο παραλληλόγραμμο») είναι αυτό που έχει τις απέναντι πλευρές και γωνίες αντίστοιχα ίσες και δεν είναι ούτε ισόπλευρο ούτε ορθογώνιο. Τα υπόλοιπα τετράπλευρα λέγονται «τραπέζια».

(ορ. 23) «Παράλληλες» είναι οι ευθείες του ίδιου επιπέδου που προεκτεινόμενες επ᾽ άπειρο και προς τις δυο κατευθύνσεις δεν συναντά η μια την άλλη.

Αξιώματα 4 (Αιτήματα) (461)

(αίτημα 1) Από κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε ευθεία προς οποιοδήποτε άλλο σημείο.

(αίτημα 2) Μια πεπερασμένη ευθεία (στμ: ευθύγραμμο τμήμα) μπορεί να προεκτείνεται συνεχώς και ευθύγραμμα.

(αίτημα 3) Με κέντρο οποιαδήποτε σημείο και ακτίνα οποιοδήποτε διάστημα μπορεί να γραφτεί κύκλος.

(αίτημα 4) Οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

(αίτημα 5) Αν μια ευθεία τέμνει δυο άλλες ευθείες και σχηματίζει εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες αθροίσματος μικρότερου των δυο ορθών, τότε οι δυο ευθείες προεκτεινόμενες επ᾽ άπειρο θα συμπέσουν προς το μέρος όπου σχηματίζονται οι μικρότερες των δυο ορθών γωνίες.

Αξιώματα 5 (Κοινές έννοιες) (461)

(κ.εν. 1) Τα μεγέθη που είναι ίσα με ένα άλλο μέγεθος είναι ίσα μεταξύ τους.

(κ.εν. 2) Αν σε ίσα προστεθούν ίσα τότε αυτά που προκύπτουν είναι ίσα.

(κ.εν. 3) Αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα τότε αυτά που απομένουν είναι ίσα.

(κ.εν. 4) Αν σε άνισα προστεθούν ίσα τότε αυτά που προκύπτουν είναι άνισα.

(κ.εν. 5) Τα διπλάσια ίσων μεγεθών είναι μεταξύ τους ίσα.

(κ.εν. 6) Τα μισά ίσων μεγεθών είναι μεταξύ τους ίσα.

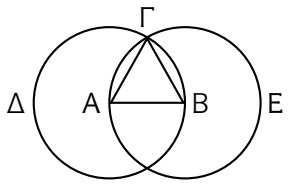
(κ.εν. 7) Αυτά που εφαρμόζουν μεταξύ τους είναι ίσα.

(κ.εν. 8) Το ολόκληρο είναι μεγαλύτερο κάθε μέρους του.

(κ.εν. 9) Δυο ευθείες ή δυο ευθύγραμμα τμήματα δεν περικλείουν κάποιο χωρίο.

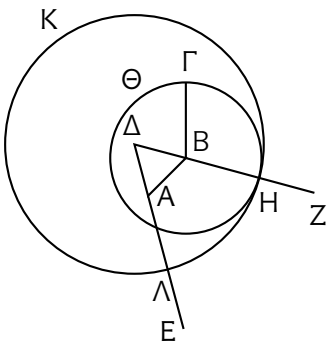
Προτάσεις και Θεωρήματα

Πρόταση 1 (Κατασκευή) (461) *Να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά δοθέν ευθύγραμμο τμήμα.*



Υλοποίηση: Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ σχεδιάζουμε τον κύκλο ΒΓΔ. Στη συνέχεια με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΑ σχεδιάζουμε τον κύκλο ΑΓΕ. Αν Γ είναι το ένα σημείο τομής των δυο κύκλων σχεδιάζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΑ και ΓΒ. Τότε καθώς το Α είναι το κέντρο του κύκλου ΓΒΔ ισχύει ότι ΑΓ = ΑΒ και όμοια καθώς το Β είναι το κέντρο του κύκλου ΓΑΕ ισχύει επιπλέον ότι ΒΓ = ΒΑ. Συνεπώς, ΓΑ = ΑΒ = ΒΓ δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο και κατασκευάστηκε με πλευρά το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 2 (Κατασκευή) (462) *Να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα ίσο με ένα δοθέν ευθύγραμμο τμήμα και με το ένα άκρο του να είναι ένα σημείο που έχει δοθεί.*



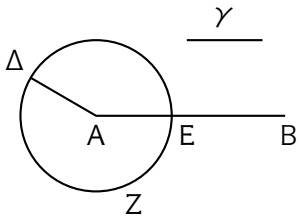
Υλοποίηση: Αν Α είναι το δοθέν σημείο, με ένα άκρο το σημείο αυτό πρέπει να κατασκευάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με ένα δοθέν ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Με πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΔΑΒ. Ο κύκλος ΓΗΘ με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΓ τέμνει την προέκταση του ΔΒ στο σημείο Η, ενώ ο κύκλος

ΗΚΛ με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔΗ τέμνει την προέκταση του ΔΑ στο σημείο Λ.

Επειδή το Δ είναι το κέντρο του κύκλου ΗΚΛ ισχύει ότι ΔΛ = ΔΗ και καθώς ΔΑ = ΔΒ (λόγω του ισοπλεύρου τριγώνου ΔΑΒ) θα είναι και ΔΛ − ΔΑ = ΔΗ − ΔΒ δηλαδή ΑΛ = ΒΗ. Όμως το Β είναι το κέντρο του κύκλου ΓΗΘ οπότε ισχύει ΒΓ = ΒΗ και άρα ΑΛ = ΒΗ = ΒΓ.

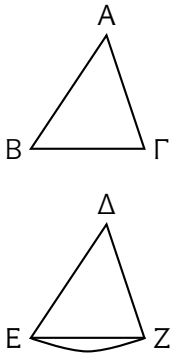
Έτσι, με άκρο το σημείο Α που δόθηκε κατασκευάσαμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΛ που είναι ίσο με το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ· όπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 3 (Κατασκευή) (462) *Δοθέντων δυο άνισων ευθυγράμμων τμημάτων να αφαιρεθεί από το μεγαλύτερο τμήμα ίσο με το μικρότερο.*



Υλοποίηση: Έστω ΑΒ και γ τα δυο άνισα ευθύγραμμα τμήματα από τα οποία μεγαλύτερο είναι το ΑΒ. Θα αφαιρέσουμε από το ΑΒ τμήμα ίσο με το γ. Με άκρο το σημείο Α κατασκευάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ ίσο με το γ. Στη συνέχεια, με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΔ σχεδιάζουμε τον κύκλο ΔΕΖ. Επειδή το Α είναι το κέντρο του κύκλου ΔΕΖ είναι ΑΕ = ΑΔ και καθώς ΑΔ = γ έπεται ότι ΑΕ = γ. Έτσι, δοθέντων των δυο άνισων ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και γ αφαιρέσαμε από το ΑΒ που είναι το μεγαλύτερο, τμήμα ίσο με το γ που είναι το μικρότερο· όπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 4 (463) *Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες τότε έχουν και ίσες βάσεις και είναι ίσα. Απέναντι από τις ίσες πλευρές τους βρίσκονται αντίστοιχα ίσες γωνίες.*

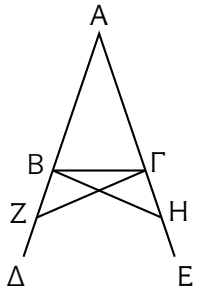


Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ και $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\text{ΕΔΖ}}$. Ισχυρίζομαι ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ίσες βάσεις δηλαδή ΒΓ = ΕΖ, είναι ίσα και οι γωνίες των τριγώνων αυτών που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές τους είναι αντίστοιχα ίσες δηλαδή ότι $\widehat{\text{ΑΒΓ}} = \widehat{\text{ΔΕΖ}}$ και $\widehat{\text{ΑΓΒ}} = \widehat{\text{ΔΖΕ}}$. Εφαρμόζοντας το τρίγωνο ΑΒΓ πάνω στο τρίγωνο ΔΕΖ ώστε το σημείο Α να ταυτιστεί με το σημείο Δ και η πλευρά ΑΒ με την πλευρά ΔΕ τότε και το σημείο Β θα ταυτιστεί με το Ε καθώς ΑΒ = ΔΕ. Επιπλέον, η πλευρά ΑΓ θα ταυτιστεί με την ΔΖ καθώς $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\text{ΕΔΖ}}$ ενώ το σημείο Γ θα ταυτιστεί με το Ζ καθώς ΑΓ = ΔΖ. Έτσι, η βάση ΒΓ θα ταυτιστεί με τη βάση ΔΕ διότι αν υποθέσουμε ότι τα δυο ευθύγραμμα τμήματα δεν ταυτιστούν τότε θα περικλειόταν ένα χωρίο μεταξύ τους κάτι που είναι αδύνατο (κ.εν.9). Άρα, η βάση ΒΓ θα ταυτιστεί με τη βάση ΕΖ και θα είναι ίσες (κ.εν.7). Τελικά, τα δυο τρίγωνα

συμπίπτουν και είναι ίσα ενώ και οι υπόλοιπες γωνίες τους συμπίπτουν και άρα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ και $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta ZE}$.

Συνεπώς, αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές τους αντίστοιχα ίσες και τις περιεχόμενες σε αυτές τις πλευρές γωνίες ίσες τότε θα έχουν ίσες και τις βάσεις τους και θα είναι ίσα ενώ οι γωνίες των τριγώνων που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές θα είναι αντίστοιχα ίσες· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 5 (464) *Στα ισοσκελή τρίγωνα οι γωνίες της βάσης είναι ίσες μεταξύ τους και αν οι ίσες πλευρές τους προεκταθούν τότε οι γωνίες που σχηματίζονται κάτω από την βάση είναι ίσες μεταξύ τους.*



Απόδειξη. Έστω το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ και ΓΕ. Ισχυρίζομαι ότι $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma B}$ και $\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{B\Gamma E}$. Θεωρώ Ζ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του ΒΔ. Από το ΑΕ που έχει κατασκευαστεί να είναι μεγαλύτερο του ΑΖ, αφαιρούμε το τμήμα ΑΗ ίσο με το ΑΖ (Π3, σελ. 23) (στμ: και έτσι λαμβάνουμε το σημείο Η) οπότε μπορούμε να φέρουμε τις ΖΓ και ΗΒ.

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΑΖΓ και ΑΗΒ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν τις δυο πλευρές τους αντίστοιχα ίσες καθώς ΑΖ = ΑΗ, ΑΒ = ΑΓ ενώ η περιεχόμενη σε αυτές τις πλευρές γωνία $\widehat{ZAH}$ είναι κοινή. Έτσι, σύμφωνα με την Πρόταση 4 τα τρίγωνα ΑΖΓ και ΑΗΒ είναι ίσα και άρα θα έχουν ίσες και τις βάσεις τους δηλαδή ΖΓ = ΗΒ όπως και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές τους δηλαδή $\widehat{A\Gamma Z} = \widehat{ABH}$ και $\widehat{AZ\Gamma} = \widehat{AHB}$. Επειδή πάλι ΑΖ = ΑΗ και ΑΒ = ΑΓ έπεται αμέσως ότι ΒΖ = ΓΗ (κ.εν.3).

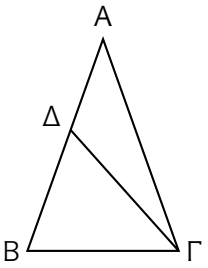
Τότε όμως τα τρίγωνα ΒΖΓ και ΓΗΒ έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες καθώς ΒΖ = ΓΗ και ΖΓ = ΗΒ και $\widehat{BZ\Gamma} = \widehat{\Gamma HB}$ ενώ η ΒΓ είναι κοινή βάση τους. Έτσι, τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα και συνεπώς θα είναι αντίστοιχα ίσες και οι γωνίες τους που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές τους δηλαδή $\widehat{ZB\Gamma} = \widehat{H\Gamma B}$ και $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{\Gamma BH}$.

Άρα, ολόκληρη η γωνία $\widehat{ABH}$ είναι ίση με ολόκληρη τη γωνία $\widehat{A\Gamma Z}$ και επειδή τα μέρη τους $\widehat{\Gamma BH}$, $\widehat{B\Gamma Z}$ είναι ίσα έπεται ότι και τα υπόλοιπα μέρη τους είναι επίσης ίσα δηλαδή $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma B}$ που είναι οι παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Ενώ για τις γωνίες που βρίσκονται κάτω από τη βάση δείξαμε παραπάνω ότι είναι επίσης ίσες: $\widehat{ZB\Gamma} = \widehat{H\Gamma B}$.

Τελικά, στα ισοσκελή τρίγωνα οι γωνίες της βάσης είναι ίσες μεταξύ τους και αν οι ίσες πλευρές τους προεκταθούν τότε οι γωνίες που σχηματίζονται κάτω από την βάση είναι ίσες μεταξύ τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 6 (464) *Αν δυο γωνίες ενός τριγώνου είναι ίσες μεταξύ τους, τότε οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Έστω ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\widehat{\text{ΑΒΓ}} = \widehat{\text{ΑΓΒ}}$. Ισχυρίζομαι ότι ΑΒ = ΑΓ.

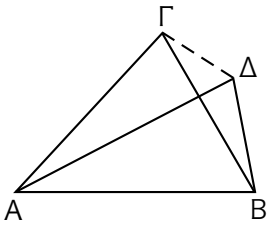


Αν οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ είναι άνισες τότε η μια από αυτές θα είναι μεγαλύτερη από την άλλη. Έστω ότι η ΑΒ είναι η μεγαλύτερη και ας αφαιρεθεί από αυτήν τμήμα ΒΔ ίσο με τη μικρότερη που είναι η ΑΓ (Π3, σελ. 23). Στη συνέχεια φέρουμε την ΔΓ. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΑΓΒ έχουν δυο πλευρές τους αντίστοιχα ίσες καθώς είναι ΔΒ = ΑΓ και ΒΓ = ΓΒ ενώ και για τις περιεχόμενες σε αυτές τις πλευρές γωνίες ισχύει ότι $\widehat{\text{ΑΒΓ}} = \widehat{\text{ΑΓΒ}}$. Έτσι, τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΑΓΒ έχουν ίσες βάσεις: ΔΓ = ΑΒ και είναι ίσα (Π4, σελ. 23). Δηλαδή, το μικρότερο τρίγωνο ΔΒΓ είναι ίσο με το μεγαλύτερο τρίγωνο ΑΓΒ, κάτι που είναι άτοπο!

Άρα, οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ δεν είναι άνισες αλλά ίσες: ΑΒ = ΑΓ.

Έτσι, αν δυο γωνίες ενός τριγώνου είναι ίσες μεταξύ τους τότε και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 7 (465) *Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα* ΑΒ *και* Γ *ένα σημείο που δεν ανήκει σε αυτό. Αν* ΓΑ *και* ΓΒ *είναι τα τμήματα που άγονται από το* Γ *προς τα άκρα του* ΑΒ *τότε δεν είναι δυνατό να αχθούν από ένα άλλο σημείο ευθύγραμμα τμήματα προς τα άκρα του* ΑΒ *που να βρίσκονται στο ίδιο μέρος του* ΑΒ *με τα* ΓΑ *και* ΓΒ *και να είναι ίσα με αυτά.*

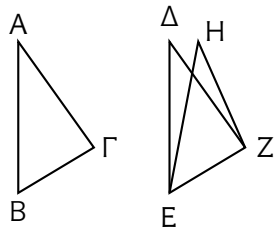


Απόδειξη. Έστω ότι είναι δυνατό από ένα άλλο σημείο Δ να αχθούν ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΔ προς τα άκρα του ΑΒ που να βρίσκονται στο ίδιο μέρος του ΑΒ με τα ΑΓ και ΓΒ και να είναι αντίστοιχα ίσα με αυτά, δηλαδή ΓΑ = ΔΑ και ΓΒ = ΔΒ. Φέρνουμε την ΓΔ.

Τότε, επειδή ΑΓ = ΑΔ έπεται ότι $\widehat{\text{ΑΓΔ}} = \widehat{\text{ΑΔΓ}}$ (Π5, σελ. 24) και άρα $\widehat{\text{ΑΔΓ}} > \widehat{\text{ΔΓΒ}}$ (κ.εν.8). Έτσι, κατά μείζονα λόγο ισχύει ότι $\widehat{\text{ΓΔΒ}} > \widehat{\text{ΔΓΒ}}$. Επειδή πάλι ΓΒ = ΔΒ ισχύει ότι $\widehat{\text{ΓΔΒ}} = \widehat{\text{ΔΓΒ}}$ (Π5, σελ. 24). Αλλά αυτό είναι αδύνατο καθώς δείξαμε ότι η $\widehat{\text{ΓΔΒ}}$ είναι μεγαλύτερη.

Συνεπώς, δεν είναι δυνατό να αχθούν από ένα άλλο σημείο ευθύγραμμα τμήματα προς τα άκρα του ΑΒ που να βρίσκονται στο ίδιο μέρος του ΑΒ και να είναι ίσα με τα ΓΑ και ΓΒ αντίστοιχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 8 (465) *Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές τους αντίστοιχα ίσες και τις δυο βάσεις τους ίσες τότε οι γωνίες που περιέχονται στις αντίστοιχες ίσες πλευρές είναι ίσες.*

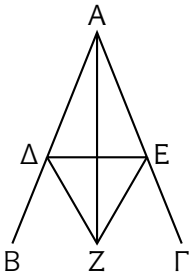


Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ που έχουν τις δυο πλευρές τους αντίστοιχα ίσες: ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ και τις βάσεις τους ίσες δηλαδή ΒΓ = ΕΖ. Ισχυρίζομαι ότι $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\text{ΕΔΖ}}$.

Αν εφαρμόσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ πάνω στο τρίγωνο ΔΕΖ ώστε το σημείο Β να τοποθετηθεί πάνω στο σημείο Ε και η πλευρά ΒΓ πάνω στην ΕΖ τότε τα σημεία Γ και Ζ θα ταυτιστούν καθώς ΒΓ = ΕΖ. Αλλά αφού η ΒΓ ταυτίζεται με την ΕΖ και οι πλευρές ΒΑ και ΑΓ θα ταυτιστούν με τις πλευρές ΕΔ και ΔΖ αντίστοιχα. Και αυτό διότι αν οι πλευρές ΒΑ και ΑΓ δεν ταυτιστούν με τις πλευρές ΕΔ και ΔΖ αλλά πάρουν άλλες θέσεις, έστω τις ΕΗ και ΗΖ τότε από το σημείο Η θα έχουν αχθεί ευθύγραμμα τμήματα προς τα άκρα του ΕΖ τα οποία (ευθύγραμμα τμήματα) βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του ΕΖ και είναι αντίστοιχα ίσα με τα ΕΔ και ΔΖ. Αλλά αυτό είναι αδύνατο (Π7, σελ. 25) και έτσι οι ΒΑ και ΑΓ ταυτίζονται με τις ΕΔ και ΔΖ. Έτσι και η $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ ταυτίζεται με την $\widehat{\text{ΕΔΖ}}$ και άρα $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\text{ΕΔΖ}}$.

Συνεπώς, αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές τους αντίστοιχα ίσες και τις δυο βάσεις τους ίσες τότε οι γωνίες που περιέχονται στις ίσες πλευρές είναι ίσες· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 9 (Κατασκευή) (466) *Να διχοτομηθεί μια δοθείσα γωνία.*



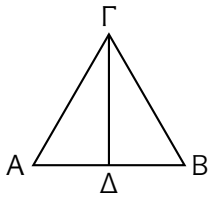
Υλοποίηση: Έστω $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ η γωνία που πρέπει να διχοτομηθεί. Αν Δ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της ΑΒ αφαιρούμε από την πλευρά ΑΓ τμήμα ΑΕ ίσο με το ΑΔ (στμ: ώστε να προκύψει το σημείο Ε) και φέρουμε την ΔΕ. Στη συνέχεια, με πλευρά ΔΕ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΔΕΖ και φέρουμε την ΑΖ. Ισχυρίζομαι ότι η γωνία έχει διχοτομηθεί από την ΑΖ.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΖΕ έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες καθώς ΑΔ = ΑΕ και η ΑΖ είναι κοινή πλευρά τους ενώ έχουν και ίσες τις βάσεις τους καθώς ΔΖ = ΕΖ. Άρα οι περιεχόμενες στις ίσες πλευρές γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{\text{ΔΑΖ}} = \widehat{\text{ΕΑΖ}}$ (Π8, σελ. 25).

Συνεπώς, η γωνία $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ έχει διχοτομηθεί από την ΑΖ· όπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 10 (Κατασκευή) (466) *Να διχοτομηθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει δοθεί.*

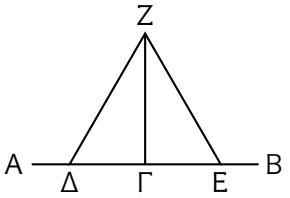
Υλοποίηση: Έστω ότι δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που πρέπει να διχοτομηθεί. Με πλευρά το ΑΒ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και διχοτομούμε τη γωνία $\widehat{\text{ΑΓΒ}}$ με την ΓΔ. Ισχυρίζομαι ότι το σημείο Δ διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.



Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΔ έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες καθώς ΑΓ = ΓΒ και η ΓΔ είναι κοινή πλευρά τους ενώ έχουν ίσες και τις περιεχόμενες στις ίσες πλευρές γωνίες καθώς $\widehat{\text{ΑΓΔ}} = \widehat{\text{ΒΓΔ}}$. Άρα θα έχουν ίσες και τις βάσεις τους, δηλαδή ΑΔ = ΒΔ (Π4, σελ. 23).

Έτσι, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που δόθηκε διχοτομήθηκε από το σημείο Δ· όπερ ἔδει ποιῆσαι. ∎

Πρόταση 11 (Κατασκευή) (467) *Αν δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα σημείο του, να αχθεί από το σημείο αυτό η ευθεία που σχηματίζει με το ευθύγραμμο τμήμα δυο ορθές γωνίες.*



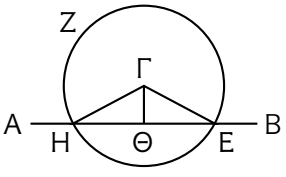
Υλοποίηση: Έστω ότι δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το σημείο του Γ. Από το σημείο Γ πρέπει να αχθεί ευθεία που να σχηματίζει με το ΑΒ ορθές γωνίες.

Αν Δ ένα τυχόν σημείο της ΑΒ παίρνουμε την ΓΕ ίση με την ΓΔ και με πλευρά την ΔΕ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΖΔΕ. Στη συνέχεια φέρουμε την ΖΓ. Ισχυρίζομαι ότι η ΓΖ σχηματίζει ορθές γωνίες με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που έχει δοθεί.

Πράγματι, τα τρίγωνα ΔΖΓ και ΒΖΓ έχουν ΔΓ = ΓΕ και την ΖΓ κοινή ενώ και οι βάσεις τους είναι ίσες καθώς ΔΖ = ΖΕ. Άρα οι γωνίες $\widehat{\text{ΔΓΖ}}$ και $\widehat{\text{ΕΓΖ}}$ είναι ίσες (Π8, σελ. 25). Όμως οι γωνίες αυτές είναι και εφεξής και άρα θα είναι ορθές καθώς όταν μια ευθεία σχηματίζει με μια άλλη ευθεία ίσες και εφεξής γωνίες τότε καθεμιά από τις ίσες γωνίες είναι ορθή (Ορ10, σελ. 20). Άρα οι γωνίες $\widehat{\text{ΔΓΖ}}$ και $\widehat{\text{ΖΓΕ}}$ είναι ορθές.

Έτσι, από το σημείο Γ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ που δόθηκε κατασκευάστηκε η ΓΖ που σχηματίζει ορθές γωνίες με το ΑΒ· όπερ ἔδει ποιῆσαι. ∎

Πρόταση 12 (Κατασκευή) (467) *Να κατασκευαστεί ευθεία που διέρχεται από σημείο εκτός δοθείσας ευθείας και είναι κάθετη προς αυτήν.*



Υλοποίηση: Θεωρούμε την ευθεία ΑΒ και σημείο Γ που δεν ανήκει σε αυτή. Πρέπει να κατασκευαστεί ευθεία που να διέρχεται από το Γ και να τέμνει κάθετα την ΑΒ.

Παίρνουμε τυχόν σημείο Δ στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΒ αλλά δεν ανήκει το Γ. Με κέντρο το Γ και ακτίνα τη ΓΔ γράφουμε κύκλο ΕΖΗ (αιτ.3) που τέμνει την ΑΒ στα σημεία Η, Ε (Π10, σελ. 26).

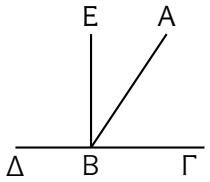
Ονομάζουμε Θ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΕΗ. Φέρνουμε τα ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ. Ισχυρίζομαι ότι από το δοθέν σημείο Γ, που δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ, κατασκευάστηκε κάθετος προς αυτήν, η ΓΘ. Κι αυτό συμβαίνει επειδή ΗΘ = ΘΕ και ΘΓ είναι κοινή, επομένως οι πλευρές ΗΘ, ΘΓ είναι ίσες με τις πλευρές ΕΘ, ΘΓ, αντίστοιχα και οι βάσεις ΓΗ, ΓΕ είναι ίσες. Άρα για τις γωνίες ισχύει ότι: $\widehat{\Gamma\Theta H} = \widehat{E\Theta\Gamma}$ και είναι και εφεξής (Π8, σελ. 25).

Όταν μια ευθεία διέρχεται από άλλη ευθεία και προκύψουν ίσες μεταξύ τους οι εφεξής γωνίες, τότε κάθε μια από τις ίσες γωνίες είναι ορθή και η διερχόμενη ευθεία ονομάζεται κάθετος της ευθείας από την οποία διέρχεται (Ορ10, σελ. 20).

Άρα κατασκευάστηκε κάθετη προς την δοθείσα ευθεία ΑΒ, η οποία διέρχεται από το δοθέν σημείο Γ, που δεν ανήκει σ᾽ αυτήν και είναι η ΓΘ· όπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 13 (468) *Αν μια ευθεία διερχόμενη από μια άλλη ευθεία σχηματίζει γωνίες, οι γωνίες αυτές είτε είναι ορθές είτε το άθροισμά τους ισούται με δύο ορθές.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ευθεία ΑΒ η οποία διερχόμενη από την ευθεία ΓΔ σχηματίζει γωνίες $\widehat{\Gamma BA}$, $\widehat{ABD}$



Ισχυρίζομαι ότι οι γωνίες αυτές είτε είναι ορθές, είτε το άθροισμά τους ισούται με δύο ορθές.

Αν $\widehat{\Gamma BA} = \widehat{ABD}$ τότε οι δυο γωνίες αυτές είναι ορθές (Ορ10, σελ. 20). Αν όχι, από το σημείο Β της ευθείας ΒΓ φέρνουμε ευθεία ΒΕ κάθετη στη ΓΔ (Π11, σελ. 27). Άρα οι γωνίες $\widehat{\Gamma BE}$, $\widehat{EBD}$ είναι δυο ορθές. Επειδή $\widehat{\Gamma BE} = \widehat{\Gamma BA} + \widehat{ABE}$, προσθέτοντας και στα δυο μέλη την κοινή γωνία $\widehat{EBD}$ προκύπτει:

$$\widehat{\Gamma BE} + \widehat{EBD} = \widehat{\Gamma BA} + \widehat{ABE} + \widehat{EBD}.$$

Πάλι επειδή $\widehat{\Delta BA} = \widehat{\Delta BE} + \widehat{EBA}$, προσθέτοντας και στα δυο μέλη την κοινή γωνία $\widehat{ABΓ}$ προκύπτει:

$$\widehat{\Delta BA} + \widehat{ABΓ} = \widehat{\Delta BE} + \widehat{EBA} + \widehat{ABΓ}.$$

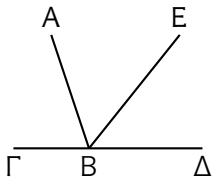
Συνεπώς

$$\widehat{\Gamma BE} + \widehat{EBD} = \widehat{\Delta BA} + \widehat{ABΓ}.$$

Όμως οι $\widehat{\Gamma BE}$, $\widehat{EBD}$ είναι δυο ορθές. Άρα και οι $\widehat{\Delta BA}$, $\widehat{ABΓ}$ θα έχουν άθροισμα ίσο με δυο ορθές: $\widehat{\Delta BA} + \widehat{ABΓ} = 2$ ορθές.

Άρα αν ευθεία διερχόμενη από μια άλλη ευθεία σχηματίζει γωνίες, οι γωνίες αυτές είτε θα είναι ορθές είτε το άθροισμά τους θα ισούται με δύο ορθές· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 14 (468) *Αν από σημείο μιας ευθείας φέρουμε δυο ημιευθείες, που δεν βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας και σχηματίσουν εφεξής γωνίες που το άθροισμα τους είναι ίσο με δυο ορθές, τότε οι δυο ημιευθείες ανήκουν στην ίδια ευθεία.*



Απόδειξη. Από το σημείο Β μιας ευθείας ΑΒ φέρνουμε δυο ημιευθείες ΒΓ και ΒΔ, που δεν βρίσκονται προς την ίδια πλευρά της ευθείας. Οι ημιευθείες αυτές σχηματίζουν τις εφεξής γωνίες τους $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{AB\Delta}$ ίσες με δυο ορθές. Ισχυρίζομαι ότι οι ημιευθείες ΒΔ και ΓΒ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Αν η ΒΔ δεν ανήκει στην ίδια ευθεία με την ΒΓ, έστω ότι η ΒΕ βρίσκεται στην ίδια ευθεία με την ΒΓ.

Επειδή, λοιπόν η ΑΒ τέμνει στην ευθεία ΓΒΕ οι γωνίες $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{ABE}$ έχουν άθροισμα ίσο με δυο ορθές (ΠΙ3, σελ. 28). Έχουν όμως και οι $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{AB\Delta}$ άθροισμα ίσο με δυο ορθές. Άρα

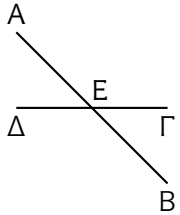
$$\widehat{AB\Delta} = \widehat{ABE}$$

(κ.εν.2, σελ. 21) που σημαίνει ότι η μικρότερη γωνία ισούται με την μεγαλύτερη, κάτι που είναι αδύνατο. Άρα η ΒΕ με τη ΒΓ δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Όμοια αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει καμία άλλη ευθεία εκτός της ΒΔ στην ίδια ευθεία με την ΒΓ. Άρα οι ΓΒ και ΒΔ ανήκουν στην ίδια ευθεία

Έτσι, αν από σημείο μιας ευθείας φέρουμε δυο ημιευθείες, που δεν βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας και σχηματίσουν εφεξής γωνίες που το άθροισμα τους είναι ίσο με δυο ορθές, τότε οι δυο ημιευθείες ανήκουν στην ίδια ευθεία· όπερ έδει δείξαι. *Δ*

Πρόταση 15 (469) *Αν δυο ευθείες τέμνονται μεταξύ τους, σχηματίζουν τις κατακορυφήν γωνίες ίσες.*



Απόδειξη. Έστω δυο ευθείες ΑΒ, ΓΔ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ε.

Ισχυρίζομαι ότι

$$\widehat{AE\Gamma} = \widehat{\Delta EB} \text{ και } \widehat{\Gamma EB} = \widehat{AE\Delta}.$$

Η ευθεία ΑΕ διερχόμενη από τη ΔΓ σχηματίζει εφεξής γωνίες, τις $\widehat{AE\Delta}$, $\widehat{AE\Gamma}$ που σημαίνει ότι

$$\widehat{\Gamma EA} + \widehat{AE\Delta} = 2 \text{ ορθές}.$$

Η ευθεία ΔΕ διερχόμενη από τη ΑΒ σχηματίζει εφεξής γωνίες, τις $\widehat{AE\Delta}$, $\widehat{\Delta EB}$ που σημαίνει ότι $\widehat{AE\Delta}+\widehat{\Delta EB} = 2$ ορθές. Όμως $\widehat{\Gamma EA}+\widehat{AE\Delta} = 2$ ορθές.

Άρα

$$\widehat{\Gamma EA} + \widehat{AE\Delta} = \widehat{AE\Delta} + \widehat{\Delta EB}.$$

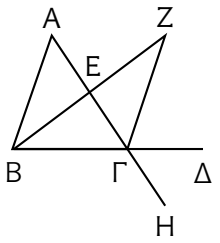
Αν τώρα αφαιρεθεί η κοινή γωνία $\widehat{AE\Delta}$ προκύπτει $\widehat{\Gamma EA} = \widehat{\Delta EB}$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\widehat{\Gamma EB} = \widehat{\Delta EA}$.

Άρα αν δυο ευθείες τέμνονται μεταξύ τους, σχηματίζουν τις κατακορυφήν γωνίες ίσες. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Είναι φανερό ότι αν δυο ευθείες τέμνονται μεταξύ τους, οι γωνίες που προκύπτουν στο σημείο τομής τους, θα έχουν άθροισμα ίσο με τέσσαρες ορθές· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 16 (469) *Σε κάθε τρίγωνο, αν προεκταθεί μια από τις πλευρές του, η εξωτερική γωνία που προκύπτει, είναι μεγαλύτερη από κάθε εντός και απέναντι γωνία.*



Απόδειξη. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΓ η πλευρά που προεκτείνεται προς το Γ μέχρι το σημείο Δ. Ισχυρίζομαι ότι η $\widehat{A\Gamma\Delta}$ είναι μεγαλύτερη από κάθε εντός και απέναντι γωνία· συγκεκριμένα είναι μεγαλύτερη της $\widehat{\Gamma BA}$ και της $\widehat{BA\Gamma}$.

Έστω Ε το μέσο της ΑΓ (Π10, σελ. 26) και ΒΖ η προέκταση της ΒΕ προς το Ε μέχρι το σημείο Ζ έτσι ώστε ΒΕ = ΕΖ. Φέρουμε τη ΖΓ και προεκτείνουμε την ΑΓ μέχρι το Η. Επειδή ΑΕ = ΕΓ και ΒΕ = ΕΖ, και επειδή

$$\widehat{AEB} = \widehat{ZE\Gamma},$$

αφού είναι κατακορυφήν (Π15, σελ. 29), θα είναι και οι βάσεις ίσες: ΑΒ = ΖΓ. Οπότε τα τρίγωνα ΖΕΓ, ΑΒΕ είναι ίσα και οι υπόλοιπες γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές, είναι αντίστοιχα ίσες (Π4, σελ. 23). Άρα

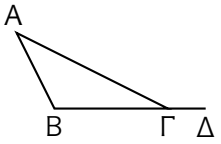
$$\widehat{BAE} = \widehat{E\Gamma Z} \text{ και } \widehat{E\Gamma\Delta} > \widehat{E\Gamma Z}.$$

Έτσι $\widehat{A\Gamma\Delta} > \widehat{BAE}$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι αν η ΒΓ διχοτομηθεί, τότε για τη γωνία $\widehat{B\Gamma H}$, συνεπώς και για τη γωνία $\widehat{A\Gamma\Delta}$, θα ισχύει $\widehat{A\Gamma\Delta} > \widehat{AB\Gamma}$.

Άρα σε κάθε τρίγωνο, αν προεκταθεί μια από τις πλευρές του, η εξωτερική γωνία που προκύπτει, είναι μεγαλύτερη από κάθε εντός και απέναντι γωνία· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 17 (470) *Σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα δυο οποιωνδήποτε γωνιών του είναι μικρότερο από δύο ορθές.*



Απόδειξη. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ το άθροισμα δυο οποιωνδήποτε γωνιών του είναι μικρότερο από δύο ορθές. Ας προεκταθεί η ΒΓ μέχρι το σημείο Δ. Επειδή η γωνία $\widehat{\text{ΑΓΔ}}$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΒΓ, είναι μεγαλύτερη της εντός και απέναντι γωνίας, $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$

$$\widehat{\text{ΑΓΔ}} > \widehat{\text{ΑΒΓ}}$$

Ας προστεθεί και στις δυο αυτές γωνίες, η κοινή γωνία $\widehat{\text{ΑΓΒ}}$:

$$\widehat{\text{ΑΓΔ}} + \widehat{\text{ΑΓΒ}} > \widehat{\text{ΑΒΓ}} + \widehat{\text{ΑΓΒ}}.$$

Αλλά οι γωνίες $\widehat{\text{ΑΓΔ}}$, $\widehat{\text{ΑΓΒ}}$ έχουν άθροισμα ίσο με δύο ορθές οπότε

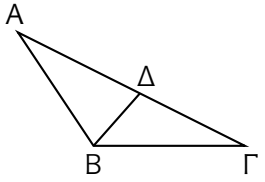
$$\widehat{\text{ΑΒΓ}} + \widehat{\text{ΒΓΑ}} < 2 \text{ ορθές}.$$

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι

$$\widehat{\text{ΒΑΓ}} + \widehat{\text{ΑΓΒ}} < 2 \text{ ορθές} \quad \text{και} \quad \widehat{\text{ΓΑΒ}} + \widehat{\text{ΑΒΓ}} < 2 \text{ ορθές}.$$

Άρα σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα δυο οποιωνδήποτε γωνιών του είναι μικρότερο από δυο ορθές· όπερ ἔδει δεῖξαι. ∆

Πρόταση 18 (470) *Σε κάθε τρίγωνο, η μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά.*



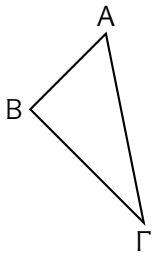
Απόδειξη. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΑΒ. Ισχυρίζομαι ότι και η γωνία $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$ είναι μεγαλύτερη της $\widehat{\text{ΒΓΑ}}$. Αφού ΑΓ > ΑΒ έστω ΑΔ = ΑΒ (Π2, σελ. 22) και ας σχηματιστεί η ΒΔ. Επειδή $\widehat{\text{ΑΔΒ}}$ εξωτερική του τριγώνου ΒΓΔ, είναι μεγαλύτερη της εντός και απέναντι γωνίας $\widehat{\text{ΔΓΒ}}$, δηλαδή $\widehat{\text{ΑΔΒ}} > \widehat{\text{ΔΓΒ}}$. Επίσης $\widehat{\text{ΑΔΒ}} = \widehat{\text{ΑΒΔ}}$, επειδή ΑΒ = ΑΔ. Άρα $\widehat{\text{ΑΒΔ}} > \widehat{\text{ΑΓΒ}}$. Οπότε $\widehat{\text{ΑΒΓ}} > \widehat{\text{ΑΓΒ}}$ (κ.εν.8, σελ. 22).

Άρα σε κάθε τρίγωνο, η μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ∆

Πρόταση 19 (471) *Σε κάθε τρίγωνο, η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη γωνία.*

Απόδειξη. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$ να είναι μεγαλύτερη της $\widehat{\text{ΒΓΑ}}$. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά ΑΓ είναι μεγαλύτερη της ΑΒ, δηλαδή ΑΓ > ΑΒ.

Γιατί αν η ΑΓ δεν είναι μεγαλύτερη τότε θα είναι ίση ή μικρότερη της ΑΒ.



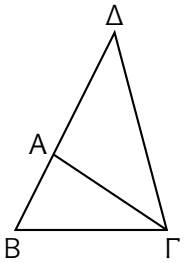
Ίση όμως δεν είναι, γιατί αν ήταν ίση τότε και οι γωνίες $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$, $\widehat{\text{ΑΓΒ}}$ θα ήταν ίσες (Π5, σελ. 24), αλλά δεν είναι. Άρα η $\text{ΑΓ} \neq \text{ΑΒ}$. Αλλά η ΑΓ δεν είναι ούτε μικρότερη της ΑΒ. Γιατί αν $\text{ΑΓ} < \text{ΑΒ}$ τότε και

$$\widehat{\text{ΑΒΓ}} < \widehat{\text{ΒΓΑ}},$$

αλλά δεν είναι. Συνεπώς η ΑΓ δεν είναι μικρότερη της ΑΒ και αποδείχθηκε ότι δεν είναι ούτε και ίση. Οπότε η ΑΓ είναι μεγαλύτερη της ΑΒ.

Άρα σε κάθε τρίγωνο, η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη γωνία· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 20 (Θεώρημα (Τριγωνική ανισότητα)) (471) *Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα δυο οποιωνδήποτε πλευρών του είναι μεγαλύτερο της τρίτης πλευράς.*



Απόδειξη. Έστω ότι δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι δυο πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, με όποιο συνδυασμό και αν ληφθούν, έχουν άθροισμα μεγαλύτερο της τρίτης πλευράς· δηλαδή

$$\text{ΒΑ} + \text{ΑΓ} > \text{ΒΓ},$$

$$\text{ΑΒ} + \text{ΒΓ} > \text{ΑΓ} \quad \text{και} \quad \text{ΒΓ} + \text{ΓΑ} > \text{ΑΒ}.$$

Προεκτείνουμε την ΒΑ ως το σημείο Δ ώστε $\text{ΓΑ} = \text{ΑΔ}$. Φέρνουμε τη ΔΓ. Επειδή $\text{ΔΑ} = \text{ΑΓ}$ θα είναι και

$$\widehat{\text{ΑΔΓ}} = \widehat{\text{ΑΓΔ}}$$

(Π5, σελ. 24). Άρα

$$\widehat{\text{ΒΓΔ}} > \widehat{\text{ΑΔΓ}}$$

(κ.εν.8, σελ. 22) κι επειδή το ΔΓΒ είναι το τρίγωνο που έχει τη

$$\widehat{\text{ΒΓΔ}} > \widehat{\text{ΒΔΓ}}$$

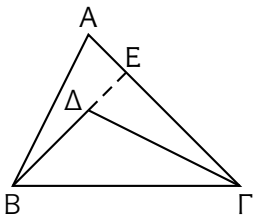
και απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά, συνεπάγεται ότι $\text{ΔΒ} > \text{ΒΓ}$. Όμως $\text{ΔΑ} = \text{ΑΓ}$. Άρα $\text{ΒΑ} + \text{ΑΓ} > \text{ΒΓ}$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$\text{ΑΒ} + \text{ΒΓ} > \text{ΑΓ} \quad \text{και} \quad \text{ΒΓ} + \text{ΓΑ} > \text{ΑΒ}.$$

Άρα σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα δυο οποιωνδήποτε πλευρών του είναι μεγαλύτερο της τρίτης πλευράς· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 21 (Θεώρημα (Μονοτονία περιμέτρου)) (471) *Αν από τα άκρα μιας πλευράς ενός τριγώνου κατασκευασθούν δυο ημιευθείες έτσι ώστε να τέμνονται εντός του τριγώνου, θα έχουν άθροισμα μικρότερο από το άθροισμα των δυο άλλων πλευρών, ενώ η περιεχόμενη γωνία τους θα είναι μεγαλύτερη από εκείνη που περιέχεται μεταξύ των δυο άλλων πλευρών.*



Απόδειξη. Από τα άκρα Β, Γ της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζονται δυο ημιευθείες οι ΒΔ, ΔΓ με τέτοιο τρόπο ώστε να τέμνονται μέσα στο τρίγωνο στο σημείο Δ. Ισχυρίζομαι ότι

$$\text{ΒΔ} + \text{ΔΓ} < \text{ΒΑ} + \text{ΑΓ} \quad \text{και} \quad \widehat{\text{ΒΔΓ}} > \widehat{\text{ΒΑΓ}}.$$

Ας προεκταθεί η ΒΔ μέχρι το σημείο Ε. Και επειδή σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των δυο πλευρών είναι μεγαλύτερο της τρίτης πλευράς (Π20, σελ. 32) στο τρίγωνο ΑΒΕ ισχύει $\text{ΑΒ} + \text{ΑΕ} > \text{ΒΕ}$. Ας προστεθεί η κοινή ΕΓ οπότε

$$\text{ΑΒ} + \text{ΑΕ} + \text{ΕΓ} > \text{ΒΕ} + \text{ΕΓ},$$

άρα

$$\text{ΒΑ} + \text{ΑΓ} > \text{ΒΕ} + \text{ΕΓ}.$$

Επίσης στο τρίγωνο ΓΕΔ ισχύει $\text{ΓΕ} + \text{ΕΔ} > \text{ΓΔ}$. Ας προστεθεί η κοινή ΔΒ οπότε

$$\text{ΓΕ} + \text{ΕΔ} + \text{ΔΒ} > \text{ΓΔ} + \text{ΔΒ},$$

άρα

$$\text{ΓΕ} + \text{ΕΒ} > \text{ΓΔ} + \text{ΔΒ}.$$

Αλλά δείξαμε ότι $\text{ΒΑ} + \text{ΑΓ} > \text{ΒΕ} + \text{ΕΓ}$, οπότε

$$\text{ΒΑ} + \text{ΑΓ} > \text{ΒΔ} + \text{ΔΓ}.$$

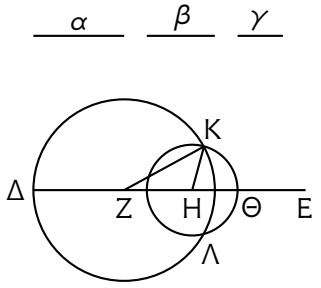
Επίσης, επειδή σε κάθε τρίγωνο η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη της εντός και απέναντι γωνίας (Π16, σελ. 30) συνεπάγεται για την εξωτερική γωνία $\widehat{\text{ΒΔΓ}}$ του τριγώνου ΓΔΕ ότι $\widehat{\text{ΒΔΓ}} > \widehat{\text{ΓΕΔ}}$.

Για τον ίδιο λόγο συνεπάγεται για την εξωτερική γωνία $\widehat{\text{ΓΕΒ}}$ του τριγώνου ΑΒΕ ότι $\widehat{\text{ΓΕΒ}} > \widehat{\text{ΒΑΓ}}$. Αλλά $\widehat{\text{ΒΔΓ}} > \widehat{\text{ΓΕΒ}}$ άρα

$$\widehat{\text{ΒΔΓ}} > \widehat{\text{ΒΑΓ}}.$$

Συνεπώς, αν από τα άκρα μιας πλευράς ενός τριγώνου κατασκευασθούν δυο ημιευθείες έτσι ώστε να τέμνονται εντός του τριγώνου, θα έχουν άθροισμα μικρότερο από το άθροισμα των δυο άλλων πλευρών, ενώ η περιεχόμενη γωνία τους θα είναι μεγαλύτερη από εκείνη που περιέχεται μεταξύ των δυο άλλων πλευρών· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 22 (Κατασκευή) (472) *Να κατασκευαστεί τρίγωνο από τρία ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα προς τρία δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα. Είναι αναγκαίο το άθροισμα των μηκών δυο οποιονδήποτε από αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα να είναι μεγαλύτερο από το μήκος του τρίτου* (*γιατί και το άθροισμα δυο πλευρών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο της τρίτης πλευράς*).



Υλοποίηση: Έστω ότι τα α, β, γ τα τρία δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα, και τα αθροίσματα των μηκών δυο οποιονδήποτε από αυτά είναι μεγαλύτερα του τρίτου, δηλαδή:

$$\alpha+\beta>\gamma, \quad \alpha+\gamma>\beta, \quad \beta+\gamma>\alpha.$$

Πρέπει να κατασκευαστεί ένα τρίγωνο από τρία ευθύγραμμα τμήματα που είναι ίσα με τα α, β, γ.

Ας σχεδιαστεί η ευθεία ΔΕ που είναι πεπερασμένη στο Δ ενώ εκτείνεται απεριόριστα προς το Ε (στμ: στο εξής «ημιευθεία»), και ας πάρουμε σημεία ώστε $\Delta Z=\alpha$, $ZH=\beta$, $H\Theta=\gamma$. Ας σχεδιαστεί ο κύκλος ΔΚΛ με κέντρο το Ζ και ακτίνα ΖΔ, ο κύκλος ΚΛΘ με κέντρο το Η και ακτίνα ΗΘ και ας φέρουμε τις ΚΖ και ΚΗ.

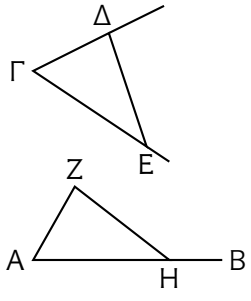
Ισχυρίζομαι ότι το τρίγωνο ΚΖΗ κατασκευάστηκε από τρία ευθύγραμμα τμήματα που είναι ίσα με τα α, β, γ.

Πράγματι, αφού το Ζ είναι το κέντρο του κύκλου ΔΚΛ, ισχύει $Z\Delta=ZK$. Όμως $Z\Delta=\alpha$ άρα και $KZ=\alpha$ (κ.εν.1, σελ. 21). Επίσης, αφού το Η είναι το κέντρο του κύκλου ΛΚΘ, ισχύει $H\Theta=HK$. Όμως $H\Theta=\gamma$ άρα και $KH=\gamma$. Όμως και $ZH=\beta$. Οπότε

$$KZ=\alpha, \quad ZH=B, \quad HK=\gamma.$$

Άρα από από τρία ευθύγραμμα τμήματα ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ που είναι ίσα με τα α, β, γ κατασκευάστηκε το τρίγωνο ΚΖΗ· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 23 (Κατασκευή) (473) *Σε δοσμένη ευθεία και σημείο της, να κατασκευαστεί γωνία ίση με δοσμένη γωνία.*



Υλοποίηση: Έστω ΑΒ η δοσμένη ευθεία, Α το δοσμένο σημείο που ανήκει σ' αυτή και $\widehat{\Delta\Gamma E}$ η δοσμένη γωνία· πρέπει από το σημείο Α της ΑΒ να κατασκευαστεί γωνία ίση με τη $\widehat{\Delta\Gamma E}$.

Σε καθεμιά από τις πλευρές ΓΔ, ΓΕ θεωρούμε Δ, Ε τυχόντα σημεία και φέρνουμε τη ΔΕ. Ας κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΖΗ από

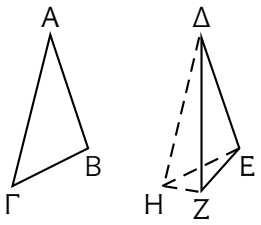
τρία ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία είναι ίσα με τα ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ έτσι ώστε ΓΔ = ΑΖ, ΓΕ = ΑΗ, ΔΕ = ΖΗ (Π22, σελ. 34).

Επειδή για τις πλευρές προκύπτει ΔΓ = ΖΑ, ΓΕ = ΑΗ και για τις βάσεις ΔΕ = ΖΗ συνεπάγεται για τη γωνία ότι $\widehat{\Delta\Gamma E} = \widehat{ZAH}$.

Άρα σε δοσμένη ευθεία ΑΒ και σημείο της Α, κατασκευάστηκε γωνία $\widehat{ZAH}$ ίση με την δοσμένη γωνία $\widehat{\Delta\Gamma E}$· όπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρόταση 24 (473) *Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές ίσες, ενώ η γωνία που περιέχεται μεταξύ των ίσων πλευρών του ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη της αντίστοιχης γωνίας στο άλλο, τότε και η βάση του πρώτου θα είναι μεγαλύτερη της αντίστοιχης βάσης στο δεύτερο.*

Απόδειξη. Έστω δυο τρίγωνα τα ΑΒΓ, ΔΕΖ με ίσες τις αντίστοιχες πλευρές ως εξής: ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ και έστω $\hat{A} > \widehat{Z\Delta E}$.



Ισχυρίζομαι για τις βάσεις ΒΓ, ΕΖ ότι ΒΓ > ΕΖ. Αφού η $\widehat{BA\Gamma} > \widehat{E\Delta Z}$ ας κατασκευασθεί στη ΔΕ στο σημείο Δ η γωνία $\widehat{E\Delta H} = \widehat{BA\Gamma}$ (Π23, σελ. 34). Παίρνουμε ΔΗ = ΑΓ = ΔΖ και φέρνουμε τις ΕΗ και ΕΖ.

Επειδή οι δυο αντίστοιχες πλευρές είναι ίσες ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΗ και οι γωνίες ίσες $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta H}$ άρα οι βάσεις θα είναι ίσες ΒΓ = ΕΗ.

Επίσης επειδή ΔΖ = ΔΗ τότε και $\widehat{\Delta HZ} = \widehat{\Delta ZH}$· άρα $\widehat{\Delta ZH} > \widehat{EHZ}$ (κ.εν. 8, σελ. 22) οπότε $\widehat{EZH} > \widehat{EHZ}$. Και επειδή το ΕΖΗ είναι τρίγωνο που έχει $\widehat{EZH} > \widehat{EHZ}$ συνεπάγεται ότι ΕΗ > ΕΖ, αφού απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά (Π19, σελ. 31). Είναι όμως και ΕΗ = ΒΓ· άρα και ΒΓ > ΕΖ.

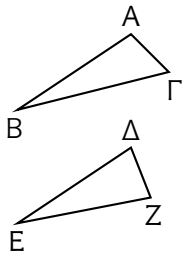
Άρα αν δυο τρίγωνα έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές ίσες και η γωνία του ενός τριγώνου, που περιέχεται μεταξύ των ίσων πλευρών είναι μεγαλύτερη της αντίστοιχης γωνίας του άλλου, τότε και η βάση του πρώτου θα είναι μεγαλύτερη της αντίστοιχης βάσης του δεύτερου· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 25 (474) *Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές ίσες και η βάση του ενός είναι μεγαλύτερη της βάσης του άλλου, τότε και η περιεχόμενη μεταξύ των ίσων πλευρών γωνία, του ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη της αντίστοιχης γωνίας του άλλου.*

Απόδειξη. Έστω δυο τρίγωνα τα ΑΒΓ, ΔΕΖ με ίσες τις αντίστοιχες πλευρές ως εξής: ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ και έστω για τις βάσεις ΒΓ, ΕΖ ότι ΒΓ > ΕΖ.

Ισχυρίζομαι ότι $\widehat{BA\Gamma} > \widehat{E\Delta Z}$. Αν όχι, τότε $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$ ή $\widehat{BA\Gamma} < \widehat{E\Delta Z}$.

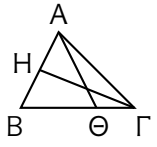
Όμως $\widehat{BA\Gamma} \neq \widehat{E\Delta Z}$ γιατί αν $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$ θα ήταν ίσες και οι βάσεις ΒΓ = ΕΖ (Π4, σελ. 23) κάτι που δεν ισχύει. Άρα $\widehat{BA\Gamma} \neq \widehat{E\Delta Z}$.



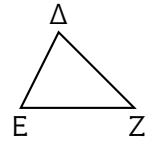
Αλλά ούτε και $\widehat{ΒΑΓ} < \widehat{ΕΔΖ}$, γιατί αν ίσχυε τότε θα προέκυπτε και για τις βάσεις ότι $ΒΓ < ΕΖ$ (Π24, σελ. 35) κάτι που δεν ισχύει. Άρα $\widehat{ΒΑΓ} \not< \widehat{ΕΔΖ}$, συνεπώς $\widehat{ΒΑΓ} > \widehat{ΕΔΖ}$.

Άρα αν δυο τρίγωνα έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές ίσες και η βάση του ενός είναι μεγαλύτερη της βάσης του άλλου, τότε και η περιεχόμενη μεταξύ των ίσων πλευρών γωνία, του ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη της αντίστοιχης γωνίας του άλλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 26 (474) *Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο αντίστοιχες γωνίες ίσες και μια πλευρά ίση, είτε την πλευρά στην οποία είναι προσκείμενες οι ίσες γωνίες είτε εκείνη την πλευρά που βρίσκεται απέναντι της μιας από τις ίσες γωνίες, τότε τα τρίγωνα αυτά θα έχουν και τις άλλες αντίστοιχες πλευρές τους ίσες όπως και την τρίτη τους γωνία ίση.*



Απόδειξη. Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ με $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΔΕΖ}$, $\widehat{ΒΓΑ} = \widehat{ΕΖΔ}$ και έχουν και μια αντίστοιχη πλευρά ίση.



Θεωρούμε αρχικά τις πλευρές $ΒΓ = ΕΖ$ στις οποίες οι ίσες γωνίες είναι προσκείμενες. Ισχυρίζομαι ότι θα έχουν και τις άλλες αντίστοιχες πλευρές τους ίσες $ΑΒ = ΔΕ$, $ΑΓ = ΔΖ$ και την τρίτη τους γωνία ίση $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΕΔΖ}$.

Γιατί αν $ΑΒ \neq ΔΕ$ σημαίνει ότι μια απ᾽ τις δυο θα είναι μεγαλύτερη. Έστω $ΑΒ > ΔΕ$. Θεωρούμε $ΒΗ = ΔΕ$ και φέρνουμε την ΗΓ. Αφού οι δυο αντίστοιχες πλευρές των τριγώνων είναι ίσες $ΒΗ = ΔΕ$, $ΒΓ = ΕΖ$ και η αντίστοιχη γωνία ίση $\widehat{ΗΒΓ} = \widehat{ΔΕΖ}$ άρα και οι βάσεις θα είναι ίσες $ΗΓ = ΔΖ$ οπότε τα τρίγωνα ΗΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα, που σημαίνει ότι και οι υπόλοιπες γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές θα είναι ίσες (Π4, σελ. 23). Άρα $\widehat{ΗΓΒ} = \widehat{ΔΖΕ}$. Αλλά $\widehat{ΔΖΕ} = \widehat{ΒΓΑ}$ από υπόθεση. Οπότε και $\widehat{ΒΓΗ} = \widehat{ΒΓΑ}$ (κ.εν.Ι, σελ. 21), που σημαίνει ότι η μικρότερη γωνία είναι ίση με τη μεγαλύτερη, που είναι αδύνατον. Άρα η ΑΒ δεν είναι άνιση της ΔΕ, δηλαδή είναι ίσες.

Έχουμε λοιπόν ότι δυο αντίστοιχες πλευρές των τριγώνων είναι ίσες $ΑΒ = ΔΕ$, $ΒΓ = ΕΖ$ και η περιεχόμενη γωνία ίση $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΔΕΖ}$ άρα και οι βάσεις θα είναι ίσες $ΑΓ = ΔΖ$ και η τρίτη γωνία θα είναι ίση: $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΕΔΖ}$.

Θεωρούμε τώρα ίση μία από τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες. Έστω για παράδειγμα, ότι $ΑΒ = ΔΕ$. Ισχυρίζομαι και πάλι ότι και οι υπόλοιπες πλευρές θα είναι ίσες αντίστοιχα $ΑΓ = ΔΖ$, $ΒΓ = ΕΖ$ όπως και η περιεχόμενη γωνία $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΕΔΖ}$.

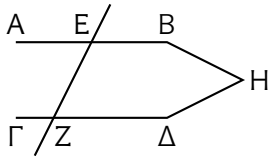
Γιατί αν $ΒΓ \neq ΕΖ$ σημαίνει ότι μια μια απ᾽ τις δυο θα είναι μεγαλύτερη. Έστω $ΒΓ > ΕΖ$. Θεωρούμε $ΒΘ = ΕΖ$ και φέρνουμε την ΑΘ. Αφού οι δυο αντίστοιχες πλευρές των τριγώνων είναι ίσες $ΒΘ = ΕΖ$, $ΑΒ = ΔΕ$ και

περιέχουν ίσες γωνίες, άρα και οι βάσεις θα είναι ίσες ΑΘ = ΔΖ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΔΕΖ είναι ίσα που σημαίνει ότι και οι υπόλοιπες γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές θα είναι ίσες (Π4, σελ. 23). Άρα $\widehat{\text{ΒΘΑ}} = \widehat{\text{ΕΖΔ}}$.

Αλλά $\widehat{\text{ΕΖΔ}} = \widehat{\text{ΒΓΑ}}$. Δηλαδή η $\widehat{\text{ΒΘΑ}}$ εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΘΓ είναι ίση προς την εντός και απέναντι γωνία $\widehat{\text{ΒΘΑ}} = \widehat{\text{ΒΓΑ}}$ που είναι αδύνατον (Π16, σελ. 30). Άρα η ΒΓ δεν είναι άνιση της ΕΖ, που σημαίνει ότι είναι ίσες. Εφόσον οι ίσες πλευρές ΑΒ = ΔΕ και ΒΓ = ΕΖ περιέχουν και ίσες γωνίες, άρα και οι βάσεις θα είναι ίσες ΑΓ = ΔΖ οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα, που σημαίνει ότι και η τρίτη γωνία $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\text{ΕΔΖ}}$.

Άρα αν δυο τρίγωνα έχουν δυο αντίστοιχες γωνίες ίσες και μια πλευρά ίση, είτε την πλευρά στην οποία είναι προσκείμενες οι ίσες γωνίες είτε εκείνη την πλευρά που βρίσκεται απέναντι της μιας από τις ίσες γωνίες, τότε τα τρίγωνα αυτά θα έχουν και τις άλλες αντίστοιχες πλευρές τους ίσες όπως και την τρίτη τους γωνία ίση· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 27 (475) *Αν δυο ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία έτσι ώστε οι εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται να είναι ίσες μεταξύ τους, τότε οι δυο ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες.*

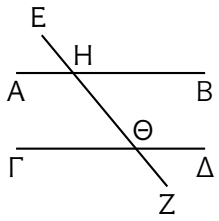


Απόδειξη. Έστω ΕΖ η ευθεία που τέμνει τις δυο ευθείες ΑΒ και ΓΔ, και οι εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες: $\widehat{\text{ΑΕΖ}} = \widehat{\text{ΕΖΔ}}$. Ισχυρίζομαι ότι η ΑΒ είναι παράλληλη της ΓΔ.

Γιατί αν δεν είναι παράλληλες οι ΑΒ, ΓΔ και τις προεκτείνουμε θα συναντηθούν ή προς το μέρος των Β, Δ ή προς το μέρος των Α, Γ. Έστω ότι προεκτείνονται και συμπίπτουν προς το μέρος των Β, Δ στο σημείο Η. Τότε στο τρίγωνο ΗΕΖ η εξωτερική γωνία $\widehat{\text{ΑΕΖ}}$ είναι ίση με την εντός και απέναντι γωνία $\widehat{\text{ΑΕΖ}} = \widehat{\text{ΗΕΖ}}$, κάτι που είναι αδύνατον (Π16, σελ. 30)· άρα οι ΑΒ και ΓΔ προεκτεινόμενες δεν συμπίπτουν προς το μέρος των Β, Δ. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι δεν συμπίπτουν ούτε προς το μέρος των Α, Γ. Οι ευθείες όμως που δεν συμπίπτουν προς κανένα σημείο, είναι παράλληλες· άρα η ΑΒ είναι παράλληλη της ΓΔ.

Άρα αν δυο ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία έτσι ώστε οι εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται να είναι ίσες μεταξύ τους, τότε οι δυο ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 28 (476) *Αν δυο ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία έτσι ώστε μια εκτός γωνία να ισούται προς την εντός, απέναντι και επί τα αυτά μέρη ή οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες να είναι ίσες προς δύο ορθές, οι ευθείες αυτές θα είναι μεταξύ τους παράλληλες.*



Απόδειξη. Έστω η ευθεία ΕΖ να τέμνει τις δυο ευθείες ΑΒ, ΓΔ ώστε μια εκτός γωνία να ισούται με την εντός και απέναντι γωνία. Ας είναι για παράδειγμα

$$\widehat{\text{ΕΗΒ}} = \widehat{\text{ΗΘΔ}}$$

ή το άθροισμα των εντός και επί τ᾽ αυτά μέρη γωνιών να ισούται με δύο ορθές. Ισχυρίζομαι ότι η ΑΒ είναι παράλληλη της ΓΔ. Επειδή $\widehat{\text{ΕΗΒ}} = \widehat{\text{ΗΘΔ}}$ αλλά και $\widehat{\text{ΕΗΒ}} = \widehat{\text{ΑΗΘ}}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\widehat{\text{ΑΗΘ}} = \widehat{\text{ΗΘΔ}}.$$

Αφού όμως είναι εντός εναλλάξ γωνίες τότε η ΑΒ είναι παράλληλη της ΓΔ (Π27, σελ. 37).

Αν πάλι

$$\widehat{\text{ΒΗΘ}} + \widehat{\text{ΗΘΔ}} = 2 \text{ ορθές} \quad \text{και} \quad \widehat{\text{ΑΗΘ}} + \widehat{\text{ΒΗΘ}} = 2 \text{ ορθές},$$

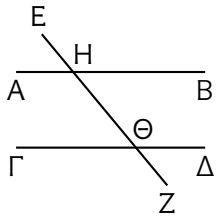
έπεται ότι

$$\widehat{\text{ΒΗΘ}} + \widehat{\text{ΗΘΔ}} = \widehat{\text{ΑΗΘ}} + \widehat{\text{ΒΗΘ}}.$$

Αφαιρώ την κοινή γωνία $\widehat{\text{ΒΗΘ}}$ οπότε $\widehat{\text{ΑΗΘ}} = \widehat{\text{ΗΘΔ}}$ οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα η ΑΒ είναι παράλληλη της ΓΔ.

Άρα αν δυο ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία ώστε μια εκτός γωνία να ισούται προς την εντός, απέναντι και επί τα αυτά μέρη ή οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες να είναι ίσες προς δυο ορθές, οι ευθείες αυτές θα είναι μεταξύ τους παράλληλες· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 29 (476) *Η ευθεία που τέμνει παράλληλες ευθείες, σχηματίζει τις εναλλάξ γωνίες ίσες μεταξύ τους, την εκτός ίση με την απέναντι και εντός γωνία και το άθροισμα των εντός και επί τ᾽ αυτά μέρη γωνιών ίσο με δυο ορθές.*



Απόδειξη. Έστω ότι η ευθεία ΕΖ τέμνει τις παράλληλες ευθείες ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η, Θ αντίστοιχα.

Ισχυρίζομαι ότι σχηματίζει τις εναλλάξ γωνίες ίσες μεταξύ τους: $\widehat{\text{ΑΗΘ}} = \widehat{\text{ΗΘΔ}}$, την εκτός ίση με την εντός και απέναντι γωνία: $\widehat{\text{ΕΗΒ}} = \widehat{\text{ΗΘΔ}}$ και το άθροισμα των εντός και επί τ᾽ αυτά μέρη γωνιών ίσο με δύο ορθές:

$$\widehat{\text{ΒΗΘ}} + \widehat{\text{ΗΘΔ}} = 2 \text{ ορθές}.$$

Γιατί αν $\widehat{\text{ΑΗΘ}} \neq \widehat{\text{ΗΘΔ}}$, τότε μια από τις δύο θα είναι μεγαλύτερη. Έστω ότι $\widehat{\text{ΑΗΘ}} > \widehat{\text{ΗΘΔ}}$ και ας προστεθεί σε καθεμιά η γωνία $\widehat{\text{ΒΗΘ}}$. Τότε

$$\widehat{\text{ΑΗΘ}} + \widehat{\text{ΒΗΘ}} > \widehat{\text{ΗΘΔ}} + \widehat{\text{ΒΗΘ}}$$

(κ.εν.2, σελ. 21). Αλλά

$$\widehat{AH\Theta} + \widehat{BH\Theta} = 2 \text{ ορθές}$$

(Π13, σελ. 28). Άρα

$$\widehat{H\Theta\Delta} + \widehat{BH\Theta} < 2 \text{ ορθές}.$$

Όμως οι ευθείες που σχηματίζουν το άθροισμα των εντός και επί τ᾽ αυτά μέρη γωνιών μικρότερο από δυο ορθές, προεκτεινόμενες στο άπειρο τέμνονται (Αίτημα 5). Άρα οι ΑΒ, ΓΔ προεκτεινόμενες στο άπειρο θα συμπέσουν, αλλά αυτό δεν μπορεί να συμβεί γιατί από υπόθεση είναι παράλληλες. Οπότε η $\widehat{AH\Theta}$ δεν είναι άνιση της $\widehat{H\Theta\Delta}$· άρα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{AH\Theta} = \widehat{H\Theta\Delta}$. Αλλά ισχύει $\widehat{AH\Theta} = \widehat{EHB}$ (Π15, σελ. 29). Συνεπώς και $\widehat{EHB} = \widehat{H\Theta\Delta}$ (κ.εν.1, σελ. 21). Ας προστεθεί σε καθεμιά η κοινή γωνία $\widehat{BH\Theta}$, οπότε

$$\widehat{EHB} + \widehat{BH\Theta} = \widehat{H\Theta\Delta} + \widehat{BH\Theta}$$

(κ.εν.2, σελ. 21).

Αλλά

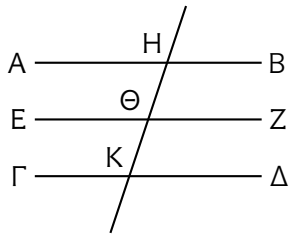
$$\widehat{EHB} + \widehat{BH\Theta} = 2 \text{ ορθές}$$

(Π13, σελ. 28)· συνεπώς

$$\widehat{BH\Theta} + \widehat{H\Theta\Delta} = 2 \text{ ορθές}.$$

Άρα όταν μια ευθεία τέμνει παράλληλες ευθείες,σχηματίζει τις εναλλάξ γωνίες ίσες μεταξύ τους, την εκτός ίση με την απέναντι και εντός γωνία και το άθροισμα των εντός και επί τ᾽ αυτά μέρη γωνιών ίσο με δυο ορθές· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

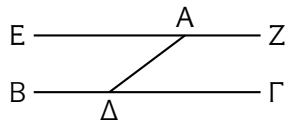
Πρόταση 30 (477) *Ευθείες που είναι παράλληλες προς την ίδια ευθεία είναι και μεταξύ τους παράλληλες.*



Απόδειξη. Θεωρούμε τις ευθείες ΑΒ και ΓΔ παράλληλες με την ευθεία ΕΖ. Θα δείξουμε ότι και η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΓΔ. Φέρνουμε μια τέμνουσα ευθεία ΗΚ. Επειδή αυτή τέμνει τις παράλληλες ΑΒ και ΕΖ, ισχύει $\widehat{AHK} = \widehat{H\Theta Z}$ (Π29, σελ. 38). Πάλι, επειδή αυτή τέμνει τις παράλληλες ΕΖ και ΓΔ, ισχύει $\widehat{H\Theta K} = \widehat{HK\Delta}$. Άρα $\widehat{AHK} = \widehat{H\Theta Z}$ και συνεπώς $\widehat{AHK} = \widehat{HK\Delta}$ (κ.εν.1, σελ. 21)· και αυτές είναι εναλλάξ. Συμπεραίνουμε ότι η ΑΒ είναι παράλληλη με την ΓΔ (Π27, σελ. 37).

Συνεπώς οι παράλληλες σε μια ευθεία είναι και μεταξύ τους παράλληλες· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 31 (Κατασκευή) (477) *Από δοθέν σημείο να αχθεί ευθεία παράλληλη σε δοθείσα ευθεία.*

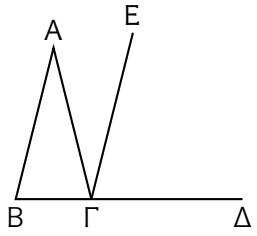


Απόδειξη. Έστω ότι το δοθέν σημείο είναι το Α και η δοθείσα ευθεία η ΒΓ. Πρέπει να φέρουμε ευθεία από το Α παράλληλη στη ΒΓ. Παίρνουμε τυχόν σημείο Δ πάνω στην ΒΓ και φέρνουμε την ΑΔ. Κατασκευάζουμε τη γωνία $\widehat{\Delta A E}$ ίση με τη γωνία $\widehat{A\Delta\Gamma}$ (Π23, σελ. 34). Προεκτείνουμε τώρα την ΕΑ κατασκευάζοντας την ευθεία ΑΖ.

Επειδή η ΑΔ τέμνει τις ευθείες ΒΓ, ΕΖ και σχηματίζει τις εναλλάξ γωνίες $\widehat{EA\Delta}$, $\widehat{A\Delta\Gamma}$ ίσες, έπεται, ότι η ΕΑΖ είναι παράλληλη με την ΒΓ (Π27, σελ. 37).

Από δοθέν σημείο Α φέραμε παράλληλη προς την ευθεία ΒΓ, την ΕΑΖ, όπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 32 (478) *Σε κάθε τρίγωνο, όταν επεκταθεί η μια πλευρά, η εξωτερική γωνία που σχηματίζεται είναι ίση με το άθροισμα των δύο εντός του τριγώνου και απέναντι γωνιών. Το άθροισμα των τριών εσωτερικών γωνιών του τριγώνου ισούται με δύο ορθές.*



Απόδειξη. Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ και ας προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το Δ. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει

$$\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma AB} + \widehat{AB\Gamma}$$

και επιπλέον

$$\widehat{AB\Gamma} + \widehat{B\Gamma A} + \widehat{\Gamma AB} = 2 \text{ ορθές}.$$

Φέρνουμε από το σημείο Γ τη ΓΕ παράλληλη στην ΑΒ και επειδή αυτές τέμνονται από την ΑΓ, ισχύει $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{A\Gamma E}$ (Π29, σελ. 38). Πάλι επειδή οι παράλληλες ΑΒ και ΓΕ τέμνονται από τη ΒΔ, η εξωτερική γωνία $\widehat{E\Gamma\Delta}$ ισούται με την $\widehat{AB\Gamma}$ (Π29, σελ. 38). Δείξαμε όμως ότι $\widehat{A\Gamma E} = \widehat{BA\Gamma}$. Άρα $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{BA\Gamma} + \widehat{AB\Gamma}$ (κ.εν.2, σελ. 21).

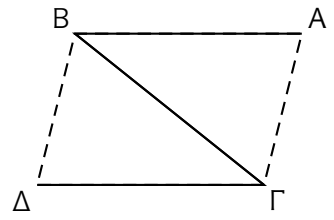
Προσθέτουμε τώρα σε αυτές την κοινή γωνία $\widehat{A\Gamma B}$. Άρα

$$\widehat{A\Gamma\Delta} + \widehat{A\Gamma B} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{B\Gamma A} + \widehat{\Gamma AB},$$

(κ.εν.2, σελ. 21). Αλλά $\widehat{A\Gamma\Delta} + \widehat{A\Gamma B} = 2$ ορθές (ΠΙ3, σελ. 28), άρα και το άθροισμα $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{B\Gamma A} + \widehat{\Gamma AB}$ ισούται με δύο ορθές.

Συνεπώς, σε κάθε τρίγωνο όταν προεκταθεί η μια πλευρά, η εξωτερική γωνία που σχηματίζεται είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών, και οι εσωτερικές γωνίες κάθε τριγώνου έχουν άθροισμα ίσο με δύο ορθές· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 33 (478) *Τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα άκρα δυο ίσων και παραλλήλων ευθυγράμμων τμημάτων προς το ίδιο μέρος είναι και αυτά μεταξύ τους ίσα και παράλληλα.*

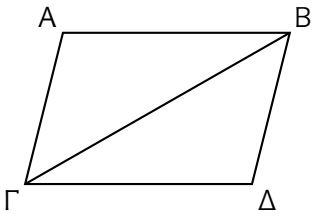


Απόδειξη. Ας είναι τα ΑΒ και ΓΔ ίσα και παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα και θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα προηγούμενα· τα ΑΓ και ΒΔ. Ισχυρίζομαι, ότι και αυτά είναι ίσα και παράλληλα.

Πράγματι, ας φέρουμε την ΒΓ. Επειδή οι παράλληλες ΑΒ και ΓΔ τέμνονται από τη ΒΓ, οι εναλλάξ γωνίες $\widehat{ΑΒΓ}$ και ΒΓΔ είναι ίσες (Π29, σελ. 38). Και επειδή ΑΒ = ΓΔ και η ΒΓ είναι κοινή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα, άρα ΑΓ = ΒΔ. Αλλά και οι υπόλοιπες γωνίες αυτών των τριγώνων και οι απέναντι πλευρές τους είναι αντιστοίχως ίσες, άρα ΑΓΒ = ΓΒΔ (Π4, σελ. 23). Τέλος, επειδή η τέμνουσα ΒΓ σχηματίζει ίσες εναλλάξ γωνίες με τις ΑΓ και ΒΔ, έπεται ότι η ΑΓ είναι παράλληλη με την ΒΔ (Π27, σελ. 37).

Άρα τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα άκρα δύο ίσων και παράλληλων ευθύγραμμων τμημάτων προς το ίδιο μέρος είναι και αυτά μεταξύ τους ίσα και παράλληλα· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 34 (479) *Οι απέναντι πλευρές και γωνίες κάθε παραλληλογράμμου (ορθογωνίου ή πλάγιου) είναι μεταξύ τους ίσες και καθεμιά από τις δύο διαγώνιους χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα μέρη.*



Απόδειξη. Θεωρώ το παραλληλόγραμμο ΑΓΔΒ και τη διαγώνιό του ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι οι απέναντι πλευρές και οι απέναντι γωνίες του ΑΓΔΒ είναι ίσες και η διαγώνιος ΒΓ χωρίζει το ΑΓΔΒ σε δύο ίσα μέρη.

Πράγματι, ΑΒ // ΓΔ και τέμνονται από την ΒΓ. Άρα οι εναλλάξ γωνίες $\widehat{ΑΒΓ}$ και $\widehat{ΒΓΔ}$ είναι ίσες (Π29, σελ. 38). Ομοίως, επειδή ΑΓ // ΒΔ και τέμνονται από την ΒΓ, οι εναλλάξ γωνίες $\widehat{ΑΓΒ}$ και $\widehat{ΓΒΔ}$ είναι ίσες. Συνεπώς τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ, αφού έχουν ίση μια πλευρά, τη ΒΓ, και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες, θα έχουν αντίστοιχα ίσες και τις άλλες πλευρές τους και γωνίες τους (Π26, σελ. 36). Οπότε

$$ΑΒ = ΓΔ,\ \ ΑΓ = ΒΔ,\ \ \widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΓΔΒ}.$$

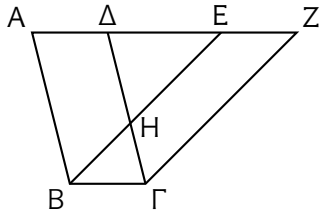
Επειδή τώρα $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΒΓΔ}$ και $\widehat{ΓΒΔ} = \widehat{ΑΓΒ}$ έπεται ότι όλη η $\widehat{ΑΒΔ}$ είναι ίση με όλη την $\widehat{ΑΓΔ}$ (κ.εν.2, σελ. 21).

Άρα στα παραλληλόγραμμα οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι η διαγώνιος χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα μέρη. Πράγματι ΑΒ = ΓΔ, ΒΓ κοινή και $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΒΓΔ}$ (Π29, σελ. 38). Άρα και ΑΓ = ΒΔ. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΔ (Π4, σελ. 23).

Συνεπώς η διαγώνιος πράγματι χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα μέρη· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 35 (479) *Παραλληλόγραμμα που έχουν ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι μεταξύ τους ίσα* (στμ: στο εξής «ισεμβαδικά» ή «έχουν ίσο εμβαδόν»).

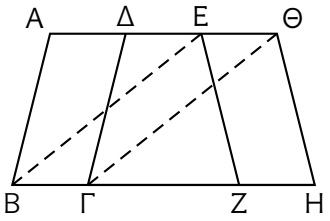


Απόδειξη. Έστω ότι τα ΑΒΓΔ και ΕΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμα με κοινή βάση τη ΒΓ και βρίσκονται ανάμεσα στις παράλληλες ΑΖ και ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει ίσο εμβαδόν με το ΕΒΓΖ (στμ: στο εξής |ΑΒΓΔ| = |ΕΒΓΖ|).

Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ΑΔ = ΒΓ (Π34, σελ. 41) και ομοίως ΕΖ = ΒΓ. Οπότε ΑΔ = ΕΖ (κ.εν.1, σελ. 21) και επειδή η ΔΕ είναι κοινή συμπεραίνουμε ότι ΑΕ = ΔΖ (κ.εν.2, σελ. 21). Ισχύει επίσης ΑΒ = ΔΓ (Π34, σελ. 41), οπότε ΕΑ = ΖΔ, ΑΒ = ΔΓ και $\widehat{\text{ΖΔΓ}} = \widehat{\text{ΕΑΒ}}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά (Π29, σελ. 38). Άρα η βάση ΕΒ είναι ίση με τη βάση ΖΓ, και το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ίσο με το ΔΖΓ (Π4, σελ. 23). Αν αφαιρεθεί το κοινό τρίγωνο ΔΗΕ τότε το τραπέζιο ΑΒΗΔ είναι ισεμβαδικό με το ΕΗΓΖ (κ.εν.3, σελ. 21). Και αν τώρα προσθέσουμε το κοινό τρίγωνο ΗΒΓ θα πάρουμε ότι |ΑΒΓΔ| = |ΕΒΓΖ|.

Άρα τα παραλληλόγραμμα με κοινή βάση που βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες είναι ισεμβαδικά· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 36 (480) *Παραλληλόγραμμα με ίσες βάσεις τα οποία βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες ευθείες έχουν ίσο εμβαδόν.*

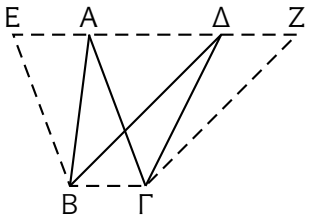


Απόδειξη. Έστω ότι τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ έχουν ίσες βάσεις, τις ΒΓ και ΖΗ, και βρίσκονται ανάμεσα στις παράλληλες ΑΘ και ΒΗ. Ισχυρίζομαι ότι το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει ίσο εμβαδόν με το ΕΖΗΘ.

Φέρνω τα ΒΕ και ΓΘ. Επειδή ΒΓ = ΖΗ και ΖΗ = ΕΘ συμπεραίνουμε ΒΓ = ΕΘ (κ.εν.1, σελ. 21), και είναι και παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα, και επιπλέον τις ενώνουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΒ, ΘΓ. Τα ευθύγραμμα τμήματα όμως που ενώνουν ίσα και παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα είναι και μεταξύ τους ίσα και παράλληλα (Π33, σελ. 40). Άρα το ΕΒΓΘ είναι παραλληλόγραμμο (Π34, σελ. 41), και είναι ισεμβαδικό με το ΑΒΓΔ διότι έχουν κοινή βάση τη ΒΓ και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων (Π35, σελ. 42). Για τον ίδιο λόγο το ΕΖΗΘ είναι ισεμβαδικό με το ΕΒΓΘ (Π35, σελ. 42), οπότε |ΑΒΓΔ| = |ΕΖΗΘ| (κ.εν.1, σελ. 22).

Άρα τα παραλληλόγραμμα με ίση βάση που περιέχονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες είναι ισεμβαδικά· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 37 (480) *Τα τρίγωνα που έχουν κοινή βάση και βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες είναι ισεμβαδικά.*

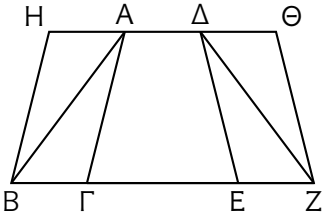


Απόδειξη. Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν κοινή τη βάση ΒΓ και βρίσκονται ανάμεσα στις παράλληλες ΑΔ και ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του ΔΒΓ.

Πράγματι, ας προεκταθεί και από τα δύο μέρη η ΑΔ προς τα Ε και Ζ, και από το Β φέρνω την ΒΕ παράλληλη προς την ΓΑ, και από το Γ τη ΓΖ παράλληλη προς η ΒΔ (Π31, σελ. 39). Καθένα από τα ΕΒΓΑ και ΔΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο και είναι ισεμβαδικά γιατί έχουν κοινή βάση τη ΒΓ και βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες ΒΓ και ΕΖ (Π35, σελ. 42). Το ΑΒΓ τώρα έχει το μισό εμβαδόν του ΕΒΓΑ, διότι η διαγώνιος ΑΒ το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά μέρη (Π34, σελ. 41), και ομοίως το ΔΒΓ έχει το μισό εμβαδόν από το ΔΒΓΖ. Όμως τα μισά ίσων ποσοτήτων είναι ίσα, άρα |ΑΒΓ| = |ΔΒΓ| (κ.εν.6, σελ. 22).

Άρα τα τρίγωνα με κοινή βάση και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ισεμβαδικά· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 38 (481) *Τα τρίγωνα που έχουν ίσες βάσεις και βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες έχουν ίσο εμβαδόν.*



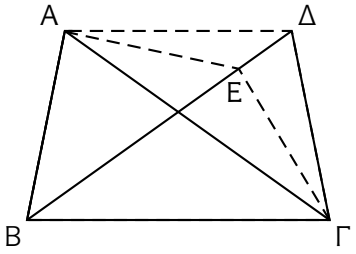
Απόδειξη. Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ίσες τις βάσεις ΒΓ και ΕΖ και βρίσκονται μεταξύ των παραλλήλων ΒΖ και ΑΔ. Ισχυρίζομαι ότι το τρίγωνο ΑΒΓ έχει ίσο εμβαδόν με το ΔΕΖ.

Πράγματι, ας προεκταθεί η ΑΔ και από τα δύο μέρη μέχρι τα σημεία Η και Θ και ας χαραχθεί η ΒΗ παράλληλη προς την ΓΑ. Επιπλέον ας χαραχθεί η απο το Ζ η ΖΘ παράλληλη προς τη ΔΕ (Π31, σελ. 39). Άρα τα ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ είναι παραλληλόγραμμα με ίσα εμβαδά γιατί έχουν ίσες βάσεις: ΒΓ = ΕΖ και βρίσκονται ανάμεσα στις παράλληλες ΒΖ και ΗΘ (Π36, σελ. 42). Τώρα το μεν τρίγωνο ΑΒΓ έχει το μισό εμβαδόν του ΗΒΓΑ (γιατί η ΑΒ είναι διαγώνιός του (Π34, σελ. 41)), το δε τρίγωνο ΖΕΔ έχει το μισό εμβαδόν του ΔΕΖΘ (γιατί η ΔΖ είναι διαγώνιός του. Τα μισά δε ίσων ποσοτήτων είναι μεταξύ τους ίσα (κ.εν.6, σελ. 22).

Άρα τα τρίγωνα που έχουν ίσες βάσεις και βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες έχουν ίδο εμβαδόν· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 39 (481) *Τρίγωνα με ίσο εμβαδόν και ίδια βάση, τα οποία βρίσκονται από την ίδια μεριά της βάσης, βρίσκονται και ανάμεσα σε παράλληλες ευθείες.*

Απόδειξη. Έστω ότι |ΑΒΓ| = |ΔΒΓ| και υποθέτω ότι τα τρίγωνα βρίσκονται στην ίδια μεριά της βάσης ΒΓ. Αν φέρω την ΑΔ ισχυρίζομαι ότι ΑΔ // ΒΓ. Διότι αν αυτό δεν ισχύει φέρνω από το Α παράλληλη στη ΒΓ, την ΑΕ (Π31, σελ. 39), και στη συνέχεια την ΕΓ. Άρα το τρίγωνο |ΑΒΓ| = |ΕΒΓ| διότι έχουν κοινή βάση και βρίσκονται ανάμεσα σε παράλληλες (Π37, σελ. 43).

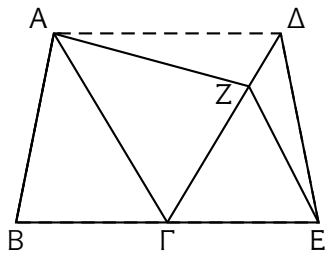


Αλλά |ΑΒΓ| = |ΔΒΓ| άρα |ΔΒΓ| = |ΕΒΓ| (κ.εν.1, σελ. 21), δηλαδή το μεγαλύτερο έχει ίσο εμβαδόν με το μικρότερο, πράγμα αδύνατον. Άρα η ΑΕ δεν είναι παράλληλη της ΒΓ. Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι καμιά ευθεία που δεν είναι η ΑΔ δεν είναι παράλληλη της ΒΓ, άρα ΑΔ // ΒΓ.

Έτσι ισεμβαδικά τρίγωνα με κοινή βάση και στην ίδια μεριά σε σχέση με αυτή τη βάση, βρίσκονται ανάμεσα σε παράλληλες ευθείες· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 40 (482) *Τρίγωνα που έχουν ίσες βάσεις και ίσο εμβαδόν, και στην ίδια πλευρά της βάσης τους βρίσκονται ανάμεσα σε παράλληλες ευθείες.*

Απόδειξη. Έστω ότι |ΑΒΓ| = |ΔΓΕ| με ΒΓ = ΓΕ με τα τρίγωνα στην ίδια μεριά (στμ: εννοείται ότι τα Β, Γ, Ε είναι στην ίδια ευθεία αλλιώς δεν έχει νόημα το «ίδια μεριά»). Φέρνω την ΑΔ και ισχυρίζομαι ότι αυτή είναι παράλληλη με την ΒΕ.

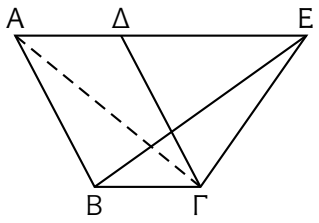


Αν όχι, φέρνω από το Α παράλληλη προς τη ΒΕ, την ΑΖ, και φέρνω και τη ΖΕ. Έτσι |ΑΒΓ| = |ΖΓΕ|, αφού αυτά τα τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις και βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες (τις ΒΕ και ΑΖ) (Π38, σελ. 43). Επειδή |ΑΒΓ| = |ΔΓΕ| συμπεραίνουμε ότι |ΔΓΕ| = |ΖΓΕ| (κ.εν.1, σελ. 21), το οποίο είναι αδύνατο, αφού το μεγάλο δεν γίνεται να είναι ίσο με το μέρος του. Οπότε η ΑΖ δεν είναι παράλληλη της ΒΕ. Ομοίως δείχνουμε ότι καμία άλλη εκτός της ΑΔ δεν είναι παράλληλη στη ΒΕ, άρα ΑΔ // ΒΕ.

Άρα ισεμβαδικά τρίγωνα με ίσες βάσεις βρισκόμενα στην ίδια μεριά της βάσης τους βρίσκονται και ανάμεσα σε παράλληλες· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 41 (482) *Αν παραλληλόγραμμο έχει την ίδια βάση με τρίγωνο και τα δύο βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες τότε το παραλληλόγραμμο έχει εμβαδό διπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου.*

Απόδειξη. Ας έχει το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ την ίδια βάση ΒΓ με το τρίγωνο ΕΒΓ και ας βρίσκονται και τα δύο μέσα στις παράλληλες ΒΓ και ΑΕ. Ισχυρίζομαι ότι



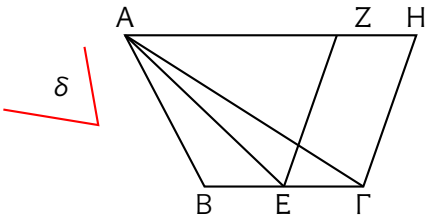
$$|ΑΒΓΔ| = 2|ΕΒΓ|.$$

Διότι ας χαραχθεί η ΑΓ. Τότε $|ΑΒΓ| = |ΕΒΓ|$ γιατί αυτά τα τρίγωνα βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες (τις ΒΓ και ΑΕ) και έχουν κοινή βάση, τη ΒΓ (Π37, σελ. 43). Αλλά $|ΑΒΓΔ| = 2|ΑΒΓ|$, αφού η ΑΓ είναι διαγώνιος του παραλληλογράμμου (Π34, σελ. 41). Άρα $|ΑΒΓΔ| = 2|ΕΒΓ|$.

Έτσι αν παραλληλόγραμμο έχει την ίδια βάση με τρίγωνο και τα δύο βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες τότε το παραλληλόγραμμο έχει εμβαδό διπλάσιο από το εμβαδό του τριγώνου· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 42 (Κατασκευή) (483) *Προς δοθέν τρίγωνο να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο ίσου εμβαδού με δοσμένη γωνία βάσης.*

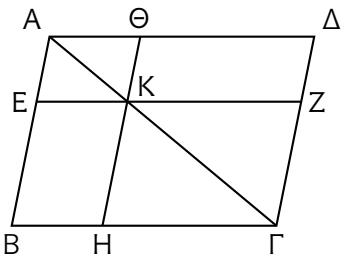
Υλοποίηση: Έστω ότι το ΑΒΓ είναι δοσμένο τρίγωνο και η δοθείσα γωνία η $δ$. Πρέπει να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο ίσου εμβαδού με το τρίγωνο και με γωνία βάσης τη $δ$.



Κατασκευάζουμε το μέσο του ΒΓ το οποίο ας ονομάσουμε Ε (Π10, σελ. 26). Φέρνουμε την ΑΕ και την ΑΗ παράλληλη με την ΒΓ (Π31, σελ. 39). Με κορυφή το Ε κατασκευάζουμε πάνω στην ΕΓ γωνία ίση με τη $δ$, την $\widehat{ΓΕΖ}$ (Π23, σελ. 34). Τέλος από το Γ ας χαραχθεί η ΓΗ // ΕΖ. Άρα το ΖΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο. Ισχύει $|ΑΕΓ| = |ΑΒΕ|$ γιατί αυτά τα τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις και βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες. Άρα $|ΑΒΓ| = 2|ΑΕΓ|$. Αλλά $|ΖΕΓΗ| = 2|ΑΕΓ|$, αφού έχουν κοινή βάση και βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες (Π41, σελ. 44). Άρα $|ΖΕΓΗ| = |ΑΒΓ|$ και το παραλληλόγραμμο έχει τη γωνία βάσης με κορυφή το Ε ίση με τη γωνία $δ$.

Έτσι, για δοθέν τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάστηκε παραλληλόγραμμο ίσου εμβαδού, το ΖΕΓΗ, με $\widehat{ΓΕΖ} = δ$· όπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρόταση 43 (483) *Σε κάθε παραλληλόγραμμο αν από σημείο της διαγωνίου του φέρουμε παράλληλες στις πλευρές του, τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται και δεν περιέχουν τη διαγώνιο έχουν ίσο εμβαδόν (στμ: τα παραλληλόγραμμα αυτά ονομάζονται «παραπληρώματα»).*



Απόδειξη. Έστω ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και ΑΓ η διαγώνιός του. Από τυχόν σημείο Κ της διαγωνίου φέρνουμε τις ΕΖ και ΗΘ παράλληλες στις πλευρές (δηλαδή ΕΖ//ΑΔ και ΗΘ//ΑΒ). Ισχυρίζομαι ότι τα «παραπληρώματα», δηλαδή τα παραλληλόγραμμα ΒΚ και ΚΔ (στμ: συντομεύσεις για τα παραλληλόγραμμα ΒΗΚΕ και ΚΖΔΘ αντίστοιχα) έχουν ίσο εμβαδόν.

Πράγματι, επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και η ΑΓ διαγώνιός του, ισχύει $|ΑΒΓ| = |ΑΓΔ|$ (Π31, σελ. 39). Πάλι, από το παραλληλόγραμμο ΕΘ με διαγώνιο την ΑΚ συμπεραίνουμε $|ΑΕΚ| = |ΑΘΚ|$. Ομοίως και $|ΚΖΓ| = |ΚΗΓ|$. Οπότε

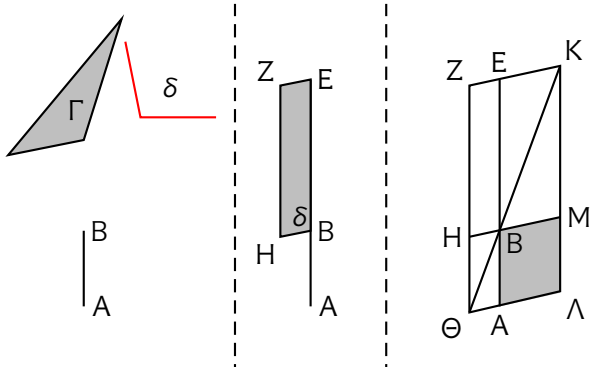
$$|ΑΕΚ| + |ΚΗΓ| = |ΑΘΚ| + |ΚΖΓ|,$$

(κ.εν.2, σελ. 21). Άρα, επειδή $|ΑΒΓ| = |ΑΔΓ|$ το υπόλοιπο παραπλήρωμα ΒΚ έχει ίσο εμβαδόν με το υπόλοιπο παραπλήρωμα ΚΔ (κ.εν.3, σελ. 21) (στμ: αφαιρώντας από το $|ΑΒΓ|$ το $|ΑΕΚ| + |ΚΗΓ|$ και από το $|ΑΔΓ|$ το $|ΑΘΚ| + |ΚΖΓ|$).

Άρα σε κάθε παραλληλόγραμμο τα παραπληρώματα της διαγωνίου παραλληλόγραμμα είναι ισεμβαδικά· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 44 (Κατασκευή) (484) *Σε δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευαστεί ορθογώνιο με δοθείσα γωνία βάσης που να έχει ίσο εμβαδόν με δοθέν τρίγωνο.*

Υλοποίηση: Έστω ότι το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα είναι το ΑΒ, το δοθέν τρίγωνο το Γ και η δοθείσα γωνία η δ. Πρέπει να κατασκευάσω παραλληλόγραμμο στην ΑΒ ίσου εμβαδού με το τρίγωνο Γ με γωνία βάσης ίση με τη δ.

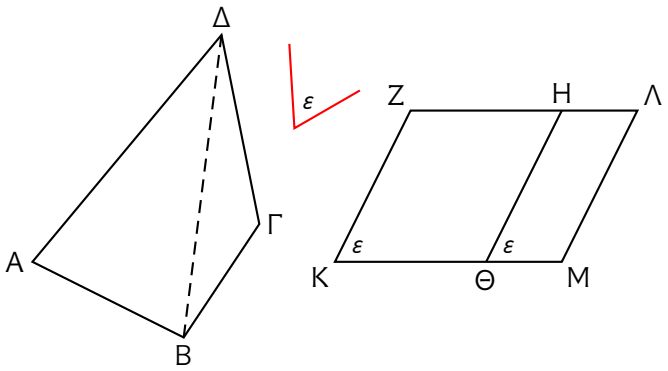


Ας κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο ΒΕΖΗ ίσου εμβαδού με το τρίγωνο Γ και γωνία βάσης $\widehat{ΕΒΗ} = \delta$ (Π42, σελ. 45) και υποθέτουμε ότι τα

ΒΕ και ΑΒ είναι στην ίδια ευθεία. Προεκτείνουμε την ΖΗ μέχρι το Θ φέρνοντας την ΑΘ παράλληλη στην ΒΗ και ΕΖ (Π31, σελ. 39). Φέρνουμε και τη ΘΒ. Επειδή οι παράλληλες ΑΘ και ΕΖ τέμνονται από την ΘΖ έπεται ότι $\widehat{\text{ΑΘΖ}} + \widehat{\text{ΘΖΕ}} = 2$ ορθές (Π29, σελ. 38). Άρα $\widehat{\text{ΒΘΗ}} + \widehat{\text{ΗΖΕ}} < 2$ ορθές, οπότε προεκτεινόμενες οι ΘΒ και ΖΕ τέμνονται (Αίτημα 5), έστω στο σημείο Κ. Φέρνουμε την ΚΛ παράλληλη στις ΕΑ και ΖΘ, και ας προεκταθούν οι ΗΒ μέχρι το Μ και η ΘΑ μέχρι το Λ. Άρα το ΘΛΚΖ είναι παραλληλόγραμμο, με διαγώνιο την ΘΚ, και έτσι σχηματίστηκαν τα παραλληλόγραμμα ΑΗ και ΜΕ, και τα παραπληρώματα αυτών, τα ΛΒ και ΒΖ. Άρα $|\Lambda\text{Β}| = |\text{ΒΖ}|$ (Π43, σελ. 45). Αλλά $|\text{ΒΖ}| = |\Gamma|$, άρα και το ΛΒ είναι ισεμβαδικό με το Γ (κ.εν.1, σελ. 21). Και επειδή $\widehat{\text{ΗΒΕ}} = \widehat{\text{ΑΒΜ}}$ (Π15, σελ. 29) και $\widehat{\text{ΗΒΕ}} = \delta$, έπεται ότι $\widehat{\text{ΑΒΜ}} = \delta$.

Έτσι στη δοθείσα ευθεία ΑΒ κατασκευάστηκε παραλληλόγραμμο με ίσο εμβαδό με το δοθέν τρίγωνο Γ και γωνία βάσης την $\widehat{\text{ΑΒΜ}}$ ίση με τη δοθείσα γωνία δ· όπερ ἔδει ποιῆσαι. ∎

Πρόταση 45 (Κατασκευή) (484) *Να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο με δοθείσα γωνία βάσης και ίσου εμβαδού με δοθέν τετράπλευρο.*



Απόδειξη. Ας είναι ΑΒΓΔ το δοθέν τετράπλευρο και ε η δοθείσα γωνία. Πρέπει να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο με γωνία βάσης την ε και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.

Ας φέρουμε την ΔΒ και ας κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο, το ΖΘ ίσου εμβαδού με το τρίγωνο ΑΒΔ με $\widehat{\text{ΘΚΖ}} = \varepsilon$ (Π42, σελ. 45). Κατασκευάζουμε τώρα παραλληλόγραμμο με βάση την ΗΘ, το ΗΜ, ίσου εμβαδού με το τρίγωνο ΔΒΓ και με $\widehat{\text{ΗΘΜ}} = \varepsilon$ (Π44, σελ. 46). Άρα $\widehat{\text{ΘΚΖ}} = \widehat{\text{ΗΘΜ}}$ (κ.εν.1, σελ. 21). Προσθέτοντας τώρα και στις δύο αυτές γωνίες την $\widehat{\text{ΚΘΗ}}$ προκύπτει

$$\widehat{\text{ΗΘΜ}} + \widehat{\text{ΚΘΗ}} = \widehat{\text{ΘΚΖ}} + \widehat{\text{ΚΘΗ}} = 2 \text{ ορθές}$$

(Π29, σελ. 38 και κ.εν.2, σελ. 21). Οι $\widehat{\text{ΗΘΜ}}$ και $\widehat{\text{ΚΘΗ}}$ είναι εφεξής με άθροισμα 2 ορθές οπότε οτα ΚΘ και ΘΜ βρίσκονται στην ίδια ευθεία (Π14, σελ. 29).

Οι παράλληλες τώρα ΚΜ και ΖΗ τέμνονται από την ΗΘ ισχύει $\widehat{\text{ΜΘΗ}} = \widehat{\text{ΘΗΖ}}$ ως εντός εναλλάξ (Π29, σελ. 38). Προσθέτουμε και την $\widehat{\text{ΘΗΛ}}$ οπότε

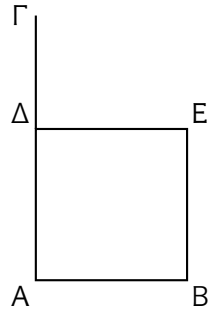
$$\widehat{\text{ΘΗΖ}} + \widehat{\text{ΘΗΛ}} = \widehat{\text{ΜΘΗ}} + \widehat{\text{ΘΗΛ}} = 2 \text{ ορθές}$$

(Π29, σελ. 38 και κ.εν.2, σελ. 21). Οπότε $\widehat{\text{ΘΗΖ}} + \widehat{\text{ΘΗΛ}} = 2$ ορθές (κ.εν.1, σελ. 21), οπότε τα ΖΛ και ΗΛ βρίσκονται στην ίδια ευθεία (Π14, σελ. 29).

Αλλά ΖΚ = ΘΗ και ΖΚ // ΘΗ (Π34, σελ. 41), και ομοίως η ΘΗ με τη ΜΛ έπεται ότι ΚΖ = ΜΛ και ΚΖ // ΜΛ (κ.εν.1, σελ. 21 και Θεώρημα 30, σελ. 39). Έτσι το ΚΖΛΜ είναι παραλληλόγραμμο, και επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισεμβαδικό με το παραλληλόγραμμο ΖΘ και το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισεμβαδικό με το παραλληλόγραμμο ΗΜ, έπεται ότι όλο το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισεμβαδικό με το παραλληλόγραμμο ΚΖΛΜ (κ.εν.2, σελ. 21).

Άρα κατασκευάστηκε παραλληλόγραμμο, το ΚΖΛΜ, ισεμβαδικό με το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και γωνία βάσης την $\widehat{\text{ΖΚΜ}}$ ίση με τη γωνία *ε*· όπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

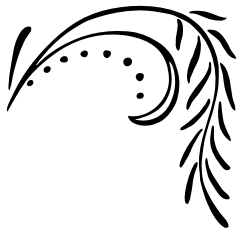
Πρόταση 46 (Κατασκευή) (485) *Να κατασκευαστεί τετράγωνο με βάση δοθέν ευθύγραμμο τμήμα.*



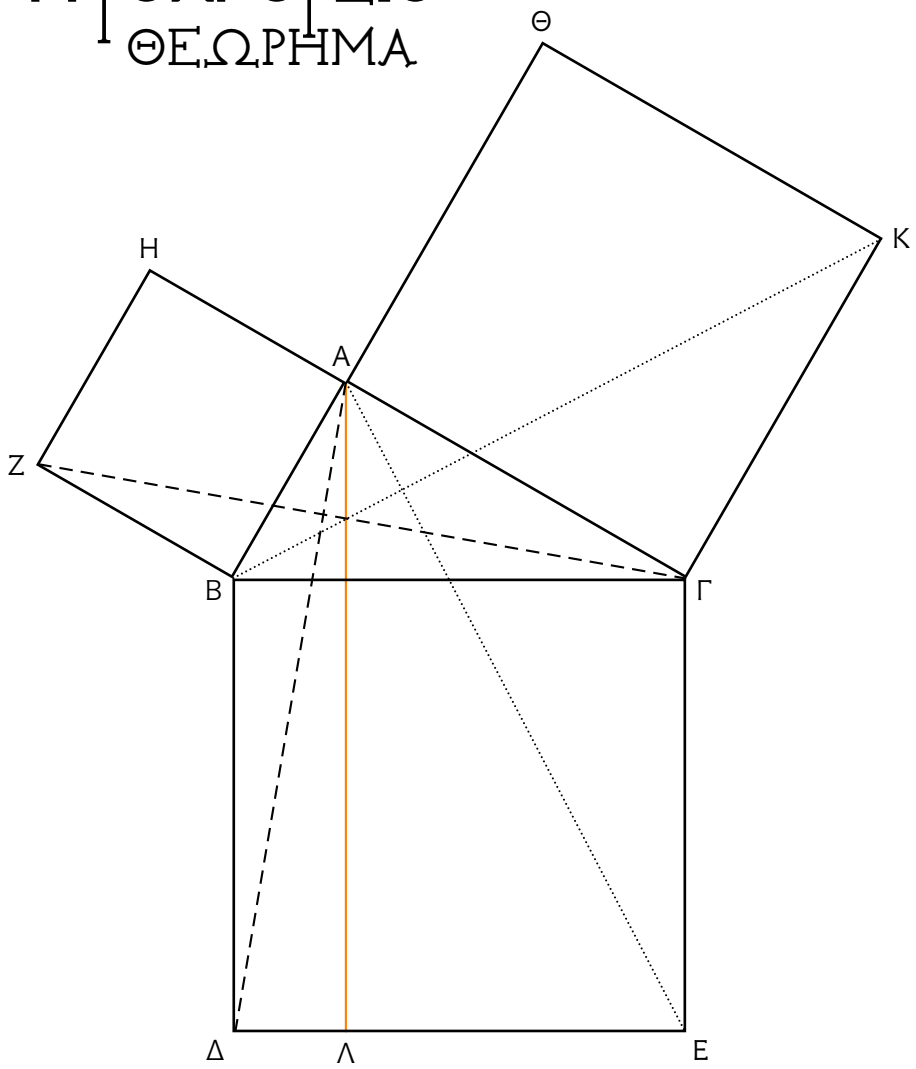
Απόδειξη. Έστω ότι ΑΒ είναι το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα. Πρέπει να κατασκευαστεί τετράγωνο με αυτή τη βάση.

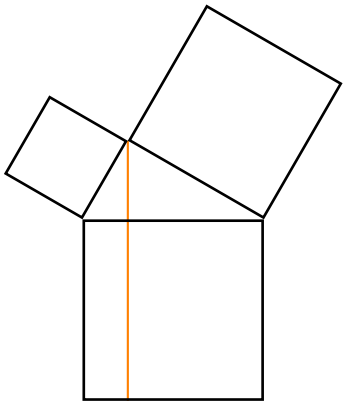
Φέρνουμε την ΑΓ κάθετη στο ΑΒ στο Α (Π11, σελ. 27), και θεωρούμε πάνω στην ΑΓ σημείο Δ ώστε ΑΔ = ΑΒ (Π2, σελ. 22). Από το Δ φέρνουμε παράλληλη στο ΑΒ και από το Β παράλληλη στην ΑΔ (Π31, σελ. 39) και ας υποθέσουμε ότι τέμνονται στο Ε. Έτσι το ΑΔΕΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΑΒ = ΔΕ και ΑΔ = ΒΕ (Π34, σελ. 41). Αλλά ΑΒ = ΑΔ και τα τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ και ΕΒ είναι ίσα μεταξύ τους (κ.εν.1, σελ. 21). Έτσι το παραλληλόγραμμο ΑΔΕΒ είναι ισόπλευρο. Ισχυρίζομαι ότι είναι και ορθογώνιο, διότι οι παράλληλες ΑΒ και ΔΕ τέμνονται από την ΑΔ και έτσι $\widehat{\text{ΒΑΔ}} = \widehat{\text{ΑΔΕ}} = 2$ ορθές (Π29, σελ. 38). Η $\widehat{\text{ΒΑΔ}}$ είναι ορθή άρα και η $\widehat{\text{ΑΔΕ}}$ είναι ορθή. Στα παραλληλόγραμμα όμως οι απέναντι πλευρές και οι απέναντι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους (Π34, σελ. 41). Άρα και η $\widehat{\text{ΑΒΕ}}$ και η $\widehat{\text{ΒΕΔ}}$ είναι ορθές, άρα το ΑΔΕΒ είναι ορθογώνιο. Και δείξαμε επιπλέον ότι είναι και ισόπλευρο.

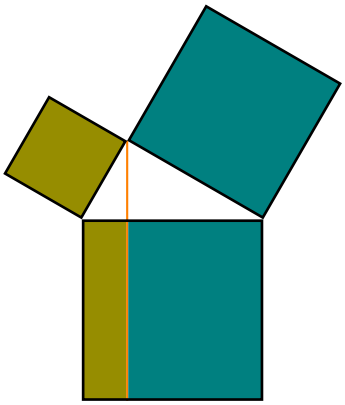
Άρα είναι τετράγωνο και έχει βάση την ΑΒ· όπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*



ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ
ΘΕΩΡΗΜΑ







Πρόταση 47 (Πυθαγόρειο Θεώρημα) (485) *Στα ορθογώνια τρίγωνα το τετράγωνο της υποτείνουσας έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν την ορθή γωνία.*

Απόδειξη. Έστω ότι το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει ορθή τη γωνία $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$. Ισχυρίζομαι ότι το τετράγωνο με βάση τη ΒΓ έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με βάσεις τα ΒΑ και ΑΓ.

Διότι ας κατασκευαστεί το τετράγωνο της ΒΓ, έστω το ΒΓΕΔ, και από τις ΒΑ, ΑΓ τα τετράγωνα ΗΒ και ΘΓ αντίστοιχα (Π46, σελ. 48). Από το Α ας χαραχθεί η ΑΛ παράλληλη προς τις ΒΔ και ΓΕ (Π31, σελ. 39). Φέρνουμε και τις ΑΔ και ΖΓ. Επειδή $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\text{ΒΑΗ}} = 1$ ορθή και επειδή η ΑΓ δεν είναι στην ίδια πλευρά της ΒΑ με την ΑΗ οι προηγούμενες γωνίες είναι εφεξής οπότε οι ΑΗ και ΑΓ βρίσκονται στην ίδια ευθεία (Π14, σελ. 29). Για τον ίδιο λόγο βρίσκονται στην ίδια ευθεία και οι ΑΒ και ΑΘ.

Τώρα επειδή $\widehat{\Delta\text{ΒΓ}} = \widehat{\text{ΖΒΑ}} = 1$ ορθή αν προσθέσουμε και στις δύο την κοινή $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$, θα πάρουμε ότι $\widehat{\Delta\text{ΒΑ}} = \widehat{\text{ΖΒΓ}}$ (κ.εν.2, σελ. 21). Έτσι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΖΒΓ είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες (ΒΔ = ΒΓ και ΒΑ = ΖΒ) και την περιεχόμενη γωνία ίση (Π4, σελ. 23). Όμως το παραλληλόγραμμο ΒΛ έχει διπλάσιο εμβαδόν από το τρίγωνο ΑΒΔ γιατί έχουν κοινή βάση (την ΒΔ) και βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες (τις ΒΔ // ΑΛ). Ομοίως το τετράγωνο ΗΒ έχει εμβαδόν το διπλάσιο του τριγώνου ΖΒΓ γιατί έχουν κοινή βάση (τη ΖΒ) και βρίσκονται μεταξύ ίδιων παραλλήλων (των ΖΒ // ΗΓ). Τα διπλάσια όμως των ίσων είναι μεταξύ τους ίσα, άρα το παραλληλόγραμμο ΒΛ και το τετράγωνο ΗΒ είναι ισεμβαδικά.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι αν φέρουμε τις ΑΕ και ΒΚ το παραλληλόγραμμο ΓΛ έχει ίσο εμβαδόν με το τετράγωνο ΘΓ.

Συνεπώς όλο το τετράγωνο ΒΔΕΓ έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων ΗΒ και ΘΓ (κ.εν.2, σελ. 21). Και το μεν τετράγωνο ΒΔΕΓ έχει κατασκευαστεί με βάση την ΒΓ, τα δε ΗΒ και ΘΓ με βάση τις ΒΑ και ΑΓ. Άρα το τετράγωνο της ΒΓ έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων των πλευρών ΒΑ και ΑΓ.

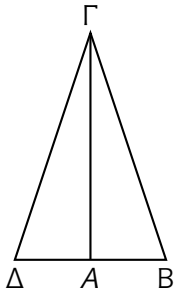
Έτσι στα ορθογώνια τρίγωνα το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών που περιέχουν την ορθή γωνία· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 48 (Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος) (486) *Εάν σε ένα τρίγωνο το εμβαδόν του τετραγώνου μιας πλευράς ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που περιέχεται σε αυτές τις δύο πλευρές είναι ορθή.*

Απόδειξη. Έστω ότι το τετράγωνο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ έχει εμβαδόν ίσο με τα τετράγωνα των πλευρών ΒΑ και ΑΓ. Ισχυρίζομαι ότι η $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ είναι ορθή.

Διότι ας φέρουμε από το Α την ΑΔ κάθετη στην ΑΓ (ΠΙΙ, σελ. 27), και ας πάρουμε την ΑΔ ίση με την ΑΒ, και ας φέρουμε και την ΔΓ.

Το εμβαδόν του τετραγώνου της ΑΒ είναι ίσο με με αυτό του τετραγώνου της ΔΑ (αφού αυτές είναι ίσες) και ας προσθέσουμε το εμβαδόν του τετραγώνου της ΑΓ. Με το τετράγωνο της ΑΒ θα πάρουμε το εμβαδόν του τετραγώνου της ΓΒ εξ' υποθέσεως, ενώ με το τετράγωνο της ΔΑ θα πάρουμε το εμβαδόν του τετραγώνου της ΔΓ επειδή η $\widehat{\text{ΔΑΓ}}$ είναι ορθή (Π47, σελ. 51).



Άρα τα τετράγωνα των ΔΓ και ΓΒ είναι ισεμβαδικά (κ.εν.1, σελ. 21), συνεπώς ΔΓ = ΒΓ. Και επειδή ΔΑ = ΑΒ και ΑΓ κοινή, ισχύει $\widehat{\text{ΔΑΓ}} = \widehat{\text{ΒΑΓ}}$ (Π8, σελ. 25). Αλλά η $\widehat{\text{ΔΑΓ}}$ είναι ορθή, άρα και η $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ είναι ορθή.

Έτσι, αν το τετράγωνο μιας πλευράς ενός τριγώνου έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του τριγώνου, η γωνία ανάμεσα σε αυτές τις δυο πλευρές είναι ορθή· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Ο πάπυρος της Γενεύης

Κάποια στιγμή στα 1882–1897 η βιβλιοθήκη της Γενεύης αγοράζει ένα μοναδικό εύρημα. Ένα κομμάτι παπύρου από ένα άγνωστο έργο του Πυθαγόρα. Πρόκειται για αντίγραφο έργου του (όπως άλλωστε οι περισσότεροι πάπυροι που έχουν σωθεί είναι αντίγραφα αρχαιότερων παπύρων) του 2ου αιώνα μετά την αρχή της χριστιανικής χρονολόγισης.

Ο πάπυρος είναι από ένα έργο με γεωμετρικά προβλήματα που αναφέρεται στη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Ο μαθητής καθοδηγείται να πολλαπλασιάσει το μήκος της κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου με τον εαυτό της (ώστε να υπολογίσει το τετράγωνο της πλευράς), ομοίως για την υποτείνουσα και στη συνέχεια γίνεται η αφαίρεση και ο υπολογισμός του μήκους της δεύτερης κάθετης πλευράς.

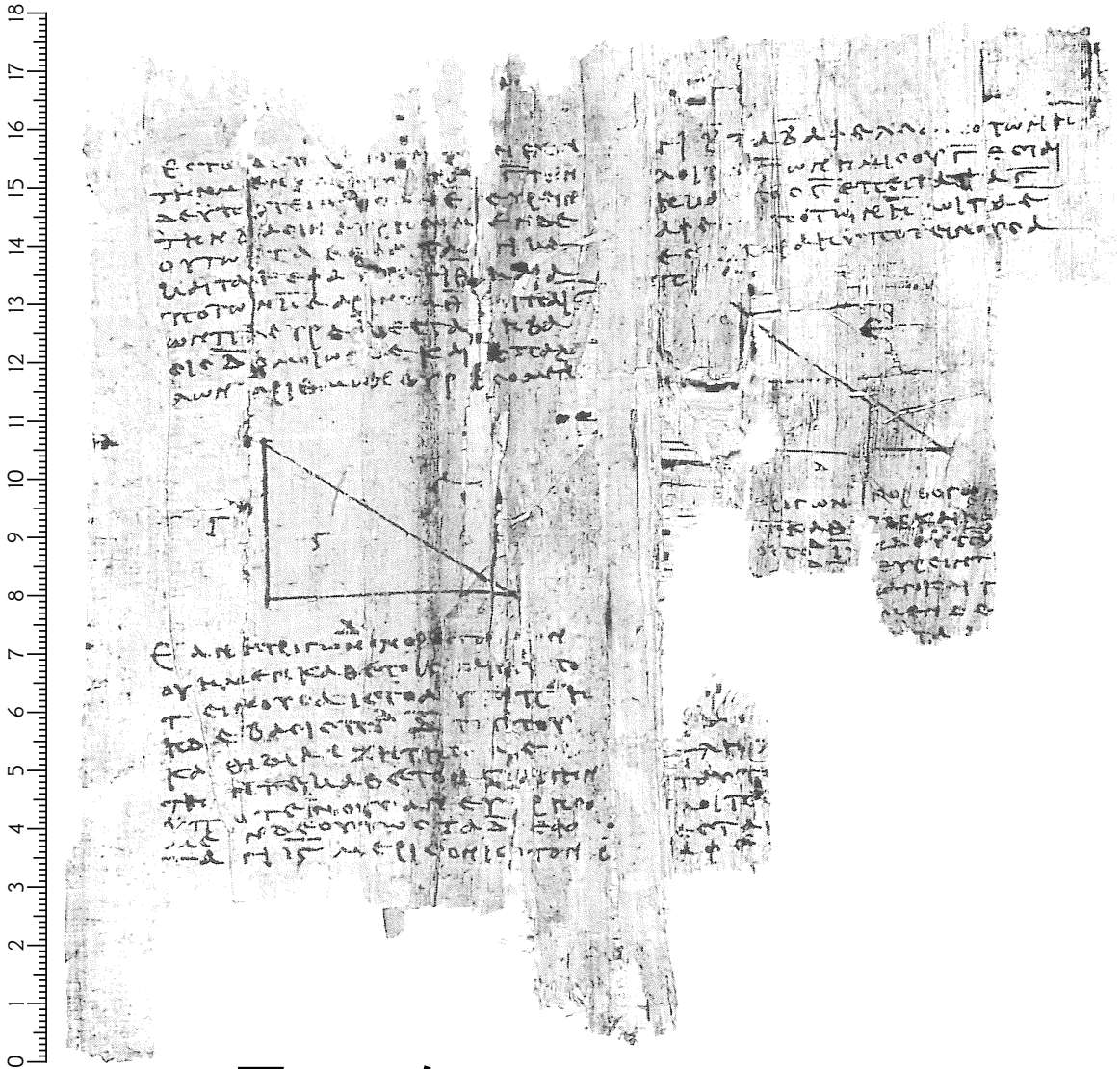
Το εύρημα είναι μοναδικό μια και είναι το μόνο μαθηματικό κείμενο που έχουμε από τον Πυθαγόρα (υπάρχει και άλλο ένα με ασκήσεις γραμματικής).

Ο πάπυρος δημοσιεύθηκε από τη βιβλιοθήκη της Γενεύης περίπου έναν αιώνα αργότερα, το 1996, και εν γένει παραμένει ακόμα άγνωστος σε πολλούς. Αυτός είναι και ο λόγος που τον αναδημοσιεύουμε εδώ μαζί με το κείμενό του.

Τα μεταδεδομένα του παπύρου έχουν ως εξής:

Date: 2nd century CE: CE 100–199
Provenance: Egypt—Egypt (N/A—Aegyptus) [found & written]
Language/script: Greek, drawing
Material: papyrus
Incompletely preserved
Book form: roll; columns preserved: 0
Content (beta!): geometrical problems, including theorema of Pythagoras
Authors/works: Pythagoras, Opus incertum (?) (direct attestation)
Culture & genre: science——mathematics, geometry
Recto/Verso: Vo
Reuse type: other text(s) on the same object: TM 92766
Note: with drawings
More info: BibGenève, DCLP, HGV, MP3
Publications
P. Gen. 3 124 Vo (Schubert, Paul—1996) [default]
•Museum Helveticum 56 (1999), p. 26–32 (Sesiano, J.—1999)

•SB 14 11973 (Rupprecht, Hans-Albert/Hengstl, Joachim—1983)
•Museum Helveticum 35 (1978), p. 233–240 (Rudhardt, Jean—1978)
Photo: Mus. Helv. 35 (1978), p. 240; Mus. Helv. 56 (1999), p. 28; p. Gen. 3, pl. 8; C. Méla-F. Möri, Alexandrie la divine (2014), I fig. 86, p. 409; II p. 1066
Collections → Geneva, Bibliothèque P. Gr. 259 Vo.

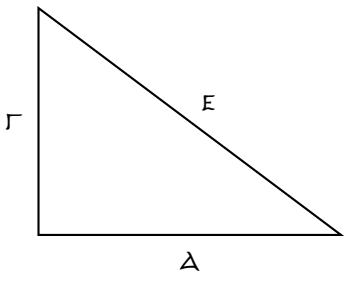


Το κείμενο

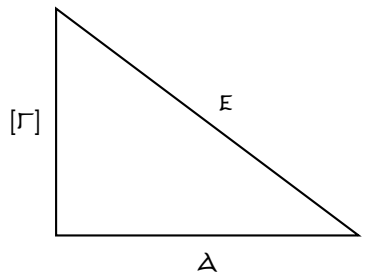
Ακολουθεί το κείμενο του παπύρου. Η τελεία κάτω από ένα γράμμα σημαίνει ότι ο πάπυρος στο σημείο του γράμματος είναι φθαρμένος και η ανάγνωση δύσκολη ή αμφίβολη. Οι αγκύλες [ ] σημαίνουν ότι το κείμενο που εσωκλείεται σε αυτές είναι συμπληρωμένο από τον εκδότη του πα-

πύρου γιατί στα συγκεκριμένα σημεία ο πάπυρος είναι κατεστραμμένος. Οι παρενθέσεις ( ) σημαίνουν ότι το εσωκλειώμενο σε αυτές κείμενο είναι ανάπτυξη συντομογραφίας που *υπάρχει* στον πάπυρο. Επίσης σημειώνεται ότι τα σημεία στίξης (τελεία, κόμμα και άνω τελεία) δεν είναι μέρος του κειμένου του παπύρου αλλά τοποθετούνται εδώ για την υποβοήθηση της ανάγνωσης. Τέλος οι αριθμοί ακολουθούν την «αλεξανδρινή» (μη αρχαιοελληνική) παράδοση του Α, Β, Γ, κλπ και κάθε αριθμός εντός του κειμένου έχει οριζόντια γραμμή πάνω του για να ξεχωρίζει. Σε κάποια σημεία εμφανίζονται κάποιες πιθανώς ασαφείς λέξεις όπως το «ΙΣ» (χωρίς γραμμή από πάνω) που είναι για τη λέξη «ΕΙΣ».

ⲉϫⲧⲟⲛ ⲇⲉ ⲧ̣ⲣ̣[ⲓⲅⲟⲛ]ⲟ̣ⲛ̣ ⲟ̣ⲣ̣[ⲑⲟ]ⲅ̣ⲟ̣[ⲛⲓⲟ]ⲛ ⲉⲭⲟⲛ
ⲧⲏⲛ ⲙⲉⲛ ⲕⲁ̣ⲑ̣ⲉ̣ⲧⲟ[ⲛ] ⲡⲟⲇ(ⲟⲛ) ⲅ̅, ⲧⲏⲛ
ⲇⲉ ⲩⲡⲟ̣ⲧⲉⲓⲛ̣ⲟ̣ⲩ̣ϫⲁⲛ ⲉ̅, ⲉⲩⲣⲉⲓⲛ
ⲧⲏⲛ ⲃⲁϫⲓⲛ. ⲉⲩⲣⲏϫⲟⲙⲉⲛ ⲇⲉ
ⲟⲩⲧⲟⲛϫ. ⲧⲁ ⲉ̅ ⲉⲫ ⲁⲩⲧⲁ, ⲅⲓ(ⲅⲛⲉⲧⲁⲓ) ⲕ̅ⲉ̅·
ⲕⲁⲓ ⲧⲁ ⲅ̅ ⲉⲫ ⲁⲩⲧⲁ, ⲅⲓ(ⲅⲛⲉⲧⲁⲓ) ⲑ̅· ⲕⲁⲓ ⲁ
ⲡⲟ ⲧⲟⲛ ⲕ̅ⲉ̅ ⲁⲣⲟⲛ ⲧⲁ ⲑ̅, ⲗⲟⲓⲡⲁ ⲓ̅ϫ̅·
ⲟⲛ ⲡⲗⲉⲩⲣⲁ ⲇ̅. ⲉϫⲧⲁⲓ ⲏ ⲃⲁ
ϫⲓϫ ⲇ̅. ⲟⲙⲟⲓⲟⲛϫ ⲇⲉ ⲕⲁⲓ ⲉⲡ ⲁⲗ
ⲗⲟⲛ ⲁⲣⲓⲑⲙⲟⲛ ⲉⲩⲣⲏⲕⲟⲙⲉⲛ.



ⲉⲁⲛ ⲏ ⲧⲣⲓⲅⲟⲛⲟⲛ ⲟⲣⲑⲟⲅⲟⲛⲓ̣ⲟ̣ⲛ̣
ⲟⲩ ⲏ ⲙⲉⲛ ⲕⲁⲑⲉⲧⲟϫ ⲕⲁⲓ ⲏ ⲩ̣ⲡⲟ
ⲧⲉⲓⲛⲟⲩϫⲁ ⲓϫ ⲧⲟ ⲁⲩⲧⲟ ⲡⲟⲇ(ⲟⲛ) ⲏ,
ⲏ ⲇⲉ ⲃⲁϫⲓϫ ⲡⲟⲇ(ⲟⲛ) ⲇ̅, ⲧⲟⲩⲧⲟⲩ
ⲕⲁⲑ ⲓⲇⲓⲁⲛ ⲧⲏⲧⲏϫⲟ̣ⲙ̣ⲉ[ⲛ]
ⲧⲏⲛ ⲧⲉ ⲕⲁⲑⲉⲧⲟⲛ ⲕⲁⲓ ⲧⲏⲛ
ⲩⲡⲟⲧⲉⲓⲛⲟⲩϫⲁⲛ. ⲉⲩⲣⲏϫⲟ
ⲙⲉⲛ ⲇⲉ ⲟⲩⲧⲟⲛϫ. ⲧⲁ ⲇ̅ ⲉⲫ ⲁⲩ
ⲧⲁ, ⲅⲓ(ⲅⲛⲉⲧⲁⲓ) ⲓ̅ϫ̅· ⲙⲉⲣⲓϫⲟⲛ ⲓϫ ⲧⲟⲛ ⲏ̣̅,
ⲅⲓ(ⲅⲛⲉⲧⲁⲓ) ⲃ̅· ⲧⲁ ⲃ̅ ⲁⲫⲉⲗⲉ ⲁⲡ̣ⲟ̣ ⲧⲟⲛ ⲏ̅,
ⲗⲟⲓⲡ̣ⲁ̣ ϫ̅· ⲟⲛ ⲏⲙⲓϫⲟⲩ ⲅ̅. ⲉϫⲧⲁⲓ
ⲏ ⲕⲁ[ⲑⲉ]ⲧⲟϫ ⲅ̅. ⲉⲡⲉⲓⲧⲁ ⲧⲁ ⲅ̅
ⲁⲫⲉⲗ[ⲉ ⲁ]ⲡⲟ ⲧⲟⲛ ⲏ̅, ⲗ̣ⲟⲓⲡⲁ ⲉ̅.
ⲉϫⲧ̣ⲁ̣ⲓ̣ ⲁ̣ⲣⲁ ⲏ ⲩⲡⲟⲧⲉⲓⲛⲟⲩϫⲁ
ⲡⲟ[ⲇ(ⲟⲛ)] ⲉ̅.



[ⲉⲁⲛ ⲏ ⲧ]ⲣⲓⲅⲟⲛ[ⲟ]ⲛ ⲟⲣⲑⲟⲅⲟⲛ[ⲓⲟⲛ]
[ⲟⲩ ⲏ ⲙⲉ]ⲛ̣ ⲕⲁⲑⲉⲧⲟϫ ⲕⲁⲓ ⲏ ⲃ[ⲁϫⲓϫ]
[ⲓϫ ⲧⲟ ⲁⲩⲧ]ⲟ ⲡⲟⲇ(ⲟⲛ) ⲓ̣ⲇ̣̅, ⲏ ⲇⲉ ⲩⲡⲟ[ⲧⲉⲓ]
[ⲛⲟⲩϫⲁ ⲡⲟ]ⲇ(ⲟⲛ) ⲓ̣̅, ⲉⲩⲣⲉⲓⲛ ⲧ[ⲏⲛ ⲧⲉ]
[ⲕⲁⲑⲉⲧⲟⲛ ⲕⲁⲑ ⲓⲇ]ⲓ̣ⲁⲛ ⲕⲁⲓ ⲧ̣[ⲏⲛ]
[ⲃⲁϫⲓⲛ. ⲉⲩⲣⲏϫⲟ]ⲙⲉⲛ ⲇⲉ [ⲟⲩ]
[ⲧⲟⲛϫ. ⲧⲁ ⲓ̅ ⲉⲫ ⲁ]ⲩⲧⲁ, ⲣ̣̅ [. . . . . .]
[. . . . . .]
[. . . . . .].[. . . . . .]
.ⲁ.[. . . . . .]
ⲡ̣ⲗⲏ.[. . . . . .]
ⲧⲁⲩⲧⲁ [. . . . . .]
ⲗⲟⲓⲡ.[. . . . . .]
ⲉϫⲧⲁⲓ [. . . . . .]
ⲁⲫⲉⲗ̣[ⲉ. . . . . .]

Ο πάπυρος ασχολείται με τρία προβλήματα. Δεν επιλέξαμε να γράψουμε δίπλα γραμμή-γραμμή την απόδοση στα νεοελληνικά γιατί το δεύτερο πρόβλημα είναι περίπλοκο.

Πρόβλημα 1 *Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο που έχει την κατακόρυφη διάστασή του* 3 *πόδια και την υποτείνουσα του* 5*, βρείτε τη βάση.*

Λύση: Τη βρίσκουμε ως εξής: Το 5 επί τον εαυτό του 25. Το 3 επί τον εαυτό του 9. Αφαιρούμε από το 25 το 9, υπόλοιπο 16. Άρα η πλευρά (στμ: του τετραγώνου που αντιστοιχεί, δηλαδή η τετραγωνική ρίζα) είναι 4. Είναι η βάση 4. Όμοια το βρίσκουμε και με άλλους αριθμούς. Δ

Πρόβλημα 2 *Αν έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου η κατακόρυφη διάσταση και η υποτείνουσα είναι μαζί 8 πόδια και η βάση, 4 πόδια, θα βρούμε τα αντίστοιχα μήκη της κατακόρυφης πλευράς του και της υποτείνουσας του.*

Λύση: Θα τα βρούμε ως εξής. Τα 4, πολλαπλασιαζόμενα με τον εαυτό τους, είναι 16. Διαιρέστε με το 8, που κάνει το 2. Αφαιρέστε το 2 από το 8, το υπόλοιπο 6—μισό του οποίου είναι το 3. Η κάθετη πλευρά θα είναι 3. Στη συνέχεια αφαιρέστε τα 3 από τα 8 υπόλοιπα 5. Επομένως, η υποτείνουσα θα είναι 5 πόδια. Δ

Εδώ ο Πυθαγόρας φαίνεται να κάνει περίπλοκους υπολογισμούς. Αν τους παρακολουθήσει όμως κανείς χρησιμοποιώντας μεταβλητές α, β, γ για τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα το α, για να βρει την β γνωρίζοντας το $\alpha+\beta$ και το γ, χρησιμοποιεί τον τύπο

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha+\beta-\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}\right),$$

ο οποίος είναι ισοδύναμος με το Πυθαγόρειο Θεώρημα $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$! Πράγματι, οι παρακάτω είναι ισοδύναμες:

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{1}{2}\left(\alpha+\beta-\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}\right)\\
2\beta(\alpha+\beta) &= (\alpha+\beta)^2-\gamma^2\\
\gamma^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\beta(\alpha+\beta)\\
\gamma^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta-2\beta)\\
\gamma^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\\
\gamma^2 &= \alpha^2-\beta^2\\
\beta^2+\gamma^2 &= \alpha^2
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι εδώ ο Πυθαγόρας μάς λέει (ως συνέπεια) ότι αν γνωρίζουμε το άθροισμα της υποτείνουσας με μια από τις καθέτους δεν χρειαζόμαστε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας για να υπολογίσουμε την κάθετο!

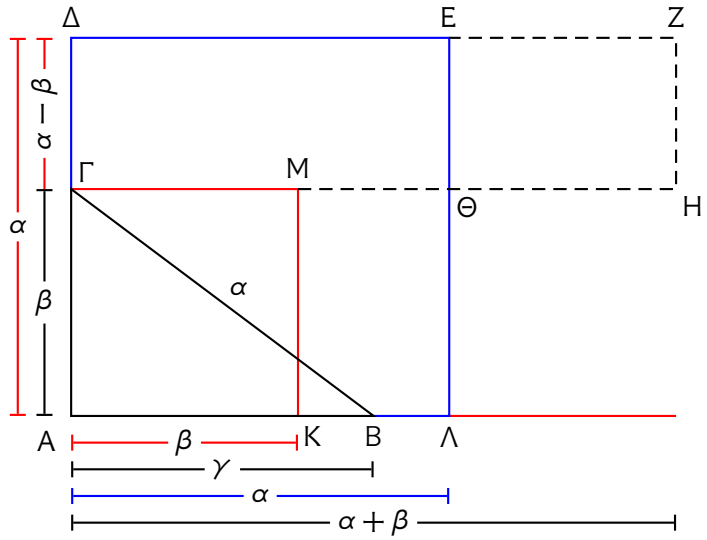
Εξ' αυτού, μπορούμε να βρούμε όσες Πυθαγόρειες τριάδες θέλουμε χωρίς να είναι η μία πολλαπλάσια της άλλης και χωρίς ποτέ να χρειαστούμε

τετραγωνική ρίζα. Για παράδειγμα αν θέσουμε $\alpha+\beta=12$ και $\gamma=4$ θα προκύψει $\beta=16/3$ και $\alpha=20/3$, και πολλαπλασιάζοντας όλες τις πλευρές με 3 παίρνουμε την Πυθαγόρεια τριάδα 12, 16, 20. Ενώ αν $\alpha+\beta=11$ και $\gamma=4$ θα πάρουμε $\beta=105/22$, $\alpha=137/22$, και πολλαπλασιάζοντας με 22 θα πάρουμε την Πυθαγόρεια τριάδα 88, 105, 137.

Πώς όμως βρήκε ο Πυθαγόρας τον τύπο

$$\beta=\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta-\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}\right);$$

Το δημοσιευμένο σχήμα είναι κατά πάσα πιθανότητα λάθος, αφού δεν εξηγεί τον παραπάνω τύπο. Μια πιο προσεκτική εξέταση του παπύρου δείχνει ότι στην πραγματικότητα φαίνεται ένα τμήμα του παρακάτω σχήματος:



Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα αν αφαιρέσω από το τετράγωνο του α (μπλε) το τετράγωνο του β (κόκκινο) πρέπει να μείνει εμβαδόν ίσο με το τετράγωνο του γ, δηλαδή αυτό είναι το εμβαδόν του ΔΕΛΚΜΓ. Αλλά το εμβαδόν του ΔΕΛΚΜΓ είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΔΖΗΓ γιατί ισχύει ΕΖΗΘ = ΚΛΘΜ. Πράγματι αυτά είναι ίσα αφού $\text{ΚΛ}=\alpha-\beta=\text{ΕΘ}$ και $\Theta\Lambda=\beta=\Theta\text{H}$. Άρα το παραλληλόγραμμο ΔΖΗΓ έχει εμβαδόν το τετράγωνο του γ και πλευρές $\alpha+\beta$ και $\alpha-\beta$. Έτσι

$$\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=\frac{|\Delta\text{ZHB}|}{\alpha+\beta}=\alpha-\beta.$$

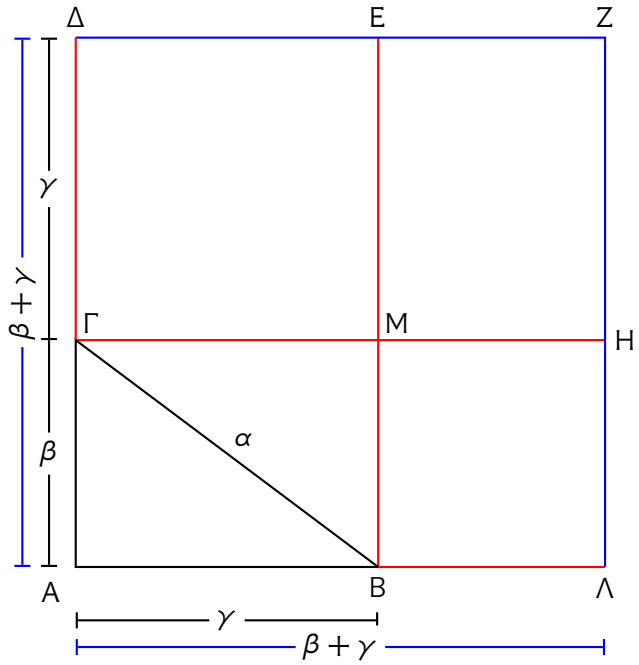
Συνεπώς

$$\frac{1}{2}\left((a+b)-\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}\right)=\frac{1}{2}\big((\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\big)=\frac{1}{2}2\beta=\beta.$$

Πρόβλημα 3 *Αν έχουμε ένα τρίγωνο ορθογώνιο του οποίου η κάθετη πλευρά και η βάση μαζί είναι 14 πόδια και η υποτείνουσα 10 πόδια, βρείτε τα αντίστοιχα μήκη της κάθετης πλευράς και της βάσης.*

Λύση: Θα τα βρούμε ως εξής. Τα 10, πολλαπλασιασμένα με τον εαυτό τους, 100 . . . . . .

Ο πάπυρος εδώ είναι κατεστραμμένος και η απόδειξη δεν μπορεί να ανακατασκευαστεί. Εδώ παρουσιάζουμε τη λύση του προβλήματος στο πνεύμα της λύσης του 2ου προβλήματος θεωρώντας ότι ακόμα και αν δεν είναι ακριβής αναπαραγωγή είναι σίγουρα κοντά.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα το τετράγωνο του α είναι ίσο με το άθροισμα του τετραγώνου του β (του ΜΗΛΒ) και του τετραγώνου του γ (του ΔΕΜΓ) δηλαδή τα δύο κόκκινα τετράγωνα του σχήματος. Αν από το τετράγωνο της $\beta+\gamma$ (μπλε τετράγωνο) αφαιρέσουμε λοιπόν το τετράγωνο του α θα μείνουν τα παραλληλόγραμμα ΑΒΜΓ και ΕΖΗΜ. Καθένα από αυτά έχει εμβαδόν $\beta\gamma$, άρα από την παραπάνω αφαίρεση μένει εμβαδόν ίσο με $2\beta\gamma$. Συνεπώς η διαίρεση με το γ δίνει 2β και το μισό αυτού είναι το β. Αφαιρώντας από το $\beta+\gamma$ προκύπτει το γ.

Αλγεβρικά ο τύπος για το β είναι

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{(\beta+\gamma)^2 - \alpha^2}{\gamma},$$

ο οποίος βεβαίως είναι ισοδύναμος με το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Βιβλίο 2ο

Προλεγόμενα των μεταφραστών

Στο εξής για απλοποίηση της παρουσίασης διάφορων αποδείξεων θα υιοθετήσουμε τον συμβολισμό του α^2 για το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά α. Δηλαδή το α^2 *δεν* σημαίνει εκ των προτέρων $\alpha \cdot \alpha$ αλλά το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά α. Το ότι αυτό το εμβαδόν καταμετράται με ένα γινόμενο $\alpha \cdot \alpha$ είναι κατοπινό θέμα που δεν μας αφορά προς το παρόν. Ομοίως και για ευθύγραμμα τμήματα: το AB^2 σημαίνει «το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά AB».

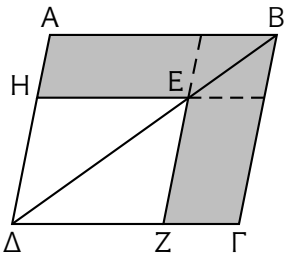
Ομοίως υιοθετούμε και τον συμβολισμό $\alpha\beta$ για το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με πλευρές α και β. Το ίδιο και για ευθύγραμμα τμήματα: το $\text{AB} \cdot \Gamma\Delta$ σημαίνει «το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές AB και ΓΔ», και δεν αποτελεί προσπάθεια καταμέτρησης του εμβαδού.

Ορισμοί

Ορισμοί 1 (489)

(ορ. 1) Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο λέμε ότι περιέχεται μεταξύ των δυο πλευρών του (στο εξής θα λέμε ότι «έχει πλευρές») που σχηματίζουν μια ορθή γωνία.

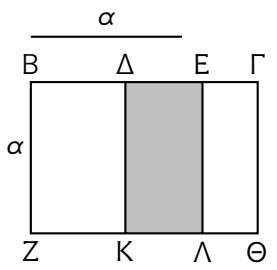
(ορ. 2) Αν από ένα τυχαίο σημείο της διαγωνίου (αλλά όχι άκρο της) ενός παραλληλογράμμου φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές του τότε το ένα από τα δυο παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται με διαγώνιες τμήματα της διαγωνίου του αρχικού παραλληλογράμμου μαζί με τα δυο παραπληρώματα λέγεται «γνώμονας».



Προτάσεις και Θεωρήματα

Πρόταση 1 (489) *Έστω δυο ευθύγραμμα τμήματα από τα οποία το ένα έχει διαιρεθεί σε οσαδήποτε τμήματα. Τότε το εμβαδόν του ορθογώνιου που έχει τις πλευρές του ίσες με τα δυο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που έχουν πλευρές ίσες με το ευθύγραμμο τμήμα που δεν έχει διαιρεθεί και τα τμήματα στα οποία έχει διαιρεθεί το άλλο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα α και ΒΓ και έστω Δ, Ε τυχόντα σημεία του ΒΓ που το διαιρούν στα τμήματα ΒΔ, ΔΕ και ΕΓ. Ισχυρίζομαι ότι το ορθογώνιο με πλευρές α και ΒΓ έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τριών ορθογωνίων με πλευρές αντίστοιχα στις α και ΒΔ, α και ΔΕ, α και ΕΓ.



Από το Β φέρνουμε την κάθετη προς τη ΒΓ (ΒΙ, ΠΙΙ, σελ. 27) και παίρνουμε σε αυτή το Η ώστε $\text{ΒΗ} = \alpha$. Από το Η φέρνουμε την ΗΘ παράλληλη προς τη ΒΓ (ΒΙ, ΠΙ31, σελ. 39) ενώ από τα σημεία Δ, Ε και Γ φέρουμε τις ΔΚ, ΕΛ και ΓΘ αντίστοιχα παράλληλες προς την ΒΗ.

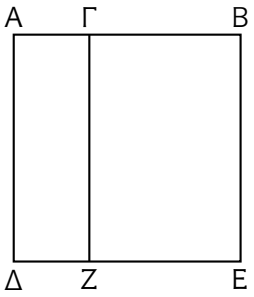
Τότε

$$|\text{ΒΓΘΗ}| = |\text{ΒΔΚΗ}| + |\text{ΔΕΛΚ}| + |\text{ΕΓΘΛ}|$$

Όμως το ΒΓΘΗ έχει πλευρές ίσες με α και ΒΓ καθώς $\text{ΒΗ} = \alpha$ και το ΒΔΖΚ έχει πλευρές ίσες με α και ΒΔ καθώς $\text{ΒΗ} = \alpha$. Το ΔΕΛΚ πάλι έχει τις πλευρές του ίσες με α και ΔΕ γιατί $\text{ΔΚ} = \text{ΒΗ} = \alpha$ (ΒΙ, Π34, σελ. 41) και όμοια το ΕΓΘΛ έχει πλευρές ίσες με α και ΕΓ.

Συνεπώς, $\alpha \cdot \text{ΒΓ} = \alpha \cdot \text{ΒΔ} + \alpha \cdot \text{ΔΕ} + \alpha \cdot \text{ΕΓ}$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 2 (490) *Αν ένα τυχόν σημείο διαιρεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δυο άλλα τμήματα, τότε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά ίση με το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δυο ορθογωνίων με πλευρές ίσες με το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα και τα τμήματα στα οποία αυτό έχει διαιρεθεί.*



Απόδειξη. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και έστω Γ ένα τυχόν σημείο του που το διαιρεί στα τμήματα ΑΓ και ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου με πλευρές ίσες με ΑΒ και ΒΓ και του ορθογωνίου με πλευρές ίσες με ΒΑ και ΑΓ είναι ίσο με το εμβαδό του τετραγώνου πλευράς ίσης με ΑΒ.

Με πλευρά ΑΒ κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΔΕΒ (Β1, Π46, σελ. 48) και από το Γ φέρνουμε τη ΓΖ παράλληλη προς τις ΑΔ και ΒΕ (Β1, Π31, σελ. 39). Τότε ισχύει

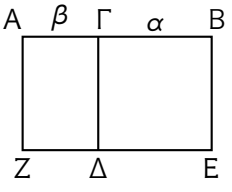
$$\begin{aligned} |\text{ΑΔΕΒ}| &= |\text{ΑΔΖΓ}| + |\text{ΓΖΕΒ}| \\ &= \text{ΑΔ} \cdot \text{ΑΓ} + \text{ΒΕ} \cdot \text{ΒΓ} \\ &= \text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΓ} + \text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}, \end{aligned}$$

αφού ΑΔ = ΒΕ = ΑΒ, (Β1, Ορ23, σελ. 21). Συνεπώς, αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε δυο τμήματα από ένα σημείο του, τότε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων με πλευρές ίσες με το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα και τα τμήματα στα οποία έχει διαιρεθεί είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά ίση με το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 3 (490) *Αν ένα τυχόν σημείο διαιρεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δυο τμήματα α και β, τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου με πλευρές ίσες με το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα και το α είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου με πλευρές ίσες με τα α και β και του τετραγώνου πλευράς ίσης με α.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και έστω Γ ένα τυχόν σημείο του που το διαιρεί στα τμήματα ΑΓ = β και ΓΒ = α. Ισχυρίζομαι ότι το ορθογώνιο με πλευρές ίσες με τα ΑΒ και ΒΓ έχει εμβαδό ίσο με το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου με πλευρές ίσες με τα ΑΓ και ΓΒ και του τετραγώνου πλευράς ίσης με ΒΓ.

Με πλευρά ίση με ΒΓ κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΓΔΕΒ (Β1, Π46, σελ. 48) και από το Α φέρνουμε την παράλληλη προς το ΓΕ και ΒΔ που τέμνει την προέκταση της ΕΔ στο Ζ.



Τότε ισχύει |ΑΕ| = |ΑΔ| + |ΓΕ|

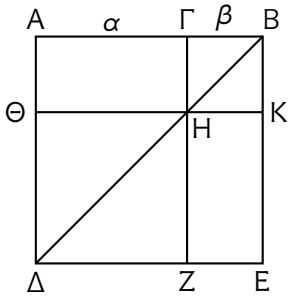
Αλλά το ορθογώνιο ΑΕ έχει πλευρές ίσες με ΑΒ και ΒΓ καθώς ΒΕ = ΒΓ, το ορθογώνιο ΑΔ έχει τις πλευρές του αντίστοιχα ίσες με ΑΓ και ΒΓ καθώς ΓΔ = ΓΒ ενώ το ορθογώνιο ΓΕ είναι τετράγωνο πλευράς ΒΓ.

Συνεπώς, το ορθογώνιο με πλευρές ίσες με
ΑΒ και ΒΓ έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου με πλευρές ίσες με ΑΓ και ΓΒ και του τετραγώνου πλευράς ΒΓ· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 4 (Τετράγωνο αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$) (491) *Αν ένα τυχόν σημείο διαιρεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δυο τμήματα α και β, τότε το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ίσης με το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δυο τετραγώνων με πλευρές ίσες με α και β αντίστοιχα και το διπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου με πλευρές ίσες με α και β.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και έστω Γ ένα τυχόν σημείο του που το διαιρεί στα τμήματα ΑΓ = α και ΓΒ = β. Ισχυρίζομαι ότι

$$\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 + 2\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$$



Με πλευρά ίση με ΑΒ κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΔΕΒ (Βι, Π46, σελ. 48) και φέρνουμε την ΒΔ. Από το Γ φέρνουμε την ΓΖ παράλληλη στις ΑΔ και ΕΒ (Βι, Π30, σελ. 39 και Π32, σελ. 40) ενώ από το Η φέρνουμε την ΘΚ παράλληλη στις ΑΒ και ΔΕ.

Επειδή ΓΖ // ΑΔ που τέμνονται από την ΒΔ έπεται ότι

$$\widehat{\Gamma\text{Η}\text{Β}} = \widehat{\text{Α}\Delta\text{Β}}$$

ως εκτός-εντός και απέναντι (Βι, Π29, σελ. 38). Αλλά $\widehat{\text{Α}\Delta\text{Β}} = \widehat{\text{Α}\text{Β}\Delta}$ καθώς ΒΑ = ΑΔ (Βι, Π5, σελ. 24). Έτσι, $\widehat{\Gamma\text{Η}\text{Β}} = \widehat{\text{Η}\text{Β}\Gamma}$ και άρα ΒΓ = ΓΗ (Βι, Π6, σελ. 24). Αλλά ΓΒ = ΗΚ και ΓΗ = ΚΒ (Βι, Π34, σελ. 41) και επομένως το ΓΗΚΒ είναι ισόπλευρο.

Ισχυρίζομαι ότι το ΓΗΚΒ είναι και ορθογώνιο. Επειδή ΓΗ // ΒΚ που τέμνονται από την ΒΓ είναι $\widehat{\text{Κ}\text{Β}\Gamma} + \widehat{\text{Β}\Gamma\text{Η}} = 2$ ορθές (Βι, Π29, σελ. 38) και καθώς $\widehat{\text{Κ}\text{Β}\Gamma} = 1$ ορθή έπεται ότι και $\widehat{\text{Β}\Gamma\text{Η}} = 1$ ορθή. Τότε όμως και οι απέναντι γωνίες $\widehat{\Gamma\text{Η}\text{Κ}}$ και $\widehat{\text{Η}\text{Κ}\text{Β}}$ θα είναι ορθές (Βι, Π34, σελ. 41). Άρα το ΓΚΗΒ είναι ορθογώνιο και καθώς είναι και ισόπλευρο έπεται ότι είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με ΒΓ. Ομοίως αποδεικνύεται ότι και το ορθογώνιο ΘΖ είναι τετράγωνο πλευράς ίσης με ΑΓ καθώς ΘΗ = ΑΓ (Βι, Π34, σελ. 41).

Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι το ορθογώνιο ΑΗ έχει πλευρές ίσες με ΑΓ και ΓΒ καθώς ΗΓ = ΓΒ και είναι ισεμβαδικό με το ΗΕ (Βι, Π43, σελ. 45). Άρα και το ΗΕ έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΓ και ΓΒ, οπότε ισχύει $|\text{ΑΗ}| + |\text{ΗΕ}| = 2\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$

Για το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΔΕΒ πλευράς ίσης με ΑΒ ισχύει όμως ότι

$$|\text{ΑΔΕΒ}| = |\Theta\text{Ζ}| + |\Gamma\text{Κ}| + |\text{ΑΗ}| + |\text{ΗΕ}|$$

και άρα από τα προηγούμενα προκύπτει ότι

$$\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 + 2 \cdot \text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$$

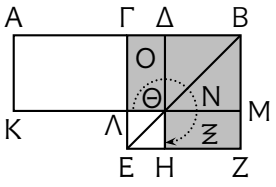
Συνεπώς, αν ένα τυχόν σημείο διαιρεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δυο τμήματα, τότε το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ίσης με το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δυο τετραγώνων με πλευρές αντίστοιχα ίσες με τα δυο τμήματα στα οποία έχει διαιρεθεί το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα και το διπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου με πλευρές ίσες με τα δυο αυτά τμήματα· όπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα 1 *Ως εκ τούτου είναι φανερό ότι στα τετράγωνα τα παραλληλόγραμμα περί την διαγώνιο είναι και αυτά τετράγωνα* (στμ: εννοεί τα ΒΓΗΚ και ΔΖΗΘ). *Δ*

Πρόταση 5 (Διαφορά τετραγώνων: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$, με $\alpha =$ ΑΓ, $\beta =$ ΓΔ) (491) *Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρείται από το μέσο του σε δυο ίσα τμήματα και από ένα άλλο σημείο του σε δυο άνισα τμήματα τότε το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου με πλευρές ίσες με τα άνισα αυτά τμήματα και του τετραγώνου πλευράς ίσης με το τμήμα που έχει άκρα τα δυο σημεία είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ίσης με το μισό του αρχικού ευθυγράμμου τμήματος.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που διαιρείται σε δυο ίσα τμήματα ΑΓ = ΓΒ από το μέσο του Γ και σε δυο άνισα τμήματα ΑΔ και ΔΒ από ένα άλλο σημείο του Δ.

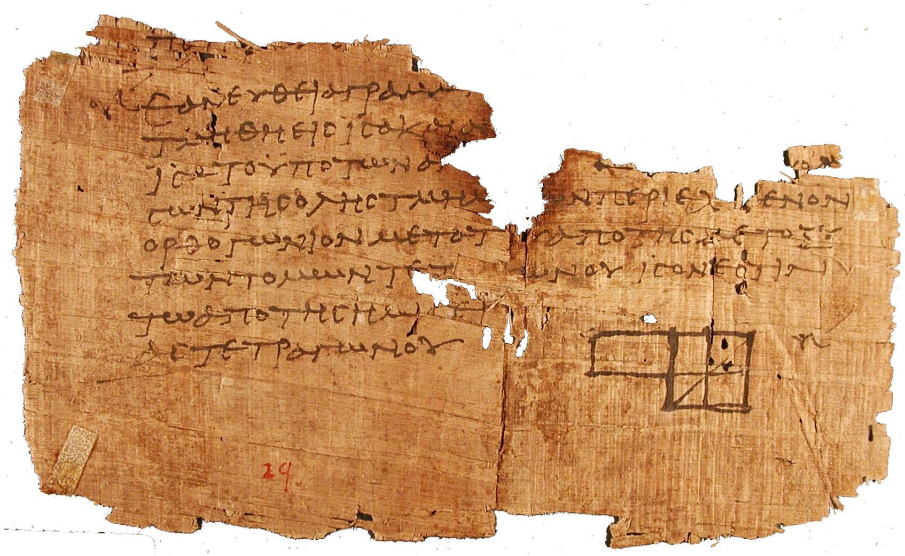
Με πλευρά ΓΒ κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΓΒΖΕ (ΒΙ, Π46, σελ. 48) και φέρνουμε την ΒΕ. Από το Δ φέρνουμε την ΔΗ παράλληλη στις ΓΕ και ΒΖ, ενώ από το σημείο τομής Θ των ΔΗ και ΒΕ φέρνουμε την ΚΜ παράλληλη στις ΑΒ και ΕΖ. Τέλος από το Α φέρνουμε την ΑΚ παράλληλη στις ΓΛ και ΒΜ.



Τότε, τα παραπληρώματα ΓΘ και ΘΖ είναι ισεμβαδικά (ΒΙ, Π43, σελ. 45) δηλαδή $|\text{ΓΘ}| = |\text{ΘΖ}|$. Προσθέτοντας το εμβαδόν του ΔΜ προκύπτει ότι $|\text{ΓΘ}|+|\text{ΔΜ}| = |\text{ΘΖ}|+|\text{ΔΜ}|$ ή $|\text{ΓΜ}| = |\text{ΔΖ}|$.

Αλλά $|\text{ΓΜ}| = |\text{ΑΛ}|$ καθώς ΓΒ = ΑΓ και άρα $|\text{ΑΛ}| = |\text{ΔΖ}|$.

Προσθέτοντας το εμβαδόν του ΓΘ παίρνουμε $|\text{ΑΛ}|+|\text{ΓΘ}| = |\text{ΔΖ}|+|\text{ΓΘ}|$ ή $|\text{ΑΘ}| = |\text{ΔΖ}| + |\text{ΓΘ}|$.



Ο πάπυρος της Οξυρρύγχου με την Πρόταση 5. [πηγή: Wikipedia]

Τα ΔΖ και ΓΘ αποτελούν τον γνώμονα ΟΝΞ, δηλαδή το πολυγωνικό χωρίο ΓΛΘΗΖΒ και έτσι $|\text{ΑΘ}| = |\text{ΓΛΘΗΖΒ}|$ από όπου προσθέτοντας το εμβαδόν του ΛΗ προκύπτει ότι $|\text{ΑΘ}| + |\text{ΛΗ}| = |\text{ΓΛΘΗΖΒ}| + |\text{ΛΗ}|$.

Το ΓΛΘΗΖΒ όμως μαζί με το ΛΗ αποτελούν το τετράγωνο ΓΒΖΕ και επομένως $|\text{ΑΘ}| + |\text{ΛΗ}| = |\text{ΓΒΖΕ}|$.

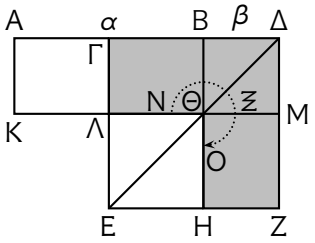
Δηλαδή το τετράγωνο ΓΒΖΕ έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου ΑΘ που έχει πλευρές ίσες με ΑΔ και ΔΒ (καθώς $\text{ΔΘ} = \text{ΔΒ}$) και του τετραγώνου ΛΗ πλευράς ίσης με ΓΔ (καθώς $\text{ΑΘ} = \text{ΓΔ}$).

Συνεπώς, αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί από ένα σημείο του σε δυο ίσα τμήματα και από ένα άλλο σημείο του σε δυο άνισα τμήματα τότε το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου με πλευρές ίσες με τα άνισα αυτά τμήματα και του τετραγώνου πλευράς ίσης με το τμήμα που έχει άκρα τα δυο σημεία είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ίσης με το μισό του αρχικού ευθυγράμμου τμήματος· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 6 (Επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2+\alpha x+\gamma = 0$ με λύση $x = \beta$ εφόσον $\gamma = (\alpha/2)^2 - (\beta + \alpha/2)^2$) (492) *Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα α προεκταθεί κατά τμήμα β τότε το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου που έχει τις πλευρές του ίσες με $\alpha + \beta$ και β και του τετραγώνου πλευράς ίσης με $\alpha/2$ είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ίσης με $(\alpha/2) + \beta$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $\text{ΑΒ} = \alpha$ και έστω Γ το μέσο του. Προεκτείνουμε το ΑΒ κατά $\text{ΒΔ} = \beta$. Ισχυρίζομαι ότι το άθροισμα των εμβαδών του ορθογώνιου που έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΔ και ΔΒ και του τετραγώνου πλευράς ίσης με ΒΓ είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ίσης με ΓΔ.

Με πλευρά ΓΔ κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΓΕΖΔ και φέρνουμε την ΔΕ. Από το Β φέρνουμε την ΒΗ παράλληλη στις ΕΓ και ΔΖ και από το σημείο τομής Θ των ΒΗ και ΔΕ φέρνουμε την ΚΜ παράλληλη στις ΑΒ και ΕΖ που τέμνει την ΓΕ στο Λ. Τέλος από το Α φέρνουμε την ΑΚ παράλληλη στις ΓΕ και ΔΜ.



Επειδή ΑΓ = ΓΒ έπεται ότι τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΑΛ και ΓΘ είναι ισεμβαδικά δηλαδή $|\text{ΑΛ}| = |\text{ΓΘ}|$. Όμως $|\text{ΓΘ}| = |\text{ΘΖ}|$ (ΒΙ, Π43, σελ. 45) και άρα $|\text{ΑΛ}| = |\text{ΘΖ}|$.

Προσθέτοντας σε κάθε μέλος το εμβαδόν του ΓΜ παίρνουμε $|\text{ΑΛ}| + |\text{ΓΜ}| = |\text{ΘΖ}| + |\text{ΓΜ}|$ ή $|\text{ΑΜ}| = |\text{ΘΖ}| + |\text{ΓΜ}|$.

Αλλά τα ΘΖ και ΓΜ αποτελούν τον γνώμονα ΝΞΟ, δηλαδή το πολυγωνικό χωρίο ΓΔΖΗΘΛ οπότε $|\text{ΑΜ}| = |\text{ΓΔΖΗΘΛ}|$.

Προσθέτοντας το εμβαδόν του ΛΗ προκύπτει $|\text{ΑΜ}| + |\text{ΛΗ}| = |\text{ΓΔΖΗΘΛ}| + |\text{ΛΗ}|$.

Όμως το ΓΔΖΗΘΛ μαζί με το τετράγωνο ΛΗ αποτελούν το τετράγωνο ΓΔΖΕ και άρα $|\text{ΑΜ}| + |\text{ΛΗ}| = |\text{ΓΔΖΕ}|$.

Δηλαδή το τετράγωνο ΓΔΖΕ πλευράς ίσης με ΓΔ έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου ΑΜ που έχει πλευρές ίσες με ΑΔ, ΔΒ (καθώς ΔΜ = ΔΒ) και του τετραγώνου ΛΗ πλευράς ίσης με ΒΓ.

Συνεπώς, αν ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει διαιρεθεί σε δυο ίσα τμήματα από το μέσο του προεκταθεί κατά ένα άλλο τμήμα τότε το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου του οποίου η μια πλευρά είναι ίση με το άθροισμα του αρχικού ευθυγράμμου τμήματος και του τμήματος κατά το οποίο αυτό προεκτάθηκε και η άλλη πλευρά του είναι ίση με το τμήμα κατά το οποίο προεκτάθηκε το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα και του τετραγώνου πλευράς ίσης με το μισό του αρχικού ευθυγράμμου τμήματος είναι ίσο με το εμβαδό του τετραγώνου πλευράς ίσης με το άθροισμα του μισού του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος και του τμήματος κατά το οποίο αυτό προεκτάθηκε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

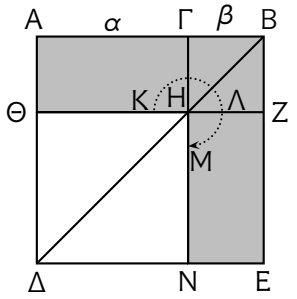
Πρόταση 7 (Τετράγωνο διαφοράς: $(\gamma - \alpha)^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha$, εδώ με $\gamma = \alpha + \beta$) (493) *Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί τυχαία από ένα σημείο του σε δυο τμήματα α και β τότε το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων που έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα ίσες με α+β και α είναι ίσο με το άθροισμα του διπλασίου του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει τις πλευρές του ίσες με α + β και α και του τετραγώνου πλευράς ίσης με β.*

Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που διαιρείται τυχαία από ένα σημείο του Γ στα τμήματα ΑΓ = α και ΓΒ = β.

Ισχυρίζομαι ότι το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές ίσες με ΑΒ και ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα του διπλασίου του εμβαδού

του ορθογωνίου που τις πλευρές του ίσες με ΑΒ και ΒΓ και του εμβαδού του τετραγώνου πλευράς ίσης με ΓΑ.

Με πλευρά ΑΒ κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΒΕΔ και φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΔ. Από το Γ φέρνουμε την ΓΝ παράλληλη στις ΒΕ και ΑΔ, ενώ από το σημείο τομής Η των ΓΝ και ΒΔ φέρνουμε την παράλληλη στις ΑΒ και ΔΕ που τέμνει τις ΑΔ και ΒΕ στα Θ και Ζ αντίστοιχα.



Τότε τα ορθογώνια ΑΗ και ΗΕ είναι ισεμβαδικά (Β1, Π43, σελ. 45) δηλαδή $|\text{ΑΗ}| = |\text{ΗΕ}|$ οπότε προσθέτοντας το εμβαδόν του τετραγώνου ΓΖ παίρνουμε $|\text{ΑΗ}| + |\text{ΓΖ}| = |\text{ΗΕ}| + |\text{ΓΖ}|$ ή $|\text{ΑΖ}| = |\text{ΓΕ}|$. Συνεπώς, $|\text{ΑΖ}| + |\text{ΓΕ}| = 2 \cdot |\text{ΑΖ}|$.

Αλλά το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων ΑΖ και ΓΕ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών του γνώμονα ΚΛΜ (δηλαδή του πολυγωνικού χωρίου ΑΒΕΝΗΘ) και του τετραγώνου ΓΖ δηλαδή $|\text{ΑΖ}| + |\text{ΓΕ}| = |\text{ΑΒΕΝΗΘ}| + |\text{ΓΖ}|$ και έτσι από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $|\text{ΑΒΕΝΗΘ}| + |\text{ΓΖ}| = 2 \cdot |\text{ΑΖ}|$.

Προσθέτοντας τώρα το εμβαδόν του ΔΗ παίρνουμε $|\text{ΑΒΕΝΗΘ}| + |\text{ΓΖ}| + |\text{ΔΗ}| = 2 \cdot |\text{ΑΖ}| + |\text{ΔΗ}|$.

Όμως το ΑΒΕΝΗΘ μαζί με το τετράγωνο ΔΗ αποτελούν το τετράγωνο ΑΒΕΔ και έτσι $|\text{ΑΒΕΔ}| + |\text{ΓΖ}| = 2 \cdot |\text{ΑΖ}| + |\text{ΔΗ}|$.

Ώστε, το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές ίσες με ΑΒ και ΓΒ είναι ίσο με το άθροισμα του διπλασίου του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΖ που έχει πλευρές ίσες με ΑΒ και ΒΓ (καθώς ΒΓ = ΒΖ) και του τετραγώνου ΔΗ πλευράς ίσης με ΑΓ (καθώς ΘΗ = ΑΓ).

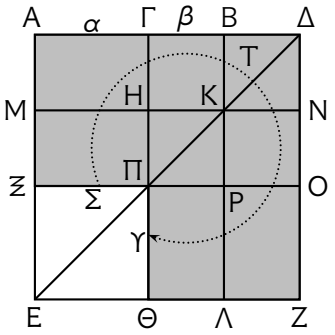
Συνεπώς, αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε δυο τμήματα από ένα σημείο του τότε το άθροισμα των εμβαδών του τετραγώνου πλευράς ίσης με το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα και του τετραγώνου πλευράς ίσης με το ένα από τα δυο τμήματα στα οποία έχει διαιρεθεί το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσο με το άθροισμα του διπλασίου του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει τη μια πλευρά του ίση με το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα και την άλλη ίση με το ένα από τα δυο τμήματα στα οποία έχει διαιρεθεί το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα (και μάλιστα αυτό με το οποίο είναι ίση η πλευρά του τετραγώνου που αναφέρεται παραπάνω) και του εμβαδού του τετραγώνου πλευράς ίσης με το δεύτερο τμήμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 8 (Πολική ταυτότητα: $\gamma\beta = \left((\gamma+\beta)^2 - (\gamma-\beta)^2\right)/4$ από όπου $\sqrt{\gamma\beta} \leq (\gamma+\beta)/2$, εδώ με $\gamma = \alpha + \beta$) (494) *Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί τυχαία από ένα σημείο του σε δυο τμήματα α και β τότε το άθροισμα του τετραπλασίου του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει τις πλευρές του ίσες*

με $\alpha+\beta$ και β και του εμβαδού του τετραγώνου πλευράς ίσης με α είναι ίσο με το εμβαδό του τετραγώνου πλευράς ίσης με $(\alpha+\beta)+\beta$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το τυχόν σημείο του Γ που το διαιρεί στα τμήματα $\text{ΑΓ}=\alpha$ και $\text{ΓΒ}=\beta$. Ισχυρίζομαι ότι το άθροισμα του τετραπλασίου του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΒ και ΒΓ και του εμβαδού του τετραγώνου πλευράς ίσης με ΑΓ είναι ίσο με το εμβαδό του τετραγώνου πλευράς ίσης με ΑΒ+ΒΓ.

Προεκτείνουμε το ΑΒ κατά τμήμα $\text{ΒΔ}=\text{ΒΓ}$ και με πλευρά ΑΔ κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΔΖΕ. Φέρνουμε την διαγώνιο ΔΕ και τις ΓΘ και ΒΛ παράλληλες στις ΑΕ και ΔΖ που τέμνουν την ΔΕ στα Π και Κ αντίστοιχα. Τέλος, από τα Π και Κ φέρνουμε τις ΞΟ και ΜΝ αντίστοιχα, παράλληλες στις ΑΔ και ΕΖ.



Επειδή $\text{ΓΒ}=\text{ΒΔ}$, $\text{ΓΒ}=\text{ΗΚ}$ και $\text{ΒΔ}=\text{ΚΝ}$ έπεται ότι $\text{ΗΚ}=\text{ΚΝ}$. Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\text{ΠΡ}=\text{ΡΟ}$.

Ακόμα, επειδή $\text{ΒΓ}=\text{ΒΔ}$ και $\text{ΗΚ}=\text{ΚΝ}$ έπεται ότι $|\text{ΓΚ}|=|\text{ΚΔ}|$ και $|\text{ΗΡ}|=|\text{ΡΝ}|$. Αλλά $|\text{ΓΚ}|=|\text{ΡΝ}|$ γιατί τα ΓΚ και ΡΝ είναι ισεμβαδικά ως παραπληρώματα στο παραλληλόγραμμο ΓΟ (ΒΙ, Π43, σελ. 45). Άρα $|\text{ΚΔ}|=|\text{ΗΡ}|$ και έτσι $|\text{ΔΚ}|=|\text{ΓΚ}|=|\text{ΗΡ}|=|\text{ΡΝ}|$.

Επομένως,

$$|\text{ΔΚ}|+|\text{ΓΚ}|+|\text{ΗΡ}|+|\text{ΡΝ}|=4\cdot|\text{ΓΚ}| \qquad (1)$$

Επειδή πάλι, $\text{ΓΒ}=\text{ΒΔ}$ και $\text{ΒΔ}=\text{ΒΚ}=\text{ΓΗ}$ και $\text{ΓΒ}=\text{ΗΚ}=\text{ΗΠ}$ έπεται ότι $\text{ΓΗ}=\text{ΗΠ}$ και άρα $|\text{ΑΗ}|=|\text{ΜΠ}|$ (ΒΙ, Π36, σελ. 42).

Ομοίως επειδή $\text{ΠΡ}=\text{ΡΟ}$ έπεται ότι $|\text{ΠΛ}|=|\text{ΡΖ}|$.

Αλλά $|\text{ΜΠ}|=|\text{ΠΛ}|$ γιατί τα ΜΠ και ΠΛ είναι παραπληρώματα στο παραλληλόγραμμο ΜΛ (ΒΙ, Π43, σελ. 45) και άρα $|\text{ΑΗ}|=|\text{ΡΖ}|$.

Έτσι $|\text{ΑΗ}|=|\text{ΜΠ}|=|\text{ΠΛ}|=|\text{ΡΖ}|$ και επομένως

$$|\text{ΑΗ}|+|\text{ΜΠ}|+|\text{ΠΛ}|+|\text{ΡΖ}|=4\cdot|\text{ΑΗ}| \qquad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2), καθώς τα ΔΚ, ΓΚ, ΗΡ, ΡΝ, ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ και ΡΖ αποτελούν τον γνώμονα ΣΤΥ, δηλαδή το πολυγωνικό χωρίο ΑΔΖΘΠΞ, παίρνουμε

$$|\text{ΑΔΖΘΞΠ}|=4\cdot(|\text{ΓΚ}|+|\text{ΑΗ}|)$$

Αλλά $|\text{ΑΗ}|+|\text{ΓΚ}|=|\text{ΑΚ}|$ οπότε από την προηγούμενη προκύπτει ότι

$$|\text{ΑΔΖΘΞΠ}|=4\cdot|\text{ΑΚ}|$$

Προσθέτοντας το εμβαδόν του ΞΘ παίρνουμε

$$|\text{ΑΔΖΘΞΠ}|+|\text{ΞΘ}|=4\cdot|\text{ΑΚ}|+|\text{ΞΘ}|$$

Καθώς όμως το ΑΔΖΘΞΠ μαζί με το ΞΘ αποτελούν το τετράγωνο ΑΔΖΕ από την παραπάνω προκύπτει ότι

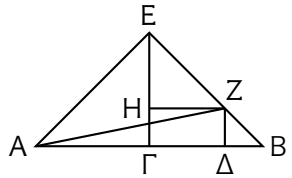
$$|\text{ΑΔΖΕ}| = 4 \cdot |\text{ΑΚ}| + |\text{ΞΘ}|$$

Δηλαδή, το άθροισμα του τετραπλασίου του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΒ και ΒΓ (καθώς ΒΔ = ΒΓ) και του εμβαδού του τετραγώνου ΞΘ πλευράς ίσης με ΑΓ είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ίσης με ΑΔ = ΑΒ + ΒΓ.

Συνεπώς, αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε δυο τμήματα από ένα σημείο του, τότε το άθροισμα του τετραπλασίου του εμβαδού του ορθογωνίου που η μια του πλευρά είναι ίση με το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα και η άλλη με το δεύτερο από τα δυο τμήματα (στα οποία έχει διαιρεθεί το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα) και του τετραγώνου πλευράς ίσης με το πρώτο από τα δυο τμήματα είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ίσης με το άθροισμα του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος και του δευτέρου τμήματος από αυτά στα οποία διαιρέθηκε το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 9 (Κανόνας του Παραλληλογράμμου: με $\alpha = \text{ΑΔ}$ και $\beta = \text{ΔΒ}$ ισχύει $2(\alpha^2+\beta^2) = (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2$) (495) *Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί από το μέσο του σε δυο ίσα τμήματα και από ένα άλλο σημείο του σε δυο άνισα τμήματα τότε το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων που έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα ίσες με τα άνισα τμήματα στα οποία έχει διαιρεθεί το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα είναι ίσο με το διπλάσιο του αθροίσματος των εμβαδών των τετραγώνων που έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα ίσες με το μισό του αρχικού ευθυγράμμου τμήματος και του τμήματος με άκρα τα δυο σημεία.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που διαιρείται σε δυο ίσα τμήματα ΑΓ = ΓΒ από το μέσο του Γ και σε δυο άνισα τμήματα ΑΔ και ΔΒ από ένα άλλο σημείο του Δ. Ισχυρίζομαι ότι το άθροισμα των εμβαδών των δυο τετραγώνων που έχουν τις πλευρές τους ίσες με ΑΔ και ΔΒ αντίστοιχα είναι ίσο με το διπλάσιο του αθροίσματος των εμβαδών των τετραγώνων των οποίων οι πλευρές είναι ίσες με ΑΓ και ΓΔ αντίστοιχα.



Από Γ φέρνουμε την ΓΕ κάθετη στην ΑΒ ώστε ΓΕ = ΑΓ = ΓΒ. Στη συνέχεια φέρνουμε τις ΕΑ και ΕΒ ενώ από το Δ φέρνουμε την παράλληλη προς την ΕΓ που τέμνει την ΕΒ στο Ζ. Από το Ζ φέρνουμε την ΖΗ παράλληλη προς την ΑΒ ενώ φέρνουμε και την ΑΖ.

Επειδή ΑΓ = ΓΕ έπεται ότι $\widehat{\text{ΕΑΓ}} = \widehat{\text{ΑΕΓ}}$ (ΒΙ, Π5, σελ. 24) ενώ επειδή οι γωνίες στο Γ είναι ορθές έπεται ότι: $\widehat{\text{ΕΑΓ}} + \widehat{\text{ΑΕΓ}} = 1$ ορθή (ΒΙ, Π32, σελ. 40)

Αφού οι $\widehat{EA\Gamma}$ και $\widehat{AE\Gamma}$ είναι ίσες και έχουν άθροισμα 1 ορθή συμπεραίνουμε ότι η $\widehat{AE\Gamma}$ ισούται με μισή ορθή. Ομοίως, η $\widehat{BE\Gamma}$ ισούται με μισή ορθή και αφού η $\widehat{EHZ}$ είναι ορθή συμπεραίνουμε ότι η $\widehat{HZE}$ ισούται με μισή ορθή και άρα $EH = HZ$.

Ομοίως και $Z\Delta = \Delta B$, αφού η $\widehat{\Gamma B\Delta}$ ισούται με μισή ορθή και η $\widehat{Z\Delta B}$ είναι ορθή.

Άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύουν τα εξής:

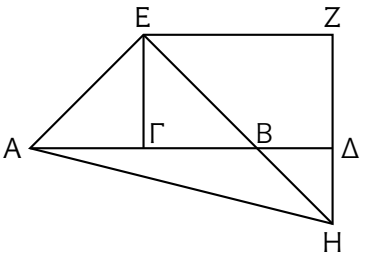
$$A E^2 = A\Gamma^2 + \Gamma E^2 = 2A\Gamma^2 \qquad (\text{αφού } A\Gamma = \Gamma E)$$
$$EZ^2 = AH^2 + HZ^2 = 2HZ^2 = 2\Gamma\Delta^2 \qquad (\text{αφού } EH = HZ)$$

Έτσι, προσθέτοντας και χρησιμοποιώντας δύο φορές το Πυθαγόρειο Θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} 2(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2) &= AE^2 + EZ^2 \\ &= AZ^2 && (\text{αφού } \widehat{AEZ} \text{ ορθή}) \\ &= A\Gamma^2 + \Delta Z^2 && (\text{αφού } \widehat{A\Delta Z} \text{ ορθή}) \\ &= A\Gamma^2 + \Delta B^2 && (\text{αφού } \Delta Z = \Delta B) \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρείται από ένα σημείο του σε δυο ίσα τμήματα και από ένα άλλο σημείο του σε δυο άνισα τμήματα, τότε το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές ίσες με τα άνισα τμήματα είναι ίσο με το διπλάσιο του αθροίσματος των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές το μισό του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος και το τμήμα με άκρα τα δυο σημεία· όπερ ἔδει δεῖξαι. ∆

Πρόταση 10 (Άλλη έκφραση του κανόνα του παραλληλογράμμου (Π9, σελ. 68)) (496) *Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα α προεκταθεί κατά τμήμα β τότε το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές $\alpha+\beta$ και β είναι διπλάσιο του αθροίσματος των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές $\alpha/2$ και $(\alpha/2)+\beta$.*



Απόδειξη. Έστω $AB = \alpha$ το ευθύγραμμο τμήμα που προεκτείνουμε κατά τμήμα $B\Delta = \beta$. Αν Γ είναι το μέσο του AB ισχυρίζομαι ότι το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές $A\Delta$ και ΔB είναι διπλάσιο του αθροίσματος των εμβαδών των τετραγώνων που έχουν πλευρές $A\Gamma$ και $\Gamma\Delta$.

Από το Γ φέρνουμε την ΓΕ κάθετη στην AB τέτοια ώστε $\Gamma E = \Gamma A = \Gamma B$ και τις EA και EB. Στην συνέχεια από το E φέρνουμε την EZ παράλληλη στην $A\Delta$ και από το Δ την $Z\Delta$ παράλληλη στην ΓΕ.

Τότε θα είναι

$$\widehat{\Gamma EZ} + \widehat{EZ\Delta} = 2 \text{ ορθές}$$

καθώς η EZ τέμνει τις παράλληλες ΕΓ και ΖΔ (ΒΙ, Π29, σελ. 38). Έτσι,

$$\widehat{ZEB} + \widehat{EZ\Delta} < 2 \text{ ορθές}$$

και άρα, καθώς οι ευθείες που σχηματίζουν γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δυο ορθές τέμνονται όταν προεκταθούν (αίτημα 5), οι ΕΒ και ΖΔ προεκτεινόμενες τέμνονται προς το μέρος των Β και Δ. Ονομάζουμε Η το σημείο τομής τους και φέρνουμε την ΑΗ.

Επειδή ΑΓ = ΓΕ είναι $\widehat{EA\Gamma} = \widehat{A\Gamma E}$ (ΒΙ, Π5, σελ. 24) και καθώς η γωνία στο Γ είναι ορθή έπεται ότι κάθεμιά από τις $\widehat{EA\Gamma}$ και $\widehat{A\Gamma E}$ είναι ίση με μισή ορθή (ΒΙ, Π32, σελ. 40).

Ομοίως προκύπτει ότι και καθεμιά από τις $\widehat{\Gamma EB}$ και $\widehat{EB\Gamma}$ είναι ίση με μισή ορθή και άρα $\widehat{AEB} = 1$ ορθή.

Επειδή όμως η $\widehat{EB\Gamma}$ είναι ίση με μισή ορθή έπεται ότι και η $\widehat{\Delta BH}$ είναι ίση με μισή ορθή (ΒΙ, ΠΙ5, σελ. 29).

Αλλά, $\widehat{B\Delta H} = 1$ ορθή και επειδή $\widehat{B\Delta H} = \widehat{\Delta\Gamma E}$ ως εναλλάξ (ΒΙ, Π29, σελ. 38) έπεται ότι η $\widehat{\Delta HB}$ είναι ίση με μισή ορθή. Άρα $\widehat{\Delta HB} = \widehat{\Delta BH}$ και επομένως ΒΔ = ΗΔ (ΒΙ, Π6, σελ. 24).

Πάλι επειδή η $\widehat{EHZ}$ είναι ίση με μισή ορθή και η γωνία στο Ζ είναι ορθή, καθώς είναι ίση με την απέναντί της στο Γ (ΒΙ, Π34, σελ. 41), έπεται ότι η $\widehat{ZEH}$ είναι ίση με μισή ορθή (ΒΙ, Π32, σελ. 40) και άρα $\widehat{EHZ} = \widehat{ZEH}$ όποτε HZ = EZ (ΒΙ, Π6, σελ. 24).

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (ΒΙ, Π47, σελ. 51) ισχύουν τα εξής:

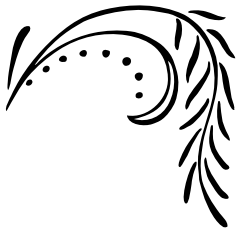
$$EA^2 = E\Gamma^2 + A\Gamma^2 = 2A\Gamma^2 \qquad \text{(αφού } E\Gamma = A\Gamma\text{)}$$
$$EH^2 = HZ^2 + EZ^2 = 2EZ^2 = 2\Gamma\Delta^2 \qquad \text{(αφού } HZ = EZ = \Gamma\Delta\text{)}$$

Έτσι προσθέτοντας και χρησιμοποιώντας δύο φορές το Πυθαγόρειο Θεώρημα παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 2(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2) &= EA^2 + EH^2 \\ &= AH^2 && \text{(αφού } \widehat{AEH} \text{ ορθή)} \\ &= A\Delta^2 + \Delta H^2 && \text{(αφού } \widehat{A\Delta H} \text{ ορθή)} \\ &= A\Delta^2 + \Delta B^2 && \text{(αφού } \Delta H = \Delta B\text{)} \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν ένα ευθύγραμμο τμήμα που διαιρείται σε δυο ίσα τμήματα από το μέσο του προεκταθεί κατά ένα άλλο τμήμα τότε το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ίσης με το άθροισμα του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος και του τμήματος κατά το οποίο αυτό προεκτάθηκε είναι ίσο με το

διπλάσιο του αθροίσματος των εμβαδών των τετραγώνων που έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα ίσες με το μισό του αρχικού ευθυγράμμου τμήματος και με το άθροισμα του μισού του αρχικού ευθυγράμμου τμήματος και του τμήματος κατά το οποίο αυτό προεκτάθηκε· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

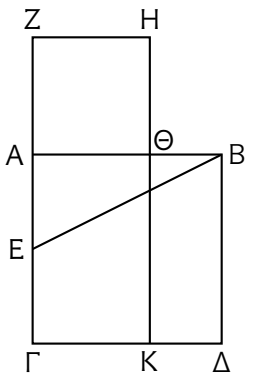


ΦΕΙΔΙΑΣ

Πρόταση 11 (Κατασκευή, Θεώρημα της Χρυσής Τομής) (497) *Να διαιρεθεί δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα έτσι ώστε το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με όλο το ευθύγραμμο τμήμα και το ένα από τα δυο τμήματα, στα οποία αυτό έχει διαιρεθεί, να έχει ίσο εμβαδόν με το τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με το υπόλοιπο του ευθυγράμμου τμήματος.*

Υλοποίηση: Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ· πρέπει αυτό να διαιρεθεί με τέτοιο τρόπο ώστε το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με όλο το ευθύγραμμο τμήμα και το ένα από τα δυο τμήματα, στα οποία διαιρέθηκε να είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με το υπόλοιπο του ευθυγράμμου τμήματος.

Με πλευρά ΑΒ κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΒΔΓ (ΒΙ, Π46, σελ. 48) και έστω Ε το μέσο της ΑΓ. Φέρνουμε την ΒΕ και προεκτείνουμε την ΓΑ μέχρι το Ζ και λαμβάνουμε ΕΖ = ΒΕ. Κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς ΑΖ το ΖΘ και προεκτείνουμε την ΗΘ μέχρι το Κ.



Ισχυρίζομαι, ότι η ΑΒ έχει διαιρεθεί από το Θ έτσι ώστε το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΒ, ΒΘ να είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο πλευράς ΑΘ.

Επειδή η ΑΓ έχει διχοτομηθεί στο Ε και η ΖΑ είναι η προέκτασή της συνεπάγεται ότι το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου με πλευρές ΓΖ, ΖΑ και του τετραγώνου πλευράς ΑΕ είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ΕΖ (Π6, σελ. 64).

Το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΓΖ, ΖΑ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΖΚ καθώς ΑΖ = ΖΗ και επομένως ισχύει $|ZK| + AE^2 = EZ^2$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (ΒΙ, Π47, σελ. 51) καθώς $\widehat{EAB}$ ορθή, ισχύει:

$$AB^2 + AE^2 = EB^2 = EZ^2,$$

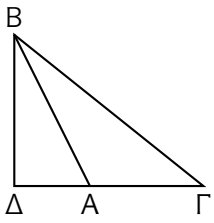
αφού ΕΒ = ΕΖ. Έτσι, $|ZK| = AB^2$ ή $|ZK| = |A\Delta|$. Αφαιρώντας το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΚ παίρνουμε $|ZK| - |AK| = |A\Delta| - |AK|$ και άρα $|Z\Theta| = |\Theta\Delta|$.

Το ορθογώνιο ΘΔ όμως είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο που έχει πλευρές ΑΒ, ΒΘ καθώς ΑΒ = ΒΔ και άρα το τετράγωνο ΖΘ πλευράς ΑΘ είναι ισεμβαδικό με το αυτό το ορθογώνιο.

Τελικά, το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει διαιρεθεί από το Θ έτσι ώστε το ορθογώνιο με πλευρές ΑΒ, ΒΘ να είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο της ΘΑ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 12 (Γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος στα αμβλυγώνια τρίγωνα) (498) *Στα αμβλυγώνια τρίγωνα το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την πλευρά του τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις πλευρές του τριγώνου που περιέχουν την αμβλεία γωνία κατά το διπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει πλευρές ίσες με τη μια πλευρά της αμβλείας γωνίας και το ευθύγραμμο τμήμα στο οποίο προβάλλεται κάθετα πάνω σε αυτήν την πλευρά η άλλη πλευρά της αμβλείας γωνίας* (στμ: στο εξής «προβολή»).

Απόδειξη. Έστω το αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με την $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ αμβλεία. Από το Β φέρνουμε την κάθετη προς την ΑΓ (στμ: το ύψος από την κορυφή Β) που τέμνει την προέκτασή της στο Δ.



Ισχυρίζομαι ότι το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ΒΓ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές ΑΒ και ΑΓ κατά το διπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΓ και ΑΔ, δηλαδή

$$\text{ΒΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 - 2 \cdot \text{ΑΓ} \cdot \text{ΑΔ}$$

Επειδή η ΔΓ διαιρείται τυχαία στα τμήματα ΔΑ και ΑΓ από το Α έπεται ότι $\text{ΔΓ}^2 = \text{ΑΓ}^2 + \text{ΑΔ}^2 + 2 \cdot \text{ΑΓ} \cdot \text{ΑΔ}$ (Π4, σελ. 62).

Προσθέτοντας το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ΔΒ παίρνουμε:

$$\text{ΔΓ}^2 + \text{ΔΒ}^2 = \text{ΑΓ}^2 + \text{ΑΔ}^2 + 2 \cdot \text{ΑΓ} \cdot \text{ΑΔ} + \text{ΔΒ}^2 \qquad (3)$$

Όμως καθώς τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΓ είναι ορθογώνια από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51) αντίστοιχα έχουμε $\text{ΒΓ}^2 = \text{ΔΒ}^2 + \text{ΔΓ}^2$ (αφού $\widehat{\text{ΒΔΓ}} = 1\,\text{ορθή}$) και $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ (αφού $\widehat{\text{ΒΔΑ}} = 1\,\text{ορθή}$).

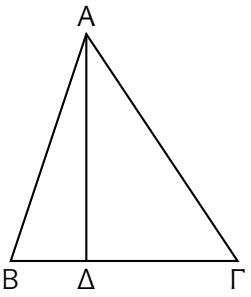
Με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε την αποδεικτέα.

Συνεπώς, στα αμβλυγώνια τρίγωνα το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την πλευρά του τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις πλευρές του τριγώνου που περιέχουν την αμβλεία γωνία κατά το διπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει πλευρές ίσες με τη μια πλευρά της αμβλείας γωνίας και την προβολή της άλλης πλευράς του τριγώνου πάνω σε αυτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 13 (Γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος στα οξυγώνια τρίγωνα) (498) *Στα οξυγώνια τρίγωνα το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά αυτή που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι μικρότερο του αθροίσματος των εμβαδών των τετραγώνων των πλευρών οι οποίες περιέχουν την οξεία*

γωνία κατά το διπλάσιο εμβαδόν του ορθογωνίου που έχει τις πλευρές του ίσες με την μια πλευρά της οξείας γωνίας και την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Απόδειξη. Θεωρούμε το οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και από το Α φέρνουμε την ΑΔ κάθετη στην ΒΓ. (στμ: το ύψος από την κορυφή Α).



Ισχυρίζομαι οτι το εμβαδόν του τετραγώνου της ΑΓ είναι μικρότερο του αθροίσματος των εμβαδών των τετραγώνων των ΒΓ και ΑΒ κατά το διπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει πλευρές ίσες με ΒΓ και ΒΔ. Δηλαδή

$$\text{ΑΓ}^2 = \text{ΒΓ}^2 + \text{ΑΒ}^2 - 2 \cdot \text{ΒΓ} \cdot \text{ΒΔ}$$

Καθώς η ΒΓ διαιρείται τυχαία στα τμήματα ΒΔ και ΔΓ από το Δ, έπεται ότι $\text{ΒΓ}^2 + \text{ΒΔ}^2 = 2 \cdot \text{ΒΓ} \cdot \text{ΔΓ} + \text{ΔΓ}^2$ (Π4, σελ. 62)

Προσθέτοντας το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ΑΔ παίρνουμε:

$$\text{ΒΓ}^2 + \text{ΒΔ}^2 + \text{ΑΔ}^2 = 2 \cdot \text{ΒΓ} \cdot \text{ΔΓ} + \text{ΔΓ}^2 + \text{ΑΔ}^2 \qquad (4)$$

Όμως καθώς τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ορθογώνια από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (ΒΙ, Π47, σελ. 51) έχουμε αντίστοιχα $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΒΔ}^2 + \text{ΑΔ}^2$ (αφού $\widehat{\text{ΑΔΒ}} = 1\,\text{ορθή}$) και $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΓ}^2$ (αφού $\widehat{\text{ΑΔΓ}} = 1\,\text{ορθή}$).

Με αντικατάσταση στην (4) προκύπτει:

$$\text{ΒΓ}^2 + \text{ΑΒ}^2 = 2 \cdot \text{ΒΓ} \cdot \text{ΒΔ} + \text{ΑΓ}^2$$

που είναι ισοδύναμη με την αποδεικτέα.

Ώστε, στα οξυγώνια τρίγωνα το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά αυτή που βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία, είναι μικρότερο του αθροίσματος των εμβαδών των τετραγώνων των πλευρών οι οποίες περιέχουν την οξεία γωνία κατά το διπλάσιο εμβαδόν του ορθογωνίου με πλευρές, την μια πλευρά της οξείας γωνίας και την προβολή της άλλης πλευράς της οξείας γωνίας πάνω σε αυτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 14 (Κατασκευή) (499) *Να κατασκευαστεί τετράγωνο ισεμβαδικό με ένα δοθέν ευθύγραμμο σχήμα.*

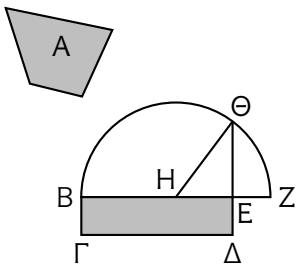
Υλοποίηση: Έστω Α το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα. Πρέπει να κατασκευαστεί ένα τετράγωνο ισεμβαδικό με το Α.

Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΒΔ ισεμβαδικό με το Α (ΒΙ, Π45, σελ. 47).

Αν είναι ΒΕ = ΕΔ τότε το ΒΔ είναι τετράγωνο ισεμβαδικό με το Α και η κατασκευή ολοκληρώθηκε.

Αν τα ΒΕ και ΕΔ δεν είναι ίσα τότε κάποιο από αυτά θα είναι μεγαλύτερο. Έστω ότι το ΒΕ είναι το μεγαλύτερο. Προεκτείνουμε το ΒΕ προς

το Ε και έστω το σημείο Ζ πάνω στην προέκταση τέτοιο ώστε ΕΖ = ΕΔ. Διαιρούμε το ΒΖ σε δυο ίσα μέρη (ΒΙ, Π10, σελ. 26) και έστω Η το μέσο του. Με κέντρο το Η και ακτίνα ΗΒ = ΗΖ γράφουμε το ημικύκλιο ΒΘΖ με Θ να είναι το σημείο στο οποίο τέμνει το ημικύκλιο η προέκταση του ΕΔ. Φέρνουμε και την ΗΘ.



Επειδή τώρα το ευθύγραμμο τμήμα ΒΖ διαιρείται σε δυο ίσα τμήματα από το μέσο του Η και σε δυο άνισα τμήματα από το σημείο του Ε έπεται ότι $\mathrm{BE}\cdot\mathrm{EZ}+\mathrm{EH}^2=\mathrm{HZ}^2$ (Π5, σελ. 63). Όμως ΗΖ = ΗΘ και άρα από την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι $\mathrm{BE}\cdot\mathrm{EZ}+\mathrm{EH}^2=\mathrm{H\Theta}^2$ Επιπλέον, καθώς $\widehat{\mathrm{HE\Theta}}=1$ορθή, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (ΒΙ, Π47, σελ. 51) έπεται $\mathrm{H\Theta}^2=\Theta\mathrm{E}^2+\mathrm{EH}^2$ και άρα από την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι $\mathrm{BE}\cdot\mathrm{EZ}+\mathrm{EH}^2=\Theta\mathrm{E}^2+\mathrm{EH}^2$.

Αφαιρώντας το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ΕΗ παίρνουμε ότι $\mathrm{BE}\cdot\mathrm{EZ}=\Theta\mathrm{E}^2$.

Αλλά, το ορθογώνιο του οποίου οι πλευρές είναι ίσες με ΒΕ και ΕΖ είναι το ΒΔ καθώς ΕΖ = ΕΔ. Έτσι, το παραλληλόγραμμο ΒΔ που κατασκευάστηκε ισεμβαδικό με το ευθύγραμμο σχήμα Α είναι ισεμβαδικό και με το τετράγωνο πλευράς ΘΕ. Τελικά, το ευθύγραμμο σχήμα Α είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο πλευράς ΕΘ.

Συνεπώς, με πλευρά την ΕΘ κατασκευάζεται το τετράγωνο που είναι ισεμβαδικό με το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα Α· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. ∆

Σημειώσεις και Παρατηρήσεις

Οι Προτάσεις 8 (πολική ταυτότητα) και 9 (κανόνας του παραλληλογράμμου) δεν είναι απλά άλλες δυο ταυτότητες. Ο Ευκλείδης βέβαια τις γνωρίζει στο επίπεδο των αριθμών, αντιλαμβάνεται όμως την σπουδαιότητά τους και τις καταγράφει. Πρόκειται για σημαντικές σχέσεις οι οποίες στα σύγχρονα μαθηματικά λειτουργούν «συνεργατικά» όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Υπενθυμίζουμε ότι σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο X μια συνάρτηση $\|\cdot\|:X\to\mathbb{R}$ ορίζει μια νόρμα αν

1. $\|x\|\geq 0$ για κάθε $x\in X$ και $\|x\|=0$ αν και μόνο αν $x=0$,
2. $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ για κάθε $x\in X$ και για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$,
3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ για κάθε $x\in X$ και για κάθε $y\in X$.

Μια νόρμα είναι συνεχής συνάρτηση γιατί η τριγωνική ανισότητα (η τελευταία ανισότητα παραπάνω) συνεπάγεται

$$\big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x-y\|,$$

οπότε αν $\|x-y\| \leq \varepsilon$ τότε $|\|x\| - \|y\|| \leq \varepsilon$. Άρα αν $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}$ συνεπάγεται $\lim_{n\to\infty} \|\lambda x\| = \|\lambda x\|$.

Επιπλέον εσωτερικό γινόμενο είναι μια διγραμμική συνάρτηση (δηλαδή συνάρτηση δύο μεταβλητών γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της) $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ που επιπλέον ικανοποιεί την $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ για κάθε $x, y \in X$.

Για περισσότερες πληροφορίες, δείτε [ΕΜΤ2004].

Θεώρημα 1 (Jordan και von Neumman (δείτε [JvN1935])) *Ας υποθέσουμε ότι η νόρμα* $\|\cdot\|$ *ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Τότε η νόρμα $\|\cdot\|$ *είναι* «Ευκλείδεια»*, δηλαδή η παράσταση της πολικής ταυτότητας*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο, και $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Απόδειξη: Η τελευταία προκύπτει άμεσα από την πολική ταυτότητα για $x = y$. Μένει να δειχθεί ότι η πολική ταυτότητα ορίζει εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή

$$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle,$$

$$\langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$$

και $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου

$$2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2,$$

οπότε

$$\|x+y+z\|^2 = 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y+z\|^2.$$

Αλλάζοντας τις θέσεις των x και y παίρνουμε και ότι

$$\|x+y+z\|^2 = 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y-x+z\|^2.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη και διαιρώντας με το 2 παίρνουμε ότι

$$\|x+y+z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y+z\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x+z\|^2.$$

Αλλάζοντας το z με $-z$ θα ισχύει και

$$\begin{aligned}\|x+y-z\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 \\ &\qquad - \frac{1}{2}\|x-y-z\|^2 - \frac{1}{2}\|y-x-z\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 \\ &\qquad - \frac{1}{2}\|y-x+z\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y+z\|^2.\end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την πολική ταυτότητα παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle x+y, z\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) \\ &= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.\end{aligned}$$

Από το παραπάνω και με επαγωγή, η $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ ισχύει για $\lambda \in \mathbb{N}$. Από το παραπάνω

$$\langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle = \langle x + (-x), y\rangle = \langle 0, y\rangle$$

το οποίο ισούται με μηδέν από τον ορισμό του $\langle \cdot, \cdot\rangle$. Άρα $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$, δηλαδή η $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ ισχύει για $\lambda = -1$. Έτσι με επαγωγή ισχύει για $\lambda \in \mathbb{Z}$. Αν τώρα $\lambda = n/m$ ρητός με $n \in \mathbb{Z}$ και $m \in \mathbb{N}$ τότε

$$m\langle \lambda x, y\rangle = \langle m\lambda x, y\rangle = \langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle.$$

Άρα

$$\langle \lambda x, y\rangle = \frac{n}{m}\langle x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι νόρμα είναι συνεχής συνάρτηση λόγω της τριγωνικής ανισότητας που ικανοποιεί, συνεπώς αν λ άρρητος θεωρούμε ακολουθία ρητών λ_n που συγκλίνει στο λ (για παράδειγμα η $\lambda_n = [n\lambda]/n \in \mathbb{Q}$) οπότε

$$\begin{aligned}
\langle \lambda x, y\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|\lambda x + y\|^2 - \|\lambda x - y\|^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\|\lambda_n x + y\|^2 - \|\lambda_n x - y\|^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle \lambda_n x, y\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \lambda_n\langle x, y\rangle \\
&= \lambda\langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

Τέλος $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ αφού στην πολική ταυτότητα $\|x + y\| = \|y + x\|$ και $\|x - y\| = \| - (y - x)\| = \|y - x\|$ οπότε ισχύει και η $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$. Δ

Αναφορές

[EMT2004] Yuli Eidelman, Vitali Milman, and Antonis Tsolomitis, *Functional Analysis: An Introduction*, GSM/66, AMS, 2004

[JvN1935] P. Jordan and J. von Neumann, *On inner products in linear metric spaces*, Ann. of Math. (2) vol. 36 (1935) pp. 719–723.

Βιβλίο 3ο

Προλεγόμενα των μεταφραστών

Υπενθυμίζουμε ότι με α^2 συμβολίζουμε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά α, και με $\alpha\beta$ το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές α και β. Ομοίως και για ευθύγραμμα τμήματα: το AB^2 συμβολίζει το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά ίση με το AB και το $\text{AB} \cdot \Gamma\Delta$ συμβολίζει το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές AB και ΓΔ. Κανένας από τους δύο συμβολισμούς δεν αποτελεί προσπάθεια καταμέτρησής του.

Ορισμοί

Ορισμοί 1 (501)

(ορ. 1) «Ίσοι» κύκλοι είναι εκείνοι που έχουν ίσες διαμέτρους ή ίσες ακτίνες.

(ορ. 2) Μια ευθεία λέγεται «εφαπτομένη» σε έναν κύκλο όταν έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο και δεν τον τέμνει όταν προεκταθεί.

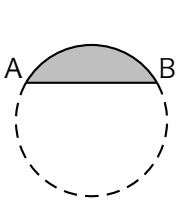
(ορ. 3) Δυο κύκλοι λέμε ότι «εφάπτονται» όταν έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο και δεν τέμνονται. (στμ: «τέμνονται» εννοεί ότι καθένας από τους κύκλους αποκόπτει από τον άλλο «τμήμα» κύκλου όπως αυτό ορίζεται στον Ορισμό 6, σελ. 19.)

(ορ. 4) Δυο ευθείες λέμε ότι «ισαπέχουν» από το κέντρο ενός κύκλου όταν τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται από το κέντρο προς τις ευθείες είναι ίσα.

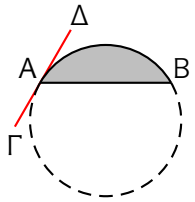
(ορ. 5) Μια ευθεία λέμε ότι «απέχει μεγαλύτερη απόσταση» από το κέντρο ενός κύκλου από μια άλλη όταν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το κέντρο προς την ευθεία αυτή είναι μεγαλύτερο.

(ορ. 6) «Τμήμα κύκλου» είναι το σχήμα που περιέχεται ανάμεσα σε ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου

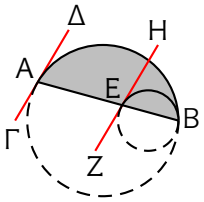
(στο εξής «χορδή») και το τόξο του κύκλου που έχει ίδια άκρα με αυτό το ευθύγραμμο τμήμα.



Τμήμα κύκλου



Γωνία τμήματος η $\overset{\frown}{\text{ΒΑΔ}}$.



Διαφορετικοί κύκλοι, διαφορετικά τμήματα, ίσες γωνίες.

(Στμ: στον επόμενο ορισμό ορίζεται η γωνία χορδής και τόξου με τα ίδια άκρα στον κύκλο. Σύμφωνα με τον Ορισμό „ σελ. 19 η γωνία αυτή είναι η «κλίση» μεταξύ χορδής και τόξου. Το γεγονός ότι η «κλίση» αυτή συμπίπτει με την «κλίση» της χορδής με την εφαπτομένη στο άκρο της όπως την αντιλαμβανόμαστε σήμερα προκύπτει άμεσα από την Π16, σελ. 94 (δείτε σχετικό σχόλιο εκεί).)

(ορ. 7) «Γωνία τμήματος κύκλου» λέγεται η γωνία που περιέχεται σε μια χορδή του κύκλου και στο τόξο του κύκλου που έχει ίδια άκρα με τη χορδή.

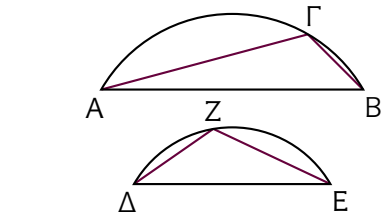
(ορ. 8) «Γωνία σε ένα τμήμα κύκλου» (στο εξής «εγγεγραμμένη γωνία») είναι η γωνία που περιέχεται στα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται από ένα σημείο ενός τόξου του κύκλου προς τα άκρα της βάσης του τμήματος που είναι η χορδή με άκρα τα άκρα του τόξου.

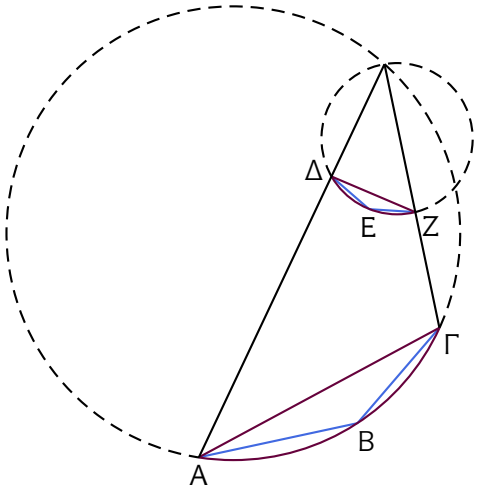
(ορ. 9) Όταν οι χορδές που περιέχουν μια γωνία αποκόπτουν τόξο από τον κύκλο λέμε ότι η γωνία «βαίνει» στο τόξο αυτό.

(ορ. 10) «Τομέας κύκλου» είναι το σχήμα που περιέχεται μεταξύ των πλευρών μιας γωνίας που έχει την κορυφή της στο κέντρο του κύκλου (στο εξής «επίκεντρη γωνία») και στο τόξο του κύκλου που αποκόπτεται από τις πλευρές της γωνίας.

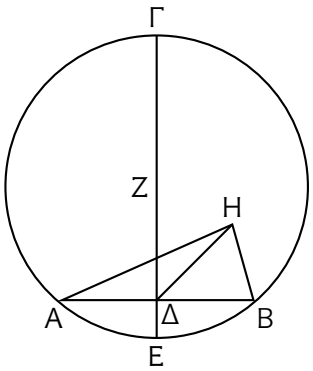
(ορ. 11) Δυο τμήματα κύκλων λέγονται «όμοια» όταν υπάρχουν δύο γωνίες στα τμήματα αυτά, η μία στο ένα και η άλλη στο άλλο, που να είναι ίσες[4].

4. Ο Ευκλείδης εδώ γράφει επιπλέον ότι «δυο τμήματα κύκλων είναι όμοια όταν οι γωνίες σε αυτά είναι ίσες», πιθανώς διότι στην Π21, σελ. 97 αποδεικνύει ότι όλες οι γωνίες σε ένα τμήμα κύκλου είναι ίσες μεταξύ τους.





Πρόταση 1 (Κατασκευή) (502) *Να βρεθεί το κέντρο ενός κύκλου που έχει δοθεί.*



Υλοποίηση: Έστω ότι δίνεται ο κύκλος ΑΒΓ του οποίου το κέντρο πρέπει να βρεθεί. Φέρνουμε τυχούσα χορδή ΑΒ την οποία διαιρούμε σε δυο ίσα τμήματα λαμβάνοντας το μέσο της Δ. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΒ (ΒΙ, ΠΙΙ, σελ. 27) που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Ε. Διαιρούμε και την ΓΕ σε δυο ίσα τμήματα λαμβάνοντας το μέσο της Ζ. Ισχυρίζομαι ότι το Ζ είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ.

Πράγματι, αν το Ζ δεν είναι το κέντρο του κύκλου, τότε αυτό θα είναι ένα άλλο σημείο (στμ: έξω από την ΓΕ), έστω το Η. Φέρνουμε τις ΗΑ, ΗΔ και ΗΒ.

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΗΔΑ και ΗΔΒ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΑΔ = ΔΒ, την ΔΗ κοινή και ΗΑ = ΗΒ καθώς είναι ακτίνες του

κύκλου. Άρα τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα και επομένως ισχύει $\widehat{A\Delta H} = \widehat{H\Delta B}$ (ΒΙ, Π8, σελ. 25).

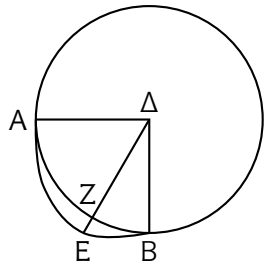
Όταν όμως μια ευθεία που άγεται από σημείο άλλης ευθείας σχηματίζει με αυτήν ίσες εφεξής γωνίες τότε κάθεμιά από τις γωνίες αυτές είναι ορθή (ΒΙ, Ορ10, σελ. 20). Άρα $\widehat{H\Delta B} = 1$ ορθή. Είναι όμως και $\widehat{Z\Delta B} = 1$ ορθή και άρα $\widehat{H\Delta B} = \widehat{Z\Delta B}$. Αλλά αυτό είναι αδύνατο καθώς $\widehat{H\Delta B} > \widehat{Z\Delta B}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το Η δεν είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ. Ενώ με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και κανένα άλλο σημείο (πλην του Ζ) δεν είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ.

Άρα το Ζ είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ.

Πόρισμα 2 *Από το παραπάνω είναι φανερό ότι αν σε έναν κύκλο μια χορδή τέμνει κάθετα μια άλλη χορδή στο μέσον της τότε το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω σε αυτήν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.* Δ

Πρόταση 2 (502) *Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δυο τυχόντα σημεία της περιφέρειας ενός κύκλου βρίσκεται μέσα στον κύκλο.*



Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓ και έστω τα τυχόντα σημεία του Α και Β. Ισχυρίζομαι ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ βρίσκεται μέσα στον κύκλο ΑΒΓ.

Ας υποθέσουμε ότι το ΑΒ βρίσκεται έξω από τον κύκλο ΑΒΓ όπως το ΑΕΒ. Λαμβάνουμε το κέντρο Δ του κύκλου (ΠΙ, σελ. 81) και φέρνουμε τις ΔΑ, ΔΒ και ΔΖΕ.

Επειδή ΔΑ = ΔΒ έπεται ότι $\widehat{\Delta AE} = \widehat{\Delta BE}$ (ΒΙ, Π5, σελ. 24) ενώ καθώς στο τρίγωνο ΔΑΕ η πλευρά ΑΕ έχει προεκταθεί είναι $\widehat{\Delta EB} > \widehat{\Delta AE}$ (ΒΙ, Π16, σελ. 30). Συνεπώς, $\widehat{\Delta EB} > \widehat{\Delta BE}$.

Σε ένα τρίγωνο όμως απέναντι από την μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά (ΒΙ, Π19, σελ. 31) και άρα ΔΒ > ΔΕ. Καθώς ΔΒ = ΔΖ έπεται ότι ΔΖ > ΔΕ. Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς ΔΖ < ΔΕ.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το τμήμα ΑΒ δεν βρίσκεται έξω από τον κύκλο ΑΒΓ.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το ΑΒ δεν βρίσκεται ούτε πάνω στην περιφέρεια του κύκλου ΑΒΓ και άρα το ΑΒ βρίσκεται μέσα στον κύκλο ΑΒΓ.

Συνεπώς, το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δυο σημεία της περιφέρειας ενός κύκλου βρίσκεται μέσα σε αυτόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

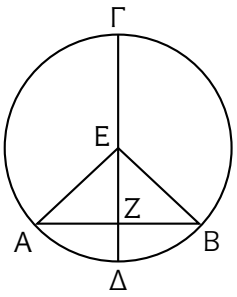
Πρόταση 3 (503) *Σε έναν κύκλο αν μια διάμετρος τέμνει μια χορδή στο μέσο της τότε είναι κάθετη σε αυτή. Ισχύει και το αντίστροφο: αν μια διάμετρος είναι κάθετη σε μια χορδή τότε την τέμνει στο μέσο της.*

Απόδειξη. (Ευθύ) Έστω ο κύκλος ΑΒΓ και η διάμετρός του ΓΔ που τέμνει την χορδή ΑΒ στο μέσο της Ζ. Λαμβάνουμε το κέντρο Ε του κύκλου ΑΒΓ (Π1, σελ. 81) και φέρνουμε τις ΕΑ και ΕΒ.

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΖΕ και ΒΖΕ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΑΖ = ΖΒ, την ΖΕ κοινή πλευρά και ΕΑ = ΕΒ. Άρα είναι ίσα και επομένως ισχύει $\widehat{AZE} = \widehat{BZE}$ (Β1, Π8, σελ. 25).

Όταν όμως μια ευθεία που άγεται από ένα σημείο μιας άλλης ευθείας σχηματίζει με αυτή ίσες τις εφεξής γωνίες τότε καθεμιά από τις εφεξής αυτές γωνίες είναι ορθή (Β1, Ορ10, σελ. 20). Δηλαδή ισχύει

$$\widehat{AZE} = \widehat{BZE} = 1\,\text{ορθή}$$



Άρα η διάμετρος ΓΔ που τέμνει την χορδή ΑΒ στο μέσο της Ζ είναι κάθετη σε αυτή.

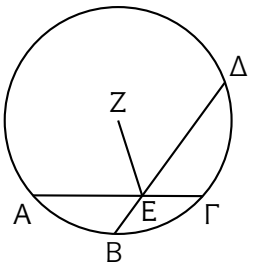
(Αντίστροφο) Έστω τώρα ότι η ΓΔ είναι κάθετη στην ΑΒ. Ισχυρίζομαι ότι η ΓΔ διέρχεται από το μέσο της ΑΒ, δηλαδή ΑΖ = ΖΒ.

Πράγματι, καθώς ΕΑ = ΕΒ έπεται ότι $\widehat{EAZ} = \widehat{EBZ}$ (Β1, Π5, σελ. 24). Επιπλέον ισχύει $\widehat{AZE} = \widehat{BZE}$ καθώς είναι ορθές.

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΕΑΖ και ΕΖΒ παρατηρούμε ότι έχουν δυο γωνίες τους αντίστοιχα ίσες και μια κοινή πλευρά την ΕΖ που βρίσκεται απέναντι από τις ίσες γωνίες. Άρα θα είναι αντίστοιχα ίσες και υπόλοιπες πλευρές τους (Β1, Π26, σελ. 36) και έτσι ΔΖ = ΖΒ.

Συνεπώς, αν σε έναν κύκλο μια διάμετρος τέμνει μια χορδή στο μέσο της τότε είναι κάθετη σε αυτή και αντιστρόφως. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 4 (503) *Σε έναν κύκλο δυο τεμνόμενες χορδές που δεν διέρχονται από το κέντρο δεν διχοτομούνται.*



Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔ και οι χορδές του ΑΓ και ΒΔ που δεν διέρχονται από το κέντρο του κύκλου και που τέμνονται στο Ε. Ισχυρίζομαι ότι οι χορδές ΑΓ και ΒΔ δεν τέμνονται στο μέσον τους.

Αν υποθέσουμε ότι αυτές έχουν κοινό μέσον το Ε τότε ισχύουν ΑΕ = ΕΓ και ΒΕ = ΕΔ. Λαμβάνουμε το κέντρο Ζ του κύκλου ΑΒΓΔ (Π1, σελ. 81) και φέρνουμε την ΖΕ.

Επειδή λοιπόν η ΖΕ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και τέμνει την ΑΓ, που δεν διέρχεται από το κέντρο, στο μέσον της έπεται ότι η ΖΕ είναι κάθετη στην ΑΓ (Π3, σελ. 82) και άρα $\widehat{ZEA} = 1\,\text{ορθή}$.

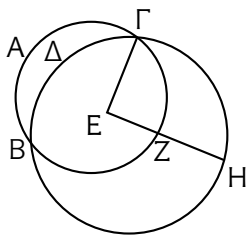
Όμοια, καθώς η ΖΕ τέμνει την χορδή ΒΔ στο μέσον της είναι κάθετη σε αυτήν και άρα $\widehat{ZEB} = 1$ορθή.

Έτσι, $\widehat{ZEA} = \widehat{ZEB}$ που όμως είναι αδύνατον καθώς $\widehat{ZEA} < \widehat{ZEB}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι ΑΓ και ΒΔ δεν τέμνονται και οι δύο στο μέσον τους.

Συνεπώς, σε έναν κύκλο δυο τεμνόμενες χορδές που δεν διέρχονται από το κέντρο δεν διχοτομούνται. *Δ*

Πρόταση 5 (504) *Αν δυο κύκλοι τέμνονται τότε δεν έχουν το ίδιο κέντρο.*



Απόδειξη. Θεωρούμε τους κύκλους ΑΒΓ και ΓΔΗ που τέμνονται στα σημεία Β και Γ. Ισχυρίζομαι ότι οι κύκλοι ΑΒΓ και ΓΔΗ δεν έχουν το ίδιο κέντρο.

Υποθέτουμε ότι οι δυο κύκλοι έχουν κοινό κέντρο έστω το σημείο Ε. Φέρνουμε την ΕΗ που τέμνει τον κύκλο ΑΒΓ στο Ζ.

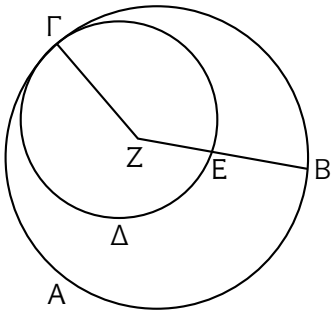
Επειδή το Ε είναι κέντρο του κύκλου ΑΒΓ έπεται ότι ΕΓ = ΕΖ.

Ομοίως επειδή το Ε είναι κέντρο του κύκλου ΓΔΗ έπεται ότι ΕΓ = ΕΗ.

Έτσι, ΕΗ = ΕΖ που όμως είναι αδύνατο καθώς ΕΖ < ΕΗ και άρα το Ε δεν είναι κέντρο των κύκλων ΑΒΓ και ΓΔΗ.

Συνεπώς, αν δυο κύκλοι τέμνονται τότε δεν έχουν κοινό κέντρο· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 6 (504) *Δυο εφαπτόμενοι κύκλοι δεν έχουν κοινό κέντρο.*



Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι οι κύκλοι ΑΒΓ και ΓΔΕ εφάπτονται στο σημείο Γ. Ισχυρίζομαι ότι οι κύκλοι αυτοί δεν έχουν κοινό κέντρο.

Υποθέτουμε ότι οι κύκλοι ΑΒΓ και ΓΔΕ έχουν κοινό κέντρο το Ζ και φέρνουμε τις ΖΓ και ΖΕΒ.

Επειδή το Ζ είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ έπεται ότι ΖΓ = ΖΒ, καθώς όμως είναι κέντρο και του κύκλου ΓΔΕ έπεται ότι ΖΓ = ΖΕ και άρα ΖΕ = ΖΒ. Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς ΖΕ < ΖΒ.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το Ζ δεν είναι κοινό κέντρο των κύκλων ΑΒΓ και ΓΔΕ.

Άρα, αν δυο κύκλοι εφάπτονται τότε δεν έχουν κοινό κέντρο. *Δ*

Πρόταση 7 (505) *Αν από ένα τυχόν σημείο της διαμέτρου ενός κύκλου (αλλά όχι το κέντρο του) αχθούν ευθύγραμμα τμήματα προς την περιφέρεια του κύκλου τότε:*

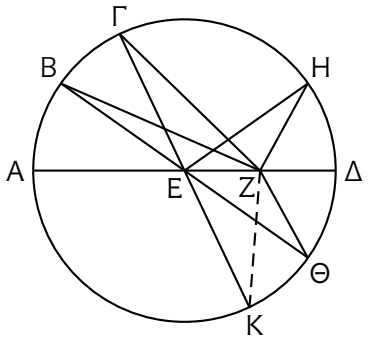
α) *το μεγαλύτερο από αυτά τα τμήματα είναι εκείνο στο οποίο ανήκει το κέντρο του κύκλου,*

β) *το μικρότερο τμήμα είναι εκείνο που προκύπτει αν από τη διάμετρο αφαιρεθεί το μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα που αναφέρεται στο α),*

γ) *μεταξύ δυο οποιονδήποτε άλλων από αυτά τα τμήματα μεγαλύτερο είναι εκείνο που βρίσκεται πλησιέστερα στο κέντρο του κύκλου και*

δ) *υπάρχουν μόνο δυο ίσα τέτοια ευθύγραμμα τμήματα και αυτά βρίσκονται εκατέρωθεν του μικρότερου ευθύγραμμου τμήματος.*

Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔ με κέντρο το Ε και η διάμετρός του ΑΔ. Πάνω στην ΑΔ παίρνουμε το σημείο Ζ (διαφορετικό από Ε) και από αυτό φέρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΖΒ, ΖΓ και ΖΗ προς την περιφέρεια του κύκλου. Ισχυρίζομαι ότι το μεγαλύτερο από αυτά είναι το ΖΑ, το μικρότερο το ΖΔ ενώ για τα υπόλοιπα ισχύει ΖΒ > ΖΓ > ΖΗ.



Φέρνουμε τις ΒΕ, ΓΕ και ΗΕ.

Από την Τριγωνική ανισότητα (ΒΙ, Π20, σελ. 32) είναι γνωστό ότι σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των δυο πλευρών μεγαλύτερο από την τρίτη πλευρά. Έτσι ΕΒ + ΕΖ > ΒΖ. Αλλά καθώς ΑΕ = ΒΕ είναι και

$$ΕΒ + ΕΖ = ΑΕ + ΕΖ = ΑΖ,$$

οπότε ΑΖ > ΒΖ.

Επειδή πάλι ΒΕ = ΓΕ, ΖΕ κοινή και $\widehat{ΒΕΖ} > \widehat{ΓΕΖ}$ ισχύει και ότι ΒΖ > ΓΖ (ΒΙ, Π24, σελ. 35). Ομοίως από τα τρίγωνα ΓΕΖ και ΗΕΖ συμπεραίνουμε ότι ΓΖ > ΖΗ. Από την τριγωνική ανισότητα στο ΗΖΕ έπεται ότι

$$ΗΖ + ΖΕ > ΕΗ$$

και καθώς ΕΗ = ΕΔ ισχύει

$$ΗΖ + ΖΕ > ΕΔ.$$

Αφαιρώντας το ΖΕ παίρνουμε ΗΖ > ΖΔ. Άρα το μεγαλύτερο τμήμα είναι το ΖΑ και το μικρότερο το ΖΔ και επιπλέον ισχύει

$$ΖΒ > ΖΓ > ΖΗ.$$

Ισχυρίζομαι ακόμα ότι από το Ζ άγονται δυο μόνο τμήματα προς την περιφέρεια του κύκλου που να είναι ίσα και που βρίσκονται εκατέρωθεν του ΖΔ.

Με πλευρά την ΕΖ και κορυφή το Ε κατασκευάζουμε την γωνία $\widehat{ZE\Theta} = \widehat{HEZ}$ (ΒΙ, Π23, σελ. 34) και φέρνουμε την ΖΘ.

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΗΕΖ και ΕΖΘ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΗΕ = ΕΘ, την ΕΖ κοινή πλευρά και $\widehat{HEZ} = \widehat{\Theta EZ}$ και επομένως είναι ίσα. Έτσι προκύπτει και ότι ΖΗ = ΖΘ.

Ισχυρίζομαι ότι δεν είναι δυνατό να αχθεί από το Ζ προς την περιφέρεια του κύκλου άλλο ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ΖΗ, εκτός του ΖΘ.

Ας υποθέσουμε ότι μπορεί να αχθεί και το ΖΚ = ΖΗ. Τότε, επειδή ΖΘ = ΖΗ, έπεται ότι ΖΚ = ΖΘ αλλά αυτό είναι αδύνατο καθώς το ΖΚ σχηματίζει με τη διάμετρο μικρότερη γωνία από αυτή που σχηματίζει το ΖΘ (στμ: $\widehat{AZK} < \widehat{AZ\Theta}$) και άρα ΖΚ > ΖΘ.

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι από το Ζ δεν μπορεί να αχθεί άλλο ευθύγραμμο τμήμα προς την περιφέρεια του κύκλου που να είναι ίσο με το ΗΖ εκτός από το ΖΘ.

Συνεπώς, αν από ένα σημείο της διαμέτρου ενός κύκλου (αλλά όχι το κέντρο) αχθούν ευθύγραμμα τμήματα προς την περιφέρεια του κύκλου τότε το μεγαλύτερο από αυτά είναι αυτό που περιέχει το κέντρο και το μικρότερο είναι αυτό που προκύπτει αν από τη διάμετρο αφαιρεθεί το μεγαλύτερο. Από τα υπόλοιπα τμήματα μεγαλύτερο είναι εκείνο που σχηματίζει τη μικρότερη γωνία με τη διάμετρο ενώ υπάρχουν και δυο μόνο ίσα τμήματα που άγονται από το σημείο προς την περιφέρεια και αυτά βρίσκονται εκατέρωθεν του μικρότερου ευθύγραμμου τμήματος από το σημείο προς την περιφέρεια. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 8 (506) *Αν από ένα σημείο εκτός κύκλου αχθούν ευθύγραμμα τμήματα προς τον κύκλο από τα οποία το ένα διέρχεται από το κέντρο του κύκλου τότε:*

α) *από τα τμήματα των οποίων το ένα άκρο βρίσκεται στο κοίλο μέρος της περιφέρειας του κύκλου*[5] *το μεγαλύτερο είναι αυτό που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. Από οποιαδήποτε δυο άλλα από τα τμήματα αυτά μεγαλύτερο είναι εκείνο που βρίσκεται πλησιέστερα στο κέντρο του κύκλου.*

β) *Από τα τμήματα των οποίων το ένα άκρο βρίσκεται στο κυρτό μέρος της περιφέρειας του κύκλου*[6] *το μικρότερο είναι το τμήμα μεταξύ του σημείου και του άκρου της διαμέτρου. Από οποιαδήποτε δυο άλλα από*

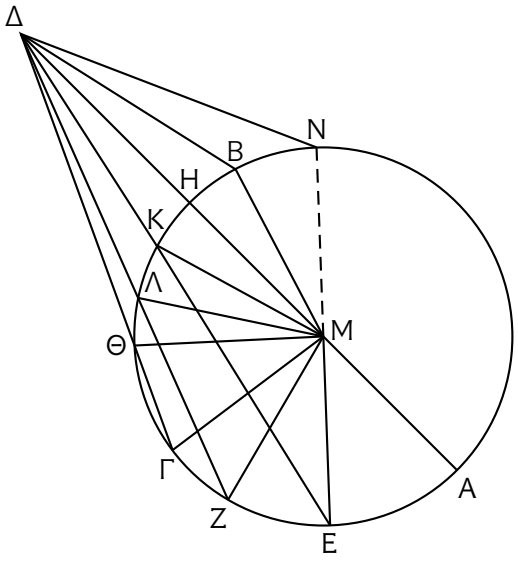
5. Στμ: δηλαδή στο τόξο του κύκλου που αντιστοιχεί σε μη κυρτή επίκεντρη γωνία

6. Στμ: δηλαδή στο τόξο του κύκλου που αντιστοιχεί σε κυρτή επίκεντρη γωνία

τα τμήματα αυτά μικρότερο είναι εκείνο που βρίσκεται πλησιέστερα στο ελάχιστο τμήμα μεταξύ του σημείου και του άκρου της διαμέτρου[7].

γ) *Υπάρχουν δύο μόνο ίσα ευθύγραμμα τμήματα από το σημείο προς τον κύκλο που βρίσκονται εκατέρωθεν του ελάχιστου τμήματος μεταξύ του σημείου και του κύκλου.*

Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓ και το σημείο Δ εκτός αυτού. Από το Δ φέρνουμε τις ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ και ΔΓ από τις οποίες η ΔΑ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. Ισχυρίζομαι ότι από τα τμήματα των οποίων το ένα άκρο βρίσκεται στο κοίλο μέρος ΑΕΖΓ της περιφέρειας του κύκλου το μεγαλύτερο είναι το ΔΑ που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και $\Delta E > \Delta Z > \Delta \Gamma$. Από τα τμήματα των οποίων το ένα άκρο βρίσκεται στο κυρτό μέρος ΘΛΚΗ της περιφέρειας του κύκλου το μικρότερο είναι το ΔΗ που βρίσκεται μεταξύ του Δ και του άκρου Η της διαμέτρου ΑΗ και τα τμήματα που βρίσκονται πλησιέστερα στο ΔΗ είναι μικρότερα από εκείνα που βρίσκονται πιο μακριά. Δηλαδή $\Delta K < \Delta \Lambda < \Delta \Theta$.



Λαμβάνουμε το κέντρο Μ του κύκλου ΑΒΓ (ΠΙ, σελ. 81) και φέρνουμε τις ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ και ΜΘ. Επειδή $AM = EM$ προσθέτοντας την ΜΔ παίρνουμε

$$AM + M\Delta = EM + M\Delta$$

και άρα $A\Delta = EM + M\Delta$. Από την Τριγωνική ανισότητα (ΒΙ, Π20, σελ. 32) έπεται όμως ότι

$$EM + M\Delta > E\Delta$$

και άρα $A\Delta > E\Delta$. Επειδή πάλι τα τρίγωνα ΜΕΔ και ΜΖΔ έχουν $ME = MZ$, την ΜΔ κοινή και $\widehat{EM\Delta} > \widehat{ZM\Delta}$, έπεται ότι $E\Delta > Z\Delta$ (ΒΙ, Π24, σελ. 35).

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $Z\Delta > \Gamma\Delta$ και άρα $\Delta A > \Delta E > \Delta Z > \Delta \Gamma$.

Από την Τριγωνική ανισότητα (ΒΙ, Π20, σελ. 32) και πάλι, είναι $MK + K\Delta > M\Delta$ και καθώς $MH = MK$ έπεται ότι

$$K\Delta > M\Delta - MH = \Delta H$$

7. Στμ: δηλαδή σχηματίζει την μικρότερη γωνία με το ελάχιστο τμήμα μεταξύ του σημείου και του κύκλου.

δηλαδή $\Delta H < K\Delta$.

Αλλά

$$MK + K\Delta < M\Lambda + \Lambda\Delta$$

καθώς στο τρίγωνο $M\Lambda\Delta$ από το εσωτερικό σημείο του Κ έχουν αχθεί τα τμήματα προς τα δυο άκρα της βάσης του $M\Delta$ (ΒΙ, Π21, σελ. 33).

Καθώς όμως $MK = M\Lambda$ έπεται ότι $K\Delta < \Lambda\Delta$.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\Delta\Lambda < \Delta\Theta$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το μικρότερο τμήμα από το Δ προς τον κύκλο είναι το ΔΗ και $\Delta K < \Delta\Lambda < \Delta\Theta$.

Ισχυρίζομαι ακόμα ότι από το Δ προσπίπτουν δυο μόνο ίσα τμήματα προς τον κύκλο και αυτά βρίσκονται εκατέρωθεν του μικρότερου τμήματος από το Δ προς τον κύκλο (δηλαδή του ΔΗ).

Με πλευρά την $M\Delta$ και κορυφή το Μ κατασκευάζω την γωνία $\widehat{\Delta MB} = \widehat{KM\Delta}$ (ΒΙ, Π23, σελ. 34) και φέρνουμε την ΔΒ.

Επειδή τώρα $MK = MB$, $M\Delta$ κοινή και $\widehat{KM\Delta} = \widehat{BM\Delta}$ τα τρίγωνα $KM\Delta$ και $BM\Delta$ είναι ίσα (ΒΙ, Π4, σελ. 23) και άρα $\Delta K = \Delta B$.

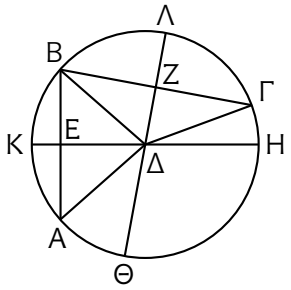
Ισχυρίζομαι δε, ότι δεν υπάρχει άλλο ευθύγραμμο τμήμα από το Δ προς τον κύκλο που να είναι ίσο με το ΔΚ.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα άλλο τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα, έστω το ΔΝ, τότε καθώς $\Delta K = \Delta B$ έπεται ότι $\Delta N = \Delta B$ που όμως είναι αδύνατον (από το β της πρότασης) καθώς ένα από τα δύο είναι πλησιέστερα στο ΔΗ και άρα δεν γίνεται να είναι ίσα.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι είναι αδύνατον να προσπέσουν περισσότερα από δύο ευθύγραμμα τμήματα από το Δ προς τον κύκλο που να βρίσκονται εκατέρωθεν του μικρότερου ευθύγραμμου τμήματος από το Δ προς τον κύκλο (δηλαδή του ΔΗ).

Συνεπώς, αν από ένα σημείο εκτός κύκλου αχθούν ευθύγραμμα τμήματα προς τον κύκλο από τα οποία το ένα διέρχεται από το κέντρο του κύκλου τότε από τα τμήματα των οποίων το ένα άκρο βρίσκεται στο κοίλο μέρος της περιφέρειας του κύκλου το μεγαλύτερο είναι αυτό που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. Από οποιαδήποτε δυο άλλα από τα τμήματα αυτά μεγαλύτερο είναι εκείνο που βρίσκεται πλησιέστερα στο κέντρο του κύκλου. Επιπλέον, από τα τμήματα των οποίων το ένα άκρο βρίσκεται στο κυρτό μέρος της περιφέρειας του κύκλου το μικρότερο είναι το τμήμα μεταξύ του σημείου και του άκρου της διαμέτρου και από οποιαδήποτε άλλα δύο από τα τμήματα αυτά μικρότερο είναι εκείνο που βρίσκεται πλησιέστερα στο ελάχιστο τμήμα μεταξύ του σημείου και του άκρου της διαμέτρου. Τέλος, υπάρχουν δύο μόνο ίσα ευθύγραμμα τμήματα από το σημείο προς τον κύκλο που βρίσκονται εκατέρωθεν του ελάχιστου τμήματος μεταξύ του σημείου και του κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 9 (507) *Αν από ένα σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός κύκλου άγονται προς την περιφέρεια περισσότερα από δυο ίσα ευθύγραμμα τμήματα τότε το σημείο αυτό είναι το κέντρο του κύκλου.*



Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓ και το σημείο Δ στο εσωτερικό του από το οποίο άγονται τα ίσα τμήματα ΔΑ, ΔΒ και ΔΓ προς την περιφέρεια του κύκλου. Ισχυρίζομαι ότι το Δ είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ.

Φέρνουμε τις ΑΒ, ΒΓ και έστω Ε και Ζ τα μέσα τους αντίστοιχα. Στη συνέχεια φέρνουμε και τις ΕΔ και ΖΔ οι προεκτάσεις των οποίων τέμνουν τον κύκλο στα Η, Κ, Θ και Λ.

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΔ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΑΕ = ΕΒ, την ΕΔ κοινή και ΔΑ = ΔΒ και άρα είναι ίσα οπότε είναι και $\widehat{AE\Delta} = \widehat{BE\Delta}$. Έτσι, καθεμιά από τις $\widehat{AE\Delta}$ και $\widehat{BE\Delta}$ είναι ίση με μια ορθή (Β1, Ορ10, σελ. 20). Άρα η ΗΚ τέμνει κάθετα την ΑΒ στο Ε που είναι το μέσο της.

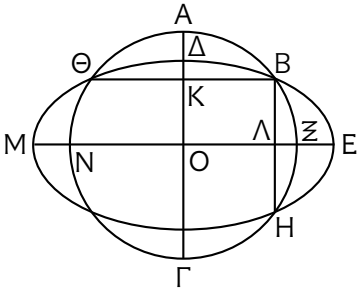
Όταν όμως μια χορδή τέμνει κάθετα μια άλλη χορδή τότε το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω σε αυτή (Π1, σελ. 81). Άρα το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω στην ΗΚ.

Όμοια αποδεικνύεται ότι το κέντρο του κύκλου κείται και στην ΘΛ.

Οι ΗΚ, ΘΛ τέμνονται μόνο στο Δ. Έτσι αυτό το σημείο είναι το κέντρο του κύκλου.

Συνεπώς, αν από εσωτερικό σημείο ενός κύκλου άγονται προς την περιφέρεια του περισσότερα από δυο ίσα ευθύγραμμα τμήματα τότε το σημείο αυτό είναι το κέντρο του κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 10 (508) *Ένας κύκλος δεν μπορεί να τέμνει έναν άλλο κύκλο σε περισσότερα από δυο σημεία.*



Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο κύκλος ΑΒΓ τέμνει τον κύκλο ΔΕΗ σε περισσότερα από δύο σήμεια, έστω στα Β, Η και Θ. Φέρνουμε τις ΒΘ και ΒΗ και λαμβάνουμε τα μέσα τους Κ και Λ αντίστοιχα.

Από τα Κ και Λ φέρνουμε τις ΚΓ και ΛΜ κάθετες στις ΒΘ και ΒΗ αντίστοιχα οι προεκτάσεις των οποίων τέμνουν τους κύκλους ΑΒΓ και ΔΕΗ στα Α και Ε αντίστοιχα.

Επειδή τώρα στον κύκλο ΑΒΓ η διάμετρος ΑΓ τέμνει κάθετα την χορδή ΒΘ στο μέσον της έπεται ότι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ είναι ένα σημείο της ΑΓ (Πόρισμα, Π1, σελ. 81).

Ομοίως, στον ίδιο κύκλο η διάμετρος ΝΞ τέμνει κάθετα την χορδή ΒΗ στο μέσον της και άρα το κέντρο του κύκλου είναι σημείο και της ΝΞ.

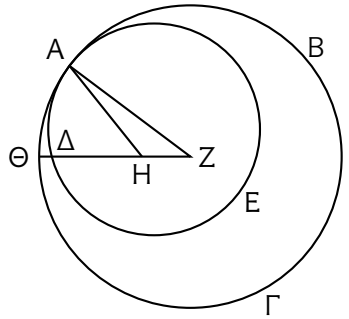
Καθώς όμως οι ΑΓ και ΝΞ δεν έχουν άλλο κοινό σημείο εκτός από το Ο συμπεραίνουμε ότι το Ο είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι το Ο είναι το κέντρο του κύκλου ΔΕΗ.

Άρα, οι κύκλοι ΑΒΓ και ΔΕΗ τέμνονται και έχουν κοινό κέντρο το Ο. Αυτό όμως είναι αδύνατο (Π5, σελ. 84).

Συνεπώς, δυο κύκλοι δεν είναι δυνατόν να τέμνονται σε περισσότερα από δυο σημεία. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 11 (508) *Αν δυο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά τότε η προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα κέντρα των δυο κύκλων διέρχεται από το σημείο επαφής τους.*



Απόδειξη. Έστω ότι οι κύκλοι ΑΒΓ και ΑΔΕ που εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Λαμβάνουμε τα κέντρα Ζ και Η των δυο κύκλων ΑΒΓ και ΑΔΕ αντίστοιχα (Π1, σελ. 81).

Ισχυρίζομαι ότι το ΗΖ προεκτεινόμενο διέρχεται από το Α.

Έστω ότι η προέκταση του ΗΖ δεν διέρχεται από το Α αλλά από ένα άλλο σημείο, έστω το Θ. Φέρνουμε τις ΑΖ και ΑΗ.

Από την Τριγωνική ανισότητα (Β1, Π20, σελ. 32) για τις πλευρές του τριγώνου ΑΖΗ ισχύει $\text{ΑΗ} + \text{ΗΖ} > \text{ΖΑ}$ και άρα $\text{ΑΗ} + \text{ΗΖ} > \text{ΖΘ}$ οπότε αφαιρώντας την ΗΖ παίρνουμε $\text{ΑΗ} > \text{ΖΗ}$.

Αλλά $\text{ΑΗ} = \text{ΗΔ}$ και έτσι $\text{ΗΔ} > \text{ΗΘ}$ που όμως είναι αδύνατο καθώς $\text{ΗΔ} < \text{ΗΘ}$.

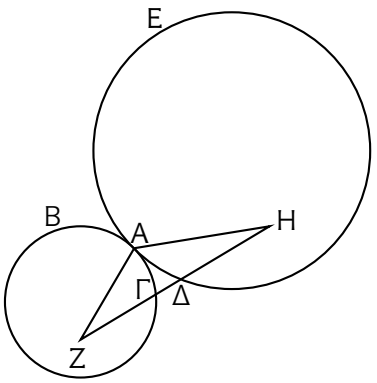
Άρα η προέκταση του ΖΗ διέρχεται από το Α που είναι το σημείο επαφής των κύκλων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

Συνεπώς, αν δυο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά τότε το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα κέντρα τους προεκτεινόμενο διέρχεται από το σημείο επαφής τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 12 (508) *Αν δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά τότε το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα κέντρα των δύο κύκλων διέρχεται από το σημείο επαφής τους.*

Απόδειξη. Έστω οι κύκλοι ΑΒΓ και ΑΔΕ που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Λαμβάνουμε τα κέντρα Ζ και Η των κύκλων ΑΒΓ και ΑΔΕ αντίστοιχα (Π1, σελ. 81). Ισχυρίζομαι ότι η ΖΗ διέρχεται από το σημείο επαφής Α των δύο κύκλων.

Ας υποθέσουμε ότι η ΖΗ δεν διέρχεται από το Α αλλά από τα σημεία Γ και Δ των δύο κύκλων ΑΒΓ και ΑΔΕ αντίστοιχα, ακολουθώντας την διαδρομή ΖΓΔΗ. Φέρνουμε τις ΑΖ και ΑΗ.



Επειδή το Ζ είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ έπεται ότι ΖΑ = ΖΓ και ομοίως επειδή το Η είναι το κέντρο του κύκλου ΑΔΕ είναι ΗΑ = ΗΔ. Συνεπώς,

$$ZA + AH = ZG + H\Delta,$$

και άρα

$$ZH > ZA + AH.$$

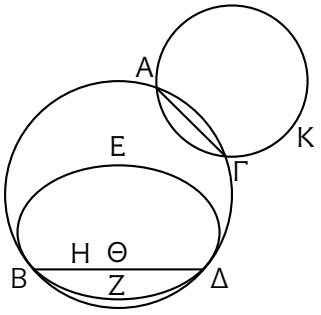
Αυτό όμως είναι αδύνατο σύμφωνα με την Τριγωνική Ανισότητα (ΒΙ, Π20, σελ. 32) καθώς σε ένα τρίγωνο κάθε πλευρά του είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ΖΗ διέρχεται από το σημείο επαφής Α των δύο κύκλων.

Έτσι, αν δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά τότε το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα κέντρα των κύκλων αυτών διέρχεται από το σημείο επαφής τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 13 (509) *Δυο κύκλοι δεν μπορούν να εφάπτονται είτε εσωτερικά είτε εξωτερικά σε περισσότερα από ένα σημεία.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τους κύκλους ΑΒΔΓ και ΕΒΖΔ και υποθέτουμε ότι είναι δυνατόν να εφάπτονται στα σημεία Β και Δ. Λαμβάνουμε τα κέντρα Η και Θ των κύκλων ΑΒΔΓ και ΕΒΖΔ αντίστοιχα. Η ΗΘ προεκτεινόμενη διέρχεται από τα Β και Δ (ΠΙΙ, σελ. 90).



Επειδή το Η είναι κέντρο του ΑΒΔΓ ισχύει ΒΗ = ΗΔ και άρα ΒΗ > ΘΔ. Επομένως θα είναι και ΒΘ > ΘΔ. Το Θ όμως είναι κέντρο του ΕΒΖΔ οπότε ισχύει και ΒΘ = ΘΔ που όμως είναι αδύνατο καθώς δείξαμε ότι ΒΘ > ΘΔ. Άρα δυο κύκλοι δεν είναι δυνατόν να εφάπτονται εσωτερικά σε περισσότερα από ένα σημεία.

Ισχυρίζομαι ακόμα ότι το ίδιο συμβαίνει και όταν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. Υποθέτουμε ότι ο κύκλος ΑΓΚ εφάπτεται εξωτερικά στον ΑΒΔΓ στα σημεία Α και Γ. Φέρνουμε την ΑΓ. Επειδή τα Α και Γ είναι σημεία και των δυο κύκλων το τμήμα με άκρα τα σημεία αυτά βρίσκεται στο εσωτερικό

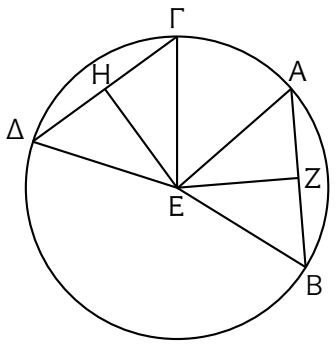
του κάθε κύκλου (Π2, σελ. 82). Έτσι η ΑΓ βρίσκεται στο εσωτερικό του ΑΒΔΓ.

Καθώς όμως ο ΑΓΚ εφάπτεται εξωτερικά στον ΑΒΔΓ δεν μπορεί να του αποκόπτει τμήμα (Ορ3, σελ. 79). Έτσι, ο ΑΓΚ δεν περιέχει την ΑΓ που πρέπει να βρίσκεται εκτός του. Αλλά αυτό είναι αδύνατο καθώς η ΑΓ είναι χορδή του ΑΓΚ.

Συνεπώς, δεν είναι δυνατό δυο κύκλοι να εφάπτονται εξωτερικά σε περισσότερα από ένα σημεία.

Άρα, ένας κύκλος δεν μπορεί να εφάπτεται εσωτερικά ή εξωτερικά σε έναν άλλο σε περισσότερα από ένα σημεία· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 14 (510) *Σε έναν κύκλο οι ίσες χορδές ισαπέχουν από το κέντρο του και αντιστρόφως αν δυο χορδές ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου τότε αυτές είναι ίσες.*



Απόδειξη. (Ευθύ) Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔ και οι χορδές του ΑΒ και ΓΔ με ΑΒ = ΓΔ. Ισχυρίζομαι ότι οι ΑΓ και ΒΔ ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου.

Λαμβάνουμε το κέντρο Ε του κύκλου ΑΒΓΔ (Π1, σελ. 81) και φέρνουμε από το Ε τις ΕΖ και ΕΗ κάθετες στις ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Φέρνουμε και τις ΑΕ και ΕΓ.

Επειδή η ΕΖ που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου τέμνει κάθετα στο Ζ την ΒΑ που δεν διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, έπεται ότι το Ζ είναι το μέσον της ΒΑ (Π3, σελ. 82). Άρα ΑΖ = ΖΒ και επομένως ΑΒ = 2·ΑΖ. Ομοίως ισχύει και ότι ΓΔ = 2·ΓΗ και καθώς ΑΒ = ΓΔ έπεται ότι ΑΖ = ΓΗ.

Επειδή τώρα ΑΕ = ΕΓ θα είναι ισεμβαδικά τα τετράγωνά τους, δηλαδή $\text{ΑΕ}^2 = \text{ΕΓ}^2$. Επειδή $\widehat{\text{ΕΖΑ}} = 1\,\text{ορθή}$, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα (ΒΙ, Π47, σελ. 51), ισχύει $\text{ΑΕ}^2 = \text{ΑΖ}^2 + \text{ΕΖ}^2$. Ομοίως, αφού $\widehat{\text{ΕΗΓ}} = 1\,\text{ορθή}$, $\text{ΕΓ}^2 = \text{ΕΗ}^2 + \text{ΓΗ}^2$. Έτσι,

$$\text{ΑΖ}^2 + \text{ΕΖ}^2 = \text{ΕΗ}^2 + \text{ΓΗ}^2.$$

Αλλά ΑΖ = ΓΗ, άρα από την προηγούμενη $\text{ΕΖ}^2 = \text{ΓΗ}^2$, δηλαδή ΕΖ = ΓΗ.

Σε έναν κύκλο όμως δυο χορδές ισαπέχουν από το κέντρο του όταν τα κάθετα τμήματα από το κέντρο προς τις χορδές αυτές είναι ίσα (Ορ4, σελ. 79). Έτσι, οι χορδές ΑΒ και ΓΔ ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου.

(Αντίστροφο) Έστω τώρα ότι οι χορδές ΑΒ και ΓΔ ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου ΑΒΓΔ. Δηλαδή έστω ότι ΕΖ = ΕΗ. Ισχυρίζομαι ότι ΑΒ = ΓΔ.

Όπως προηγουμένως, ισχύουν ΑΒ = 2 · ΑΖ και ΓΔ = 2 · ΓΗ.

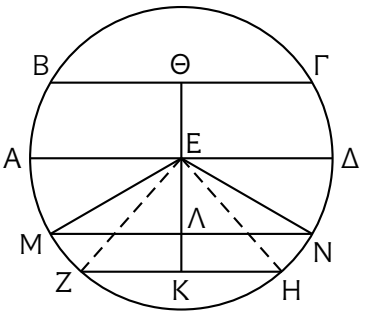
Επειδή $AE = \Gamma E$ έπεται ότι $AE^2 = \Gamma E^2$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51) όμως έπεται ότι $AE^2 = EZ^2 + ZA^2$, καθώς και $\Gamma E^2 = EH^2 + H\Gamma^2$. Έτσι,

$$EZ^2 + ZA^2 = EH^2 + H\Gamma^2.$$

Καθώς όμως $EZ = EH$ συμπεραίνουμε ότι $EZ^2 = EH^2$, οπότε από την προηγούμενη $ZA^2 = H\Gamma^2$, και άρα $AZ = \Gamma H$. Αλλά $AB = 2 \cdot AZ$ και $\Gamma\Delta = 2 \cdot \Gamma H$, οπότε $AB = \Gamma\Delta$.

Συνεπώς, σε έναν κύκλο οι ίσες χορδές ισαπέχουν από το κέντρο και αντιστρόφως, αν δυο χορδές ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου τότε είναι ίσες· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 15 (510) *Η μέγιστη χορδή ενός κύκλου είναι η διάμετρος του. Από τις υπόλοιπες χορδές μεγαλύτερη είναι εκείνη που βρίσκεται πλησιέστερα στο κέντρο του κύκλου.*



Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔ με κέντρο το Ε και η διάμετρός του ΑΔ. Θεωρούμε ακόμα τις χορδές του ΒΓ και ΖΗ τέτοιες ώστε η ΒΓ να απέχει μεγαλύτερη απόσταση από το κέντρο από ότι η ΖΗ.

Ισχυρίζομαι ότι η μεγαλύτερη χορδή είναι η ΑΔ και $B\Gamma > ZH$.

Από το κέντρο Ε φέρνουμε τις κάθετες ΕΘ και ΕΚ στις ΒΓ και ΖΗ αντίστοιχα. Επειδή η ΒΓ απέχει μικρότερη απόσταση από το κέντρο του κύκλου από ότι η ΖΗ έπεται ότι $EK > E\Theta$ (Ορ5, σελ. 79). Πάνω στην ΕΚ παίρνουμε το σημείο Λ τέτοιο ώστε $E\Lambda = E\Theta$ και από το Λ φέρνουμε την ΛΜ κάθετη στην ΕΚ. Η προέκταση της ΛΜ προς το Λ τέμνει τον κύκλο στο Ν. Φέρνουμε και τις ΜΕ, ΕΝ, ΖΕ και ΕΗ. Επειδή $E\Theta = E\Lambda$ έπεται ότι $B\Gamma = MN$ (Π14, σελ. 92). Επιπλέον καθώς $AE = EM$ και $E\Delta = EN$ έπεται ότι

$$A\Delta = AE + E\Delta = EM + EN.$$

Από την τριγωνική ανισότητα (Β1, Π20, σελ. 32) στο ΜΕΝ ισχύει

$$A\Delta = EM + EN > MN = B\Gamma.$$

Επειδή τώρα, τα τρίγωνα ΜΕΝ και ΖΕΗ έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, καθώς $ME = ZE$ και $EN = EH$, ενώ για τις περιεχόμενες σε αυτές τις πλευρές γωνίες ισχύει $\widehat{MEN} > \widehat{ZEH}$ έπεται ότι $MN > ZH$ (Β1, Π24, σελ. 35). Έτσι, καθώς $MN = B\Gamma$, τελικά προκύπτει ότι $B\Gamma > ZH$.

Συνεπώς, η διάμετρος είναι η μέγιστη χορδή ενός κύκλου και από όλες τις άλλες χορδές μεγαλύτερη είναι εκείνη που βρίσκεται πλησιέστερα στο κέντρο του κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

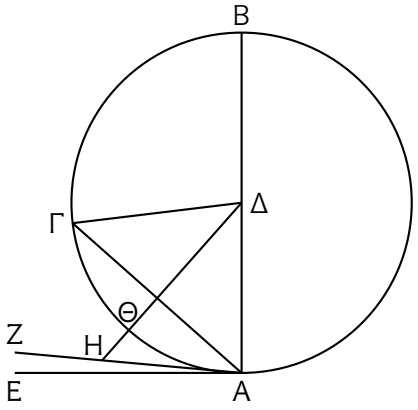
Πρόταση 16 (ΣΙΙ) *Η κάθετη στο άκρο μιας διαμέτρου βρίσκεται εκτός του κύκλου και είναι αδύνατον από το άκρο μιας διαμέτρου να αχθεί ημιευθεία που να βρίσκεται στην περιοχή μεταξύ του κύκλου και της κάθετης στην διάμετρο στο άκρο της αυτό. Επιπλέον κάθε οξεία γωνία με μια πλευρά την διάμετρο και κορυφή το άκρο της διαμέτρου στο οποίο έχει αχθεί η παραπάνω κάθετη είναι μικρότερη από την γωνία του ημικυκλίου* (που περιέχεται στην διάμετρο και το ημικύκλιο (Ορ7, σελ. 80)) *και μεγαλύτερη από την γωνία που περιέχεται στο ημικύκλιο και την κάθετη.*

Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓ με κέντρο το Δ και διάμετρο ΑΒ. Ισχυρίζομαι ότι η κάθετη στην διάμετρο στο σημείο Α βρίσκεται εκτός του κύκλου.

Ας υποθέσουμε ότι η κάθετη στην διάμετρο στο σημείο της Α βρίσκεται εντός του κύκλου και έστω ότι αυτή είναι η ΑΓ. Φέρνουμε και την ΔΓ. Επειδή ΔΑ = ΔΓ έπεται ότι $\widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{A\Gamma\Delta}$ (ΒΙ, Π5, σελ. 24) και καθώς $\widehat{\Delta A\Gamma} = 1$ ορθή είναι και $\widehat{A\Gamma\Delta} = 1$ ορθή. Τότε

$$\widehat{\Delta A\Gamma} + \widehat{A\Gamma\Delta} = 2 \text{ ορθές}$$

που είναι αδύνατο καθώς σε ένα τρίγωνο το άθροισμα δύο οποιονδήποτε γωνιών του είναι πάντα μικρότερο από 2 ορθές (ΒΙ, ΠΙ7, σελ. 30). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η κάθετη στο Α στην ΑΒ δεν βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου ΑΒΓ.



Όμοια αποδεικνύεται και ότι η κάθετη αυτή δεν μπορεί να βρίσκεται πάνω στον κύκλο ΑΒΓ και άρα η κάθετη στο άκρο Α της διαμέτρου ΑΒ βρίσκεται εκτός του κύκλου ΑΒΓ.

Έστω τώρα ότι η ΑΕ είναι η κάθετη στην ΑΒ στο Α. Ισχυρίζομαι ότι στην περιοχή μεταξύ της ΑΕ και του τόξου $\overset{\frown}{\Gamma\Theta A}$ δεν είναι δυνατόν να βρίσκεται άλλη ημιευθεία με αρχή το Α.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια τέτοια ημιευθεία, έστω η ΑΖ. Φέρνουμε από το Δ την ΔΗ κάθετη στην ΑΖ. Επειδή $\widehat{AH\Delta} = 1$ ορθή και η $\widehat{\Delta AH}$ είναι οξεία έπεται ότι ΑΔ > ΔΗ (ΒΙ, ΠΙ9, σελ. 31). Καθώς όμως ΔΘ = ΔΑ συμπεραίνουμε ότι ΔΘ > ΔΗ που όμως είναι αδύνατον καθώς ΔΘ < ΔΗ. Άρα στην περιοχή μεταξύ της ΑΕ και του τόξου $\overset{\frown}{\Gamma\Theta A}$ δεν μπορεί να βρίσκεται καμιά άλλη ημιευθεία που να ξεκινά από το Α.

Ισχυρίζομαι ακόμα ότι η γωνία του ημικυκλίου που περιέχεται από τις ΑΒ και το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Theta A}$ είναι μεγαλύτερη από κάθε ευθύγραμμη οξεία γωνία

με κορυφή το Α και πλευρά ΑΒ ενώ και η γωνία που περιέχεται στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Theta A}$ και την ΑΕ είναι μικρότερη από κάθε οξεία γωνία με κορυφή το Α.

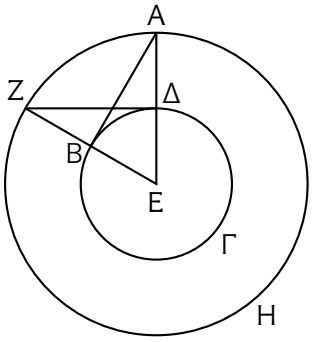
Και αυτό διότι αν υπάρχει ευθύγραμμη γωνία με κορυφή το Α που να είναι μεγαλύτερη από αυτήν που περιέχεται στην ΑΒ και το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Theta A}$ και μικρότερη από αυτήν που περιέχεται στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Theta A}$ και την ΑΕ τότε υπάρχει μια ευθεία στην περιοχή μεταξύ του τόξου $\overset{\frown}{\Gamma\Theta A}$ και της ΑΕ. Αυτό όμως είναι αδύνατο σύμφωνα με αυτό που αποδείχθηκε παραπάνω.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει ευθύγραμμη οξεία γωνία με κορυφή το Α που να είναι μεγαλύτερη από την γωνία που περιέχεται στην ΑΒ και το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Theta A}$ και μικρότερη από την γωνία που περιέχεται στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Theta A}$ και την ΑΕ.

Πόρισμα 3 *Είναι φανερό ότι η κάθετη στο άκρο μιας διαμέτρου ενός κύκλου εφάπτεται σε αυτόν σε ένα μόνο σημείο καθώς έχει αποδειχθεί ότι αν ένα τμήμα έχει δυο κοινά σημεία με ένα κύκλο τότε αυτό βρίσκεται στο εσωτερικό του. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.* ∆

(στμ: η προηγούμενη πρόταση συνεπάγεται άμεσα ότι η γωνία χορδής και υποτείνοντος τόξου (Ορ7, σελ. 80) είναι ίση ως «κλίση» (Β1, Ορ8, σελ. 19) με τη γωνία ανάμεσα στη χορδή και την εφαπτομένη στο άκρο της.)

Πρόταση 17 (Κατασκευή εφαπτομένης) (512) *Να αχθεί η εφαπτομένη από ένα δοθέν σημείο προς έναν δοθέντα κύκλο.*



Υλοποίηση: Έστω ότι δίνονται το σημείο Α και ο κύκλος ΒΓΔ. Πρέπει να αχθεί η εφαπτομένη από το Α προς τον κύκλο.

Λαμβάνουμε το κέντρο Ε του κύκλου ΒΓΔ και φέρνουμε την ΕΑ. Με κέντρο το Ε και ακτίνα ΕΑ γράφουμε τον κύκλο ΑΖΗ. Από το Δ φέρνουμε την ΔΖ κάθετη στην ΑΕ. Στη συνέχεια φέρνουμε και τις ΕΖ και ΑΒ . Ισχυρίζομαι ότι έχει αχθεί η εφαπτομένη του κύκλου από το Α και αυτή είναι η ΑΒ.

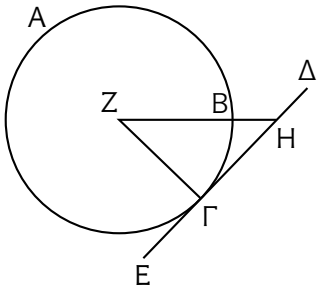
Πράγματι, επειδή το Ε είναι το κέντρο των κύκλων ΒΓΔ και ΑΖΗ έπεται ότι ΕΑ = ΕΖ και ΕΔ = ΕΒ.

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΖΕΔ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες καθώς ΑΕ = ΖΕ και ΕΒ = ΕΔ ενώ η περιεχόμενη σε αυτές τις πλευρές γωνία $\widehat{AEZ}$ είναι κοινή. Άρα τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23) και έχουν ίσες τις βάσεις τους ΔΖ = ΑΒ και τις αντίστοιχες γωνίες τους. Επομένως ισχύει $\widehat{EBA} = \widehat{E\Delta Z} = 1$ορθή. Τότε όμως, καθώς η ΕΒ έχει αχθεί από το κέντρο, το τμήμα ΑΒ είναι κάθετο στο

Β που είναι άκρο της διαμέτρου και άρα εφάπτεται στον κύκλο (Πόρισμα, Π16, σελ. 94). Άρα η ΑΒ εφάπτεται στον κύκλο ΒΓΔ.

Έτσι, από το δοθέν σημείο Α έχει αχθεί η εφαπτομένη ΑΒ προς τον δοθέντα κύκλο ΒΓΔ· όπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 18 (513) *Αν μια ευθεία εφάπτεται σε έναν κύκλο τότε η ακτίνα είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο επαφής.*



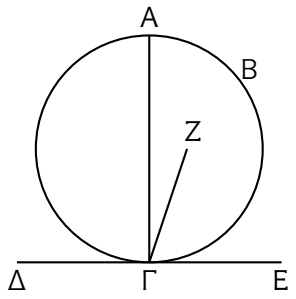
Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓ και η ΔΕ που εφάπτεται σε αυτόν στο σημείο του Γ. Λαμβάνουμε το κέντρο Ζ του κύκλου ΑΒΓ και φέρνουμε την ΖΓ. Ισχυρίζομαι ότι η ΖΓ είναι κάθετη στην ΔΕ.

Υποθέτουμε ότι η ΖΓ δεν είναι κάθετη στην ΔΕ και φέρνουμε την ΖΗ κάθετη στην ΔΕ. Επειδή $\widehat{ΖΗΓ} = 1$ ορθή έπεται ότι η $\widehat{ΖΓΗ}$ είναι οξεία (Β1, Π17, σελ. 30). Σε ένα τρίγωνο όμως απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά (Β1, Π19, σελ. 31) και έτσι $ΖΓ > ΖΗ$. Καθώς $ΖΒ = ΖΓ$ έπεται ότι $ΖΒ > ΖΗ$ που είναι αδύνατο καθώς $ΖΒ < ΖΗ$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ΖΗ δεν είναι κάθετη στην ΔΕ.

Όμοια αποδεικνύεται και ότι δεν υπάρχει άλλη ευθεία από το κέντρο κάθετη στην ΔΕ εκτός από την ΖΓ.

Συνεπώς, αν μια ευθεία εφάπτεται σε έναν κύκλο και αχθεί από το κέντρο του κύκλου ευθύγραμμο τμήμα προς το σημείο επαφής τότε το τμήμα αυτό είναι κάθετο στην εφαπτομένη· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 19 (513) *Η κάθετη στην εφαπτομένη ενός κύκλου στο σημείο επαφής διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.*



Απόδειξη. Έστω ότι η ΔΕ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΓ στο σημείο Γ. Φέρνουμε την ΓΑ κάθετη στην ΔΕ. Ισχυρίζομαι ότι το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω στην ΑΓ.

Υποθέτουμε ότι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ, έστω το Ζ, δεν βρίσκεται πάνω στην ΑΓ. Φέρνουμε και την ΓΖ.

Επειδή η ΔΕ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΓ στο Γ και από το Ζ που είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ έχει αχθεί η ΖΓ έπεται ότι η ΖΓ είναι κάθετη στην ΔΕ (Π18, σελ. 96). Δηλαδή, $\widehat{ΖΓΕ} = 1$ ορθή.

Καθώς όμως και $\widehat{ΑΓΕ} = 1$ ορθή έπεται ότι $\widehat{ΑΓΕ} = \widehat{ΖΓΕ}$.

Αλλά αυτό είναι αδύνατο καθώς $\widehat{ΖΓΕ} < \widehat{ΑΓΕ}$. Και άρα το Ζ δεν είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ.

Όμοια αποδεικνύεται ότι και κανένα άλλο σημείο που δεν βρίσκεται πάνω στην ΑΓ δεν μπορεί να είναι κέντρο του κύκλου ΑΒΓ.

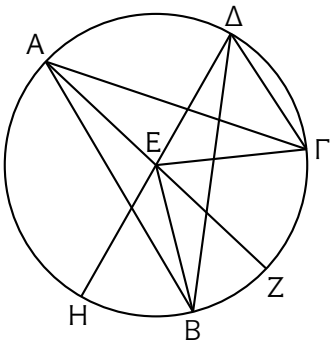
Συνεπώς, αν μια ευθεία εφάπτεται σε έναν κύκλο και από το σημείο επαφής αχθεί κάθετη σε αυτή τότε το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω σε αυτήν την κάθετη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 20 (513) *Σε έναν κύκλο η επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν.*

Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓ, η επίκεντρη γωνία $\widehat{\text{ΒΕΓ}}$ και η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ που βαίνει στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$ με την $\widehat{\text{ΒΕΓ}}$. Ισχυρίζομαι ότι $\widehat{\text{ΒΕΓ}} = 2 \cdot \widehat{\text{ΒΑΓ}}$

Φέρνουμε την ΑΕ της οποίας η προέκταση προς το Ε τέμνει τον κύκλο στο Ζ. Επειδή ΕΑ = ΕΒ έπεται ότι $\widehat{\text{ΕΑΒ}} = \widehat{\text{ΕΒΑ}}$ και άρα $\widehat{\text{ΕΑΒ}} + \widehat{\text{ΕΒΑ}} = 2 \cdot \widehat{\text{ΕΑΒ}}$. Αλλά $\widehat{\text{ΒΕΖ}} = \widehat{\text{ΕΑΒ}} + \widehat{\text{ΕΒΑ}}$ (ΒΙ, Π32, σελ. 40) και επομένως $\widehat{\text{ΒΕΖ}} = 2 \cdot \widehat{\text{ΕΑΒ}}$.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{\text{ΖΕΓ}} = 2 \cdot \widehat{\text{ΕΑΓ}}$ και άρα $\widehat{\text{ΒΕΓ}} = 2 \cdot \widehat{\text{ΒΑΓ}}$.

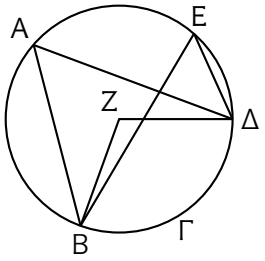


Ας θεωρήσουμε τώρα μια άλλη εγγεγραμμένη γωνία, έστω την ΒΔΓ τέτοια ώστε το κέντρο του κύκλου να μην βρίσκεται μεταξύ των πλευρών της. Φέρνουμε την ΔΕ της οποίας η προέκταση προς το Ε τέμνει τον κύκλο στο Η. Όπως προηγουμένως αποδεικνύεται ότι $\widehat{\text{ΗΕΓ}} = 2 \cdot \widehat{\text{ΕΔΓ}}$ και επειδή $\widehat{\text{ΗΕΒ}} = 2 \cdot \widehat{\text{ΕΔΒ}}$ προκύπτει ότι $\widehat{\text{ΒΕΓ}} = 2 \cdot \widehat{\text{ΒΔΓ}}$.

Συνεπώς, όταν σε έναν κύκλο μια εγγεγραμμένη γωνία βαίνει στο ίδιο τόξο με μια επίκεντρη τότε η επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 21 (514) *Οι γωνίες στο ίδιο τμήμα ενός κύκλου είναι ίσες μεταξύ τους.* (Σε έναν κύκλο οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες).

Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔ και οι γωνίες $\widehat{\text{ΒΑΔ}}$ και $\widehat{\text{ΒΕΔ}}$ βαίνουν στο τμήμα ΒΓΔ.

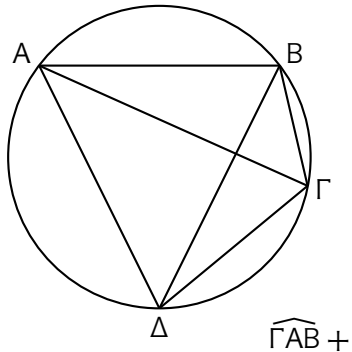


Λαμβάνουμε το κέντρο Ζ του κύκλου ΑΒΓΔ και φέρνουμε τις ΒΖ και ΖΔ. Επειδή η $\widehat{\text{ΒΖΔ}}$ είναι επίκεντρη και η $\widehat{\text{ΒΑΔ}}$ εγγεγραμμένη που έχουν ως βάση το ίδιο τόξο ΒΓΔ (δηλαδή βαίνουν στο ίδιο τόξο) έπεται ότι $\widehat{\text{ΒΖΔ}} = 2 \cdot \widehat{\text{ΒΑΔ}}$ (Π20, σελ. 97).

Για τον ίδιο λόγο ισχύει $\widehat{\text{ΒΖΔ}} = 2 \cdot \widehat{\text{ΒΕΔ}}$ και άρα $\widehat{\text{ΒΑΔ}} = \widehat{\text{ΒΕΔ}}$

Συνεπώς, οι γωνίες στο ίδιο τμήμα ενός κύκλου είναι ίσες· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 22 (514) *Το άθροισμα των απέναντι γωνιών ενός τετραπλεύρου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο είναι ίσο με 2 ορθές.*



Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔ και το εγγεγραμμένο σε αυτόν τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Ισχυρίζομαι ότι οι απέναντι γωνίες του έχουν άθροισμα ίσο με 2 ορθές.

Φέρνουμε τις ΑΓ και ΒΔ. Επειδή το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 2 ορθές (ΒΙ, Π32, σελ. 40) έπεται ότι για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει

$$\widehat{\Gamma AB} + \widehat{AB\Gamma} + \widehat{B\Gamma A} = 2 \text{ ορθές}$$

Αλλά $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B\Delta\Gamma}$ καθώς αυτές βρίσκονται στο ίδιο κυκλικό τμήμα ΒΑΔΓ (Π21, σελ. 97) και όμοια προκύπτει και ότι $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{A\Delta B}$ που βρίσκονται στο κυκλικό τμήμα ΑΔΓΒ. Έτσι,

$$\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{A\Delta B} + \widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{BA\Gamma} + \widehat{A\Gamma B}.$$

Οπότε προσθέτοντας την $\widehat{AB\Gamma}$ βρίσκουμε:

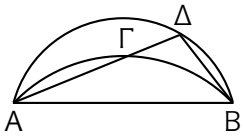
$$\widehat{AB\Gamma} + \widehat{BA\Gamma} + \widehat{A\Gamma B} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Delta\Gamma}$$

και άρα (καθώς $\widehat{\Gamma AB} + \widehat{AB\Gamma} + \widehat{B\Gamma A} = 2$ ορθές) έπεται ότι $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Delta\Gamma} =$ 2 ορθές.

Όμοια αποδεικνύεται και ότι $\widehat{BA\Delta} + \widehat{\Delta\Gamma B} = 2$ ορθές.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το άθροισμα των απέναντι γωνιών ενός τετραπλεύρου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο είναι ίσο με 2 ορθές· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 23 (515) *Είναι αδύνατο να κατασκευαστούν στην ίδια πλευρά ενός ευθύγραμμου τμήματος δυο όμοια και άνισα τμήματα κύκλων.*



Απόδειξη. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Υποθέτουμε ότι είναι δυνατόν να κατασκευαστούν στην ίδια πλευρά του ΑΒ δυο όμοια και άνισα τμήματα κύκλων τα ΑΓΒ και ΑΔΒ. Φέρνουμε την ΑΓΔ και τις ΓΒ και ΔΒ.

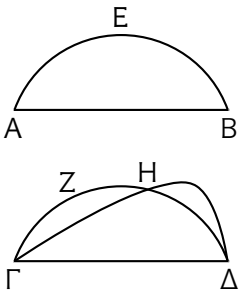
Καθώς τα τμήματα ΑΓΒ και ΑΔΒ είναι όμοια έπεται ότι δέχονται ίσες γωνίες (Ορ11, σελ. 80) και έτσι ισχύει $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{A\Delta B}$.

Τότε όμως στο τρίγωνο ΒΓΔ η εξωτερική γωνία $\widehat{A\Gamma B}$ είναι ίση με την απέναντι εσωτερική, δηλαδή την $\widehat{A\Delta B}$ και αυτό είναι αδύνατο (ΒΙ, Π16, σελ. 30).

Άρα, είναι αδύνατον να κατασκευαστούν δυο όμοια και άνισα τμήματα κύκλων που να βρίσκονται στην ίδια πλευρά ενός ευθύγραμμου τμήματος· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 24 (515) *Αν όμοια κυκλικά τμήματα έχουν ίσες χορδές είναι ίσα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα όμοια κυκλικά τμήματα ΑΕΒ και ΓΖΔ με χορδές ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα ώστε ΑΒ = ΓΔ. Ισχυρίζομαι ότι τα κυκλικά τμήματα αυτά είναι ίσα.



Εφαρμόζουμε το κυκλικό τμήμα ΑΕΒ πάνω στο κυκλικό τμήμα ΓΖΔ ώστε το Α να ταυτιστεί με το Γ. Τότε καθώς ΑΒ = ΓΔ η ΑΒ θα εφαρμόσει πάνω στην ΓΔ και το σημείο Β θα ταυτιστεί με το Δ.

Αν τώρα το κυκλικό τμήμα ΑΕΒ δεν εφαρμόσει πάνω στο κυκλικό τμήμα ΓΖΔ τότε αυτό θα βρεθεί είτε μέσα είτε έξω από το κυκλικό τμήμα ΓΖΔ όπως το κυκλικό τμήμα ΓΗΔ.

Τότε όμως ο κύκλος ΓΖΔ τέμνει τον κύκλο ΓΗΔ σε περισσότερα από δυο σημεία και αυτό είναι αδύνατο (Π10, σελ. 89).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι όταν η ΑΒ εφαρμόσει πάνω στην ΓΔ τότε το κυκλικό τμήμα ΑΕΒ εφαρμόζει πάνω στο κυκλικό τμήμα ΓΖΔ και άρα τα κυκλικά τμήματα αυτά είναι ίσα.

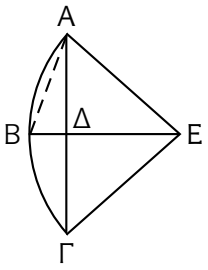
Συνεπώς, αν όμοια κυκλικά τμήματα έχουν ίσες χορδές είναι μεταξύ τους ίσα· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 25 (Κατασκευή) (516) *Αν δίνεται ένα τμήμα ενός κύκλου, να γραφεί ο κύκλος στον οποίο ανήκει αυτό το τμήμα.*

Υλοποίηση: Έστω ότι δίνεται το τμήμα κύκλου ΑΒΓ. Πρέπει να γραφεί ο κύκλος στον οποίο ανήκει το ΑΒΓ.

Λαμβάνουμε το μέσον Δ της ΑΓ και φέρνουμε την ΔΒ κάθετη στην ΑΓ. Στη συνέχεια φέρνουμε και την ΑΒ. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

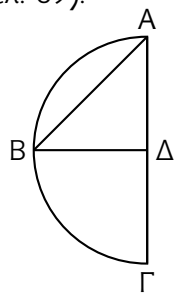
1η Περίπτωση: $\widehat{ABΔ} > \widehat{BAΔ}$.



Με μια πλευρά την ΑΒ και κορυφή το σημείο Α κατασκευάζουμε την γωνία $\widehat{BAE} = \widehat{ABΔ}$ (Β1, Π23, σελ. 34), προεκτείνουμε την ΒΔ μέχρι το Ε και φέρνουμε τις ΔΕ και ΕΓ. Τότε καθώς $\widehat{ABE} = \widehat{BAE}$ έπεται ότι ΕΒ = ΕΑ (Β1, Π6, σελ. 24).

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΕΔΓ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΑΔ = ΔΓ, την ΔΕ κοινή και $\widehat{AΔE} = \widehat{EΔΓ} = 1$ ορθή. Έτσι, τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα και άρα ΑΕ = ΕΓ (Β1, Π4, σελ. 23).

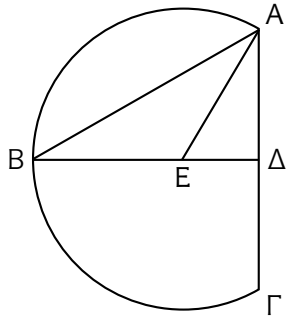
Έτσι ισχύει ΑΕ = ΕΓ = ΕΒ και άρα ο κύκλος με κέντρο το Ε και ακτίνα ένα από αυτά τα τμήματα διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ και είναι ο κύκλος στον οποίο ανήκει το δοθέν τμήμα ΑΒΓ (Π9, σελ. 88 και Π10, σελ. 89).



Άρα, δοθέντος ενός τμήματος κύκλου έχει γραφεί ο κύκλος στον οποίο ανήκει το τμήμα αυτό. Είναι επίσης φανερό ότι το τμήμα ΑΒΓ είναι μικρότερο από το ημικύκλιο καθώς το κέντρο του κύκλου Ε βρίσκεται στο εξωτερικό του τμήματος ΑΒΓ.

2η Περίπτωση: $\widehat{AB\Delta} = \widehat{BA\Delta}$.

Τότε ισχύει ΑΔ = ΒΔ (Β1, Π6, σελ. 24) και άρα ΔΑ = ΔΒ = ΔΓ, οπότε το Δ είναι το κέντρο του κύκλου στο οποίο ανήκει το τμήμα. Στην περίπτωση αυτή το ΑΒΓ είναι ημικύκλιο.

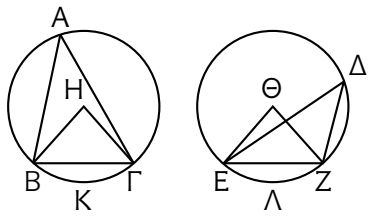


3η Περίπτωση: $\widehat{AB\Delta} < \widehat{BA\Delta}$.

Με μια πλευρά την ΑΒ και κορυφή το Α κατασκευάζουμε την γωνία $\widehat{BAE} = \widehat{AB\Delta}$ (Β1, Π23, σελ. 34). Τότε το κέντρο του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό του τμήματος ΑΒΓ και κείται στην ΔΒ. Τώρα το τμήμα ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο από το ημικύκλιο.

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση έχει γραφεί ο κύκλος στον οποίο ανήκει το δοθέν τμήμα. *Δ*

Πρόταση 26 (516) *Σε ίσους κύκλους οι ίσες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα είτε είναι επίκεντρες είτε είναι εγγεγραμμένες.*



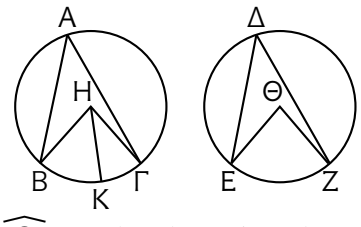
Απόδειξη. Έστω οι ίσοι κύκλοι ΑΒΓ και ΔΕΖ και έστω οι ίσες επίκεντρες γωνίες τους $\widehat{BH\Gamma} = \widehat{E\Theta Z}$ και οι ίσες εγγεγραμμένες γωνίες τους $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$. Ισχυρίζομαι ότι $\widehat{BK\Gamma} = \widehat{E\Lambda Z}$.

Φέρνουμε τις ΒΓ και ΕΖ. Επειδή οι κύκλοι ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσοι έχουν ίσες ακτίνες. Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΒΗΓ και ΘΕΖ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΒΗ = ΕΘ, ΗΓ = ΘΖ και $\widehat{BH\Gamma} = \widehat{E\Theta Z}$. Έτσι, τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23) και άρα ΒΓ = ΕΖ.

Τώρα επειδή $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$ τα τμήματα κύκλων ΒΑΓ και ΕΔΖ είναι όμοια (Ορ11, σελ. 80) και οι χορδές των τμημάτων αυτών είναι ίσες καθώς ΒΓ = ΕΖ. Αλλά όταν όμοια κυκλικά τμήματα έχουν ίσες χορδές τότε είναι ίσα (Π24, σελ. 99) δηλαδή ΒΑΓ = ΕΔΖ. Καθώς οι κύκλοι ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσοι έπεται ότι και τα τμήματα ΒΚΓ και ΕΛΖ είναι ίσα.

Συνεπώς, σε ίσους κύκλους οι ίσες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα είτε είναι επίκεντρες είτε είναι εγγεγραμμένες· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 27 (517) *Σε ίσους κύκλους οι γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα είναι ίσες είτε αυτές είναι επίκεντρες είτε αυτές είναι εγγεγραμμένες.*



Απόδειξη. Έστω ότι στους ίσους κύκλους ΑΒΓ και ΔΕΖ στα ίσα τόξα ΒΓ και ΕΖ βαίνουν οι επίκεντρες γωνίες $\widehat{\text{ΒΗΓ}}$ και $\widehat{\text{ΕΘΖ}}$ αντίστοιχα καθώς και οι εγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ και $\widehat{\text{ΕΔΖ}}$ αντίστοιχα. Ισχυρίζομαι ότι $\widehat{\text{ΒΗΓ}} = \widehat{\text{ΕΘΖ}}$ και $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\text{ΕΔΖ}}$.

Πράγματι αν υποθέσουμε ότι οι $\widehat{\text{ΒΗΓ}}$ και $\widehat{\text{ΕΘΖ}}$ δεν είναι ίσες τότε κάποια από αυτές θα είναι μεγαλύτερη. Έστω ότι $\widehat{\text{ΒΗΓ}} > \widehat{\text{ΕΘΖ}}$. Με μια πλευρά την ΒΗ και κορυφή το Η κατασκευάζουμε την γωνία $\widehat{\text{ΒΗΚ}} = \widehat{\text{ΕΘΖ}}$ (Β1, Π23, σελ. 34). Σε ίσους όμως κύκλους οι ίσες επίκεντρες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα (Π23, σελ. 98) άρα ΒΚ = ΕΖ και καθώς ΒΓ = ΕΖ έπεται ότι ΒΚ = ΒΓ που όμως είναι αδύνατο καθώς ΒΚ < ΒΓ. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\widehat{\text{ΒΗΓ}} = \widehat{\text{ΕΘΖ}}$.

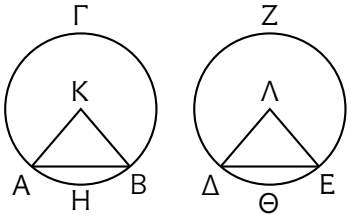
Για τις εγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ και $\widehat{\text{ΕΔΖ}}$ ισχύουν

$$\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \frac{\widehat{\text{ΒΗΓ}}}{2} \quad \text{και} \quad \widehat{\text{ΕΔΖ}} = \frac{\widehat{\text{ΕΘΖ}}}{2}$$

(Π20, σελ. 97).

Συνεπώς, σε ίσους κύκλους οι γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα είναι ίσες είτε είναι επίκεντρες είτε είναι εγγεγραμμένες· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 28 (517) *Σε ίσους κύκλους οι ίσες χορδές ορίζουν ίσα αντίστοιχα τόξα.*



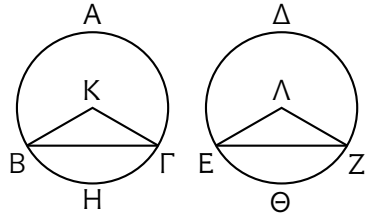
Απόδειξη. Έστω οι ίσοι κύκλοι ΑΒΓ και ΔΕΖ και οι ίσες χορδές τους ΑΒ = ΔΕ. Οι χορδές αυτές ορίζουν στους κύκλους ΑΒΓ και ΔΕΖ τα τόξα $\widehat{\text{ΑΓΒ}}$ και $\widehat{\text{ΔΖΕ}}$ (που είναι τα μεγαλύτερα) αντίστοιχα. Τα μικρότερα τόξα που ορίζονται στους δυο κύκλους από τις ίσες χορδές ΑΒ και ΔΕ είναι αντίστοιχα τα $\widehat{\text{ΑΗΒ}}$ και $\widehat{\text{ΔΘΕ}}$. Ισχυρίζομαι ότι $\widehat{\text{ΑΓΒ}} = \widehat{\text{ΔΖΕ}}$ και $\widehat{\text{ΑΗΒ}} = \widehat{\text{ΔΘΕ}}$.

Λαμβάνουμε τα κέντρα Κ και Λ των κύκλων ΑΒΓ και ΔΕΖ αντίστοιχα και φέρνουμε τις ΑΚ, ΚΒ, ΔΛ και ΛΕ. Επειδή οι δυο κύκλοι είναι ίσοι έπεται ότι και οι ακτίνες τους ίσες (Ορ1, σελ. 79). Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΔΛΕ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΑΚ = ΔΛ, ΚΒ = ΛΕ και ΑΒ = ΔΕ. Έπομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (Β1, Π8, σελ. 25) και άρα $\widehat{\text{ΑΚΒ}} = \widehat{\text{ΔΛΕ}}$.

Αλλά, οι ίσες επίκεντρες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα (Π26, σελ. 100) και έτσι $\overset{\frown}{AHB} = \overset{\frown}{\Delta\Theta E}$ και καθώς οι κύκλοι ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσοι έπεται ότι $\overset{\frown}{A\Gamma B} = \overset{\frown}{\Delta ZE}$ (κ.εν.3, σελ. 21).

Συνεπώς, σε ίσους κύκλους οι ίσες χορδές ορίζουν ίσα αντίστοιχα τόξα· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 29 (518) *Σε ίσους κύκλους σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές.*



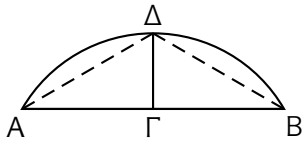
Απόδειξη. Έστω οι ίσοι κύκλοι ΑΒΓ και ΔΕΖ και ας πάρουμε σε αυτούς τα ίσα τόξα ΒΗΓ και ΕΘΖ αντίστοιχα. Φέρνουμε τις χορδές ΒΓ και ΕΖ. Ισχυρίζομαι ότι αυτές είναι ίσες, δηλαδή ΒΓ = ΕΖ.

Λαμβάνουμε τα κέντρα Κ και Λ των κύκλων ΑΒΓ και ΔΕΖ αντίστοιχα και φέρνουμε τις ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ και ΛΖ. Επειδή ΒΗΓ = ΕΘΖ έπεται ότι $\overset{\frown}{BK\Gamma} = \overset{\frown}{E\Lambda Z}$ (Π27, σελ. 101). Επειδή πάλι οι κύκλοι ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσοι, είναι ίσες και οι ακτίνες τους (Ορ1, σελ. 79).

Τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΕΛΖ έχουν ΒΚ = ΕΛ, ΚΓ = ΛΖ και τις περιεχόμενες σε αυτές τις πλευρές γωνίες τους ίσες καθώς $\overset{\frown}{BK\Gamma} = \overset{\frown}{E\Lambda Z}$. Άρα τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23) και έτσι έχουν ίσες βάσεις δηλαδή ΒΓ = ΕΖ.

Συνεπώς, σε ίσους κύκλους τα ίσα τόξα υποτείνουν[8] ίσες χορδές· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 30 (Κατασκευή) (518) *Να διχοτομηθεί δοθέν τόξο.*



Υλοποίηση: Έστω το δοθέν τόξο $\overset{\frown}{A\Delta B}$ που πρέπει να διχοτομηθεί.

Φέρνουμε την ΑΒ και λαμβάνουμε το μέσον της Γ (Β1, Π10, σελ. 26) και από το Γ φέρνουμε την ΓΔ κάθετη στην ΑΒ. Επιπλέον φέρνουμε και τις ΑΔ και ΔΒ.

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΓΔ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΑΓ = ΒΓ, την ΓΔ κοινή και $\overset{\frown}{A\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma\Delta}$ που είναι ορθές. Έτσι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΓΔ είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23) και άρα ΑΔ = ΔΒ.

Οι ίσες όμως χορδές ορίζουν στον ίδιο κύκλο αντίστοιχα ίσα τόξα (Π28, σελ. 101) και άρα $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{\Delta B}$.

Συνεπώς, το δοθέν τόξο έχει διχοτομηθεί από το σημείο του Δ· όπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

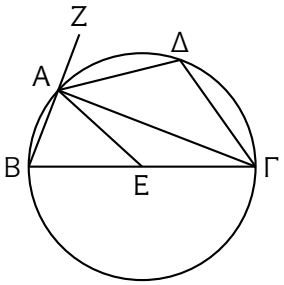
Πρόταση 31 (519) *Σε έναν κύκλο η γωνία σε ένα ημικύκλιο είναι ορθή, η γωνία σε ένα τμήμα που είναι μεγαλύτερο από ημικύκλιο είναι μικρότερη από την ορθή και η γωνία σε ένα τμήμα που είναι μικρότερο από ημικύκλιο είναι μεγαλύτερη από την ορθή.*

---

8. Στμ: «τεντώνουν» και άρα ορίζουν

Επιπλέον, η γωνία ενός τμήματος μεγαλύτερου του ημικυκλίου είναι μεγαλύτερη από την ορθή ενώ η γωνία ενός τμήματος μικρότερου του ημικυκλίου είναι μικρότερη από την ορθή.

Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔ με διάμετρο την ΒΓ και κέντρο το Ε. Φέρνουμε τις ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ και ΔΓ.



Ισχυρίζομαι ότι η γωνία $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ στο ημικύκλιο ΒΑΓ είναι ορθή, η γωνία $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$ στο κυκλικό τμήμα ΑΒΓ είναι οξεία και η γωνία $\widehat{\text{ΑΔΓ}}$ στο κυκλικό τμήμα ΑΔΓ είναι αμβλεία.

Φέρνουμε την ΑΕ και προεκτείνουμε την ΒΑ μέχρι το τυχόν σημείο Ζ. Τότε επειδή ΒΕ = ΕΑ έπεται ότι $\widehat{\text{ΑΒΕ}} = \widehat{\text{ΒΑΕ}}$ (ΒΙ, Π5, σελ. 24). Και όμοια επειδή ΓΕ = ΕΑ είναι και $\widehat{\text{ΑΓΕ}} = \widehat{\text{ΓΑΕ}}$. Άρα,

$$\widehat{\text{ΒΑΕ}} + \widehat{\text{ΕΑΓ}} = \widehat{\text{ΑΒΓ}} + \widehat{\text{ΑΓΒ}}$$

Επιπλέον, η $\widehat{\text{ΖΑΓ}}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΓ και άρα $\widehat{\text{ΖΑΓ}} = \widehat{\text{ΑΒΓ}} + \widehat{\text{ΑΓΒ}}$ (ΒΙ, Π23, σελ. 34). Επομένως $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\text{ΖΑΓ}}$ και καθώς αυτές είναι εφεξής έπεται ότι είναι ορθές (ΒΙ, Ορ10, σελ. 20). Άρα η γωνία $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ στο ημικύκλιο ΒΑΓ είναι ορθή.

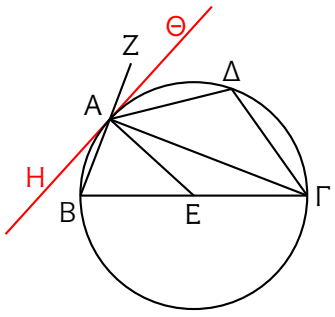
Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\widehat{\text{ΑΒΓ}} + \widehat{\text{ΒΑΓ}} < 2$ ορθές (ΒΙ, ΠΙ7, σελ. 30) και άρα, καθώς $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = 1$ ορθή έπεται ότι $\widehat{\text{ΑΒΓ}} < 1$ ορθή. Άρα η $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$ που είναι στο τμήμα ΑΒΓ (που είναι μεγαλύτερο από το ημικύκλιο) είναι οξεία.

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι στον κύκλο ΑΒΓ. Οι απέναντι γωνίες όμως ενός τετραπλεύρου που είναι σε κύκλο έχουν άθροισμα ίσο με 2 ορθές (Π22, σελ. 98) και έτσι για τις γωνίες $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$ και $\widehat{\text{ΑΔΓ}}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ισχύει

$$\widehat{\text{ΑΒΓ}} + \widehat{\text{ΑΔΓ}} = 2 \text{ ορθές}.$$

Καθώς όμως $\widehat{\text{ΑΒΓ}} < 1$ ορθή έπεται ότι $\widehat{\text{ΑΔΓ}} > 1$ ορθή. Άρα η $\widehat{\text{ΑΔΓ}}$ που είναι στο τμήμα ΑΔΓ (που είναι μικρότερο από το ημικύκλιο) είναι αμβλεία.

Ισχυρίζομαι ακόμα ότι η γωνία του μεγαλύτερου τμήματος που ορίζεται από το τόξο $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$ (Ορ7, σελ. 80) και την χορδή ΑΓ (στμ: δηλαδή η γωνία $\widehat{\text{ΓΑΗ}}$, όπου η ΗΘ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Α) είναι μεγαλύτερη από την ορθή ενώ η γωνία του μικρότερου τμήματος που ορίζεται από το τόξο $\widehat{\text{ΑΔΓ}}$ και την χορδή ΑΓ (στμ: δηλαδή η γωνία $\widehat{\text{ΓΑΘ}}$) είναι μικρότερη από την ορθή.

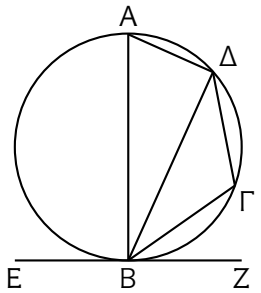


Και αυτό είναι φανερό από το σχήμα: επειδή η γωνία που έχει πλευρές τις ΓΑ και ΑΒ είναι ορθή έπεται ότι η γωνία που περιέχεται στο τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΒΓ}}$ και την χορδή ΑΓ (στμ: δηλαδή η $\overset{\frown}{\text{ΓΑΗ}}$) είναι μεγαλύτερη από την ορθή. Επειδή πάλι η γωνία με πλευρές ΑΓ και ΑΖ είναι ορθή έπεται ότι η γωνία που περιέχεται στην χορδή ΓΑ και το τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΔΓ}}$ (στμ: δηλαδή η $\overset{\frown}{\text{ΓΑΘ}}$) είναι μικρότερη από την ορθή.

Συνεπώς, σε έναν κύκλο: η γωνία σε ένα ημικύκλιο είναι ορθή, η γωνία σε ένα τμήμα μεγαλύτερο του ημικυκλίου είναι οξεία ενώ η γωνία σε ένα τμήμα μικρότερο του ημικυκλίου είναι αμβλεία. Επιπλέον, η γωνία ενός τμήματος μεγαλύτερου του ημικυκλίου είναι μεγαλύτερη από την ορθή ενώ η γωνία ενός τμήματος μικρότερου του ημικυκλίου είναι μικρότερη από την ορθή.

Πόρισμα 4 *Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δυο άλλων γωνιών του τότε αυτή είναι ορθή. Και αυτό διότι τότε η γωνία αυτή θα είναι ίση με την εφεξής εξωτερική της* (που είναι ίση με το άθροισμα των δυο άλλων γωνιών του τριγώνου)*. Έπεται λοιπόν ότι, η γωνία του τριγώνου και η εξωτερική της είναι ορθές καθώς αυτές είναι ίσες και εφεξής· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.* Δ

Πρόταση 32 (Γωνία χορδής και εφαπτομένης) *[520] Αν μια ευθεία εφάπτεται σε έναν κύκλο και από το σημείο τομής αχθεί μια τέμνουσα του κύκλου* (στμ: χορδή) *τότε η οξεία γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με την χορδή είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη στον κύκλο οξεία γωνία που βαίνει στο τόξο που ορίζεται από την χορδή. Αντίστοιχα, η αμβλεία γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με την χορδή είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη στον κύκλο αμβλεία γωνία που βαίνει στο τόξο που ορίζεται από την χορδή.*



Απόδειξη. Θεωρούμε τον κύκλο ΑΒΓΔ και έστω ότι η ΕΖ εφάπτεται σε αυτόν στο σημείο του Ζ. Φέρνουμε την ΒΔ. Ισχυρίζομαι ότι οι γωνίες που σχηματίζει η ΒΔ με την εφαπτομένη ΕΖ είναι ίσες με τις γωνίες που βρίσκονται στα εναλλάξ τμήματα του κύκλου. Δηλαδή ισχύουν $\widehat{\text{ΖΒΔ}} = \widehat{\text{ΒΑΔ}}$ και $\widehat{\text{ΕΒΔ}} = \widehat{\text{ΔΓΒ}}$.

(στμ: αρκεί να δειχθεί όταν η ΑΒ είναι κάθετη στην ΕΖ λόγω της Π21, σελ. 97.) Φέρνουμε την ΒΑ κάθετη στην ΕΖ στο σημείο της Β και λαμβάνουμε τυχόν σημείο Γ στο τόξο $\overset{\frown}{\text{ΒΔ}}$. Στη συνέχεια φέρνουμε και τις ΑΔ, ΔΓ και ΓΒ.

Επειδή τώρα η ΕΖ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΓΔ και στο σημείο επαφής Β έχει αχθεί η ΒΑ κάθετη στην εφαπτομένη έπεται ότι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓΔ είναι σημείο της ΒΑ (Π19, σελ. 96). Άρα η ΒΑ είναι διάμετρος του κύκλου ΑΒΓΔ και έτσι η γωνία $\overset{\frown}{\text{ΑΔΒ}}$ που βρίσκεται σε ημικύκλιο είναι ορθή (Π31, σελ. 102).

Έτσι (Β1, Π31, σελ. 39), για τις άλλες δυο γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ ισχύει $\widehat{\text{ΒΑΔ}} + \widehat{\text{ΑΒΔ}} = 1$ ορθή, και καθώς $\widehat{\text{ΑΒΖ}} = 1$ ορθή, έπεται ότι

$$\widehat{\text{ΑΒΖ}} = \widehat{\text{ΒΑΔ}} + \widehat{\text{ΑΒΔ}}.$$

Αφαιρώντας την $\widehat{\text{ΑΒΔ}}$ παίρνουμε $\widehat{\text{ΔΒΖ}} = \widehat{\text{ΒΑΔ}}$.

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ όμως είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και άρα το άθροισμα των απέναντι γωνιών του είναι ίσο με δυο ορθές (Π22, σελ. 98) δηλαδή $\widehat{\text{ΒΑΔ}} + \widehat{\text{ΒΓΔ}} = 2$ ορθές. Ενώ ισχύει (Β1, ΠΙ3, σελ. 28) και ότι $\widehat{\text{ΔΒΖ}} + \widehat{\text{ΔΒΕ}} = 2$ ορθές. Άρα,

$$\widehat{\text{ΔΒΖ}} + \widehat{\text{ΔΒΕ}} = \widehat{\text{ΒΑΔ}} + \widehat{\text{ΒΓΔ}}.$$

Καθώς έχουμε δείξει ότι $\widehat{\text{ΔΒΖ}} = \widehat{\text{ΒΑΔ}}$ συμπεραίνουμε ότι $\widehat{\text{ΔΒΕ}} = \widehat{\text{ΒΓΔ}}$.

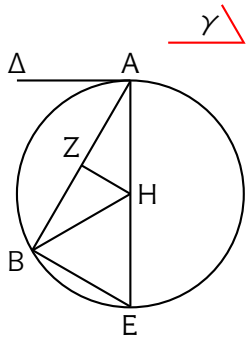
Συνεπώς, όταν μια ευθεία εφάπτεται σε έναν κύκλο και από το σημείο επαφής αχθεί τέμνουσα προς τον κύκλο, τότε η οξεία γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη και την χορδή είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη στον κύκλο οξεία γωνία που βαίνει στο τόξο που ορίζεται από την χορδή. Η αμβλεία γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με την χορδή είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη στον κύκλο αμβλεία γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 33 (Κατασκευή) (521) *Να γραφεί τμήμα κύκλου που να έχει χορδή δοθέν ευθύγραμμο τμήμα και που να δέχεται γωνία ίση με δοθείσα ευθύγραμμη γωνία.*

Υλοποίηση: Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και η δοθείσα ευθύγραμμη γωνία $\hat{\gamma}$. Πρέπει να γραφτεί ένα τμήμα κύκλου χορδής ΑΒ που να δέχεται γωνία ίση με τη $\hat{\gamma}$.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, καθώς η $\hat{\gamma}$ μπορεί να είναι είτε οξεία είτε ορθή είτε αμβλεία.

1η Περίπτωση: $\hat{\gamma}$ οξεία



Με πλευρά την ΑΒ και κορυφή το Α κατασκευάζουμε την οξεία γωνία $\widehat{\text{ΒΑΔ}} = \hat{\gamma}$ (Β1, Π23, σελ. 34). Φέρνουμε την κάθετη στην ΑΔ στο Α και λαμβάνουμε το μέσο Ζ του ΑΒ. Φέρνουμε την κάθετη στο ΑΒ στο Ζ που τέμνει την προηγούμενη κάθετη στο Η και έπειτα φέρνουμε και την ΒΗ. Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΖΗ και ΒΖΗ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΑΖ = ΖΒ, την ΖΗ κοινή και $\widehat{\text{ΑΖΗ}} = \widehat{\text{ΒΖΗ}}$ και άρα είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23). Επομένως είναι και ΑΗ = ΗΒ.

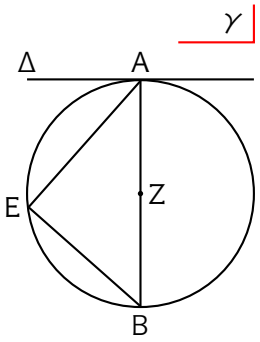
Με κέντρο το Η και ακτίνα ΑΗ = ΗΒ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει την προέκταση της ΑΗ στο Ε και φέρνουμε την ΒΕ. Επειδή η ΑΔ είναι

κάθετη στη διάμετρο ΑΕ στο άκρο της Α έπεται ότι η ΑΔ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΕ (Π16, σελ. 94).

Η ΑΔ λοιπόν, εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΕ και από το σημείο επαφής έχει αχθεί η χορδή ΑΒ. Έτσι, $\widehat{\Delta AB} = \widehat{AEB}$ καθώς η $\widehat{AEB}$ που είναι εγγεγραμμένη (και βρίσκεται στο τμήμα ΑΕΒ του κύκλου ΑΕΒ) βαίνει στο τόξο $\widehat{AB}$ (Π32, σελ. 104). Αλλά $\widehat{\Delta AB} = \widehat{\Gamma}$ και άρα $\widehat{AEB} = \widehat{\Gamma}$. Έτσι, με χορδή το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει γραφτεί το τμήμα κύκλου ΑΕΒ που δέχεται την γωνία $\widehat{AEB} = \hat{\gamma}$.

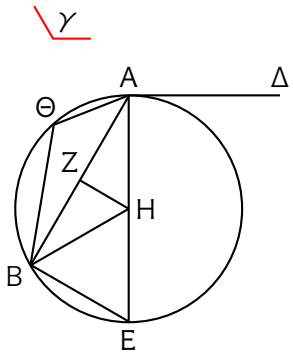
2η Περίπτωση: $\hat{\gamma}$ ορθή

Πρέπει τώρα να κατασκευαστεί τμήμα κύκλου χορδής ΑΒ που να δέχεται γωνία ίση με την $\hat{\gamma}$ που είναι ορθή.



Με πλευρά την ΑΒ και κορυφή το Α κατασκευάζουμε την γωνία $\widehat{BA\Delta} = \hat{\gamma}$ και λαμβάνουμε το μέσο Ζ του ΑΒ. Με κέντρο το Ζ και ακτίνα ΖΑ = ΖΒ γράφουμε τον κύκλο ΑΒΕ. Τότε η ΑΔ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΕ καθώς η γωνία στο Α είναι ορθή (Πόρισμα, Π16, σελ. 94). Επιπλέον $\widehat{AEB} = 1$ ορθή καθώς είναι γωνία σε ημικύκλιο (Π31, σελ. 102) και άρα $\widehat{BA\Delta} = \widehat{AEB}$. Αλλά $\widehat{BA\Delta} = \hat{\gamma}$ οπότε $\widehat{AEB} = \hat{\gamma}$.

Έτσι, και πάλι έχει γραφεί το ΑΕΒ που είναι τμήμα κύκλου με χορδή το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και που δέχεται γωνία ίση με τη $\hat{\gamma}$.



3η Περίπτωση: $\hat{\gamma}$ αμβλεία

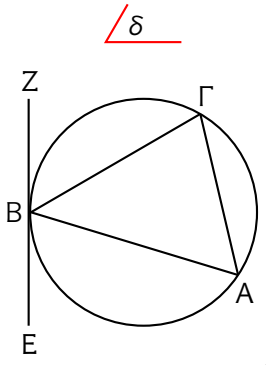
Με μια πλευρά την ΑΒ και κορυφή το Α κατασκευάζουμε την $\widehat{BA\Delta} = \hat{\gamma}$ και φέρνουμε την κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α. Λαμβάνουμε το μέσο Ζ του ΑΒ και φέρνουμε την κάθετη στο ΑΒ στο Ζ που τέμνει την προηγούμενη κάθετη στο Η. Φέρνουμε και την ΗΒ.

Τα τρίγωνα ΑΖΗ και ΑΒΗ έχουν ΑΖ = ΖΒ, την ΖΗ κοινή και $\widehat{AZH} = \widehat{BZH}$. Συνεπώς είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23) και άρα ΑΗ = ΗΒ. Με κέντρο το Η και ακτίνα ΑΗ = ΒΗ γράφουμε τον κύκλο που τέμνει την προέκταση της ΑΗ στο Ε. Επειδή η ΑΔ είναι κάθετη στο άκρο Α της διαμέτρου ΑΕ έπεται ότι είναι εφαπτομένη του κύκλου ΑΕΒ (Πόρισμα, Π16, σελ. 94).

Έτσι λοιπόν, από το σημείο επαφής Α έχει αχθεί η χορδή ΑΒ και άρα $\widehat{BA\Delta} = \widehat{A\Theta B}$ διότι η $\widehat{A\Theta B}$ που βρίσκεται στο τμήμα ΑΘΒ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει στο τόξο $\widehat{AEB}$ χορδής ΑΒ (Π32, σελ. 104). Καθώς όμως $\widehat{BA\Delta} = \hat{\gamma}$ έπεται ότι $\widehat{A\Theta B} = \hat{\gamma}$.

Άρα, έχει γραφεί το τμήμα κύκλου ΑΘΒ με χορδή ΑΒ που δέχεται γωνία ίση με τη $\hat{\gamma}$· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 34 (Κατασκευή) (522) *Από δοθέντα κύκλο να αφαιρεθεί τμήμα που να δέχεται γωνία ίση με δοθείσα ευθύγραμμη γωνία.*

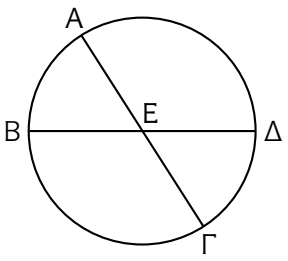


Υλοποίηση: Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓ και η δοθείσα ευθύγραμμη γωνία $\hat{\delta}$. Πρέπει να αφαιρεθεί από τον κύκλο ΑΒΓ τμήμα που να δέχεται γωνία ίση με την γωνία $\hat{\delta}$.

Ας αχθεί η εφαπτομένη ΕΖ στον κύκλο ΑΒΓ στο σημείο του Β και ας κατασκευαστεί με μια πλευρά την ΖΒ και κορυφή το σημείο Β η γωνία $\widehat{ZB\Gamma} = \hat{\delta}$ (ΒΙ, Π23, σελ. 34). Επειδή τώρα η ΕΖ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΓ και έχει αχθεί η χορδή ΒΓ έπεται ότι $\widehat{ZB\Gamma} = \widehat{BA\Gamma}$ καθώς η $\widehat{BA\Gamma}$ είναι στο τμήμα $\overset{\frown}{BA\Gamma}$ βαίνοντας στο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ (Π32, σελ. 104). Αλλά $\widehat{ZB\Gamma} = \hat{\delta}$ και άρα $\widehat{BA\Gamma} = \hat{\delta}$.

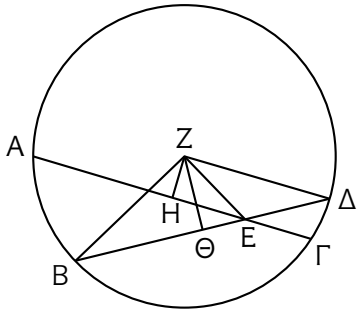
Έτσι λοιπόν, από τον δοθέντα κύκλο ΑΒΓ αφαιρείται το τμήμα $\overset{\frown}{BA\Gamma}$ το οποίο δέχεται γωνία ίση με την δοθείσα ευθύγραμμη γωνία $\hat{\delta}$· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. ∎

Πρόταση 35 (522) *Αν σε έναν κύκλο τέμνονται δυο χορδές του τότε το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με τα τμήματα στα οποία διαιρείται η μια χορδή από το σημείο τομής της με την άλλη χορδή είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με τα τμήματα στα οποία διαιρείται από το σημείο τομής η άλλη χορδή.*



Απόδειξη. Θεωρούμε τον κύκλο ΑΒΓΔ και τις χορδές του ΑΓ και ΒΔ που τέμνονται στο Ε. Ισχυρίζομαι ότι το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΕ και ΕΓ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΒΕ και ΕΔ.

Αν το Ε είναι το κέντρο του κύκλου τότε ΑΕ = ΕΓ = ΒΕ = ΕΔ και προφανώς το ορθογώνιο με πλευρές ίσες με ΑΕ και ΕΓ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο που έχει πλευρές ίσες με ΕΒ και ΕΔ.



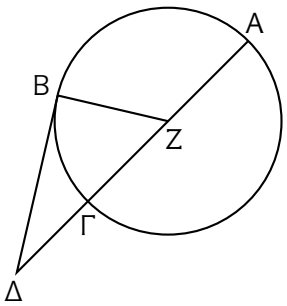
Αν τώρα οι χορδές ΑΓ και ΒΔ δεν τέμνονται στο κέντρο του κύκλου που είναι το Ζ φέρνουμε από το Ζ τις κάθετες ΖΗ και ΖΘ στις ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Φέρνουμε επιπλέον και τις ΖΒ, ΖΓ και ΓΕ. Επειδή τώρα η χορδή ΗΖ που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου τέμνει κάθετα την ΑΓ (που δεν διέρχεται από το κέντρο του κύκλου) στο μέσον της (Π3, σελ. 82) και άρα ΑΗ = ΗΓ.

Έτσι λοιπόν, η ΑΓ διαιρείται σε δυο ίσα τμήματα από το μέσον της Η και σε δυο άνισα τμήματα από το Ε και άρα το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου που έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΕ και ΕΓ και του τετραγώνου πλευράς ΕΗ είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ΗΓ (Β2, Π5, σελ. 63). Δηλαδή $\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΓ}+\text{ΕΗ}^2=\text{ΗΓ}^2$. Προσθέτοντας το ΗΖ^2 παίρνουμε $\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΓ}+\text{ΕΗ}^2+\text{ΗΖ}^2=\text{ΗΓ}^2+\text{ΗΖ}^2$. Χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51) συμπεραίνουμε ότι $\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΓ}+\text{ΖΕ}^2=\Gamma\text{Ζ}^2$.

Ομοίως $\text{ΒΕ}\cdot\text{ΕΔ}+\text{ΖΕ}^2=\text{ΖΒ}^2$. Από τις δύο τελευταίες, καθώς ΖΒ = ΖΓ προκύπτει ότι $\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΓ}=\text{ΒΕ}\cdot\text{ΕΔ}$.

Συνεπώς, αν τέμνονται δυο χορδές ενός κύκλου τότε το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με τα τμήματα στα οποία διαιρείται η μια χορδή από το σημείο τομής της με την άλλη χορδή είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με τα τμήματα στα οποία διαιρείται από το σημείο τομής η άλλη χορδή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

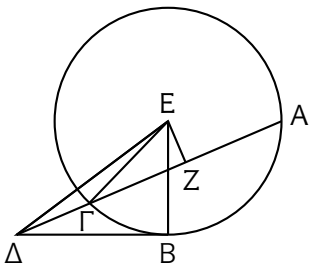
Πρόταση 36 (523) *Αν από ένα σημείο εκτός κύκλου αχθούν δυο προσπίπτουσες προς τον κύκλο ώστε η μια να είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη τότε το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με την τέμνουσα και το τμήμα της τέμνουσας που βρίσκεται εκτός του κύκλου είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με την εφαπτομένη.*



Απόδειξη. Έστω ότι από το σημείο Δ που βρίσκεται εκτός του κύκλου ΑΒΓ προσπίπτουν προς αυτόν η τέμνουσα ΔΓΑ και η εφαπτομένη ΔΒ. Ισχυρίζομαι ότι το ορθογώνιο που έχει πλευρές ίσες με ΑΔ και ΔΓ είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο πλευράς ΔΒ.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις καθώς η τέμνουσα είτε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ είτε όχι.

Έστω ότι η ΔΓΑ διέρχεται από το κέντρο Ζ του κύκλου ΑΒΓ. Φέρνουμε την ΖΒ οπότε $\widehat{\text{ΖΒΔ}}=1$ ορθή (Π28, σελ. 101).



Επειδή τώρα η ΑΓ διαιρείται σε δύο ίσα τμήματα από το Ζ και η ΓΔ πρόσκειται σε αυτήν έπεται ότι $\text{ΑΔ}\cdot\text{ΔΓ}+\text{ΖΓ}^2=\text{ΖΔ}^2$ (Β2, Π6, σελ. 64). Αλλά ΖΓ = ΖΒ οπότε $\text{ΑΔ}\cdot\text{ΔΓ}+\text{ΖΒ}^2=\text{ΖΔ}^2$ Από αυτή και το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51) αφαιρώντας το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά ΖΒ, προκύπτει αμέσως ότι $\text{ΑΔ}\cdot\text{ΔΓ}=\text{ΒΔ}^2$.

Έστω τώρα ότι η ΔΓΑ δεν διέρχεται από το κέντρο Ε του κύκλου ΑΒΓ. Από το Ε φέρνουμε την ΕΖ κάθετη στην ΑΓ και τις ΕΒ, ΕΓ και ΕΔ.

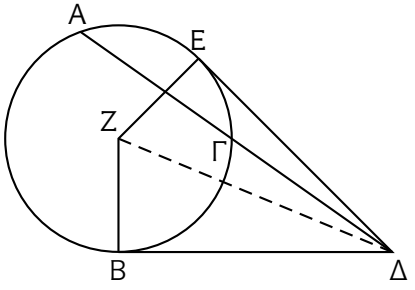
Τότε $\widehat{EB\Delta} = 1$ορθή (Π28, σελ. 101). Επίσης η ΕΖ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και τέμνει κάθετα την χορδή ΑΓ (που δεν διέρχεται από το κέντρο), άρα το Ζ είναι μέσον της (Π3, σελ. 82). Έτσι $AZ = Z\Gamma$.

Επειδή τώρα η ΑΓ διαιρείται σε δύο ίσα τμήματα από το μέσον της Ζ και η ΓΔ πρόσκειται σε αυτήν έπεται ότι το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου που έχει πλευρές ΑΔ και ΔΓ και του τετραγώνου πλευράς ΖΓ είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ΖΔ (Β2, Π6, σελ. 64). Δηλαδή $A\Delta \cdot \Delta\Gamma + Z\Gamma^2 = Z\Delta^2$.

Προσθέτοντας και το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ΖΕ βρίσκουμε $A\Delta \cdot \Delta\Gamma + Z\Gamma^2 + ZE^2 = Z\Delta^2 + ZE^2$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51), καθώς $\widehat{EZ\Gamma} = 1$ορθή έπεται ότι $A\Delta \cdot \Delta\Gamma + E\Gamma^2 = E\Delta^2$. Όμως $E\Gamma = EB$ οπότε $A\Delta \cdot \Delta\Gamma + EB^2 = E\Delta^2$. Πάλι από το Πυθαγόρειο Θεώρημα όμως, αφαιρώντας το EB^2 παίρνουμε $A\Delta \cdot \Delta\Gamma = \Delta B^2$.

Συνεπώς, αν από ένα σημείο εκτός κύκλου αχθούν δυο προσπίπτουσες προς αυτόν ώστε η μια να είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη τότε το ορθογώνιο με πλευρές την τέμνουσα και το τμήμα της τέμνουσας που βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο πλευράς ίσης με την εφαπτομένη· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 37 (524) *Αν από ένα σημείο εκτός κύκλου αχθούν μια τέμνουσα και μια προσπίπτουσα* (στμ: τέμνουσα ή εφαπτομένη) *προς τον κύκλο τέτοιες ώστε το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με την τέμνουσα και το τμήμα της τέμνουσας που βρίσκεται εκτός του κύκλου να είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με την προσπίπτουσα τότε η προσπίπτουσα εφάπτεται στον κύκλο.*



Απόδειξη. Αν Δ είναι ένα σημείο εκτός του κύκλου ΑΒΓ φέρνουμε την τέμνουσα ΔΓΑ και την προσπίπτουσα ΔΒ και έστω ότι το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΔ και ΔΓ έχει ίσο εμβαδόν με το τετράγωνο πλευράς ΔΒ. Ισχυρίζομαι ότι η ΔΒ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΓ.

Φέρνουμε την εφαπτομένη ΔΕ του κύκλου ΑΒΓ στο Ε (Π27, σελ. 101) και λαμβάνουμε το κέντρο Ζ του κύκλου ΑΒΓ. Στην συνέχεια φέρνουμε και τις ΖΕ, ΖΒ και ΖΔ.

Τότε θα είναι $\widehat{ZE\Delta} = 1$ορθή (Π28, σελ. 101). Επειδή η ΔΕ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΓ και η ΔΓΑ τέμνει τον κύκλο έπεται ότι το ορθογώνιο με πλευρές ΑΔ και ΔΓ είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο πλευράς ΔΕ (Π36, σελ. 108).

Από την υπόθεση όμως είναι γνωστό ότι το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΔ και ΔΓ είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο πλευράς

ΔΒ και άρα τα τετράγωνα με πλευρές ΔΕ και ΔΒ είναι ισεμβαδικά οπότε ΔΕ = ΔΒ.

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΔΒΖ παρατηρούμε ότι έχουν ΖΕ = ΒΖ, ΔΕ = ΔΒ και την ΖΔ κοινή και άρα είναι ίσα (Β1, Π8, σελ. 25). Έτσι, $\widehat{\Delta BZ} = \widehat{\Delta EZ} = 1$ ορθή.

Άρα η ΔΒ είναι κάθετη στο άκρο Β της διαμέτρου (που προκύπτει όταν η ΖΒ προεκταθεί προς το Β) και άρα εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΓ (Πόρισμα, Π16, σελ. 94).

Συνεπώς, αν από ένα σημείο εκτός κύκλου αχθούν μια τέμνουσα και μια προσπίπτουσα τέτοιες ώστε το ορθογώνιο με πλευρές την τέμνουσα και το τμήμα της τέμνουσας που βρίσκεται εκτός του κύκλου να είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο πλευράς ίσης με την προσπίπτουσα τότε η προσπίπτουσα εφάπτεται στον κύκλο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Βιβλίο 4ο

Ορισμοί

Ορισμοί 1 (527)

(ορ. 1) Ένα ευθύγραμμο σχήμα λέμε ότι «εγγράφεται σε ένα άλλο ευθύγραμμο σχήμα» (στμ: με ίδιο αριθμό πλευρών) όταν κάθε κορυφή του είναι σημείο διαφορετικής πλευράς (αλλά όχι άκρο της) του σχήματος στο οποίο εγγράφεται.

(ορ. 2) Ένα ευθύγραμμο σχήμα λέμε ότι «περιγράφεται περί ενός άλλου ευθύγραμμου σχήματος» (στμ: με ίδιο αριθμό πλευρών) όταν κάθε πλευρά του περιέχει μια κορυφή του σχήματος περί το οποίο περιγράφεται.

(ορ. 3) Ένα ευθύγραμμο σχήμα λέμε ότι «εγγράφεται σε έναν κύκλο» όταν οι κορυφές του είναι σημεία της περιφέρειας του κύκλου.

(ορ. 4) Ένας κύκλος λέμε ότι «εγγράφεται σε ένα ευθύγραμμο σχήμα» όταν η περιφέρειά του εφάπτεται σε κάθε πλευρά του σχήματος στο οποίο εγγράφεται.

(ορ. 5) Ένα ευθύγραμμο σχήμα λέμε ότι «περιγράφεται περί ενός κύκλου» όταν κάθε πλευρά του εφάπτεται στην περιφέρεια του κύκλου.

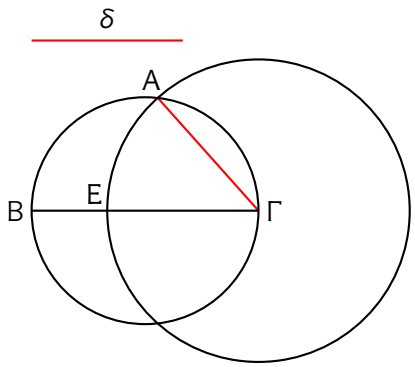
(ορ. 6) Ένας κύκλος λέμε ότι «περιγράφεται περί ενός ευθύγραμμου σχήματος» όταν στην περιφέρειά του ανήκουν οι κορυφές του ευθύγραμμου σχήματος αυτού.

(ορ. 7) Ένα ευθύγραμμο τμήμα λέμε ότι «εναρμόζεται σε έναν κύκλο» όταν τα άκρα του είναι σημεία της περιφέρειας του κύκλου. (στμ: το ευθύγραμμο αυτό τμήμα είναι χορδή του κύκλου).

Πρόταση 1 (Κατασκευή) (527) *Σε δοθέντα κύκλο να εναρμοσθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με ένα δοθέν ευθύγραμμο τμήμα που να μην είναι μεγαλύτερο από την διάμετρο του κύκλου.*

Υλοποίηση: Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓ και το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα δ που δεν είναι μεγαλύτερο της διαμέτρου του κύκλου. Πρέπει να εναρμοσθεί στον κύκλο ΑΒΓ ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το δ.

Φέρνουμε την διάμετρο ΒΓ του κύκλου ΑΒΓ.



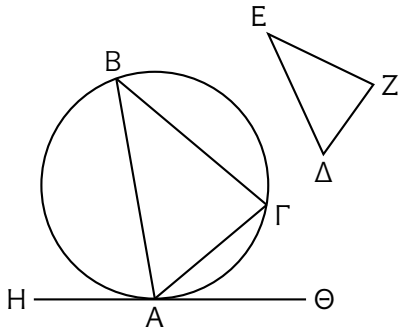
Αν $\delta = \text{ΒΓ}$ η κατασκευή έχει ολοκληρωθεί καθώς στον κύκλο ΑΒΓ έχει εναρμοσθεί το $\text{ΒΓ} = \delta$.

Αν $\text{ΒΓ} > \delta$ τότε λαμβάνουμε το σημείο Ε στην ΒΓ ώστε $\text{ΓΕ} = \delta$. Με κέντρο το Γ και ακτίνα ίση με ΓΕ γράφουμε τον κύκλο ΕΑΖ και φέρνουμε την ΓΑ.

Επειδή το Γ είναι το κέντρο του κύκλου ΕΑΖ είναι $\text{ΓΑ} = \text{ΓΕ}$ και καθώς $\text{ΓΕ} = \delta$ έπεται ότι $\text{ΓΑ} = \delta$.

Έτσι, στον δοθέντα κύκλο ΑΒΓ έχει εναρμοσθεί το $\text{ΓΑ} = \delta$, με το δ να έχει δοθεί. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 2 (Κατασκευή) (527) *Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί τρίγωνο ισογώνιο με δοθέν τρίγωνο.*



Υλοποίηση: Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓ και το δοθέν τρίγωνο ΔΕΖ. Πρέπει να εγγραφεί στον κύκλο ΑΒΓ ένα τρίγωνο που να είναι ισογώνιο με το ΔΕΖ.

Φέρνουμε την εφαπτομένη ΗΘ στο σημείο Α του κύκλου (Β3, Π17, σελ. 95) και στην συνέχεια με κορυφή το Α και πλευρά ΑΘ κατασκευάζουμε την $\widehat{\text{ΘΑΓ}} = \widehat{\Delta\text{ΕΖ}}$, ενώ με κορυφή το Α και πλευρά ΑΗ κατασκευάζουμε αντίστοιχα την $\widehat{\text{ΗΑΒ}} = \widehat{\Delta\text{ΖΕ}}$ (Β1, Π23, σελ. 34). Φέρνουμε και την ΒΓ.

Επειδή η ΑΘ εφάπτεται στον κύκλο στο Α και από το Α έχει αχθεί η χορδή ΑΓ έπεται ότι $\widehat{\text{ΘΑΓ}} = \widehat{\text{ΑΒΓ}}$ καθώς η οξεία γωνία που σχηματίζει η χορδή με την εφαπτομένη είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο χορδής ΑΓ (Β3, Π32, σελ. 104).

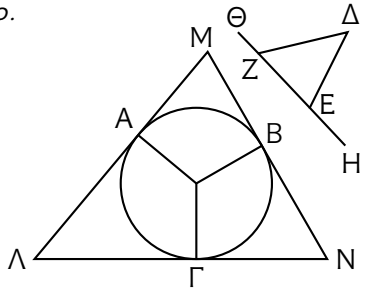
Αλλά $\widehat{\text{ΘΑΓ}} = \widehat{\Delta\text{ΕΖ}}$ και άρα $\widehat{\text{ΑΒΓ}} = \widehat{\Delta\text{ΕΖ}}$.

Ομοίως είναι και $\widehat{\text{ΑΓΒ}} = \widehat{\Delta\text{ΖΕ}}$, οπότε καθώς το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές (Β1, Π32, σελ. 40) έπεται ότι είναι ίσες και οι απομένουσες γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ. Δηλαδή, $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\text{ΕΔΖ}}$.

Έτσι, το τρίγωνο ΑΒΓ που έχει εγγραφεί στον κύκλο ΑΒΓ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ.

Συνεπώς, στον δοθέντα κύκλο έχει εγγραφεί τρίγωνο ισογώνιο με δοθέν τρίγωνο· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 3 (Κατασκευή) (528) *Περί έναν δοθέντα κύκλο, να περιγραφεί ένα τρίγωνο ισογώνιο με ένα άλλο δοθέν τρίγωνο.*



Υλοποίηση: Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓ και το δοθέν τρίγωνο ΔΕΖ. Πρέπει να περιγραφεί περί τον κύκλο ΑΒΓ ένα τρίγωνο ισογώνιο με το ΔΕΖ.

Προεκτείνουμε την ΖΕ προς τα δυο της άκρα κατά τα τυχόντα τμήματα ΖΘ και ΕΗ. Από το κέντρο Κ του κύκλου ΑΒΓ φέρνουμε την ακτίνα ΚΒ και κατασκευάζουμε τις γωνίες $\widehat{\Delta EH} = \widehat{BKA}$ και $\widehat{\Delta Z\Theta} = \widehat{BK\Gamma}$ (ΒΙ, Π23, σελ. 34). Στην συνέχεια φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΛΑΜ, ΜΒΝ και ΝΓΛ στα σημεία Α, Β και Γ του κύκλου αντίστοιχα (Β3, ΠΙ7, σελ. 95).

Το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου ΑΜΒΚ όμως είναι ίσο με τέσσαρες ορθές καθώς αυτό διαιρείται σε δυό τρίγωνα και το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές (ΒΙ, Π32, σελ. 40).

Όμως $\widehat{KAM} = \widehat{KBM} = 1$ ορθή, διότι οι ακτίνες του κύκλου είναι κάθετες στις εφαπτόμενες στα σημεία επαφής (Β3, ΠΙ8, σελ. 96), και άρα $\widehat{AKB} + \widehat{AMB} = 2$ ορθές.

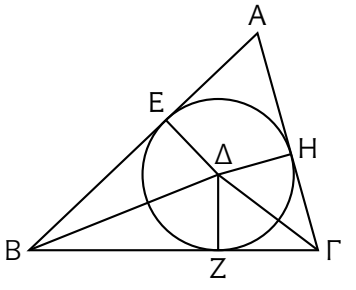
Είναι όμως και $\widehat{\Delta EH} + \widehat{\Delta EZ} = 2$ ορθές (ΒΙ, ΠΙ3, σελ. 28) και άρα $\widehat{AKB} + \widehat{AMB} = \widehat{\Delta EH} + \widehat{\Delta EZ}$

Επειδή $\widehat{AKB} = \widehat{\Delta EH}$ από την προηγούμενη προκύπτει ότι $\widehat{AMB} = \widehat{\Delta EZ}$.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{\Lambda NB} = \widehat{\Delta ZE}$ και άρα $\widehat{M\Lambda N} = \widehat{E\Delta Z}$. Οπότε το τρίγωνο ΛΜΝ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ.

Συνεπώς, περί τον δοθέντα κύκλο έχει περιγραφεί τρίγωνο ισογώνιο προς άλλο δοθέν τρίγωνο· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 4 (Κατασκευή) (529) *Να εγγραφεί κύκλος σε δοθέν τρίγωνο.*



Υλοποίηση: Έστω το δοθέν τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο πρέπει να εγγραφεί κύκλος.

Φέρνουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\widehat{AB\Gamma}$ και $\widehat{A\Gamma B}$ (ΒΙ, Π9, σελ. 26) που τέμνονται στο Δ (ΒΙ, Π5, σελ. 24) και από το Δ φέρνουμε τις κάθετες ΔΕ, ΔΖ και ΔΗ στις ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΕΒΔ και ΒΖΔ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν μια πλευρά ίση (την ΒΔ που είναι

κοινή) και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες ίσες καθώς $\widehat{\Delta BE} = \widehat{\Delta BZ}$ και $\widehat{\Delta EB} = \widehat{\Delta ZB} = 1$ ορθή. Άρα τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (Β1, Π26, σελ. 36) και επομένως ισχύει ΔΕ = ΔΖ.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι ΔΖ = ΔΗ οπότε ΔΕ = ΔΖ = ΔΗ και άρα ο κύκλος που γράφεται με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔΕ διέρχεται από τα σημεία Ζ και Η.

Επιπλέον, οι ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ εφάπτονται σε αυτόν τον κύκλο καθώς οι ΔΕ, ΔΖ και ΔΗ είναι κάθετες σε αυτές.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι ο κύκλος τέμνει τις ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ τότε η κάθετη στο άκρο της διαμέτρου του βρίσκεται στο εσωτερικό του, που όμως είναι άτοπο (Β3, Π16, σελ. 94).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο κύκλος ΕΖΗ που γράφεται με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔΕ = ΔΖ = ΔΗ δεν τέμνει τις ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αλλά εφάπτεται σε αυτές.

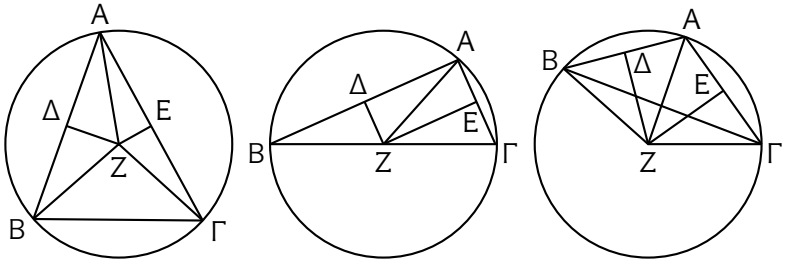
Έτσι στο δοθέν τρίγωνο ΑΒΓ έχει εγγραφεί ο κύκλος ΕΖΗ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 5 (Κατασκευή) (530) *Περί δοθέντος τριγώνου να περιγραφεί κύκλος.*

Υλοποίηση: Έστω το δοθέν τρίγωνο ΑΒΓ περί το οποίο πρέπει να περιγραφεί κύκλος.

Λαμβάνουμε τα μέσα Δ και Ε των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και από αυτά φέρνουμε τις ΔΖ και ΕΖ κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Για το σημείο τομής Ζ των ΔΖ και ΕΖ διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.



1η περίπτωση: το Ζ βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ.

Φέρνουμε τις ΖΒ, ΖΓ και ΖΑ. Τότε τα τρίγωνα ΑΔΖ και *Z*ΔΒ έχουν ΑΔ = ΔΒ, την ΔΖ κοινή και $\widehat{A\Delta Z} = \widehat{Z\Delta B}$ οπότε είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23). Άρα ΑΖ = ΖΒ.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι ΓΖ = ΑΖ οπότε ισχύει ΑΖ = ΖΒ = ΖΓ (κ.εν.1, σελ. 21).

Άρα ο κύκλος που γράφεται με κέντρο το Ζ και ακτίνα ΖΑ διέρχεται από τα Β και Γ και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ.

2η περίπτωση: Το Ζ είναι σημείο της ΒΓ.

Φέρνουμε την ΑΖ και όμοια με πριν αποδεικνύεται ότι το Ζ είναι το κέντρο του περιγραφόμενου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

3η περίπτωση: Το Ζ βρίσκεται έξω από το τρίγωνο ΑΒΓ.

Φέρνουμε τις ΑΖ, ΒΖ και ΓΖ και λαμβάνουμε τα μέσα Δ και Ε των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Τότε τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΒΔΖ έχουν ΑΔ = ΔΒ, την ΔΖ κοινή και $\widehat{A\Delta Z} = \widehat{B\Delta Z}$ οπότε είναι ίσα (ΒΙ, Π4, σελ. 23). Άρα ΑΖ = ΒΖ.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι ΓΖ = ΑΖ και άρα ΑΖ = ΒΖ = ΓΖ.

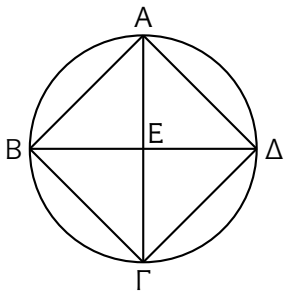
Άρα ο κύκλος που γράφεται με κέντρο το Ζ και ακτίνα ΖΑ διέρχεται από τα Β και Γ και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ.

Συνεπώς, περί το δοθέν τρίγωνο έχει περιγραφεί κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα 5 Είναι φανερό ότι όταν το κέντρο του κύκλου είναι στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ η γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ που είναι σε τμήμα κύκλου μεγαλύτερο του ημικυκλίου, είναι μικρότερη της ορθής. Όταν το κέντρο του κύκλου είναι σημείο της ΒΓ τότε η $\widehat{BA\Gamma}$ είναι σε ημικύκλιο και είναι ορθή ενώ όταν το κέντρο του κύκλου βρίσκεται έξω από το τρίγωνο η $\widehat{BA\Gamma}$ είναι σε τμήμα κύκλου μικρότερο του ημικυκλίου και είναι μεγαλύτερη της ορθής.

Έτσι, δοθείσης της γωνίας (στμ: της κορυφής του τριγώνου) όταν αυτή είναι οξεία τα κάθετα τμήματα ΔΖ και ΕΖ βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου. Όταν πάλι η γωνία είναι ορθή τότε τα κάθετα τμήματα τέμνονται πάνω στην ΒΓ ενώ όταν η γωνία είναι αμβλεία τότε βρίσκονται έξω από το τρίγωνο· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 6 (Κατασκευή) (531) *Να εγγραφεί τετράγωνο σε δοθέντα κύκλο.*



Υλοποίηση: Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓΔ στον οποίο πρέπει να εγγραφεί τετράγωνο.

Φέρνουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ κάθετες μεταξύ τους που τέμνονται στο Ε. Φέρνουμε και τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ.

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΕΔΑ παρατηρούμε ότι έχουν ΒΕ = ΕΔ (καθώς το Ε είναι το κέντρο του κύκλου), την ΕΑ κοινή και $\widehat{AEB} = \widehat{AE\Delta} = 1$ ορθή. Συνεπώς είναι ίσα (ΒΙ, Π4, σελ. 23) και άρα ΑΒ = ΑΔ.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι ΒΓ = ΒΑ και ΓΔ = ΑΔ και επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισόπλευρο.

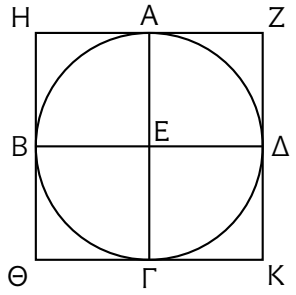
Ισχυρίζομαι ότι το ΑΒΓΔ είναι και ορθογώνιο. Πράγματι, καθώς η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου ΑΒΓΔ έπεται ότι το $\overset{\frown}{BA\Delta}$ είναι ημικύκλιο και

άρα $\widehat{BA\Delta} = 1$ ορθή (Β3, Π31, σελ. 102). Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta A} = 1$ ορθή και επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

Καθώς όμως είναι και ισόπλευρο έπεται ότι είναι τετράγωνο (Β1, Π22, σελ. 34) ενώ έχει εγγραφεί στον κύκλο ΑΒΓΔ.

Συνεπώς, στον δοθέντα κύκλο έχει εγγραφεί το τετράγωνο ΑΒΓΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι *Δ*

Πρόταση 7 (Κατασκευή) (531) *Να περιγραφεί τετράγωνο περί δοθέντος κύκλου.*



Υλοποίηση: Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓΔ περί τον οποίο πρέπει να περιγραφεί τετράγωνο.

Φέρνουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ που να είναι κάθετες μεταξύ τους. Στην συνέχεια φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ και ΚΖ στα Α, Β, Γ και Δ αντίστοιχα (Β3, Π17, σελ. 95).

Επειδή η ΖΗ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΓΔ και από το κέντρο του Ε έχει αχθεί η ακτίνα του ΕΑ έπεται ότι $\widehat{EAZ} = \widehat{EAH} = 1$ ορθή (Β3, Π18, σελ. 96). Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{EBH} = \widehat{EB\Theta} = \widehat{E\Gamma\Theta} = \widehat{E\Gamma K} = \widehat{E\Delta Z} = \widehat{E\Delta K} = 1$ ορθή.

Επειδή τώρα $\widehat{AEB} = \widehat{EBH} = 1$ ορθή έπεται ότι ΗΘ // ΑΓ (Β1, Π29, σελ. 38). Ομοίως αποδεικνύεται και ότι ΑΓ//ΖΚ και επομένως ισχύει ΗΘ//ΖΚ (Β1, Π30, σελ. 39).

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι ΗΖ // ΘΚ // ΒΔ και έτσι συμπεραίνουμε ότι τα ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ και ΖΒ είναι παραλληλόγραμμα.

Έτσι, ΗΖ = ΘΚ και ΗΘ = ΖΚ (Β1, Π34, σελ. 41).

Επειδή ΑΓ = ΒΔ και ΑΓ = ΗΘ = ΖΚ και ΒΔ = ΗΖ = ΘΚ συμπεραίνουμε ότι ΗΘ = ΘΚ = ΖΚ = ΗΖ δηλαδή το τετράπλευρο ΖΗΘΚ είναι ισόπλευρο.

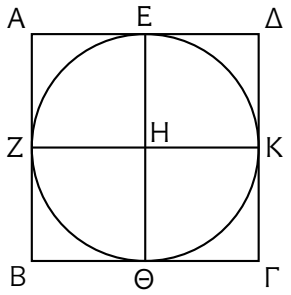
Ισχυρίζομαι ότι το ΖΗΘΚ είναι και ορθογώνιο. Πράγματι καθώς το ΗΒΕΑ είναι παραλληλόγραμμο με $\widehat{AEB} = 1$ ορθή έπεται ότι $\widehat{AHB} = 1$ ορθή (Β1, Π34, σελ. 41).

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι $\widehat{B\Theta\Gamma} = \widehat{\Delta K\Gamma} = \widehat{AZ\Delta} = 1$ ορθή οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΖΗΘΚ είναι ορθογώνιο.

Καθώς όμως είναι και ισόπλευρο έπεται ότι το ΖΗΘΚ είναι τετράγωνο ενώ έχει περιγραφεί περί τον κύκλο ΑΒΓΔ.

Συνεπώς, περί τον δοθέντα κύκλο έχει περιγραφεί τετράγωνο· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 8 (Κατασκευή) (532) *Να εγγραφεί κύκλος σε δοθέν τετράγωνο.*



Υλοποίηση: Έστω το δοθέν τετράγωνο ΑΒΓΔ στο οποίο πρέπει να εγγραφεί κύκλος.

Λαμβάνουμε τα μέσα Ε και Ζ των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα (Β1, Π30, σελ. 39). Από το Ε φέρνουμε την ΕΘ παράλληλη προς τις ΑΒ και ΓΔ ενώ από το Ζ φέρνουμε την ΖΚ παράλληλη προς τις ΑΔ και ΒΓ (Β1, Π31, σελ. 39).

Έτσι τα ΑΚ, ΚΒ, ΑΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ και ΗΔ είναι παραλληλόγραμμα και άρα έχουν ίσες τις απέναντι πλευρές τους (Β1, Π34, σελ. 41).

Τότε ΑΔ = ΑΒ και άρα ΑΔ/2 = ΑΒ/2 ή ΑΕ = ΑΖ. Αλλά ΑΕ = ΖΗ και ΑΖ = ΕΗ οπότε από την προηγούμενη έπεται ότι ΖΗ = ΗΕ.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι ΗΘ = ΗΖ και ΗΚ = ΗΕ.

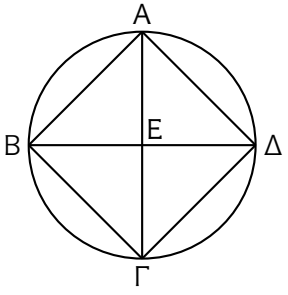
Επομένως ισχύει ΗΕ = ΗΖ = ΗΘ = ΗΚ και άρα ο κύκλος που γράφεται με κέντρο το Η και ακτίνα ΗΕ διέρχεται και από τα Ζ, Θ και Κ.

Επιπλέον οι ΑΒ, ΑΔ, ΔΓ και ΒΓ εφάπτονται σε αυτόν τον κύκλο καθώς $\widehat{\text{ΑΕΗ}} = \widehat{\text{ΗΕΔ}} = \widehat{\text{ΔΚΗ}} = \widehat{\text{ΗΚΓ}} = \widehat{\text{ΗΘΓ}} = \widehat{\text{ΗΘΒ}} = \widehat{\text{ΒΖΗ}} = \widehat{\text{ΗΖΑ}} = 1$ ορθή και αν υποθέσουμε ότι ο κύκλος τέμνει κάποια από τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ τότε η κάθετη που άγεται στο άκρο της διαμέτρου του κύκλου θα βρίσκεται στο εσωτερικό του. Αυτό όμως είναι άτοπο (Β3, Π16, σελ. 94).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο κύκλος αυτός εφάπτεται στις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ και έτσι είναι εγγεγραμμένος στο τετράγωνο ΑΒΓΔ.

Συνεπώς, στο δοθέν τετράγωνο έχει εγγραφεί κύκλος· όπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρόταση 9 (Κατασκευή) (532) *Να περιγραφεί κύκλος περί δοθέντος τετραγώνου.*



Υλοποίηση: Έστω το δοθέν τετράγωνο ΑΒΓΔ περί το οποίο πρέπει να περιγραφεί κύκλος. Φέρνουμε τις ΑΓ και ΒΔ που τέμνονται στο Ε.

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ παρατηρούμε ότι έχουν ΔΑ = ΑΒ, την ΑΓ κοινή και ΔΓ = ΒΓ. Άρα είναι ίσα και επομένως ισχύει $\widehat{\text{ΔΑΓ}} = \widehat{\text{ΒΑΓ}}$.

Έτσι, η $\widehat{\text{ΔΑΒ}}$ διχοτομείται από την ΑΓ.

Ομοίως αποδεικνύεται και οι $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$, $\widehat{\text{ΒΓΔ}}$ και $\widehat{\text{ΓΔΑ}}$ διχοτομούνται από τις ΑΓ και ΔΒ.

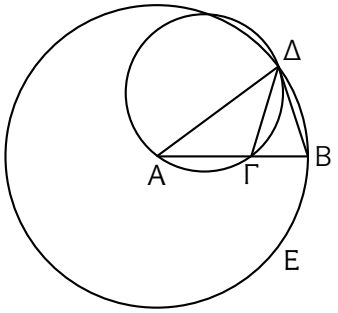
Τότε ισχύει $\widehat{\text{ΔΑΒ}} = \widehat{\text{ΑΒΓ}}$ και άρα $\widehat{\text{ΔΑΒ}}/2 = \widehat{\text{ΑΒΓ}}/2$ ή $\widehat{\text{ΕΑΒ}} = \widehat{\text{ΕΒΑ}}$ και άρα ΕΑ = ΕΒ (Β1, Π6, σελ. 24).

Ομοίως αποδεικνύεται ότι ΑΕ = ΕΓ και ΕΒ = ΕΔ οπότε συμπεραίνουμε ότι ΕΑ = ΕΒ = ΕΓ = ΕΔ.

Άρα ο κύκλος ΑΒΓΔ που γράφεται με κέντρο το Ε και ακτίνα ίση με ΕΑ διέρχεται και από τα Β, Γ και Δ και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος περί το τετράγωνο ΑΒΓΔ.

Συνεπώς, περί το δοθέν τετράγωνο έχει περιγραφεί κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 10 (Κατασκευή) (533) *Να κατασκευαστεί ισοσκελές τρίγωνο στο οποίο κάθε γωνία της βάσης να είναι διπλάσια της γωνίας της κορυφής.*



Υλοποίηση: Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και έστω το τυχόν σημείο του Γ. Τότε το ορθογώνιο που έχει πλευρές ίσες με ΑΒ και ΒΓ είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο πλευράς ΓΑ (Β2, Π11, σελ. 73), δηλαδή ισχύει $AB \cdot B\Gamma = \Gamma A^2$.

Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε τον κύκλο ΒΔΕ στον οποίο εναρμόζουμε το τμήμα ΔΒ = ΓΑ που δεν είναι μεγαλύτερο της διαμέτρου του (Π1, σελ. 111). Έτσι από την προηγούμενη έπεται ότι $AB \cdot B\Gamma = B\Delta^2$.

Φέρνουμε τις ΑΔ και ΔΓ και γράφουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο ΑΓΔ του τριγώνου ΑΓΔ (Π5, σελ. 114).

Επειδή τώρα, από το Β που δεν ανήκει στον κύκλο ΑΓΔ προσπίπτουν προς αυτόν οι ΒΑ και ΒΔ και ισχύει $AB \cdot B\Gamma = B\Delta^2$, έπεται ότι η ΒΔ εφάπτεται στον κύκλο ΑΓΔ (Β3, Π37, σελ. 109).

Τότε $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{\Delta A\Gamma}$ καθώς η οξεία γωνία που σχηματίζει η χορδή με την εφαπτομένη είναι ίση με κάθε οξεία γωνία που βαίνει στο τόξο που υποτείνει χορδή ΓΔ (Β3, Π32, σελ. 104).

Έτσι έχουμε ότι $\widehat{\Delta\Gamma B} = \widehat{\Delta A\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta A}$, αφού η $\widehat{\Delta\Gamma B}$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΓΔ (Β1, Π32, σελ. 40). Οπότε το άθροισμα αυτό ισούται με $\widehat{B\Delta\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta A}$, και αυτό με τη σειρά του ισούται με την $\widehat{B\Delta A}$ που είναι ίση με $\widehat{\Delta BA}$, αφού το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές (Β1, Π5, σελ. 24). Δηλαδή $\widehat{\Delta\Gamma B} = \widehat{\Delta BA}$.

Άρα ΔΓ = ΔΒ = ΓΑ (Β1, Π6, σελ. 24) και το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές. Συνεπώς

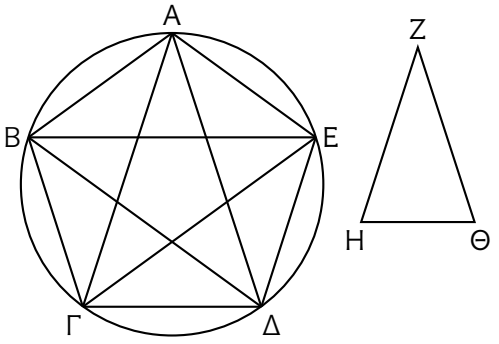
$$2 \cdot \widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{\Delta A\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta A} = \widehat{\Delta\Gamma B} = \widehat{\Delta B\Gamma},$$

δηλαδή $\widehat{\Delta B\Gamma} = 2 \cdot \widehat{\Delta A\Gamma}$.

Έτσι, τελικά ισχύει ότι $\widehat{\Delta BA} = \widehat{B\Delta A} = 2 \cdot \widehat{\Delta A\Gamma}$.

Συνεπώς, στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ που έχει κατασκευαστεί, κάθε γωνία της βάσης του είναι διπλάσια από την γωνία της κορυφής· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 11 (Κατασκευή) (534) *Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο* (*στμ: κανονικό*).



Υλοποίηση: Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΓΔ στον οποίο πρέπει να εγγραφεί ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο.

Κατασκευάζουμε το ισοσκελές τρίγωνο ΖΗΘ στο οποίο η κάθε γωνία βάσης να είναι διπλάσια από τη γωνία της κορυφής δηλαδή να ισχύει $\widehat{ZH\Theta} = \widehat{Z\Theta H} = 2 \cdot \widehat{HZ\Theta}$ (Π10, σελ. 118).

Στην συνέχεια εγγράφουμε στον κύκλο το τρίγωνο ΑΓΔ ισογώνιο με το ΖΗΘ ώστε $\widehat{\Gamma A\Delta} = \widehat{HZ\Theta}$ και $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta A} = \widehat{ZH\Theta}$ (Π2, σελ. 112). Τότε, $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta A} = 2 \cdot \widehat{\Gamma A\Delta}$.

Φέρνουμε τις διχοτόμους των $\widehat{A\Gamma\Delta}$ και $\widehat{\Gamma\Delta A}$ που τέμνουν τον κύκλο ΑΔΓ στα Ε και Β αντίστοιχα. Φέρνουμε και τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΑ.

Καθώς $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta A} = 2 \cdot \widehat{\Gamma A\Delta}$ και αυτές έχουν διχοτομηθεί από τις ΓΕ και ΔΒ έπεται ότι $\widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{A\Gamma E} = \widehat{E\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta B} = \widehat{B\Delta A}$.

Σε έναν κύκλο όμως οι ίσες εγγεγραμμένες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα (Β3, Π26, σελ. 100) και έτσι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta E} = \overset{\frown}{EA}$. Τότε όμως και οι αντίστοιχες χορδές που υποτείνονται είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΑ και άρα το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι ισόπλευρο.

Ισχυρίζομαι ότι είναι και ισογώνιο. Πράγματι, καθώς $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Delta E}$ είναι και $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta E} + \overset{\frown}{B\Gamma\Delta}$ ή $\overset{\frown}{AB\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{E\Delta\Gamma B}$. Τότε όμως $\widehat{BAE} = \widehat{AE\Delta}$ διότι αυτές είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα (Β3, Π27, σελ. 101).

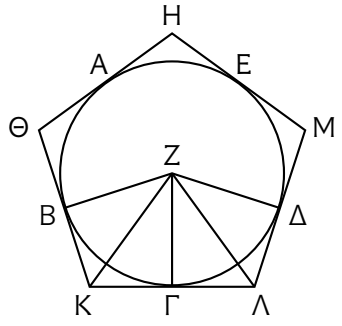
Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta E} = \widehat{BAE} = \widehat{AE\Delta}$ και επομένως το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι και ισογώνιο.

Συνεπώς, στον δοθέντα κύκλο έχει εγγραφεί πεντάγωνο που είναι ισόπλευρο και ισογώνιο· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 12 (Κατασκευή) (534) *Περί δοθέντα κύκλο να περιγραφεί ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο.*

Υλοποίηση: Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓΔΕ περί τον οποίο πρέπει να περιγραφεί ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο.

Θεωρούμε ότι τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε του κύκλου είναι οι κορυφές του ισόπλευρου και ισογώνιου πενταγώνου που έχει εγγραφεί σε αυτόν (Π11, σελ. 119). Τότε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta E} = \overset{\frown}{EA}$.



Στην συνέχεια φέρνουμε τις εφαπτομένες ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ και ΜΗ του κύκλου στα σημεία του Α, Β, Γ, Δ και Ε αντίστοιχα (Β3, Π17, σελ. 95).

Λαμβάνουμε το κέντρο Ζ του κύκλου (Β3, Π1, σελ. 81) και φέρνουμε τις ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ και ΖΔ.

Επειδή τώρα η ΚΛ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΓΔΕ στο Γ έπεται ότι $\widehat{Z\Gamma K} = \widehat{Z\Gamma\Lambda} = 1$ ορθή (Β3, Π18, σελ. 96), ενώ ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{ZBK} = \widehat{ZB\Theta} = \widehat{Z\Delta\Lambda} = \widehat{Z\Delta M} = 1$ ορθή.

Τότε όμως από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51), καθώς $\widehat{Z\Gamma K} = \widehat{ZBK} = 1$ ορθή, ισχύουν $ZK^2 = Z\Gamma^2 + K\Gamma^2$ και $ZK^2 = ZB^2 + BK^2$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $Z\Gamma^2 + K\Gamma^2 = ZB^2 + BK^2$ και καθώς $ZB^2 = Z\Gamma^2$ (διότι ΖΒ = ΖΓ) έπεται ότι $\Gamma K^2 = BK^2$ και άρα ΓΚ = ΒΚ.

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΖΒΚ και ΖΚΓ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΒΖ = ΖΓ, ΒΚ = ΓΚ και την ΖΚ κοινή. Συνεπώς είναι ίσα (Β1, Π8, σελ. 25) και άρα $\widehat{BZK} = \widehat{KZ\Gamma}$ και $\widehat{BKZ} = \widehat{ZK\Gamma}$.

Έτσι $\widehat{BZ\Gamma} = 2 \cdot \widehat{KZ\Gamma}$ και $\widehat{BK\Gamma} = 2 \cdot \widehat{ZK\Gamma}$, ενώ με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι $\widehat{\Gamma Z\Delta} = 2 \cdot \widehat{\Gamma Z\Lambda}$ και $\widehat{\Delta\Lambda\Gamma} = 2 \cdot \widehat{Z\Lambda\Gamma}$.

Επειδή $\overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ είναι $\widehat{BZ\Gamma} = \widehat{\Gamma Z\Delta}$ (Β3, Π27, σελ. 101) και άρα $2 \cdot \widehat{KZ\Gamma} = 2 \cdot \widehat{\Gamma Z\Lambda}$ ή $\widehat{KZ\Gamma} = \widehat{\Gamma Z\Lambda}$.

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΖΚΓ και ΖΛΓ παρατηρούμε ότι έχουν $\widehat{KZ\Gamma} = \widehat{\Gamma Z\Lambda}$, την ΖΓ κοινή και $\widehat{Z\Gamma\Lambda} = \widehat{Z\Gamma K} = 1$ ορθή. Άρα είναι ίσα (Β1, Π26, σελ. 36) και επομένως ισχύει ΚΓ = ΓΛ και $\widehat{ZK\Gamma} = \widehat{Z\Lambda\Gamma}$.

Συνεπώς ΚΛ = 2·ΚΓ ενώ ομοίως αποδεικνύεται ότι ΘΚ = 2·ΒΚ. Καθώς όμως ΒΚ = ΚΓ έπεται ότι ΘΚ = ΚΛ.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ΘΗ = ΗΜ = ΜΛ = ΚΛ = ΘΚ και επομένως το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι ισόπλευρο.

Ισχυρίζομαι ότι είναι και ισογώνιο. Πράγματι, είναι $\widehat{ZK\Gamma} = \widehat{Z\Lambda\Gamma}$ ενώ $\widehat{\Theta K\Lambda} = 2 \cdot \widehat{ZK\Gamma}$ και $\widehat{K\Lambda M} = 2 \cdot \widehat{Z\Lambda\Gamma}$ οπότε $\widehat{\Theta K\Lambda} = \widehat{K\Lambda M}$.

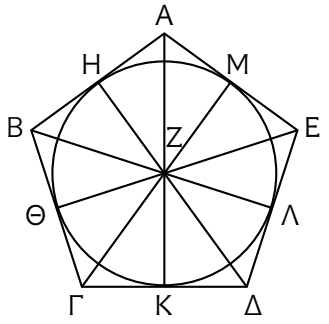
Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\widehat{K\Theta H} = \widehat{\Theta HM} = \widehat{HM\Lambda} = \widehat{\Theta K\Lambda}$ και άρα το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι και ισογώνιο.

Άρα, περί τον δοθέντα κύκλο έχει περιγραφεί ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 13 (Κατασκευή) (535) *Σε δοθέν ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο να εγγραφεί κύκλος.*

Υλοποίηση: Έστω το δοθέν ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ στο οποίο πρέπει να εγγραφεί κύκλος.

Φέρνουμε τις διχοτόμους των $\widehat{B\Gamma\Delta}$ και $\widehat{\Gamma\Delta E}$ που τέμνονται στο Ζ. Φέρνουμε και τις ΖΒ, ΖΑ και ΖΕ.



Τα τρίγωνα ΒΖΓ και ΓΖΔ έχουν ΒΓ = ΓΔ, την ΓΖ κοινή και $\widehat{\text{ΒΓΖ}} = \widehat{\text{ΖΓΔ}}$ και άρα είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23) οπότε ΒΖ = ΔΖ και $\widehat{\Gamma\text{ΒΖ}} = \widehat{\Gamma\Delta\text{Ζ}}$.

Τότε επειδή $\widehat{\Gamma\Delta\text{Ε}} = 2 \cdot \widehat{\Gamma\Delta\text{Ζ}}$, $\widehat{\Gamma\Delta\text{Ε}} = \widehat{\text{ΑΒΓ}}$ και $\widehat{\Gamma\Delta\text{Ζ}} = \widehat{\Gamma\text{ΒΖ}}$ έπεται ότι $\widehat{\text{ΑΒΓ}} = 2 \cdot \widehat{\Gamma\text{ΒΖ}}$ και άρα $\widehat{\text{ΑΒΖ}} = \widehat{\text{ΖΒΓ}}$. Έτσι, η ΒΖ διχοτομεί την $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι οι ΖΑ, ΖΕ διχοτομούν τις $\widehat{\text{ΒΑΕ}}$ και $\widehat{\text{ΑΕΔ}}$ αντίστοιχα.

Στην συνέχεια φέρνουμε από το Ζ τις ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ και ΖΜ κάθετες στις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΑ αντίστοιχα.

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΖΘΓ και ΖΓΚ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν $\widehat{\Theta\Gamma\text{Ζ}} = \widehat{\text{ΖΓΚ}}$, $\widehat{\text{ΖΘΓ}} = \widehat{\text{ΖΚΓ}} = 1$ορθή και την ΓΖ που βρίσκεται απέναντι από τις $\widehat{\text{ΖΘΓ}}$, $\widehat{\text{ΖΚΓ}}$ κοινή. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (Β1, Π26, σελ. 36) και άρα ΖΘ = ΖΚ.

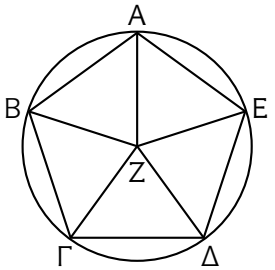
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι ΖΛ = ΖΘ = ΖΚ, ΖΜ = ΖΘ = ΖΚ και ΖΗ = ΖΘ = ΖΚ. Επομένως ισχύει ΖΗ = ΖΘ = ΖΚ = ΖΛ = ΖΜ.

Άρα ο κύκλος που γράφεται με κέντρο το Ζ και ακτίνα ΖΗ διέρχεται και από τα Θ, Κ, Λ και Μ.

Επιπλέον, ο κύκλος αυτός εφάπτεται στις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΑ διότι οι γωνίες με κορυφές τα Η, Θ, Κ, Λ και Μ είναι ορθές. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι ο κύκλος αυτός τέμνει τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΑ τότε οι κάθετες στο άκρο διαμέτρων του κύκλου βρίσκονται στο εσωτερικό του. Αυτό όμως είναι άτοπο (Β3, Π16, σελ. 94). Άρα ο κύκλος δεν τέμνει τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΑ αλλά εφάπτεται σε αυτές.

Συνεπώς, στο δοθέν ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο έχει εγγραφεί κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 14 (Κατασκευή) (536) *Να περιγραφεί κύκλος περί δοθέντος ισόπλευρου και ισογώνιου πενταγώνου.*



Υλοποίηση: Έστω το δοθέν ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ περί το οποίο πρέπει να περιγραφεί κύκλος.

Φέρνουμε τις διχοτόμους των $\widehat{\text{ΒΓΔ}}$ και $\widehat{\Gamma\Delta\text{Ε}}$ που τέμνονται στο Ζ. Στην συνέχεια φέρνουμε και τις ΖΒ, ΖΑ και ΖΕ.

Όπως και στην προηγούμενη πρόταση (Π13, σελ. 120) αποδεικνύεται ότι οι $\widehat{\Gamma\text{ΒΑ}}$ και $\widehat{\text{ΒΑΕ}}$ και $\widehat{\text{ΑΕΔ}}$ διχοτομούνται από τις ΖΒ, ΖΑ και ΖΕ αντίστοιχα.

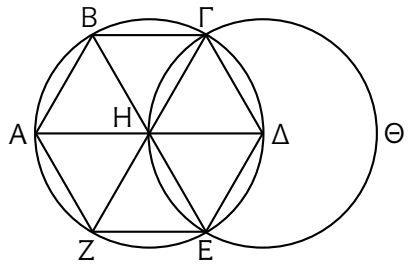
Τότε όμως, επειδή $\widehat{\text{ΒΓΔ}} = \widehat{\Gamma\Delta\text{Ε}}$ είναι και $\widehat{\text{ΖΓΔ}} = \widehat{\Gamma\Delta\text{Ζ}}$ καθώς αυτές είναι μισές ίσων γωνιών. Συνεπώς, ΖΓ = ΖΔ (Β1, Π6, σελ. 24).

Ομοίως αποδεικνύεται ότι ΖΒ = ΖΓ = ΖΔ, ΖΑ = ΖΓ = ΖΔ και ΖΕ = ΖΓ = ΖΔ οπότε ΖΑ = ΖΒ = ΖΓ = ΖΔ = ΖΕ.

Έτσι, ο κύκλος που γράφεται με κέντρο το Ζ και ακτίνα ΖΑ διέρχεται και από τα Β, Γ, Δ και Ε και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ.

Συνεπώς, περί το δοθέν πεντάγωνο, που είναι ισόπλευρο και ισογώνιο, έχει περιγραφεί κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 15 (Κατασκευή) (537) *Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί ισόπλευρο και ισογώνιο εξάγωνο.*



Υλοποίηση: Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓΔΕΖ στον οποίο πρέπει να εγγραφεί εξάγωνο που να είναι ισόπλευρο και ισογώνιο.

Φέρνουμε την διάμετρο ΑΔ του κύκλου και λαμβάνουμε το κέντρο του Η. Στην συνέχεια γράφουμε τον κύκλο ΕΗΓΘ με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔΗ και φέρνουμε τις ΕΗ και ΓΗ των οποίων οι προεκτάσεις τέμνουν τον κύκλο ΑΒΓΔΕΖ στα Β και Ζ αντίστοιχα. Φέρνουμε και τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ και ΖΑ.

Ισχυρίζομαι ότι το εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι ισόπλευρο και ισογώνιο.

Επειδή το Η είναι το κέντρο του κύκλου ΑΒΓΔΕΖ είναι ΗΕ = ΗΔ και ομοίως επειδή το Δ είναι το κέντρο του κύκλου ΗΓΘ είναι ΕΔ = ΗΔ. Έτσι, ΗΕ = ΕΔ και άρα το τρίγωνο ΕΗΔ είναι ισόπλευρο.

Τότε $\widehat{\text{ΕΗΔ}} = \widehat{\text{ΗΔΕ}} = \widehat{\text{ΔΕΗ}}$ καθώς οι γωνίες της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες (Β1, Π5, σελ. 24) και το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές (Β1, Π32, σελ. 40) και άρα η $\widehat{\text{ΕΗΔ}}$ είναι ίση με το 1/3 των δύο ορθών.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι η $\widehat{\text{ΔΗΓ}}$ είναι ίση με το 1/3 των δύο ορθών.

Επίσης, η ΓΗ σχηματίζει με την ΕΒ τις εφεξής γωνίες $\widehat{\text{ΕΗΓ}}$ και $\widehat{\text{ΓΗΒ}}$ οπότε $\widehat{\text{ΕΗΓ}} + \widehat{\text{ΓΗΒ}} = 2$ ορθές (Β1, Π13, σελ. 28). Συνεπώς και η $\widehat{\text{ΓΗΒ}}$ είναι ίση με το 1/3 των δύο ορθών.

Άρα $\widehat{\text{ΕΗΔ}} = \widehat{\text{ΔΗΓ}} = \widehat{\text{ΓΗΒ}}$.

Αλλά $\widehat{\text{ΕΗΔ}} = \widehat{\text{ΒΗΑ}}$, $\widehat{\text{ΔΗΓ}} = \widehat{\text{ΑΗΖ}}$ και $\widehat{\text{ΓΗΒ}} = \widehat{\text{ΖΗΕ}}$ ως κατακορυφήν (Β1, Π15, σελ. 29).

Έτσι, $\widehat{\text{ΕΗΔ}} = \widehat{\text{ΔΗΓ}} = \widehat{\text{ΓΗΒ}} = \widehat{\text{ΒΗΑ}} = \widehat{\text{ΑΗΖ}} = \widehat{\text{ΖΗΕ}}$ και άρα $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}} = \overset{\frown}{\text{ΒΓ}} = \overset{\frown}{\text{ΓΔ}} = \overset{\frown}{\text{ΔΕ}} = \overset{\frown}{\text{ΕΖ}} = \overset{\frown}{\text{ΖΑ}}$ (Β3, Π26, σελ. 100).

Τα ίσα τόξα όμως υποτείνουν ίσες χορδές (Β3, Π29, σελ. 102) και άρα ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΑ και επομένως το εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

Ισχυρίζομαι ότι είναι και ισογώνιο. Πράγματι $\overset{\frown}{ZA} = \overset{\frown}{E\Delta}$ οπότε

$$\overset{\frown}{ZA} + \overset{\frown}{AB\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{E\Delta} + \overset{\frown}{AB\Gamma\Delta}$$

ή $\overset{\frown}{ZAB\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{E\Delta\Gamma BA}$ και άρα $\overset{\frown}{ZE\Delta} = \overset{\frown}{AZE}$ (Β3, Π27, σελ. 101).

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\overset{\frown}{AB\Gamma} = \overset{\frown}{AZE} = \overset{\frown}{ZE\Delta}$, $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{AZE} = \overset{\frown}{ZE\Delta}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta E} = \overset{\frown}{AZE} = \overset{\frown}{ZE\Delta}$ οπότε το ΑΒΓΔΕΖ είναι ισογώνιο.

Έτσι, το εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι ισόπλευρο και ισογώνιο και έχει εγγραφεί στον κύκλο ΑΒΓΔΕΖ.

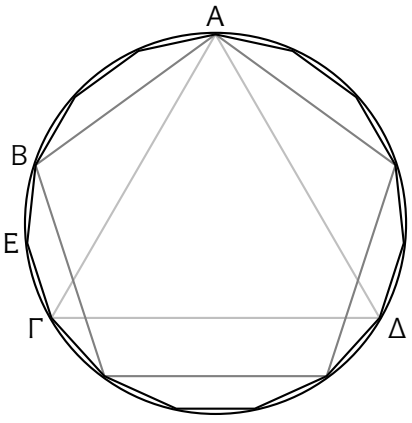
Συνεπώς, στον δοθέντα κύκλο έχει εγγραφεί εξάγωνο που είναι ισόπλευρο και ισογώνιο· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα 6 Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι η πλευρά του εξαγώνου είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

Όπως και με το πεντάγωνο (Π12, σελ. 119) αν φέρουμε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ περιγράφεται περί αυτού εξάγωνο ισόπλευρο και ισογώνιο.

Επιπλέον, εργαζόμενοι όπως κατά την περιγραφή ενός κύκλου περί δοθέντος ισόπλευρου και ισογώνιου πενταγώνου (Π14, σελ. 121), είναι δυνατόν να περιγράψουμε έναν κύκλο περί δοθέντος ισόπλευρου και ισογώνιου εξαγώνου· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρόταση 16 (Κατασκευή) (538) *Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί ισόπλευρο και ισογώνιο δεκαπεντάγωνο.*



Υλοποίηση: Έστω ο δοθείς κύκλος ΑΒΓΔ στον οποίο πρέπει να εγγραφεί ισόπλευρο και ισογώνιο δεκαπεντάγωνο.

Εγγράφουμε στον κύκλο ΑΒΓΔ ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ΑΓ (Π2, σελ. 112) και ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο πλευράς ΑΒ (Π11, σελ. 119).

Το ισόπλευρο και ισογώνιο δεκαπεντάγωνο χωρίζει (στμ: ξεκινώντας από το Α) την περιφέρεια του κύκλου ΑΒΓΔ σε 15 ίσα τόξα.

Από αυτά τα 15 ίσα τόξα, τα 5 αποτελούν το $\overset{\frown}{A\Gamma}$ καθώς αυτό είναι το ένα τρίτο της περιφέρειας του κύκλου (λόγω του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ) και 3 το $\overset{\frown}{AB}$ που είναι το ένα πέμπτο της περιφέρειας (λόγω του ισόπλευρου και ισογώνιου πενταγώνου) οπότε το $\overset{\frown}{B\Gamma}$ αποτελείται από 2 τέτοια τόξα. (στμ: τα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι τα τόξα του κύκλου που αντιστοιχούν στις κυρτές επίκεντρες γωνίες).

Στην συνέχεια διχοτομούμε το $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$ λαμβάνοντας το σημείο του Ε ώστε $\overset{\frown}{\text{ΒΕ}} = \overset{\frown}{\text{ΕΓ}}$ (Β3, Π30, σελ. 102).

Τότε κάθε ένα από τα $\overset{\frown}{\text{ΒΕ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΕΓ}}$ είναι ίσο με το 1 από τα 15 ίσα τόξα στα οποία χωρίζεται η περιφέρεια του κύκλου από τις κορυφές του ισόπλευρου και ισογώνιου δεκαπενταγώνου.

Τέλος, φέρνουμε τις ΒΕ και ΕΓ και εναρμόζουμε στον κύκλο ΑΒΓΔ συνεχώς δεκατρία επιπλέον τμήματα που το καθένα είναι ίσο με ΒΕ κατασκευάζοντας έτσι ένα ισόπλευρο και ισογώνιο δεκαπεντάγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο ΑΒΓΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Όπως με το ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο (Π12, σελ. 119), αν φέρουμε τις εφαπτομένες του κύκλου στις κορυφές του δεκαπενταγώνου τότε αυτός θα περιγραφεί από ένα άλλο ισόπλευρο και ισογώνιο δεκαπεντάγωνο.

Επίσης, όπως και με το ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο (Προτάσεις 13 και 14) όταν δίνεται ένα ισόπλευρο και ισογώνιο δεκαπεντάγωνο ένας κύκλος μπορεί να εγγραφεί σε αυτό και ένας άλλος κύκλος μπορεί να περιγραφεί περί αυτού· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Βιβλίο 5ο

Ορισμοί

Ορισμοί 1 (539)

(ορ. 1) Μέρος ενός μεγέθους λέγεται κάθε μικρότερο μέγεθος με το οποίο μπορούμε να το καταμετρήσουμε (στμ: χρησιμοποιώντας το μικρό μέγεθος σαν μονάδα μέτρησης).

(ορ. 2) Αν ένα μέγεθος μετριέται από ένα μικρότερό του τότε λέγεται «πολλαπλάσιο» του μικρότερου.

(ορ. 3) «Λόγο» δύο ομοειδών μεγεθών ονομάζουμε το πηλίκο τους.

Στμ: το επόμενο αξίωμα είναι γνωστό ως «Αρχιμήδεια ιδιότητα». Εν τούτοις ο ίδιος ο Αρχιμήδης αποδίδει το αξίωμα στον Εύδοξο. «Αρχιμήδεια ιδιότητα» ονομάστηκε από τον Otto Stolz το 1880.

(ορ. 4) [Αξίωμα συνέχειας του Ευδόξου] Λέμε ότι δύο μεγέθη «έχουν λόγο» όταν καθένα από αυτά έχει πολλαπλάσιο μεγαλύτερο του άλλου.

Στμ: ο επόμενος ορισμός έχει την εξής δυσκολία: με τη σύγχρονη γλώσσα θέλει να πει ότι δυο λόγοι μεγεθών α/β και γ/δ λέγονται ίσοι όταν κάθε κλάσμα ακεραίων, όπως συγκρίνεται με το α/β, με τον ίδιο τρόπο συγκρίνεται και με το γ/δ· δηλαδή για οποιουσδήποτε αριθμούς μ, ν ισχύει μία από τις επόμενες τρεις περιπτώσεις

$$\left\{\begin{array}{l} \text{είτε } \alpha/\beta > \nu/\mu \text{ και } \gamma/\delta > \nu/\mu \\ \text{είτε } \alpha/\beta = \nu/\mu \text{ και } \gamma/\delta = \nu/\mu \\ \text{είτε } \alpha/\beta < \nu/\mu \text{ και } \gamma/\delta < \nu/\mu. \end{array}\right\}$$

Το πρόβλημα είναι ότι με τον τρόπο που αναπτύσσεται η θεωρία αυτό είναι σωστό να οριστεί συγκρίνοντας ακέραια πολλαπλάσια των αριθμητών και παρονομαστών, και έτσι είναι γραμμένο στα *Στοιχεία*. Προσέξτε ότι ο ορισμός που ακολουθεί είναι ισοδύναμος με τον παραπάνω σύγχρονο[9].

9. Στμ: εδώ ο Εύδοξος εισάγει τις τομές Dedekind: αν αρχικά και τελικά τμήματα ταυτίζονται οι αριθμοί είναι ίσοι. Η μόνη ουσιαστική διαφορά από τον Dedekind είναι ο αντίστροφος

(ορ. 5) Δυο λόγοι μεγεθών α/β και γ/δ λέγονται ίσοι όταν για οποιουσδήποτε αριθμούς μ, ν

$$\left\{\begin{array}{l} \text{είτε ισχύει } \mu\alpha > \nu\beta \text{ και } \mu\gamma > \nu\delta \\ \text{είτε ισχύει } \mu\alpha = \nu\beta \text{ και } \mu\gamma = \nu\delta \\ \text{είτε ισχύει } \mu\alpha < \nu\beta \text{ και } \mu\gamma < \nu\delta. \end{array}\right\}$$

(ορ. 6) Μεγέθη με τον ίδιο λόγο λέγονται «ανάλογα» (στμ: και η ισότητα των δύο λόγων λέγεται «αναλογία»).

(ορ. 7) Ένας λόγος λέγεται μεγαλύτερος ενός άλλου αν υπάρχει λόγος φυσικών αριθμών μικρότερος του πρώτου και μεγαλύτερος ή ίσος του δεύτερου[10].

(ορ. 8) Αναλογία με τρεις όρους λέγεται «ελάχιστη». (στμ: εννοεί της μορφής $\alpha/\beta = \beta/\gamma$, αναλογία που ονομάζεται και «συνεχής αναλογία των α, β και γ».)

(ορ. 9) Αν τρία μεγέθη είναι σε ελάχιστη αναλογία τότε λέμε ότι το πρώτο προς το τρίτο βρίσκεται σε διπλάσια αναλογία του πρώτου προς το δεύτερο (στμ: «διπλάσια αναλογία» ονομάζει την ύψωση στη δεύτερη δύναμη: $\alpha/\beta = \beta/\gamma \Rightarrow \alpha/\gamma = (\alpha/\beta)^2$ πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη με α/β.)

(ορ. 10) Αν τέσσαρα μεγέθη είναι σε συνεχή αναλογία τότε λέμε ότι το πρώτο προς το τέταρτο βρίσκεται σε τριπλάσια αναλογία του πρώτου προς το δεύτερο· ομοίως για περισσότερα μεγέθη. (στμ: «τριπλάσια αναλογία» ονομάζει την ύψωση στην τρίτη δύναμη: $\alpha/\beta = \beta/\gamma = \gamma/\delta \Rightarrow \alpha/\delta = (\alpha/\beta)^3$ πολλαπλασιάζοντας το γ/δ μια φορά με $\beta/\gamma = \alpha/\beta$ και μια φορά με α/β.)

(ορ. 11) Σε ίσους λόγους οι αριθμητές λέγονται «ομόλογοι» των παρονομαστών.

(ορ. 12) Σε μια αναλογία η εναλλαγή των μέσων όρων λέγεται «εναλλάξ λόγος»:

$$\text{αρχικοί λόγοι: } \frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\gamma}{\delta}, \qquad \text{εναλλάξ λόγοι: } \frac{\alpha}{\gamma},\ \frac{\beta}{\delta}.$$

(ορ. 13) Όταν ο παρονομαστής γίνει αριθμητής και ο αριθμητής γίνει παρονομαστής έχουμε τον αντίστροφο λόγο:

$$\text{αρχικος λόγος: } \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \text{αντίστροφος λόγος: } \frac{\beta}{\alpha}.$$

ισχυρισμός, δηλαδή ότι κάθε τομή ορίζει πραγματικό αριθμό. Η αναφορά στον Εύδοξο και στα *Στοιχεία* λείπει από τη δουλειά του Dedekind.

10. Στμ: Διάταξη αριθμών ταυτόσημη με τον τρόπο που παρουσιάζει ο Dedekind.

(ορ. 14) «Σύνθεση λόγου» είναι ο λόγος που προκύπτει από πρόσθεση του παρονομαστή στον αριθμητή:

$$\text{αρχικός λόγος: } \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \text{σύνθεση λόγου: } \frac{\alpha+\beta}{\beta}.$$

(ορ. 15) «Διαίρεση λόγου»[11] είναι ο λόγος που προκύπτει από αφαίρεση του παρονομαστή από τον αριθμητή:

$$\text{αρχικός λόγος: } \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \text{διαίρεση λόγου: } \frac{\alpha-\beta}{\beta}.$$

(ορ. 16) «Αναστροφή λόγου» είναι ο λόγος που προκύπτει αλλάζοντας τον παρονομαστή στη διαφορά από τον αριθμητή:

$$\text{αρχικός λόγος: } \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \text{ανάστροφος λόγος: } \frac{\alpha}{\alpha-\beta}.$$

(ορ. 17) «Δι᾽ ίσου λόγος» είναι ο λόγος που προκύπτει από συνεχή αναλογία πολλών λόγων κρατώντας το πρώτο και το τελευταίο μέγεθος.

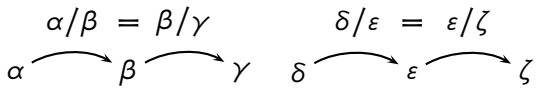
$$\text{αρχικοί λόγοι: } \frac{\alpha_1}{\alpha_2},\ \frac{\alpha_2}{\alpha_3}, \dots, \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu},\ \text{δι᾽ ίσου λόγος: } \frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}.$$

(στμ: «δι᾽ ίσου» εννοείται ο λόγος που προκύπτει «μέσω του ίσου όρου». Έτσι για τους λόγους β/γ και α/β ο ίσος όρος είναι το β και για τον «δι᾽ ίσου» λόγο πάμε από το α στο γ μέσω του ίσου όρου β. Δηλαδή ο δι᾽ ίσου λόγος είναι ο α/γ. Αναλυτικά θα λέγαμε «ο λόγος μέσω/δια του ίσου όρου». Για περισσότερους των δύο λόγους όπως παραπάνω περνάμε διαδοχικά από τους ίσους όρους $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{\nu-1}$ για να σχηματιστεί ο «δι᾽ ίσου» λόγος α_1/α_ν.)

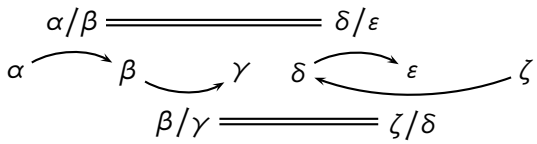
(ορ. 18) Τα μεγέθη α, β, γ, δ, ε, ζ λέμε ότι βρίσκονται σε τεταραγμένη αναλογία αν $\alpha/\beta = \delta/\varepsilon$ και $\beta/\gamma = \zeta/\delta$ (στμ: τεταραγμένη δηλαδή «ανακατεμένη», ενώ βρίσκονται σε «τεταγμένη» αναλογία αν $\alpha/\beta = \beta/\gamma$ και $\delta/\varepsilon = \varepsilon/\zeta$).

---

11. Στμ: «διαίρεση» επειδή το τμήμα μήκους α «διαιρείται» σε δύο τμήματα μήκους β και $\alpha-\beta$

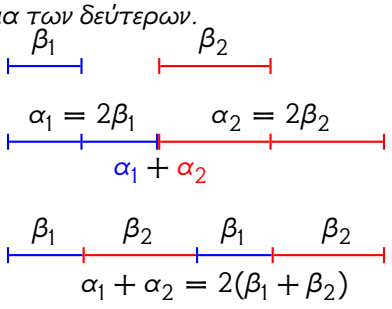


έξι μεγέθη σε τεταγμένη αναλογία



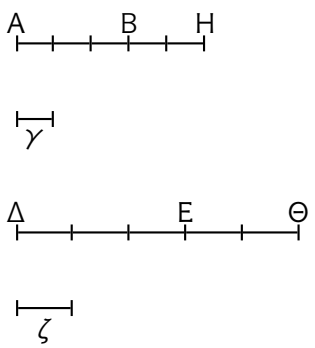
έξι μεγέθη σε τεταραγμένη αναλογία

Πρόταση 1 (Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση) (540) *Αν μεγέθη που είναι το ίδιο πολλαπλάσιο άλλων μεγεθών προστεθούν, το άθροισμα των πρώτων είναι το ίδιο πολλαπλάσιο με το άθροισμα των δεύτερων.*



Απόδειξη. Αν το α_1 είναι λ φορές το β_1, το α_2 είναι λ φορές το $\beta_2, \dots$, το α_ν είναι λ φορές το β_ν, τότε το α_1 διαιρείται σε λ το πλήθος μεγέθη ίσα με το β_1, το α_2 διαιρείται σε λ το πλήθος μεγέθη ίσα με το β_2, και ομοίως για τα $\alpha_3, \dots, \alpha_\nu$. Οπότε το άθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu$ διαιρείται σε λ το πλήθος μεγέθη ίσα με $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu$· όπερ έδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 2 (Κοινός παράγοντας για την πρόσθεση) (541) *Αν τα μεγέθη* AB, ΔΕ, *είναι ίδια πολλαπλάσια των* γ *και* ζ *αντίστοιχα, και τα* ΒΗ, ΕΘ *είναι ίδια πολλαπλάσια των* γ *και* ζ *αντίστοιχα, τότε και τα αθροίσματα* AB + ΒΗ *και* ΔΕ + ΕΘ *είναι ίδια πολλαπλάσια των* γ *και* ζ *αντίστοιχα.*



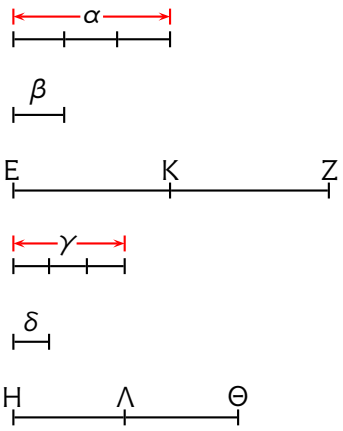
(στμ: δηλαδή αν AB = $\lambda\gamma$, ΔΕ = $\lambda\zeta$, ΒΗ = $\mu\gamma$, και ΕΘ = $\mu\zeta$ για κατάλληλους αριθμούς λ και μ τότε AB+ΒΗ = $(\lambda+\mu)\gamma$ και ΔΕ+ΕΘ = $(\lambda+\mu)\zeta$, και άρα ο παράγοντας (ο $\lambda+\mu$) δεν εξαρτάται από τα μεγέθη AB, ΔΕ, ΒΗ, ΕΘ, γ, ζ, οπότε μπορεί να υπολογιστεί ότι είναι πράγματι ο $\lambda+\mu$ αν για παράδειγμα θέσουμε $\gamma = 1$.)

Απόδειξη. Αφού AB = $\lambda\gamma$, ΒΗ = $\mu\gamma$ και ΔΕ = $\lambda\zeta$, ΕΘ = $\mu\zeta$, το AB αποτελείται από λ το

πλήθος μεγέθη ίσα με γ, το ΒΗ από μ το πλήθος μεγέθη ίσα με γ, το ΔΕ από λ μεγέθη ίσα με ζ και το ΕΘ από μ μεγέθη ίσα με ζ. Άρα αν προστεθούν το ΑΒ με το ΒΗ και το ΔΕ με το ΕΘ τα νέα μέγεθη θα αποτελούνται από το ίδιο πλήθος μεγεθών ($\lambda + \mu$ το πλήθος) ίσα με γ για το $\text{ΑΒ} + \text{ΒΗ}$, και ίσα με ζ για το $\Delta\text{Ε} + \text{ΕΘ}$. Δ

Πρόταση 3 (Προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού) (541) *Αν τα μεγέθη α και γ είναι ίδια πολλαπλάσια των β και δ τότε ίδια πολλαπλάσια των α και γ είναι αντίστοιχα ίδια πολλαπλάσια των β και δ* (στμ: δηλαδή αν $\alpha = \lambda\beta$ και $\gamma = \lambda\delta$ τότε $\mu\alpha = \mu(\lambda\beta) = (\mu\lambda)\beta$ και $\mu\gamma = \mu(\lambda\delta) = (\mu\lambda)\delta$.

(στμ: δηλαδή ο παράγοντας ($\mu\lambda$) δεν εξαρτάται από τα μεγέθη α, β, γ, δ, και άρα μπορεί να υπολογιστεί ότι είναι ο $\mu\lambda$ επιλέγοντας $\beta = 1$.)



Απόδειξη. Τα $\mu\alpha$ και $\mu\gamma$ αποτελούνται από μ μεγέθη ίσα του α και του γ αντιστοίχως. Καθένα από αυτά αποτελείται από λ μεγέθη ίσα με β για το α, και ίσα με δ για το γ. Άρα προσθέτοντας τα μ μεγέθη ίσα με α και τα μ μεγέθη ίσα με γ (για να συνθεθούν τα $\mu\alpha$ και $\mu\gamma$), αυτά θα αποτελούνται από ίσα πολλαπλάσια του β και δ αντίστοιχα (δηλαδή $\mu\lambda$ το πλήθος) (Π2, σελ. 128). Δ

Πρόταση 4 (542) *Καθε αναλογία θα παραμείνει αληθής αν οι αριθμητές πολλαπλασιαστούν με έναν αριθμό και οι παρονομαστές πολλαπλασιαστούν και αυτοί με έναν αριθμό* (*ίδιο με τον πρώτο ή διαφορετικό*).

Απόδειξη. Έστω ότι $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ και ρ, λ ακέραιοι. Θέλουμε να δείξουμε ότι $(\rho\alpha)/(\lambda\beta) = (\rho\gamma)/(\lambda\delta)$. Αρκεί να θεωρήσουμε ακεραίους μ, ν και να δείξουμε ότι αναγκαστικά ισχύει μία από τις

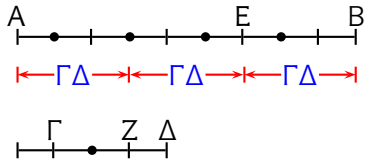
$$\left\{\begin{array}{l} \text{είτε } \mu(\rho\alpha) > \nu(\lambda\beta) \text{ και } \mu(\rho\gamma) > \nu(\lambda\delta) \\ \text{είτε } \mu(\rho\alpha) = \nu(\lambda\beta) \text{ και } \mu(\rho\gamma) = \nu(\lambda\delta) \\ \text{είτε } \mu(\rho\alpha) > \nu(\lambda\beta) \text{ και } \mu(\rho\gamma) > \nu(\lambda\delta). \end{array}\right\}$$

(Ορ5, σελ. 126) (στμ: ισοδύναμα το κλάσμα ν/μ συγκρίνεται με τον ίδιο τρόπο με τα κλάσματα $(\rho\alpha)/(\lambda\beta)$ και $(\rho\gamma)/(\lambda\delta)$.) Το παραπάνω είναι το ίδιο με το να ισχύει μία από τις

$$\left\{\begin{array}{l} \text{είτε } (\mu\rho)\alpha > (\nu\lambda)\beta \text{ και } (\mu\rho)\gamma > (\nu\lambda)\delta \\ \text{είτε } (\mu\rho)\alpha = (\nu\lambda)\beta \text{ και } (\mu\rho)\gamma = (\nu\lambda)\delta \\ \text{είτε } (\mu\rho)\alpha > (\nu\lambda)\beta \text{ και } (\mu\rho)\gamma > (\nu\lambda)\delta. \end{array}\right\}$$

(Π3, σελ. 129). Αυτό όμως είναι σωστό αφού εφαρμόζεται ο Ορ5, σελ. 126 για τους λόγους $\alpha/\beta = \gamma/\delta$. Δ

Πρόταση 5 (Κοινός παράγοντας για τη διαφορά) (543) *Αν από πολλαπλάσιο ενός μεγέθους αφαιρέσουμε το ίδιο πολλαπλάσιο ενός μέρους του θα προκύψει το ίδιο πολλαπλάσιο της διαφοράς τους.*



Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $AB = \lambda\Gamma\Delta$ και για τα μέρη AE και ΓZ των AB και ΓΔ αντίστοιχα, ισχύει $AE = \lambda\Gamma Z$. Ισχυρίζομαι ότι και για τα υπόλοιπα EB και ZΔ ισχύει $EB = \lambda Z\Delta$ (στμ: δηλαδή $EB = AB - AE = \lambda\Gamma\Delta - \lambda\Gamma Z = \lambda(\Gamma\Delta - \Gamma Z) = \lambda Z\Delta$).

Θεωρούμε σημείο Η ώστε να ισχύει $EB = \lambda\Gamma H$. Έτσι, (ΠΙ, σελ. 128) έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} AE = \lambda\Gamma Z \\ EB = \lambda H\Gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow AB = AE + EB = \lambda(H\Gamma + \Gamma Z) = \lambda HZ.$$

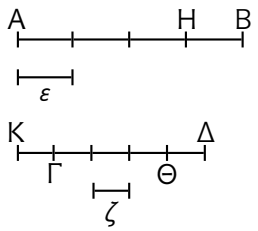
Αλλά $AB = \lambda\Gamma\Delta$ άρα αναγκαστικά $HZ = \Gamma\Delta$. Αφαιρώντας το κοινό ΓZ προκύπτει $H\Gamma = Z\Delta$. Άρα, αφού $EB = \lambda H\Gamma$ θα ισχύει $EB = \lambda Z\Delta$.

Συνεπώς, αν μέγεθος είναι πολλαπλάσιο άλλου μεγέθους και μέρος του πρώτου είναι ίδιο πολλαπλάσιο με μέρος του δεύτερου, και η διαφορά τους θα είναι ίδιο πολλαπλάσιο της διαφοράς των μερών τους· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 6 (543) *Αν δυο μεγέθη είναι ίδια πολλαπλάσια δύο άλλων, και από αυτά αφαιρέσουμε δυο άλλα πολλαπλάσια των δεύτερων, θα προκύψουν τα δεύτερα μεγέθη ή ίδιο πολλαπλάσιό τους* (στμ: αν $\alpha = \lambda\varepsilon$, $\beta = \lambda\zeta$, $\gamma = \mu\varepsilon$ και $\delta = \mu\zeta$ τότε $\alpha - \gamma = (\lambda - \mu)\varepsilon$ και $\beta - \delta = (\lambda - \mu)\zeta$, και άρα ο παράγοντας (ο $\lambda - \mu$) δεν εξαρτάται από τα α, β, γ, δ, ε, ζ).

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε τα πολλαπλάσια $AB = \lambda\varepsilon$, $\Gamma\Delta = \lambda\zeta$ και τα $AH = \mu\varepsilon$, $\Gamma\Theta = \mu\zeta$. Ισχυρίζομαι ότι είτε $HB = AB - AH = \varepsilon$ και $\Theta\Delta = \Gamma\Delta - \Gamma\Theta = \zeta$ είτε $HB = AB - AH = (\lambda - \mu)\varepsilon$ και $\Theta\Delta = \Gamma\Delta - \Gamma\Theta = (\lambda - \mu)\zeta$.

Ας υποθέσω αρχικά ότι $HB = AB - AH = \varepsilon$. Ισχυρίζομαι ότι αναγκαστικά θα ισχύει και $\Theta\Delta = \Gamma\Delta - \Gamma\Theta = \zeta$.



Πράγματι, ας θεωρήσουμε σημείο Κ ώστε $\Gamma K = \zeta$. Ισχύει

$$\left.\begin{array}{l} AH = \mu\varepsilon \\ HB = \varepsilon \end{array}\right\} \Longrightarrow AB = (\mu + 1)\varepsilon,$$

και

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma\Theta = \mu\zeta \\ K\Gamma = \zeta \end{array}\right\} \Longrightarrow K\Theta = (\mu + 1)\zeta$$

(Π2, σελ. 128). Δηλαδή τα ΑΒ και ΚΘ είναι ίδια πολλαπλάσια των ε και ζ αντίστοιχα. Αλλά το ΑΒ και ΓΔ είναι ίδια πολλαπλάσια των ε και ζ αντίστοιχα, άρα το ΓΔ και ΚΘ είναι ίδια πολλαπλάσια του ζ δηλαδή μεταξύ τους ίσα: $\Gamma\Delta = K\Theta$. Αφαιρώντας το κοινό ΓΘ προκύπτει $\Theta\Delta = K\Gamma = \zeta$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη του ισχυρισμού.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι αν το ΗΒ είναι πολλαπλάσιο του ε τότε το ΘΔ είναι το ίδιο πολλαπλάσιο του ζ.

Συνεπώς, αν δυο μεγέθη είναι ίδια πολλαπλάσια δύο άλλων, και από αυτά αφαιρέσουμε δυο άλλα πολλαπλάσια των δεύτερων, θα προκύψουν τα δεύτερα μεγέθη ή ίδιο πολλαπλάσιό τους· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 7 (544) *Ίσα μεγέθη σχηματίζουν ίσους λόγους με κάθε τρίτο μέγεθος, και κάθε τρίτο μέγεθος σχηματίζει ίσους λόγους με ίσα μεγέθη.*

Απόδειξη. Έστω ότι τα μεγέθη α και β είναι ίσα και γ ένα τρίτο μέγεθος. Πρέπει να δείξουμε ότι για οποιουσδήποτε αριθμούς μ, ν, ότι αν $\mu\alpha > \nu\gamma$ τότε και $\mu\beta > \nu\gamma$ και ομοίως αν ισχύει το $=$ ή το $<$ (Ορ5, σελ. 126) (στμ: δηλαδή ο λόγος ν/μ σχετίζεται με τον ίδιο τρόπο τόσο με τον λόγο α/γ όσο και με τον β/γ). Αλλά $\alpha = \beta$ οπότε $\mu\alpha = \mu\beta$. Άρα αν $\mu\alpha > \nu\gamma$ θα ισχύει και $\mu\beta > \nu\gamma$ και ομοίως για το $=$ και το $<$.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι και το γ σχηματίζει ίσους λόγους με τα α και β. Αλλά και πάλι αν το $\nu\gamma > \mu\alpha$ θα ισχύει και $\nu\gamma > \mu\beta$, αφού $\mu\alpha = \mu\beta$ λόγω του ότι $\alpha = \beta$, και ομοίως για τις περιπτώσεις $=$ και $<$.

Άρα, ίσα μεγέθη σχηματίζουν ίσους λόγους με κάθε τρίτο μέγεθος, και κάθε τρίτο μέγεθος σχηματίζει ίσους λόγους ίσα μεγέθη.

Πόρισμα 7 *Από αυτό είναι φανερό ότι αν κάποια μεγέθη είναι ανάλογα θα είναι και τα αντίστροφά τους· όπερ ἔδει δεῖξαι.* Δ

Πρόταση 8 (545) *Μεγαλύτερο λόγο έχει ένα μεγαλύτερο μέγεθος από ό,τι ένα μικρότερο ως προς το ίδιο τρίτο μέγεθος. Επιπλέον ένα μέγεθος δίνει μεγαλύτερο λόγο προς ένα μικρότερο από ό,τι με ένα μεγαλύτερο.*

Απόδειξη. Έστω ότι $AB > \gamma$. Ισχυρίζομαι ότι $AB/\delta > \gamma/\delta$. Πράγματι, αρκεί να βρεθούν ακέραιοι μ και ν ώστε $\mu AB > \nu\delta$ και $\nu\delta \geq \mu\gamma$ (Ορ7, σελ. 126) (στμ: ισοδύναμα $AB/\delta > \nu/\mu > \gamma/\delta$)[12]. Αφού $AB > \gamma$ έστω Ε σημείο του ΑΒ ώστε

$$EB = \gamma \Rightarrow \mu EB = \mu\gamma. \tag{5}$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι $AE < EB$. Βρίσκουμε (από το αξίωμα της συνέχειας του Ευδόξου (Ορ4, σελ. 125)) πολλαπλάσιο $\mu AE = \mu(AB - EB)$ ώστε

$$\mu AE > \delta, \tag{6}$$

12. Στμ: το οποίο συνεπάγεται την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς, αφού αποδεικνύει ότι ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο αριθμούς υπάρχει ρητός.

και άρα, αφού $\mathrm{AE} < \mathrm{EB}$ ισχύει

$$\delta < \mu\mathrm{AE} < \mu\mathrm{EB} = \mu\gamma. \tag{7}$$

Αφού λοιπόν $\delta < \mu\gamma$ έχει νόημα να θεωρήσουμε $\nu\delta$ το *πρώτο* πολλαπλάσιο του δ ώστε $\nu\delta > \mu\gamma$ (στμ: άρα $\nu/\mu > \gamma/\delta$). Μένει να δείξω ότι $\mu\mathrm{AB} > \nu\delta$ (στμ: οπότε $\mathrm{AB}/\delta > \nu/\mu$). Αλλά το $\nu\delta$ ήταν το *πρώτο* πολλαπλάσιο του δ ώστε $\nu\delta > \mu\gamma$ συνεπώς το προηγούμενο πολλαπλάσιο δεν είναι μεγαλύτερο του $\mu\gamma$, δηλαδή

$$(\nu - 1)\delta \leq \mu\gamma. \tag{8}$$

Όμως, μπορούμε να προσθέσουμε τις (5) και (6) και να πάρουμε $\mu\mathrm{AB} > \delta + \mu\gamma$ (Π1, σελ. 128). Αλλά μπορούμε να προσθέσουμε δ και στα δύο μέλη της (8) και θα πάρουμε $\delta + \mu\gamma \geq \nu\delta$ (Π1, σελ. 128), οπότε $\mu\mathrm{AB} > \nu\delta$· όπως έπρεπε να δειχθεί.

Αν τώρα $\mathrm{AE} > \mathrm{EB}$ βρίσκουμε πολλαπλάσιο $\mu\mathrm{EB} > \delta$. Οπότε $\delta < \mu\mathrm{EB} = \mu\gamma$ οπότε βρίσκουμε το πρώτο πολλαπλάσιο του δ, το $\nu\delta$, ώστε $\nu\delta > \mu\gamma$, και συνεχίζουμε την απόδειξη με τον ίδιο τρόπο.

(στμ: Τέλος η περίπτωση $\mathrm{AE} = \mathrm{EB} = \gamma$ δεν αντιμετωπίζεται στην απόδειξη πιθανώς γιατί θεωρείται προφανής: σε αυτή την περίπτωση $\mathrm{AB} = 2\gamma$ οπότε είναι προφανές ότι $\mathrm{AB}/\delta = 2\gamma/\delta > \gamma/\delta$.)

Με ακριβώς την ίδια κατασκευή $\nu\delta > \mu\gamma$ και $\mu\mathrm{AB} > \nu\delta$ (στμ: δηλαδή $\delta/\gamma > \mu/\nu > \delta/\mathrm{AB}$)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 9 (546) *Μεγέθη με ίσους λόγους με τρίτο μέγεθος είναι μεταξύ τους ίσα. Ομοίως είναι ίσα μεγέθη που τρίτο μέγεθος σχηματίζει ίσους λόγους με αυτά.*

Απόδειξη. Αν τα α και β σχηματίζουν ίσους λόγους με το γ ισχυρίζομαι ότι το α είναι ίσο με το β.

Αν δεν ήταν ίσα όμως δεν θα σχημάτιζαν ίσους λόγους με το γ (Π8, σελ. 131), αλλά σχηματίζουν· άρα $\alpha = \beta$.

Έστω το μέγεθος γ και ας σχηματίζει ίσους λόγους με τα α και β. Ισχυρίζομαι ότι και πάλι $\alpha = \beta$. Αν όχι τότε το γ δεν θα σχημάτιζε ίσους λόγους μαζί τους (Π8, σελ. 131), αλλά σχηματίζει· άρα $\alpha = \beta$.

Συνεπώς μεγέθη με ίσους λόγους με τρίτο μέγεθος είναι μεταξύ τους ίσα. Ομοίως είναι ίσα μεγέθη που τρίτο μέγεθος σχηματίζει ίσους λόγους με αυτά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 10 (546) *Από δύο μεγέθη μεγαλύτερο είναι εκείνο που σχηματίζει μεγαλύτερο λόγο με το ίδιο τρίτο μέγεθος.*

Ενώ μικρότερο είναι εκείνο που ο λόγος τρίτου μεγέθους προς αυτό είναι μεγαλύτερος.

Απόδειξη. Ας είναι $\alpha/\gamma > \beta/\gamma$. Ισχυρίζομαι ότι $\alpha > \beta$. Αν όχι, θα είναι είτε $\alpha = \beta$ είτε $\alpha < \beta$. Αλλά η ισότητα $\alpha = \beta$ δεν ισχύει γιατί τότε θα έπρεπε να είναι $\alpha/\gamma = \beta/\gamma$ (Π7, σελ. 131) που δεν ισχύει. Και ούτε $\alpha < \beta$ γιατί θα έπρεπε να είναι $\alpha/\gamma < \beta/\gamma$ (Π8, σελ. 131) που πάλι δεν ισχύει.

Αν τώρα $\gamma/\beta > \gamma/\alpha$ ισχυρίζομαι ότι $\beta < \alpha$. Διότι αν όχι, τότε είτε $\beta = \alpha$, οπότε θα έπρεπε να είναι $\gamma/\beta = \gamma/\alpha$ (Π7, σελ. 131) που δεν ισχύει, είτε $\beta > \alpha$, οπότε θα έπρεπε να είναι $\gamma/\beta < \gamma/\alpha$ (Π8, σελ. 131) που πάλι δεν ισχύει.

Άρα από δύο μεγέθη μεγαλύτερο είναι εκείνο που σχηματίζει μεγαλύτερο λόγο με το ίδιο τρίτο μέγεθος. Ενώ μικρότερο είναι εκείνο που ο λόγος τρίτου μεγέθους προς αυτό είναι μεγαλύτερος· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 11 (547) *Λόγοι ίσοι με τρίτο λόγο είναι και μεταξύ τους ίσοι.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ και $\gamma/\delta = \varepsilon/\zeta$. Ισχυρίζομαι ότι $\alpha/\beta = \varepsilon/\zeta$.

Πράγματι, πρέπει να δείξουμε ότι ίδια πολλαπλάσια των α, ε συγκρίνονται με τον ίδιο τρόπο με ίδια πολλαπλάσια των β, ζ (Ορ5, σελ. 126). Ας πάρουμε τα ίδια πολλαπλάσια $\mu\alpha$ και $\mu\varepsilon$ καθώς και τα ίδια πολλαπλάσια $\lambda\beta$ και $\lambda\zeta$. Θεωρούμε και τα πολλαπλάσια $\mu\gamma$ και $\lambda\delta$. Έτσι αν $\mu\alpha > \lambda\beta$ (στμ: δηλαδή $\alpha/\beta > \lambda/\mu$) τότε και $\mu\gamma > \lambda\delta$ διότι $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ (Ορ5, σελ. 126). Άρα και $\mu\varepsilon > \lambda\zeta$, αφού $\gamma/\delta = \varepsilon/\zeta$. Ομοίως και οι περιπτώσεις όπου $\mu\alpha = \lambda\beta$ και $\mu\alpha < \lambda\beta$.

Άρα λόγοι ίσοι με τρίτο λόγο είναι και μεταξύ τους ίσοι· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 12 (547) *Σε μια αναλογία μεγεθών ο λόγος είναι ίσος με τον λόγο του αθροίσματος των αριθμητών προς το άθροισμα των παρονομαστών.*

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε για τρεις λόγους. Έστω ότι

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

Ισχυρίζομαι ότι

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma + \varepsilon}{\beta + \delta + \zeta}.$$

Πράγματι ας θεωρήσουμε τα ίδια πολλαπλάσια $\mu\alpha$ και $\mu(\alpha+\gamma+\varepsilon)$ και τα ίδια πολλαπλάσια $\lambda\beta$ και $\lambda(\beta + \delta + \zeta)$. Ας υποθέσουμε ότι $\mu\alpha > \lambda\beta$. Τότε, αφού $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ θα ισχύει $\mu\gamma > \lambda\delta$, και εξ αυτού, αφού $\gamma/\delta = \varepsilon/\zeta$ θα είναι και $\mu\varepsilon > \lambda\zeta$. Άρα θα ισχύει ότι

$$\mu\alpha + \mu\gamma + \mu\varepsilon > \lambda\beta + \lambda\delta + \lambda\zeta.$$

Δηλαδή,

$$\mu(\alpha + \gamma + \varepsilon) > \lambda(\beta + \delta + \zeta)$$

(Π2, σελ. 128). Ομοίως και για τις περιπτώσεις που $\mu\alpha = \lambda\beta$ και $\mu\alpha < \lambda\beta$.

Άρα σε μια αναλογία μεγεθών ο λόγος είναι ίσος με τον λόγο του αθροίσματος των αριθμητών προς το άθροισμα των παρονομαστών· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 13 (548) *Αν δυο λόγοι είναι ίσοι και ο δεύτερος είναι μεγαλύτερος ενός τρίτου λόγου τότε και ο πρώτος είναι μεγαλύτερος του τρίτου.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ και $\gamma/\delta > \varepsilon/\zeta$. Ισχυρίζομαι ότι $\alpha/\beta > \varepsilon/\zeta$.

Υπάρχουν πολλαπλάσια $\mu\gamma$, $\mu\varepsilon$ και $\lambda\gamma$, $\lambda\zeta$ ώστε $\mu\gamma > \lambda\delta$ και $\mu\varepsilon \leq \lambda\zeta$ (Ορ7, σελ. 126) (στμ: δηλαδή $\gamma/\delta > \lambda/\mu \geq \varepsilon/\zeta$). Αλλά $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ και αφού $\mu\gamma > \lambda\delta$ θα ισχύει και $\mu\alpha > \lambda\beta$ (Ορ5, σελ. 126). Συνεπώς $\mu\alpha > \lambda\beta$ και $\mu\varepsilon \leq \lambda\zeta$ (στμ: δηλαδή $\alpha/\beta > \lambda/\mu \geq \varepsilon/\zeta$), οπότε $\alpha/\beta > \varepsilon/\zeta$.

Άρα αν δυο λόγοι είναι ίσοι και ο δεύτερος είναι μεγαλύτερος ενός τρίτου λόγου τότε και ο πρώτος είναι μεγαλύτερος του τρίτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 14 (549) *Αν δυο λόγοι είναι ίσοι, τότε όπως συγκρίνονται οι αριθμητές ομοίως συγκρίνονται και οι παρονομαστές.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε ότι $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ και ας υποθέσουμε ότι $\alpha > \gamma$. Ισχυρίζομαι ότι και $\beta > \delta$.

Πράγματι, από την Π8, σελ. 131, αφού $\alpha > \gamma$ θα ισχύει $\alpha/\beta > \gamma/\beta$. Αλλά $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ άρα $\gamma/\delta > \gamma/\beta$. Η Π10, σελ. 132 δίνει ότι $\beta > \delta$.

Ομοίως για τις περιπτώσεις $\alpha = \gamma$ και $\alpha < \gamma$.

Άρα αν δυο λόγοι είναι ίσοι όπως συγκρίνονται οι αριθμητές ομοίως συγκρίνονται και οι παρονομαστές· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 15 (Όμοια κλάσματα) (549) *Ίσα πολλαπλάσια έχουν ίσους λόγους.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε τα μεγέθη α, β και τα ίσα πολλαπλάσιά τους $\gamma = \mu\alpha$ και $\delta = \mu\beta$. Όσα μεγέθη ίσα με το α περιέχει το γ τόσα μεγέθη ίσα με β περιέχει το δ. Όμως θεωρώντας τους μ ίσους λόγους

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} = \cdots = \frac{\alpha}{\beta},$$

θα ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha + \alpha + \ldots + \alpha}{\beta + \beta + \ldots + \beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

(Π12, σελ. 133). Συνεπώς, ίσα πολλαπλάσια έχουν ίσους λόγους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 16 (550) *Η ισότητα δύο λόγων παραμένει και στους εναλλάξ λόγους, (στμ: δηλαδή μπορούν να ανταλλάξουν θέση οι μέσοι όροι: αν $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ τότε $\alpha/\gamma = \beta/\delta$).*

Απόδειξη. Θεωρούμε τους φυσικούς αριθμούς μ και ν (στμ: και πρέπει να δείξουμε ότι όπως συγκρίνεται το ν/μ με το α/γ με τον ίδιο τρόπο συγκρίνεται και με το β/δ), και τα πολλαπλάσια $\mu\alpha$ και $\mu\beta$ των α και β, καθώς και τα πολλαπλάσια $\nu\gamma$ και $\nu\delta$ των γ και δ. Αλλά ισχύει

$$\frac{\mu\alpha}{\mu\beta} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\nu\gamma}{\nu\delta}$$

(Π15, σελ. 134). Έτσι, όπως συγκρίνονται οι αριθμητές συγκρίνονται και οι παρονομαστές (Π14, σελ. 134). Αν δηλαδή $\mu\alpha > \nu\gamma$ τότε και $\mu\beta > \nu\delta$ (στμ: δηλαδή αν $\alpha/\gamma > \nu/\mu$ τότε και $\beta/\delta > \nu/\mu$). Ομοίως και αν ισχύει το $=$ ή το $<$. Άρα $\alpha/\gamma = \beta/\delta$.

Συνεπώς η ισότητα δύο λόγων παραμένει αν ανταλλάξουν θέση οι μέσοι όροι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 17 (550) *Μια αναλογία παραμένει αν οι λόγοι αντικατασταθούν από τους διαιρεθέντες όρους τους* (Ορ15, σελ. 127).

Απόδειξη. Έστω τα μεγέθη $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta < \alpha$ και $\delta < \gamma$. Αν $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ θα αποδείξουμε ότι $(\alpha-\beta)/\beta = (\gamma-\delta)/\delta$. Ας πάρουμε τα ίδια πολλαπλάσια $\lambda(\alpha-\beta)$, $\lambda\beta$, $\lambda(\gamma-\delta)$, $\lambda\delta$ και τα ίδια πολλαπλάσια $\mu\beta$ και $\mu\delta$. Πρέπει να δείξουμε ότι όπως συγκρίνονται τα $\lambda(\alpha-\beta)$ και $\mu\beta$ έτσι συγκρίνονται και τα $\lambda(\gamma-\delta)$ και $\mu\delta$ (στμ: δηλαδή το μ/λ συγκρίνεται με το $(\alpha-\beta)/\beta$ με τον ίδιο τρόπο που συγκρίνεται με το $(\gamma-\delta)/\delta$).

Όμως, αφού $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ όπως συγκρίνονται τα $\lambda\alpha$ και $(\lambda+\mu)\beta$ έτσι συγκρίνονται και τα $\lambda\gamma$ και $(\lambda+\mu)\delta$. Αλλά ισχύει $(\lambda+\mu)\beta = \lambda\beta + \mu\beta$ και $(\lambda+\mu)\delta = \lambda\delta + \mu\delta$ (Π2, σελ. 128). Αφαιρώντας τις ποσότητες $\lambda\beta$ και $\lambda\delta$ συμπεραίνουμε ότι όπως συγκρίνονται τα $\lambda\alpha - \lambda\beta$ και $\mu\beta$ έτσι συγκρίνονται και τα $\lambda\gamma - \lambda\delta$ και $\mu\delta$. Τέλος, $\lambda(\alpha-\beta) + \lambda\beta = \lambda\alpha$ και $\lambda(\gamma-\delta) + \lambda\delta = \lambda\gamma$ (Π1, σελ. 128), οπότε αφαιρώντας τα $\lambda\beta$ και $\lambda\delta$ παίρνουμε ότι $\lambda(\alpha-\beta) = \lambda\alpha - \lambda\beta$ και $\lambda(\gamma-\delta) = \lambda\gamma - \lambda\delta$. Έτσι τα $\lambda(\alpha-\beta)$ και $\mu\beta$ συγκρίνονται με τον ίδιο τρόπο που συγκρίνονται τα $\lambda(\gamma-\delta)$ και $\mu\delta$, δηλαδή $(\alpha-\beta)/\beta = (\gamma-\delta)/\delta$.

Άρα, μια αναλογία παραμένει αληθής αν οι λόγοι αντικατασταθούν από τους διαιρεθέντες όρους τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 18 (551) *Αν τέσσαρα μεγέθη σχηματίζουν ίσους λόγους το ίδιο συμβαίνει και με τη σύνθεσή τους* (Ορ14, σελ. 127).

Απόδειξη. Ας είναι τα μεγέθη α, β, γ και δ με $\alpha/\beta = \gamma/\delta$. Ισχυρίζομαι ότι $(\alpha+\beta)/\beta = (\gamma+\delta)/\delta$.

Αν δεν ισχύει τότε θα είναι $(\alpha+\beta)/\beta = (\gamma+\delta)/\varepsilon$ όπου το ε είτε είναι μικρότερο του δ είτε μεγαλύτερο. Ας υποθέσουμε ότι είναι μικρότερο. Επειδή $(\alpha+\beta)/\beta = (\gamma+\delta)/\varepsilon$ θα ισχύει και

$$\frac{(\alpha+\beta)-\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta-\varepsilon}{\varepsilon}$$

(Π17, σελ. 135) Άρα $\alpha/\beta = (\gamma + \delta - \varepsilon)/\varepsilon$. Αλλά από την υπόθεση $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ οπότε (Π11, σελ. 133) $\gamma/\delta = (\gamma + \delta - \varepsilon)/\varepsilon$. Αλλά, αφού $\varepsilon < \delta$ θα είναι $\gamma + \delta - \varepsilon > \gamma$, οπότε (Π14, σελ. 134) θα είναι και $\varepsilon > \delta$ το οποίο είναι αδύνατο.

Ομοίως χειριζόμαστε την περίπτωση που $\varepsilon > \delta$.

Άρα, οι συνθέσεις των λόγων σε μια αναλογία παραμένουν σε αναλογία. *Δ*

Πρόταση 19 (552) *Για ίσους λόγους η αναλογία παραμένει η ίδια αν από αριθμητή αφαιρεθεί αριθμητής και από παρονομαστή παρονομαστής* (στμ: δηλαδή αν $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ τότε $\alpha/\beta = (\alpha - \gamma)/(\delta - \gamma)$).

Απόδειξη. Επειδή $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ θα είναι ίσοι και οι εναλλάξ λόγοι $\alpha/\gamma = \beta/\delta$ (Π16, σελ. 134). Αλλά θα είναι ίσοι οι λόγοι των διαιρεθέντων όρων, δηλαδή $(\alpha - \gamma)/\gamma = (\beta - \delta)/\delta$ (Π17, σελ. 135). Και πάλι θα είναι ίσοι οι εναλλάξ λόγοι, δηλαδή $(\alpha - \gamma)/(\beta - \delta) = \gamma/\delta$. Αλλά $\gamma/\delta = \alpha/\beta$ άρα $\alpha/\beta = (\alpha - \gamma)/(\beta - \delta)$.

Συνεπώς για ίσους λόγους η αναλογία παραμένει αν από αριθμητή αφαιρεθεί αριθμητής και από παρονομαστή παρονομαστής· όπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα 8 *Από αυτό είναι φανερό ότι η αναλογία παραμένει με τους όρους σε αναστροφή* (στμ: δηλαδή αν $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ τότε και $\alpha/(\alpha-\beta) = \gamma/(\gamma-\delta)$).

Πράγματι, αφού $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ τότε για τους εναλλάξ $\alpha/\gamma = \beta/\delta$ οπότε και με τους όρους αφαιρεθέντες $\alpha/\gamma = (\alpha - \beta)/(\gamma - \delta)$, συνεπώς και οι εναλλάξ $\alpha/(\alpha - \beta) = \gamma/(\gamma - \delta)$. *Δ*

Πρόταση 20 (552) *Αν τρία μεγέθη σχηματίζουν ίσους λόγους με άλλα τρία* (στμ: δηλαδή για τα α, β, γ, δ, ε, ζ ισχύει $\alpha/\beta = \delta/\varepsilon$ και $\beta/\gamma = \varepsilon/\zeta$) *τότε το πρώτο μέγεθος συγκρίνεται με το τρίτο με τον ίδιο τρόπο που συγκρίνεται το τέταρτο με το έκτο.*

Απόδειξη. Αν $\alpha/\beta = \delta/\varepsilon$ και $\beta/\gamma = \varepsilon/\zeta$, ισχυρίζομαι ότι αν $\alpha > \gamma$ θα είναι και $\delta > \zeta$· και αν $\alpha = \gamma$ θα είναι και $\delta = \zeta$· και αν $\alpha < \gamma$ θα είναι και $\delta < \zeta$.

Πράγματι, αν $\alpha > \gamma$ το α θα έχει μεγαλύτερο λόγο από το γ ως προς το β, δηλαδή $\alpha/\beta > \gamma/\beta$ (Π8, σελ. 131). Αλλά $\alpha/\beta = \delta/\varepsilon$ άρα $\delta/\varepsilon > \gamma/\beta$. Όμως $\beta/\gamma = \varepsilon/\zeta$ οπότε $\gamma/\beta = \zeta/\varepsilon$ (Π7, σελ. 131), συνεπώς $\delta/\varepsilon > \zeta/\varepsilon$. Έτσι $\delta > \zeta$ (Π10, σελ. 132). Ομοίως μεταχειριζόμαστε τις περιπτώσεις $\alpha = \gamma$ και $\alpha < \gamma$.

Άρα αν τρία μεγέθη σχηματίζουν ίσους λόγους με άλλα τρία τότε το πρώτο μέγεθος συγκρίνεται με το τρίτο με τον ίδιο τρόπο που συγκρίνεται το τέταρτο με το έκτο· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 21 (553) *Αν τρία μεγέθη σχηματίζουν ανά δύο ίσους λόγους σε τεταραγμένη αναλογία τα δι' ίσου μεγέθη συγκρίνονται ομοίως* (στμ: δηλαδή αν για τα $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \zeta, \delta$ (με αυτή τη σειρά!) ισχύει $\alpha/\beta = \varepsilon/\zeta$ και $\beta/\gamma = \delta/\varepsilon$ (Ορ18, σελ. 127) τότε τα δι' ίσου είναι τα α, γ καθώς και τα δ και ζ).

Απόδειξη. Αν $\alpha > \gamma$ τότε $\alpha/\beta > \gamma/\beta$ (Π8, σελ. 131). Αλλά $\alpha/\beta = \varepsilon/\zeta$ οπότε $\varepsilon/\zeta > \gamma/\beta$. Όμως $\beta/\gamma = \delta/\varepsilon$ οπότε $\gamma/\beta = \varepsilon/\delta$ (Π7, σελ. 131) συνεπώς $\varepsilon/\zeta > \varepsilon/\delta$, και άρα $\zeta < \delta$ (Π10, σελ. 132).

Ομοίως αν $\alpha = \gamma$ ή $\alpha < \gamma$.

Άρα αν τρία μεγέθη σχηματίζουν ανά δύο ίσους λόγους σε τεταραγμένη αναλογία με άλλα τρία μεγέθη, το πρώτο μέγεθος συγκρίνεται με το τρίτο με τον ίδιο τρόπο που συγκρίνεται το έκτο με το τέταρτο· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

(στμ: εδώ υπάρχει ένα πρόβλημα με τη σειρά των μεγεθών. Το αρχικό κείμενο αναφέρεται στο δ ως το τέταρτο μέγεθος αντί να το θεωρεί έκτο. Αυτό όμως δεν είναι σε απόλυτη συμφωνία με τον Ορισμό 18, σελ. 127. Όμως δεν υπάρχει θέμα σύγχυσης εφόσον οι τελικοί λόγοι επιλέγονται μέσω των δι' ίσου αναλογιών.)

Πρόταση 22 (554) *Αν τρία μεγέθη έχουν ανά δύο ίσους λόγους με άλλα τρία μεγέθη τότε και οι δι' ίσου λόγοι είναι ίσοι* (Ορ17, σελ. 127). (στμ: δηλαδή αν $\alpha/\beta = \delta/\varepsilon$ και $\beta/\gamma = \varepsilon/\zeta$ τότε $\alpha/\gamma = \delta/\zeta$).

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\alpha/\beta = \delta/\varepsilon$ και $\beta/\gamma = \varepsilon/\zeta$. Για τα ίδια πολλαπλάσια $\kappa\alpha$ και $\kappa\delta$ και ίδια πολλαπλάσια $\lambda\gamma$ και $\lambda\zeta$ ισχυρίζομαι ότι όπως συγκρίνονται τα $\kappa\alpha$, $\lambda\gamma$ συγκρίνονται και τα $\kappa\delta$, $\lambda\zeta$ (στμ: δηλαδή αν $\kappa\alpha > \lambda\gamma$ (δηλαδή $\alpha/\gamma > \lambda/\kappa$) τότε $\kappa\delta > \lambda\zeta$ (δηλαδή $\delta/\zeta > \lambda/\kappa$)), οπότε θα ισχύει $\alpha/\gamma = \delta/\zeta$ (Ορ5, σελ. 126).

Ας πάρουμε και τα ίδια πολλαπλάσια $\mu\beta$, $\mu\varepsilon$. Αλλά $\alpha/\beta = \delta/\varepsilon$ οπότε $\kappa\alpha/\mu\beta = \kappa\delta/\mu\varepsilon$ (Π4, σελ. 129). Αλλά επιπλέον έχουμε $\beta/\gamma = \varepsilon/\zeta$ άρα $\mu\beta/\lambda\gamma = \mu\varepsilon/\lambda\zeta$ (Π4, σελ. 129).

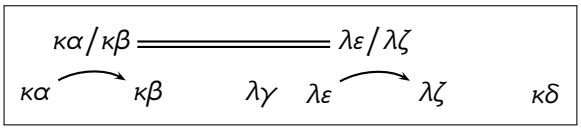
Άρα τα μεγέθη $\kappa\alpha$, $\mu\beta$ και $\lambda\gamma$ έχουν ανά δύο ίσους λόγους με τα $\kappa\delta$, $\mu\varepsilon$ και $\lambda\zeta$. Οπότε (Π20, σελ. 136) το πρώτο μέγεθος $\kappa\alpha$ συγκρίνεται με το τρίτο $\lambda\gamma$ όπως συγκρίνεται το τέταρτο $\kappa\delta$ με το έκτο $\lambda\zeta$.

Έτσι, αν τρία μεγέθη έχουν ανά δύο ίσους λόγους με άλλα τρία μεγέθη τότε και οι δι' ίσου λόγοι είναι ίσοι· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 23 (554) *Αν τρία μεγέθη έχουν σε τεταραγμένη αναλογία ανά δύο ίσους λόγους με άλλα τρία τότε έχουν και δι' ίσου λόγους ίσους* (στμ: αν για τα α, β, γ, ε, ζ, δ ισχύει $\alpha/\beta = \varepsilon/\zeta$ και $\beta/\gamma = \delta/\varepsilon$ τότε και οι δι' ίσου λόγοι είναι ίσοι: $\alpha/\gamma = \delta/\zeta$).

Απόδειξη. Έστω ότι τα μεγέθη α, β, γ, ε, ζ, δ βρίσκονται σε τεταραγμένη αναλογία, δηλαδή $\alpha/\beta = \varepsilon/\zeta$ και $\beta/\gamma = \delta/\varepsilon$ (Ορ18, σελ. 127). Ισχυρίζομαι ότι $\alpha/\gamma = \delta/\zeta$.

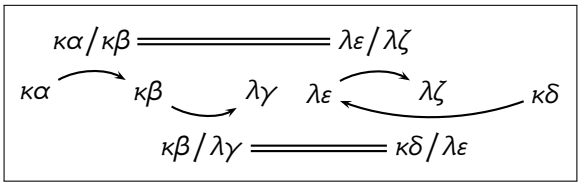
Θεωρούμε τα ίδια πολλαπλάσια $\kappa\alpha$, $\kappa\beta$, $\kappa\delta$ καθώς και τα $\lambda\gamma$, $\lambda\varepsilon$ και $\lambda\zeta$. Οπότε $\alpha/\beta = \kappa\alpha/\kappa\beta$ και $\varepsilon/\zeta = \lambda\varepsilon/\lambda\zeta$ (Π15, σελ. 134). Όμως $\alpha/\beta = \varepsilon/\zeta$ συνεπώς $\kappa\alpha/\kappa\beta = \lambda\varepsilon/\lambda\zeta$ (Π11, σελ. 133).



Επιπλέον, $\beta/\gamma = \delta/\varepsilon$ άρα $\beta/\delta = \gamma/\varepsilon$ (Π16, σελ. 134), άρα (Προτάση 15)

$$\frac{\lambda\gamma}{\lambda\varepsilon} = \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{\beta}{\delta} = \frac{\kappa\beta}{\kappa\delta},$$

δηλαδή $\lambda\gamma/\lambda\varepsilon = \kappa\beta/\kappa\delta$. Άρα $\kappa\beta/\lambda\gamma = \kappa\delta/\lambda\varepsilon$ (Π16, σελ. 134).



Άρα τα μεγέθη $\kappa\alpha$, $\kappa\beta$, $\lambda\gamma$, $\lambda\varepsilon$, $\lambda\zeta$, $\kappa\delta$ βρίσκονται σε τεταραγμένη αναλογία.

Αλλά τώρα τα $\kappa\alpha$, $\lambda\gamma$ συγκρίνονται όπως και τα $\kappa\delta$, $\lambda\zeta$ (Π21, σελ. 137), δηλαδή (Ορ5, σελ. 126) $\alpha/\gamma = \delta/\zeta$.

Άρα, αν τρία μεγέθη έχουν σε τεταραγμένη αναλογία ανά δύο ίσους λόγους με άλλα τρία τότε έχουν και δι' ίσου λόγους ίσους· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 24 (Πρόσθεση ομονύμων) (555) *Αν τα μεγέθη α, β, γ, δ, ε, ζ ικανοποιούν τις $\alpha/\gamma = \beta/\delta$ και $\varepsilon/\gamma = \zeta/\delta$ τότε $(\alpha+\varepsilon)/\gamma = (\beta+\zeta)/\delta$.*

Απόδειξη. Επειδή $\varepsilon/\gamma = \zeta/\delta$ θα ισχύει και $\gamma/\varepsilon = \delta/\zeta$ (Π7, σελ. 131). Αλλά $\alpha/\gamma = \beta/\delta$, οπότε και οι δι' ίσου λόγοι είναι ίσοι, δηλαδή $\alpha/\varepsilon = \beta/\zeta$ (Π22, σελ. 137). Αλλά τώρα και η σύνθεση λόγων δίνει ίσους λόγους, δηλαδή $(\alpha+\varepsilon)/\varepsilon = (\beta+\zeta)/\zeta$ (Π18, σελ. 135). Αλλά $\varepsilon/\gamma = \zeta/\delta$ άρα και πάλι οι δι' ίσου λόγοι είναι ίσοι, δηλαδή $(\alpha+\varepsilon)/\gamma = (\beta+\zeta)/\delta$ (Π18, σελ. 135).

Άρα αν τα μεγέθη α, β, γ, δ, ε, ζ ικανοποιούν τις $\alpha/\gamma = \beta/\delta$ και $\varepsilon/\gamma = \zeta/\delta$ τότε $(\alpha+\varepsilon)/\gamma = (\beta+\zeta)/\delta$· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 25 (Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου) (556) *Εάν τέσσαρα μεγέθη βρίσκονται σε αναλογία το άθροισμα του μεγαλύτερου και του μικρότερου από αυτά, είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των άλλων δύο.*

Στμ: Η πρόταση αυτή όχι μόνο συνεπάγεται την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στη γλώσσα της εποχής, αλλά είναι και ισχυρότερη!

Πράγματι συνεπάγεται την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, διότι αν $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ και α ο μεγαλύτερος, τότε αναγκαστικά ο δ είναι ο μικρότερος (δείτε παρακάτω στην απόδειξη) και η πρόταση λέει $\alpha + \delta \geq \beta + \gamma$. Αν λοιπόν εφαρμοστεί στην περίπτωση όπου $\beta = \gamma$, δηλαδή $\gamma^2 = \alpha\delta$ θα δώσει $\alpha + \delta \geq 2\gamma$ ισοδύναμα

$$\frac{\alpha + \delta}{2} \geq \sqrt{\alpha\delta}.$$

Είναι όμως και ισχυρότερη. Για παράδειγμα, αν $\alpha = 10$, $\beta = 5$, $\gamma = 2$ και $\delta = 1$, τότε ισχύει $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ (και οι δύο λόγοι είναι ίσοι με 2) αλλά

$$\alpha + \delta = 11 > \beta + \gamma = 7 > 2\sqrt{\alpha\delta} = 2\sqrt{10} \simeq 6{,}3245.$$

Απόδειξη. Έστω τέσσαρα μεγέθη α, β, γ και δ με μεγαλύτερο το α και $\alpha/\beta = \gamma/\delta$. Επειδή $\alpha > \gamma$ άρα $\beta > \delta$ (Π14, σελ. 134). Αλλά επειδή και εναλλάξ $\alpha/\gamma = \beta/\delta$ και $\alpha > \beta$ θα είναι και $\gamma > \delta$ (Π14, σελ. 134). Δηλαδή το μικρότερο είναι το δ. Ισχυρίζομαι λοιπόν ότι $\alpha + \delta > \beta + \gamma$.

Αφού $\alpha/\beta = \gamma/\delta$, και το α είναι το μεγαλύτερο και το δ το μικρότερο, θα ισχύει $\alpha/\beta = (\alpha - \gamma)/(\beta - \delta)$ (Π19, σελ. 136), οπότε και εναλλάξ, δηλαδή $\alpha/(\alpha - \gamma) = \beta/(\beta - \delta)$ (Π16, σελ. 134). Αλλά $\alpha > \beta$ άρα θα είναι και $\alpha - \gamma > \beta - \delta$ (Π14, σελ. 134). Προσθέτοντας στα άνισα την ίδια ποσότητα $\gamma + \delta$ προκύπτουν ομοίως άνισα, δηλαδή $\alpha + \delta > \beta + \gamma$ (Β1, κ.εν.4, σελ. 22).

Συνεπώς, αν τέσσαρα μεγέθη βρίσκονται σε αναλογία το άθροισμα του μεγαλύτερου και του μικρότερου από αυτά, είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των άλλων δύο. Δ

Βιβλίο 6ο

Ορισμοί

Ορισμοί 1 (557)

(ορ. 1) Όμοια ευθύγραμμα σχήματα είναι όσα έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μία και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες.

(ορ. 2) Αντιστρόφως ανάλογα είναι τα σχήματα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μία και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες αντιστρόφως ανάλογες.

Στμ: ο παραπάνω ορισμός δεν είναι μετάφραση του ορισμού του πρωτότυπου κειμένου μια και η διατύπωση του πρωτοτύπου δεν βγάζει νόημα και θεωρείται από κάποιους προσθήκη του Ήρωνα και όχι του Ευκλείδη. Το παραπάνω όμως θεωρούμε ότι αποδίδει το πνεύμα του κειμένου. Για παράδειγμα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα $AB\times B\Gamma$ και $A'B'\times B'\Gamma'$, ως ορθογώνια έχουν τις γωνίες τους μια προς μία ίσες και θα είναι αντιστρόφως ανάλογα αν ισχύει $AB/A'B' = B'\Gamma'/B\Gamma$.

(ορ. 3) Ένα ευθύγραμμο τμήμα θα λέγεται ότι έχει χωριστεί σε άκρο και μέσο λόγο, όταν ο λόγος του ευθύγραμμου τμήματος προς το μεγαλύτερο από τα δυο τμήματα είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου τμήματος προς το μικρότερο.

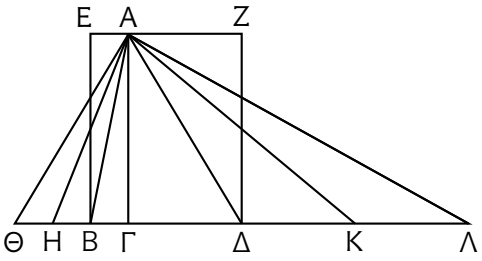
Στμ: δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει χωριστεί σε άκρο και μέσο λόγο από το σημείο K, που ανήκει στο AB, αν ισχύει

$$\frac{AB}{BK} = \frac{BK}{A\Gamma} \Leftrightarrow BK^2 = AB\cdot AK.$$

(ορ. 4) Ύψος σε κάθε σχήμα θεωρείται η κάθετος που άγεται από την κορυφή και καταλήγει στη βάση.

(ορ. 5) Θα λέμε ότι ένας λόγος αποτελείται από λόγους όταν οι τελευταίοι πολλαπλασιαζόμενοι μεταξύ τους δίνουν τον αρχικό λόγο.

Πρόταση 1 (557) *Τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα που έχουν το ίδιο ύψος, έχουν λόγο εμβαδών ίσο προς το λόγο των βάσεων.*



Απόδειξη. Έστω τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ και ΕΓ, ΓΖ παραλληλόγραμμα που έχουν το ίδιο ύψος ΑΓ. Ισχυρίζομαι ότι ο λόγος των βάσεων ισούται με το λόγο των εμβαδών των τριγώνων και το λόγο των εμβαδών των παραλληλογράμμων ΒΓ/ΓΔ = |ΑΒΓ|/|ΑΓΔ| = |ΕΖ|/|ΓΖ|.

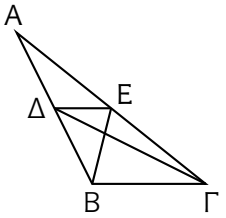
Προεκτείνουμε τη ΒΔ και προς τις δυο κατευθύνσεις μέχρι τα σημεία Θ, Λ και λαμβάνουμε οσαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα ίσα με τη βάση ΒΓ έστω ΒΗ, ΗΘ και οσαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα ίσα με τη βάση ΓΔ έστω ΔΚ, ΚΛ (στμ: όχι απαραίτητα το ίδιο πλήθος). Φέρνουμε τα ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ. Επειδή ΓΒ = ΒΗ = ΗΘ τότε και τα τρίγωνα έχουν ίσο εμβαδόν |ΑΘΗ| = |ΑΗΒ| = |ΑΒΓ| (Β1, Π38, σελ. 43). Άρα όσες φορές πολλαπλάσιο είναι η βάση ΘΓ της ΒΓ, τόσες φορές πολλαπλάσιο είναι και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΘΓ προς το ΑΒΓ δηλαδή ΘΓ/ΒΓ = |ΑΘΓ|/|ΑΒΓ|. Όμοια προκύπτει ότι ΛΓ/ΓΔ = |ΑΛΓ|/|ΑΓΔ|. Και αν ΘΓ = ΓΛ τότε |ΑΘΓ| = |ΑΓΛ| (Β1, Π38, σελ. 43), αν ΘΓ > ΓΛ τότε |ΑΘΓ| > |ΑΓΛ| και αν ΘΓ < ΓΛ τότε |ΑΘΓ| < |ΑΓΛ|.

Υπάρχουν τέσσαρα μεγέθη, δύο οι βάσεις ΒΓ, ΓΔ και δυο τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ. Θεωρήσαμε ίσα πολλαπλάσια της βάσης ΒΓ και του τριγώνου ΑΒΓ ώστε να προκύψει η βάση ΘΓ το τρίγωνο ΑΘΓ. Θεωρήσαμε άλλα τυχόντα ίσα πολλαπλάσια της βάσης ΓΔ και του τριγώνου ΑΓΔ ώστε να προκύψει η βάση ΛΓ και το τρίγωνο ΑΛΓ. Και έχει αποδειχθεί ότι αν ΘΓ > ΓΛ τότε |ΑΘΓ| > |ΑΓΛ| αν ΘΓ = ΓΛ τότε |ΑΘΓ| = |ΑΓΛ| και αν ΘΓ < ΓΛ τότε |ΑΘΓ| < |ΑΓΛ|. Άρα ΒΓ/ΓΔ = |ΑΒΓ|/|ΑΓΔ| (Β5, Ορ5, σελ. 126).

Και επειδή το παραλληλόγραμμο ΕΓ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΑΒΓ, ενώ το παραλληλόγραμμο ΖΓ είναι διπλάσιο του ΑΓΔ (Β1, Π34, σελ. 41) τα ίσα πολλαπλάσια έχουν ίσους λόγους (Β5, Π11, σελ. 133). Επειδή λοιπόν ο λόγος των βάσεων είναι ίσος με το λόγο των τριγώνων και των παραλληλογράμμων ΒΓ/ΓΔ = |ΑΒΓ|/|ΑΓΔ| = |ΕΖ|/|ΓΖ| σημαίνει και ότι ΒΓ/ΓΔ = |ΕΖ|/|ΓΖ| (Β5, Π11, σελ. 133).

Άρα τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα που έχουν το ίδιο ύψος, έχουν λόγο εμβαδών ίσο προς το λόγο των βάσεων· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 2 (558) *Σε ένα τρίγωνο η ευθεία που φέρουμε παράλληλη προς μια πλευρά του χωρίζει τις άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα· και αν δυο πλευρές ενός τριγώνου τμηθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύψουν μέρη ανάλογα, η ευθεία που περνάει από τα σημεία τομής, θα είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά.*



Απόδειξη. Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη ΔΕ παράλληλη προς τη μια πλευρά του τριγώνου τη ΒΓ.

Ισχυρίζομαι ότι ΒΔ/ΔΑ = ΓΕ/ΕΑ. Πράγματι, φέρνουμε τις ΒΕ και ΓΔ. Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΕ έχουν ίσα εμβαδά |ΒΔΕ| = |ΓΔΕ|, αφού έχουν ίδια βάση την ΔΕ και βρίσκονται μεταξύ των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ (Β1, Π38, σελ. 43). Αφού τα εμβαδά των τριγώνων ΒΔΕ και ΓΔΕ είναι ίσα τότε και ο λόγος τους προς το εμβαδό του ίδιου τριγώνου θα είναι ίδιος |ΒΔΕ|/|ΑΔΕ| = |ΓΔΕ|/|ΑΔΕ| (Β5, Π7, σελ. 131). Αλλά |ΒΔΕ|/|ΑΔΕ| = ΒΔ/ΔΑ αφού τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΕ είναι υπό το ίδιο ύψος, την κάθετη δηλαδή από το Ε προς την ΑΒ, οπότε ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των βάσεων (Π1, σελ. 142). Όμοια προκύπτει ότι και |ΓΔΕ|/|ΑΔΕ| = ΓΕ/ΕΑ. Άρα ΒΔ/ΔΑ = ΓΕ/ΕΑ.

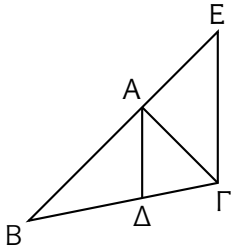
Αντιστρόφως αν οι πλευρές ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ χωρίζονται σε μέρη ανάλογα έτσι ώστε ΒΔ/ΔΑ = ΓΕ/ΕΑ και φέρνουμε τη ΔΕ. Ισχυρίζομαι ότι η ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ.

Αφού γίνει η κατασκευή, επειδή έχουμε ΒΔ/ΔΑ = ΓΕ/ΕΑ αλλά και ΒΔ/ΔΑ = |ΒΔΕ|/|ΑΔΕ| όπως επίσης και ΓΕ/ΕΑ = |ΓΔΕ|/|ΑΔΕ| (Π1, σελ. 142) Θα ισχύει |ΒΔΕ|/|ΑΔΕ| = |ΓΔΕ|/|ΑΔΕ (Β5, Π11, σελ. 133). Άρα καθένα από τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΕ έχει τον ίδιο λόγο προς ΑΔΕ. Συνεπώς το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΕ είναι ίσο με το εμβαδό του ΓΔΕ, |ΒΔΕ| = |ΓΔΕ| (Β5, Π9, σελ. 132)· τα τρίγωνα αυτά έχουν και την ίδια βάση ΔΕ. Τα τρίγωνα με ίσο εμβαδό και ίδια βάση βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων (Β1, Π39, σελ. 44). Έτσι, η ΔΕ είναι παράλληλη προς την ΒΓ.

Άρα αν σε ένα τρίγωνο αχθεί ευθεία παράλληλη προς τη μια πλευρά του, θα χωρίζει τις άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα· και αν δυο πλευρές ενός τριγώνου τμηθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύψουν μέρη ανάλογα, η ευθεία που περνάει από τα σημεία τομής, θα είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 3 (559) *Αν η γωνία ενός τριγώνου διχοτομηθεί από μια ευθεία η οποία τέμνει την απέναντι πλευρά σε ένα σημείο, τα τμήματα που προκύπτουν στην πλευρά αυτή είναι ανάλογα προς τις δυο άλλες πλευρές του τριγώνου· και αν ένα σημείο που ανήκει στη πλευρά ενός τριγώνου ορίζει τμήματα τα οποία είναι ανάλογα προς τις δυο άλλες πλευρές του τριγώνου, τότε η ευθεία*

που άγεται από την κορυφή και καταλήγει στο εν λόγω σημείο διχοτομεί τη γωνία του τριγώνου.



Απόδειξη. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η ευθεία που διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BA\Gamma}$. Ισχυρίζομαι ότι ΒΔ/ΓΔ = ΒΑ/ΑΓ.

Από το Γ φέρουμε την ΓΕ παράλληλη προς την ΔΑ και προεκτείνουμε την ΒΑ ώσπου να συναντήσει την ΓΕ στο Ε (Βι, Αίτημα 5, σελ. 21).

Η ΑΓ τέμνει τις παράλληλες ΑΔ, ΕΓ άρα $\widehat{A\Gamma E} = \widehat{\Gamma A\Delta}$ (Βι, Π29, σελ. 38). Αλλά $\widehat{\Gamma A\Delta} = \widehat{BA\Delta}$ από υπόθεση· άρα και $\widehat{BA\Delta} = \widehat{A\Gamma E}$.

Οι παράλληλες ΑΔ, ΕΓ τέμνονται και από την ευθεία ΒΑΕ, οπότε $\widehat{BA\Delta} = \widehat{AE\Gamma}$ (Βι, Π29, σελ. 38).

Έχει δειχθεί ότι και $\widehat{A\Gamma E} = \widehat{BA\Delta}$ άρα $\widehat{A\Gamma E} = \widehat{AE\Gamma}$ οπότε θα είναι και οι πλευρές ίσες ΑΕ = ΑΓ (Βι, Π6, σελ. 24).

Επειδή στο τρίγωνο ΒΓΕ φέραμε την ΑΔ παράλληλη προς μια από τις πλευρές του, την ΕΓ, άρα οι πλευρές του τριγώνου χωρίζονται σε μέρη ανάλογα ΒΔ/ΓΔ = ΒΑ/ΑΕ (Β6, Π2, σελ. 142). Όμως ΑΕ = ΑΓ οπότε ΒΔ/ΓΔ = ΒΑ/ΑΓ.

Αντίστροφα τώρα. έστω ότι ΒΔ/ΔΓ = ΒΑ/ΑΓ και ας αχθεί η ΑΔ· ισχυρίζομαι ότι η γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ διχοτομείται από την ΑΔ.

Αφού γίνει η προηγούμενη κατασκευή και επειδή ΒΔ/ΔΓ = ΒΑ/ΑΓ, αλλά και ΒΔ/ΔΓ = ΒΑ/ΑΕ στο τρίγωνο ΒΓΕ φέραμε την ΑΔ παράλληλη προς μια από τις πλευρές του την ΕΓ (Β6, Π2, σελ. 142) και ΒΑ/ΑΓ = ΒΑ/ΑΕ (Β5, ΠΙΙ, σελ. 133).

Άρα ΑΓ = ΑΕ (Β5, Π9, σελ. 132)· ώστε και $\widehat{AE\Gamma} = \widehat{A\Gamma E}$ (Βι, Π5, σελ. 24).

Αλλά $\widehat{AE\Gamma}$ ισούται με την εκτός γωνία $\widehat{BA\Delta}$ (Βι, Π29, σελ. 38), ενώ η $\widehat{A\Gamma E}$ ισούται με την εναλλάξ γωνία $\widehat{\Gamma A\Delta}$· οπότε και

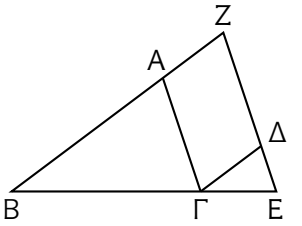
$$\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma A\Delta}.$$

Συνεπώς η γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ έχει διχοτομηθεί από την ΑΔ.

Άρα, αν διχοτομηθεί η γωνία ενός τριγώνου, από μια ευθεία η οποία τέμνει την απέναντι πλευρά σε ένα σημείο, τα τμήματα που προκύπτουν στην πλευρά αυτή είναι ανάλογα προς τις δυο άλλες πλευρές του τριγώνου· και αν ένα σημείο που ανήκει στην πλευρά ενός τριγώνου ορίζει τμήματα τα οποία είναι ανάλογα προς τις δυο άλλες πλευρές του τριγώνου, τότε η ευθεία που άγεται από την κορυφή και καταλήγει στο εν λόγο σημείο διχοτομεί τη γωνία του τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 4 (560) *Σε ισογώνια τρίγωνα οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες.*

Απόδειξη. Έστω τα ισογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ με $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΔΓΕ}$, $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΓΔΕ}$ και $\widehat{ΑΓΒ} = \widehat{ΓΕΔ}$.



Ισχυρίζομαι ότι στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες.

Θεωρούμε ότι οι ΒΓ και ΓΕ βρίσκονται στην ίδια ευθεία και επειδή $\widehat{ΑΒΓ}+\widehat{ΑΓΒ} < 2$ ορθές (Β1, Π17, σελ. 30) και $\widehat{ΑΓΒ} = \widehat{ΔΕΓ}$, άρα $\widehat{ΑΒΓ}+\widehat{ΔΕΓ} <$ 2 ορθές. Οπότε οι ΒΑ, ΕΔ αν προεκταθούν, θα συμπέσουν (Β1, Αίτημα 5, σελ. 21) έστω στο σημείο Ζ.

Επειδή $\widehat{ΔΓΕ} = \widehat{ΑΒΓ}$, η ΒΖ θα είναι παράλληλη προς την ΓΔ (Β1, Π28, σελ. 37) και αφού $\widehat{ΑΓΒ} = \widehat{ΔΕΓ}$, η ΑΓ θα είναι παράλληλη προς την ΖΕ (Β1, Π28, σελ. 37). Άρα το ΖΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΖΑ = ΔΓ και ΑΓ = ΖΔ (Β1, Π34, σελ. 41). Και επειδή στο τρίγωνο ΖΒΕ η ΑΓ είναι παράλληλη προς την ΖΕ προκύπτει ότι ΒΑ/ΑΖ = ΒΓ/ΓΕ (Π2, σελ. 142). Όμως έχουμε ΑΖ = ΓΔ οπότε ΒΑ/ΓΔ = ΒΓ/ΓΕ, και εναλλάξ ΑΒ/ΒΓ = ΔΓ/ΓΕ.

Επίσης επειδή η ΓΔ είναι παράλληλη προς την ΒΖ προκύπτει ότι ΒΓ/ΓΕ = ΖΔ/ΔΕ (Π2, σελ. 142). Είναι και ΖΔ = ΑΓ οπότε ΒΓ/ΓΕ = ΑΓ/ΔΕ και εναλλάξ ΒΓ/ΓΑ = ΓΕ/ΕΔ (Β5, Π16, σελ. 134).

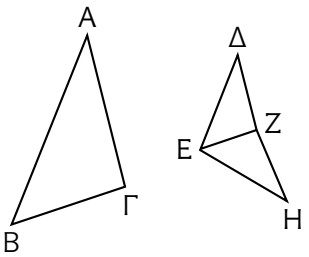
Επειδή λοιπόν αποδείχθηκε ότι ΑΒ/ΒΓ = ΔΓ/ΓΕ και ΒΓ/ΓΑ = ΓΕ/ΕΔ τότε και οι δι' ίσου λόγοι είναι ίσοι ΒΑ/ΑΓ = ΓΔ/ΔΕ (Β5, Π22, σελ. 137).

Άρα των ισογώνιων τριγώνων οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες· όπερ ἔδει δεῖξαι. ∆

Πρόταση 5 (561) *Αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές.*

Απόδειξη. Έστω δυο τρίγωνα τα ΑΒΓ, ΔΕΖ με ανάλογες πλευρές

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΔΕ}{ΕΖ}, \quad \frac{ΒΓ}{ΓΑ} = \frac{ΕΖ}{ΖΔ}, \quad \frac{ΒΑ}{ΑΓ} = \frac{ΕΔ}{ΔΖ}.$$



Ισχυρίζομαι ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι ισογώνια και ότι θα έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές

$$\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΔΕΖ}, \quad \widehat{ΒΓΑ} = \widehat{ΕΖΔ}, \quad \widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΕΔΖ}.$$

Με πλευρά την ΕΖ και κορυφή την Ε κατασκευάζουμε τη γωνία $\widehat{ΖΕΗ} = \widehat{ΑΒΓ}$, ενώ με κορυφή την Ζ κατασκευάζουμε τη γωνία $\widehat{ΕΖΗ} = \widehat{ΑΓΒ}$ (Β1, Π23, σελ. 34) άρα και $\hat{Α} = \hat{Η}$ (Β1, Π32, σελ. 40).

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο προς το τρίγωνο ΕΗΖ. Οπότε οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ, ΕΗΖ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και αυτές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες είναι ομόλογες (Π4, σελ. 144), δηλαδή ΑΒ/ΒΓ = ΗΕ/ΕΖ. Αλλά έχουμε υποθέσει ότι ΑΒ/ΒΓ = ΔΕ/ΕΖ, οπότε προκύπτει ΔΕ/ΕΖ = ΗΕ/ΕΖ (Β5, ΠΙΙ, σελ. 133). Άρα καθεμιά από τις ΔΕ, ΗΕ έχει τον ίδιο λόγο προς την ΕΖ, συνεπώς ΔΕ = ΗΕ.

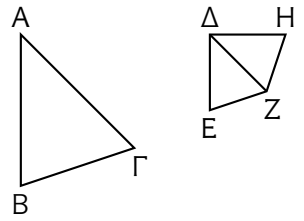
Όμοια αποδεικνύεται ότι και ΔΖ = ΗΖ.

Επειδή λοιπόν ΔΕ = ΕΗ, η ΕΖ κοινή και οι βάσεις είναι ίσες ΔΖ = ΖΗ, προκύπτει ότι $\widehat{ΔΕΖ} = \widehat{ΗΕΖ}$ (Β1, Π8, σελ. 25) και το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ίσο προς το τρίγωνο ΗΕΖ οπότε και οι υπόλοιπες γωνίες τους θα είναι ίσες, απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ίσες πλευρές (Β1, Π4, σελ. 23). Άρα $\widehat{ΔΖΕ} = \widehat{ΗΖΕ}$, $\widehat{ΕΔΖ} = \widehat{ΕΗΖ}$. Κι επειδή $\widehat{ΖΕΔ} = \widehat{ΗΕΖ}$ αλλά $\widehat{ΗΕΖ} = \widehat{ΑΒΓ}$ άρα $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΔΕΖ}$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\widehat{ΑΓΒ} = \widehat{ΔΖΕ}$ αλλά και $\hat{Α} = \hat{Δ}$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο προς το τρίγωνο ΔΕΖ.

Άρα αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 6 (562) *Αν δυο τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες, θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές.*



Απόδειξη. Έστω δυο τρίγωνα τα ΑΒΓ, ΔΕΖ με $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΕΔΖ}$ και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες ΒΑ/ΑΓ = ΕΔ/ΔΖ. Ισχυρίζομαι ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο προς το ΔΕΖ και θα έχει $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΔΕΖ}$, $\widehat{ΑΓΒ} = \widehat{ΔΖΕ}$.

Με πλευρά την ΔΖ και κορυφή την Δ κατασκευάζουμε τη γωνία $\widehat{ΖΔΗ} = \widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΕΔΖ}$ ενώ με κορυφή την Ζ κατασκευάζουμε τη γωνία $\widehat{ΔΖΗ} = \widehat{ΑΓΒ}$ (Β1, Π23, σελ. 34) άρα και $\hat{Β} = \hat{Η}$ (Β1, Π32, σελ. 40).

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο προς το τρίγωνο ΔΗΖ. Οπότε είναι ανάλογες οι ΒΑ/ΑΓ = ΗΔ/ΔΖ (Π4, σελ. 144). Αλλά έχουμε υποθέσει ότι ΒΑ/ΑΓ = ΕΔ/ΔΖ, οπότε προκύπτει ΕΔ/ΔΖ = ΗΔ/ΔΖ (Β5, ΠΙΙ, σελ. 133). Έτσι, καθεμιά από τις ΕΔ = ΔΗ (Β5, Π9, σελ. 132)· και η ΔΖ είναι κοινή. Υπάρχουν δηλαδή δυο πλευρές ίσες οι ΕΔ = ΗΔ και η ΔΖ κοινή και $\widehat{ΕΔΖ} = \widehat{ΗΔΖ}$· άρα η βάση ΕΖ = ΗΖ και το τρίγωνο ΔΕΖ ίσο με το τρίγωνο ΗΔΖ, οπότε και οι υπόλοιπες γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές είναι ίσες (Β1, Π4, σελ. 23).

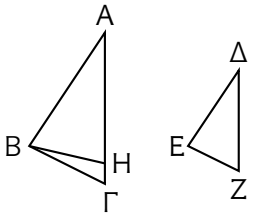
Συνεπώς $\widehat{\Delta Z H} = \widehat{\Delta Z E}$ και $\widehat{\Delta H Z} = \widehat{\Delta E Z}$. Αλλά $\widehat{\Delta Z H} = \widehat{A B \Gamma}$· άρα και $\widehat{A \Gamma B} = \widehat{\Delta Z E}$.

Αλλά έχουμε υποθέσει ότι $\widehat{B A \Gamma} = \widehat{E \Delta Z}$· άρα και η και $\hat{B} = \hat{E}$ (Β1, Π32, σελ. 40). Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισογώνιο προς το τρίγωνο ΔΕΖ.

Άρα αν δυο τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες, θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες απέναντι από τις οποίες βρίσκονται οι ομόλογες πλευρές· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

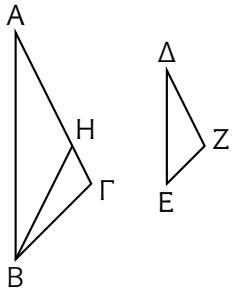
Πρόταση 7 (562) *Αν δυο τρίγωνα έχουν μια απ' τις γωνίες τους ίσες, τις πλευρές που περιέχουν μια άλλη γωνία του πρώτου τριγώνου ανάλογες με τις πλευρές μιας άλλης γωνίας του δεύτερου τριγώνου, και την τρίτη γωνία του πρώτου και του δεύτερου τριγώνου ή και τις δύο μικρότερες από μία ορθή ή και τις δύο όχι μικρότερες από μία ορθή, τότε τα τρίγωνα θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες που είναι περιεχόμενες στις ανάλογες πλευρές.*

Απόδειξη. Έστω δυο τρίγωνα τα ΑΒΓ, ΔΕΖ έχουν μια γωνία ίση προς μια γωνία $\widehat{B A \Gamma} = \widehat{E \Delta Z}$, τις πλευρές που περιέχουν τις γωνίες $\widehat{A B \Gamma}$, $\widehat{\Delta E Z}$, ανάλογες ΑΒ/ΒΓ = ΔΕ/ΕΖ και για αρχή, οξείες τις γωνίες που απέμειναν $\hat{\Gamma}, \hat{Z}$.



Ισχυρίζομαι ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι ισογώνια με $\widehat{A B \Gamma} = \widehat{\Delta E Z}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

Διότι, αν οι γωνίες $\widehat{A B \Gamma}, \widehat{\Delta E Z}$ δεν ήταν ίσες, κάποια από αυτές θα ήταν μεγαλύτερη της άλλης. Έστω $\widehat{A B \Gamma} > \widehat{\Delta E Z}$. Με κορυφή την Β και πλευρά την ΑΒ κατασκευάζουμε γωνία $\widehat{A B H} = \widehat{\Delta E Z}$. Επειδή $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\widehat{A B H} = \widehat{\Delta E Z}$ άρα και οι άλλες δυο γωνίες είναι ίσες $\widehat{A H B} = \widehat{\Delta Z E}$ (Β1, Π32, σελ. 40).



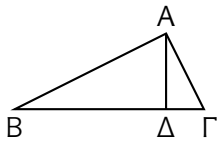
Άρα το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισογώνιο με το τρίγωνο ΔΕΖ, οπότε ΑΒ/ΒΗ = ΔΕ/ΕΖ (Β6, Π4, σελ. 144). Από υπόθεση έχουμε ότι ΑΒ/ΒΓ = ΔΕ/ΕΖ Άρα η ΑΒ έχει τον ίδιο λόγο προς καθεμιά από τις ΒΓ, ΒΗ (Β5, ΠΙ1, σελ. 133). Άρα ΒΓ = ΒΗ (Β5, Π9, σελ. 132). Οπότε και $\hat{\Gamma} = \widehat{B H \Gamma}$ (Β1, Π5, σελ. 24). Η $\hat{\Gamma}$ έχουμε θεωρήσει ότι είναι οξεία, οπότε και η $\widehat{B H \Gamma}$ είναι οξεία. Άρα η εφεξής προς την $\widehat{B H \Gamma}$, η $\widehat{A H B}$ είναι αμβλεία (Β1, ΠΙ3, σελ. 28). Δείξαμε όμως ότι $\widehat{A H B} = \widehat{\Delta Z E}$, άρα και η $\hat{Z}$ αμβλεία. Από υπόθεση όμως η $\hat{Z}$ είναι οξεία, άρα καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα η $\widehat{A B \Gamma}$ δεν είναι άνιση της $\widehat{\Delta E Z}$, οπότε $\widehat{A B \Gamma} = \widehat{\Delta E Z}$. Είναι και $\hat{A} = \hat{\Delta}$, άρα ίσες και οι γωνίες που απέμειναν $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ (Β1, Π32, σελ. 40). Συνεπώς τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι ισογώνια.

Ας πάρουμε τώρα την περίπτωση που οι γωνίες που απέμειναν $\hat{\Gamma}, \hat{Z}$ είναι αμβλείες· Ισχυρίζομαι ότι και τώρα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι ισογώνια.

Αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο και αφού έχει γίνει η ίδια κατασκευή που προαναφέρθηκε, ότι ΒΓ = ΒΗ και $\hat{\Gamma} = \widehat{\text{ΒΗΓ}}$ (ΒΙ, Π5, σελ. 24). Η $\hat{\Gamma}$ δεν είναι οξεία άρα ούτε και η $\widehat{\text{ΒΗΓ}}$. Οπότε το τρίγωνο ΒΗΓ έχει δυο γωνίες αμβλείες κάτι που είναι αδύνατον (ΒΙ, ΠΙ7, σελ. 30). Άρα η $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$ και πάλι δεν είναι άνιση της $\widehat{\Delta\text{ΕΖ}}$, οπότε $\widehat{\text{ΑΒΓ}} = \widehat{\Delta\text{ΕΖ}}$.Είναι και $\hat{\text{Α}} = \hat{\Delta}$, άρα ίσες και οι γωνίες που απέμειναν $\hat{\Gamma} = \hat{\text{Ζ}}$ (ΒΙ, Π32, σελ. 40). Συνεπώς τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι ισογώνια.

Άρα αν δυο τρίγωνα έχουν μια απ' τις γωνίες τους ίσες, τις πλευρές που περιέχουν δυο άλλες γωνίες ανάλογες και τις γωνίες που απέμειναν είτε και τις δυο μικρότερες από μια ορθή είτε και τις δυο όχι μικρότερες από μία ορθή, τότε τα τρίγωνα θα είναι ισογώνια και θα έχουν ίσες τις γωνίες που είναι περιεχόμενες στις ανάλογες πλευρές· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 8 (563) *Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο φέρουμε κάθετη από την κορυφή της ορθής γωνίας προς τη βάση, τα τρίγωνα που σχηματίζονται εκατέρωθεν της καθέτου είναι όμοια και με το αρχικό τρίγωνο και μεταξύ τους.*



Απόδειξη. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με ορθή τη γωνία $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ και ΑΔ η κάθετος που φέρουμε από το Α προς τη ΒΓ· ισχυρίζομαι ότι καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ είναι όμοια προς το ΑΒΓ αλλά και μεταξύ τους.

Έχουμε $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\text{ΑΔΒ}}$ γιατί είναι και οι δυο ορθές, τη γωνία $\hat{\text{Β}}$ κοινή στα δυο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ άρα και οι υπόλοιπες γωνίες θα είναι ίσες $\widehat{\text{ΑΓΒ}} = \widehat{\text{ΒΑΔ}}$ (ΒΙ, Π32, σελ. 40). Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ είναι ισογώνια. Συνεπώς ο λόγος της ΒΓ υποτείνουσας του τριγώνου ΑΒΓ προς τη ΒΑ υποτείνουσα του τριγώνου ΑΒΔ ισούται με το λόγο της ΑΒ που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ στο τριγώνου ΑΒΓ προς τη ΒΔ που βρίσκεται απέναντι από την ίση με τη $\hat{\Gamma}$ γωνία, $\widehat{\text{ΒΑΔ}}$ στο τριγώνου ΑΒΔ ίση με το λόγο της ΑΓ προς την ΑΔ που βρίσκονται απέναντι από την κοινή γωνία $\hat{\text{Β}}$ των δυο τριγώνων

$$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΑ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΔ}}.$$

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ είναι ισογώνια και έχουν τις πλευρές οι οποίες περιέχουν ίσες γωνίες ανάλογες (Π4, σελ. 144)

Συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΑΒΔ.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και προς το τρίγωνο ΑΔΓ είναι όμοιο το ΑΒΓ.

Άρα καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ είναι όμοιο με το ΑΒΓ.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ είναι και μεταξύ τους όμοια.

Επειδή οι ορθές είναι ίσες $\widehat{\text{ΒΔΑ}} = \widehat{\text{ΑΔΓ}}$, αλλά δείξαμε ότι και $\hat{\Gamma} = \widehat{\text{ΒΑΔ}}$ άρα και οι υπόλοιπες γωνίες θα είναι ίσες $\hat{\text{Β}} = \widehat{\Delta\text{ΑΓ}}$ (ΒΙ, Π32, σελ. 40). Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ είναι ισογώνια. Συνεπώς ο λόγος της ΒΔ που

βρίσκεται απέναντι από τη γωνία $\widehat{BA\Delta}$ στο τριγώνου ΑΒΔ προς την ΔΑ που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία $\hat{\Gamma}$στο τριγώνου ΑΔΓ, που είναι ίση με τη $\widehat{BA\Delta}$, ισούται με το λόγο της ΑΔ που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία $\hat{B}$ στο τριγώνου ΑΒΔ προς τη ΔΓπου βρίσκεται απέναντι από τη γωνία $\widehat{\Delta A\Gamma}$ στο τριγώνο ΑΔΓ,που είναι ίση με τη $\hat{B}$, και ακόμη με το λόγο της ΒΑ προς την ΑΓ οι οποίες είναι υποτείνουσες (Π4, σελ. 144):

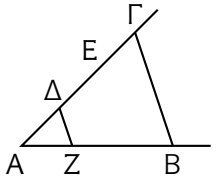
$$\frac{B\Delta}{\Delta A} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{BA}{A\Gamma}.$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι όμοιο με το ΑΔΓ (Ορ1, σελ. 141).

Άρα αν σε ορθογώνιο τρίγωνο φέρουμε κάθετη από την κορυφή της ορθής γωνίας προς τη βάση, τα τρίγωνα που σχηματίζονται εκατέρωθεν της καθέτου είναι όμοια και με το αρχικό τρίγωνο και μεταξύ τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα 9 *Από αυτά είναι φανερό ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο φέρουμε κάθετη από την κορυφή της ορθής γωνίας προς την υποτείνουσα, η κάθετη αυτή είναι μέση ανάλογος των τμημάτων της υποτείνουσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι* [*και ακόμη της βάσης και ενός οποιουδήποτε των τμημάτων, η προς το τμήμα πλευρά είναι μέση ανάλογος* (στμ: δηλαδή ΒΓ/ΑΒ = ΑΒ/ΒΔ και ΒΓ/ΑΓ = ΑΓ/ΔΓ)]. Δ

Πρόταση 9 (564) *Από δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα να αφαιρεθεί ορισμένο μέρος του.*



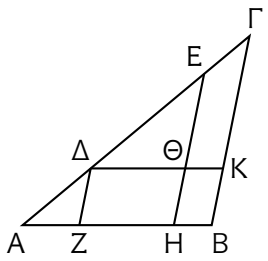
Υλοποίηση: Έστω το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ του οποίου πρέπει να αφαιρεθεί ορισμένο μέρος του.

Ας θεωρήσουμε ότι το ορισμένο μέρος που θα αφαιρεθεί είναι το ένα τρίτο. Από το Α άγεται η ημιευθεία ΑΓ που μαζί με το ΑΒ περιέχουν τυχούσα γωνία· πάνω στην ΑΓ λαμβάνουμε τυχόν σημείο Δ τέτοιο ώστε ΔΕ = ΕΓ = ΑΔ. Στη συνέχεια ενώνουμε το Β με το Γ και φέρουμε παράλληλη από το Δ προς την ΒΓ, την ΔΖ (Β1, Π31, σελ. 39).

Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΓ φέραμε παράλληλη ΖΔ προς μια από τις πλευρές του, την ΒΓ (Π2, σελ. 142) προκύπτει ΓΔ/ΔΑ = ΒΖ/ΖΑ. Η ΓΔ είναι διπλάσια της ΔΑ άρα και η ΒΖ θα είναι διπλάσια της ΖΑ· οπότε η ΒΑ είναι τριπλάσια της ΑΖ.

Άρα από το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ αφαιρέθηκε το ένα τρίτο του, το ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρόταση 10 (565) *Να τμηθεί δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα με τον ίδιο τρόπο που έχει χωριστεί ένα άλλο δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα.*



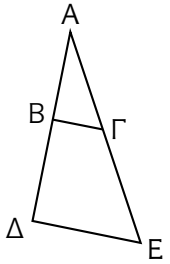
Υλοποίηση: Έστω ΑΒ το ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα και ΑΓ το άλλο δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα που έχει χωριστεί στα σημεία Δ, Ε τοποθετημένα έτσι ώστε να περιέχουν τυχούσα γωνία. Ενώνουμε τα Γ, Β. Από τα Δ, Ε άγονται παράλληλες προς την ΓΒ οι ΔΖ, ΕΗ, ενώ από το Δ άγεται παράλληλη και προς το ΑΒ η ΔΘΚ (Β1, Π31, σελ. 39).

Άρα καθένα από τα ΖΘ, ΘΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΔΘ = ΖΗ, ΘΚ = ΗΒ (Β1, Π34, σελ. 41). Επειδή στο τρίγωνο ΔΚΓ φέραμε παράλληλη την ΘΕ προς μια πλευρά του την ΚΓ προκύπτει ΓΕ/ΕΔ = ΚΘ/ΘΔ (Π2, σελ. 142). Επίσης ΚΘ = ΒΗ και ΘΔ = ΗΖ άρα ΓΕ/ΕΔ = ΒΗ/ΗΖ.

Επειδή πάλι στο τρίγωνο ΑΗΕ φέραμε παράλληλη την ΖΔ προς μια πλευρά του την ΗΕ προκύπτει ΕΔ/ΔΑ = ΗΖ/ΖΑ (Π2, σελ. 142). Δείξαμε ότι ΓΕ = ΕΔ και ΒΗ = ΗΖ άρα ΓΕ/ΕΔ = ΒΗ/ΗΖ και ΕΔ/ΔΑ = ΗΖ/ΖΑ.

Άρα το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ διαιρέθηκε με τον ίδιο τρόπο που έχει χωριστεί το άλλο δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα το ΑΓ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 11 (565) *Να βρεθεί η τρίτη ανάλογος δυο δοσμένων ευθύγραμμων τμημάτων.*



Υλοποίηση: Έστω ΒΑ, ΑΓ δυο δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα τοποθετημένα έτσι ώστε να περιέχουν τυχούσα γωνία. Πρέπει να βρεθεί τρίτη ανάλογος των ΒΑ, ΑΓ.

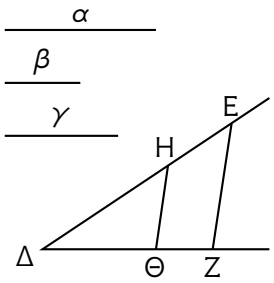
Προεκτείνουμε τις ΒΑ, ΑΓ μέχρι τα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα και λαμβάνουμε ΑΓ = ΒΔ. Ενώνουμε το Β με το Γ και από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ την ΔΕ (Β1, Π31, σελ. 39).

Επειδή λοιπόν σε τρίγωνο ΑΔΕ φέραμε παράλληλη τη ΒΓ προς μια πλευρά του, την ΔΕ, προκύπτει ΑΒ/ΒΔ = ΑΓ/ΓΕ (Π2, σελ. 142). Έχουμε και ΒΔ = ΑΓ. Συνεπώς ΑΒ/ΑΓ = ΑΓ/ΓΕ.

Άρα βρέθηκε η ΓΕ, η τρίτη ανάλογος δυο δοσμένων ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 12 (565) *Να βρεθεί η τέταρτη ανάλογος τριών δοσμένων ευθύγραμμων τμημάτων.*

Υλοποίηση: Έστω α, β, γ τρία δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα. Πρέπει να βρεθεί η τέταρτη ανάλογος των α, β, γ.

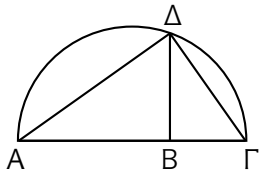


Θεωρούμε τα ΔΕ, ΔΖ δυο δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα, τοποθετημένα έτσι ώστε να περιέχουν τυχούσα γωνία την $\widehat{ΕΔΖ}$. Πάνω στα ευθύγραμμα αυτά τμήματα παίρνουμε $ΔΗ = \alpha, ΗΕ = \beta, ΔΘ = \gamma$ και ενώνουμε το Η με το Θ. Στη συνέχεια φέρνουμε από το Ε παράλληλη προς την ΗΘ την ΕΖ (Β1, Π31, σελ. 39).

Επειδή λοιπόν στο τρίγωνο ΔΕΖ η ΗΘ είναι παράλληλη προς μια πλευρά του, την ΕΖ, προκύπτει $ΔΗ/ΗΕ = ΔΘ/ΘΖ$. Έχουμε και $ΔΗ = \alpha$, $ΗΕ = \beta$, $ΔΘ = \gamma$. Συνεπώς $\alpha/\beta = \gamma/ΘΖ$.

Άρα βρεθηκε η ΘΖ η τέταρτη ανάλογος τριών δοσμένων ευθύγραμμων τμημάτων των α, β, γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρόταση 13 (566) *Να βρεθεί η μέση ανάλογος δύο δοσμένων ευθύγραμμων τμημάτων*. (στμ: γεωμετρικός μέσος.)



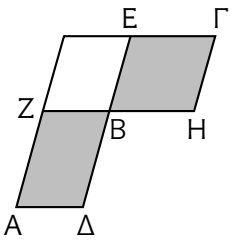
Υλοποίηση: Έστω ΑΒ, ΒΓ τα δυο δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα. Πρέπει να βρεθεί η μέση ανάλογος των ΑΒ, ΒΓ.

Παίρνουμε ΑΒ, ΒΓ επί της ίδιας ευθείας και γράφουμε ημικύκλιο ΑΔΓ με διάμετρο ΑΓ. Από το σημείο Β φέρουμε κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ την ΒΔ και ενώνουμε τα ΑΔ και ΔΓ.

Επειδή η γωνία $\widehat{ΑΔΓ}$ βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή (Β3, Π31, σελ. 102). Και επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε φέρει τη ΔΒ από την ορθή γωνία κάθετη στη βάση, η ΔΒ είναι μέση ανάλογος των τμημάτων της βάσης ΑΒ, ΒΓ (Πόρισμα, Β6, Π8, σελ. 148).

Άρα βρέθηκε η μέση ανάλογος ΔΒ δυο δοσμένων ευθυγράμμων τμημάτων των ΑΒ, ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρόταση 14 (566) *Σε ισεμβαδικά και ισογώνια παραλληλόγραμμα, οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες· και τα ισογώνια παραλληλόγραμμα, των οποίων οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, είναι ισεμβαδικά*.



Απόδειξη. Έστω τα ισεμβαδικά και ισογώνια παραλληλόγραμμα ΑΒ, ΒΓ που έχουν ίσες τις γωνίες στο Β και ας πάρουμε τα ΔΒ, ΒΕ επί της ίδιας ευθείας. Άρα θα είναι στην ίδια ευθεία και τα ΖΒ, ΒΗ. Ισχυρίζομαι ότι στα ΑΒ, ΒΓ οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες δηλαδή $ΔΒ/ΒΕ = ΗΒ/ΒΖ$.

Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΖΕ. Επειδή λοιπόν $|ΑΒ| = |ΒΓ|$ και ΖΕ ένα άλλο παραλληλόγραμμο, προκύπτει $|ΑΒ|/|ΖΕ| = |ΒΓ|/|ΖΕ|$ (Β5, Π7, σελ. 131). Αλλά $|ΑΒ|/|ΖΕ| = ΔΒ/ΒΕ$ και $|ΒΓ|/|ΖΕ| = ΗΒ/ΒΖ$ (Π1, σελ. 142).

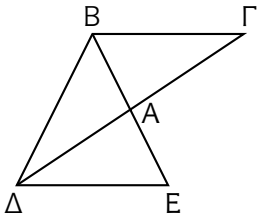
Άρα στα παραλληλόγραμμα ΑΒ, ΒΓ οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες.

Έστω τώρα ότι ΔΒ/ΒΕ = ΗΒ/ΒΖ Ισχυρίζομαι ότι το παραλληλόγραμμο ΑΒ είναι ισεμβαδικό του ΒΓ.

Επειδή ΔΒ/ΒΕ = ΗΒ/ΒΖ ενώ ΔΒ/ΒΕ = |ΑΒ|/|ΖΕ| και ΗΒ/ΒΖ = |ΒΓ|/|ΖΕ| (ΠΙ, σελ. 142), συμπεραίνουμε ότι |ΑΒ|/|ΖΕ| = |ΒΓ|/|ΖΕ| (Β5, ΠΙ, σελ. 128). Συνεπώς |ΑΒ| = |ΒΓ| (Β5, Π9, σελ. 132).

Άρα σε ισεμβαδικά και ισογώνια παραλληλόγραμμα, οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες· και τα ισογώνια παραλληλόγραμμα, των οποίων οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, είναι ισεμβαδικά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 15 (567) *Αν δυο τρίγωνα είναι ισεμβαδικά και μια γωνία του ενός είναι ίση με μια γωνία του άλλου, τότε οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες· και αν τα τρίγωνα τα οποία έχουν μια προς μια γωνία ίση και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες αντιστρόφως ανάλογες, τότε είναι ισεμβαδικά.*



Απόδειξη. Έστω ΑΒΓ, ΑΔΕ τα τρίγωνα με ίσο εμβαδό |ΑΒΓ| = |ΑΔΕ| και $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\text{ΔΑΕ}}$. Ισχυρίζομαι ότι οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΕ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες δηλαδή ΓΑ/ΑΔ = ΕΑ/ΑΒ.

Τοποθετούμε τις πλευρές ΓΑ, ΑΔ έτσι ώστε να βρίσκονται στην ίδια ευθεία, οπότε θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία και οι ΕΑ, ΑΒ. Ενώνουμε τη ΒΔ.

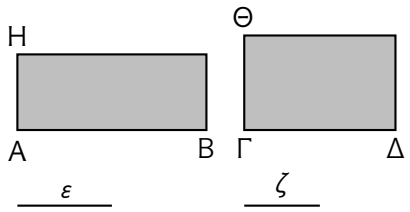
Επειδή |ΑΒΓ| = |ΑΔΕ| και το ΒΑΔ είναι κι αυτό ένα τρίγωνο θα ισχύει |ΓΑΒ|/|ΒΑΔ| = |ΕΑΔ|/|ΒΑΔ| (Β5, Π7, σελ. 131). Αλλά |ΓΑΒ|/|ΒΑΔ| = ΓΑ/ΑΔ και |ΕΑΔ|/|ΒΑΔ| = ΕΑ/ΑΒ άρα ΓΑ/ΑΔ = ΕΑ/ΑΒ Οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΕ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες.

Αλλά τώρα ας θεωρήσουμε αντιστρόφως ανάλογες τις πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΕ και έστω ΓΑ/ΑΔ = ΕΑ/ΑΒ. Ισχυρίζομαι ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ έχουν ίσο εμβαδό.

Ας φέρουμε πάλι τη ΒΔ και επειδή ΓΑ/ΑΔ = ΕΑ/ΑΒ και ΓΑ/ΑΔ = |ΓΑΒ|/|ΒΑΔ|, ΕΑ/ΑΒ = |ΕΑΔ|/|ΒΑΔ| (ΠΙ, σελ. 142) άρα |ΑΒΓ|/|ΒΑΔ| = |ΕΑΔ|/|ΒΑΔ|. Οπότε καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΕΑΔ έχει τον ίδιο λόγο προς το ΒΑΔ. Συνεπώς |ΑΒΓ| = |ΑΔΕ| (Β5, Π9, σελ. 132).

Άρα αν δυο τρίγωνα είναι ισεμβαδικά και μια γωνία του ενός είναι ίση με μια γωνία του άλλου, τότε οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες· και αν τα τρίγωνα τα οποία έχουν μια προς μια γωνία ίση και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες αντιστρόφως ανάλογες, τότε είναι ισεμβαδικά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 16 (χιαστί γινόμενο) (568) *Αν τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα, το ορθογώνιο με πλευρές τους άκρους όρους της αναλογίας είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο με πλευρές τους μέσους όρους· και αν ένα ορθογώνιο με πλευρές τους άκρους όρους μιας αναλογίας είναι ισεμβαδικό με ορθογώνιο που έχει πλευρές τους μέσους όρους της αναλογίας, τα τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα που απότελούν τις πλευρές των ορθογωνίων θα είναι ανάλογα.*



Απόδειξη. Έστω τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ε, ζ ανάλογα

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

Ισχυρίζομαι ότι το ορθογώνιο με πλευρές ΑΒ, ζ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο που έχει πλευρές ΓΔ, ε.

Στο άκρο Α του ΑΒ φέρνουμε κάθετη την ΑΗ έτσι ώστε ΑΗ $= \zeta$ και στο άκρο Γ του Α φέρνουμε κάθετη την ΓΘ έτσι ώστε ΓΘ $= \varepsilon$. Στη συνέχεια σχηματίζουμε τα παραλληλόγραμμα ΒΗ, ΔΘ. Επειδή ΑΒ/ΓΔ $= \varepsilon/\zeta$ και ΑΗ $= \zeta$, ΓΘ $= \varepsilon$ άρα ΑΒ/ΓΔ $=$ ΓΘ/ΑΗ. Οπότε οι πλευρές των παραλληλογράμμων ΒΗ, ΔΘ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες. Τα ισογώνια παραλληλόγραμμα των οποίων οι πλευρές που περιέχουν ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες, είναι ισεμβαδικά (Π14, σελ. 151). Άρα το παραλληλόγραμμο ΒΗ έχει το ίδιο εμβαδό με το παραλληλόγραμμο ΔΘ.

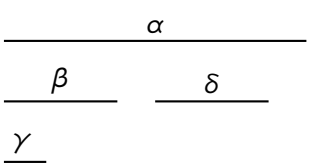
Το ΒΗ είναι το παραλληλόγραμμο με πλευρές τις ΑΒ, ζ αφού ΑΗ $= \zeta$ και το ΔΘ είναι το παραλληλόγραμμο με πλευρές τις ΓΔ, ε αφού ΓΘ $= \varepsilon$. Άρα το ορθογώνιο με πλευρές ΑΒ, ζ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο που έχει πλευρές ΓΔ, ε.

Αλλά τώρα ας θεωρήσουμε ότι το ορθογώνιο με πλευρές ΑΒ, ζ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο που έχει πλευρές ΓΔ, ε. Ισχυρίζομαι ότι τα τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα που αποτελούν τις πλευρές των ορθογωνίων θα είναι ανάλογα έτσι ώστε ΑΒ/ΓΔ $= \varepsilon/\zeta$ Αφού γίνει η ίδια κατασκευή, προκύπτει ότι το ορθογώνιο με πλευρές ΑΒ, ζ, δηλαδή το ΒΗ αφού ΑΗ $= \zeta$, είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο που έχει πλευρές ΓΔ, ε, δηλαδή το ΔΘ αφού ΓΘ $= \varepsilon$. Συνεπώς το ΒΗ είναι ισεμβαδικό με το ΔΘ. Είναι και ισογώνια. Γνωρίζουμε ότι οι πλευρές των ισογώνιων και ισεμβαδικών παραλληλογράμμων που περιέχουν ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες (Π14, σελ. 151). Άρα ΑΒ/ΓΔ $=$ ΓΘ/ΑΗ Όμως ΑΗ $= \zeta$, ΓΘ $= \varepsilon$, οπότε ΑΒ/ΓΔ $= \varepsilon/\zeta$

Άρα αν τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα, το ορθογώνιο με πλευρές τους άκρους όρους της αναλογίας είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο με πλευρές τους μέσους όρους· και αν ένα ορθογώνιο με πλευρές τους άκρους

όρους μιας αναλογίας είναι ισεμβαδικό με ορθογώνιο που έχει πλευρές τους μέσους όρους της αναλογίας, τα τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα που αποτελούν τις πλευρές των ορθογωνίων θα είναι ανάλογα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 17 (569) *Αν τρία ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα, το ορθογώνιο με πλευρές τους άκρους όρους της αναλογίας είναι ισεμβαδικό προς το τετράγωνο με πλευρά τον μεσαίο όρο· και αν ενα ορθογώνιο με πλευρές τους άκρους όρους μιας τριάδας είναι ισεμβαδικό προς τετράγωνο με πλευρά τον μεσαίο όρο τότε τα τρία ευθύγραμμα τμήματα που αποτελούν τις πλευρές των σχημάτων είναι ανάλογα.*



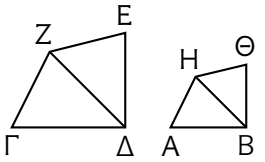
Απόδειξη. Έστω α, β, γ τρία ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα με $\alpha/\beta = \beta/\gamma$. Ισχυρίζομαι ότι το ορθογώνιο με πλευρές α, γ είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο με πλευρά β.

Έστω ευθύγραμμα τμήματα $\delta = \beta$. Επειδή $\alpha/\beta = \beta/\gamma$ τότε και $\alpha/\beta = \delta/\gamma$ Αν τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα το ορθογώνιο με πλευρές τους άκρους όρους της αναλογίας είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο με πλευρές τους μέσους όρους (Π16, σελ. 153). Άρα το ορθογώνιο με πλευρές α, γ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο με πλευρές β, δ, όμως το τελευταίο είναι το τετράγωνο με πλευρά β αφού $\beta = \delta$. Άρα το ορθογώνιο με πλευρές α, γ είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο με πλευρά β.

Τώρα έστω το ορθογώνιο με πλευρές α, γ ισεμβαδικό με το τετράγωνο με πλευρά β. Ισχυρίζομαι ότι $\alpha/\beta = \beta/\gamma$ Αφού γίνει η ίδια κατασκευή φαίνεται ότι επειδή το ορθογώνιο με πλευρές α, γ είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο με πλευρά β αλλά το τετράγωνο του β είναι το ορθογώνιο με πλευρές β, δ αφού $\beta = \delta$ άρα το ορθογώνιο των α, γ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο των β, δ. Αν το ορθογώνιο με πλευρές τους άκρους όρους μιας αναλογίας είναι ισεμβαδικό προς το ορθογώνιο με πλευρές τους μέσους όρους τότε τα τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα (Π16, σελ. 153). Άρα $\alpha/\beta = \delta/\gamma$ όμως $\beta = \delta$ οπότε $\alpha/\beta = \beta/\gamma$.

Άρα αν τρία ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα, το ορθογώνιο με πλευρές τους άκρους όρους της αναλογίας είναι ισεμβαδικό προς το τετράγωνο με πλευρά τον μεσαίο όρο· και αν ένα ορθογώνιο με πλευρές τους άκρους όρους μιας τριάδας είναι ισεμβαδικό προς τετράγωνο με πλευρά τον μεσαίο όρο τότε τα τρία ευθύγραμμα τμήματα που αποτελούν τις πλευρές των σχημάτων είναι ανάλογα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 18 (569) *Να κατασκευαστεί ευθύγραμμο σχήμα με πλευρά δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα που να είναι όμοιο και όμοια τοποθετημένο με δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα.*



Υλοποίηση: Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ευθύγραμμο τετράπλευρο ΓΕ . Από το ΑΒ πρέπει να κατασκευαστεί ευθύγραμμο σχήμα όμοιο και όμοια τοποθετημένο με το ΓΕ. Φέρνουμε τη ΔΖ και από τα άκρα Α, Β του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ κατασκευάζουμε γωνία $\widehat{HAB} = \hat{\Gamma}$ και $\widehat{ABH} = \widehat{\Gamma\Delta Z}$ (Β1, Π23, σελ. 34). Άρα και $\widehat{\Gamma Z\Delta} = \widehat{AHB}$ (Β1, Π32, σελ. 40) οπότε το τρίγωνο ΖΓΔ είναι ισογώνιο προς το ΗΑΒ. Άρα ΖΔ/ΗΒ = ΖΓ/ΗΑ = ΓΔ/ΑΒ (Π4, σελ. 144).

Ας κατασκευασθεί από τα άκρα Β, Η του ΒΗ γωνία $\widehat{BH\Theta} = \widehat{\Delta ZE}$ και $\widehat{HB\Theta} = \widehat{Z\Delta E}$ (Β1, Π23, σελ. 34). Άρα και η τρίτη γωνία $\hat{\Theta} = \hat{E}$ (Β1, Π32, σελ. 40) οπότε το τρίγωνο ΖΔΕ είναι ισογώνιο προς το ΗΒΘ. Άρα ΖΔ/ΗΒ = ΖΕ/ΗΘ = ΕΔ/ΘΒ (Π4, σελ. 144).

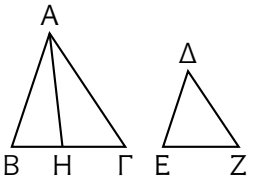
Δείξαμε ότι και ΖΔ/ΗΒ = ΖΓ/ΗΑ = ΓΔ/ΑΒ άρα και

$$ZΓ/AH = ΓΔ/AB = ZE/HΘ = EΔ/ΘB.$$

Και επειδή $\widehat{\Gamma Z\Delta} = \widehat{AHB}$, $\widehat{\Delta ZE} = \widehat{BH\Theta}$ άρα $\widehat{\Gamma ZE} = \widehat{AH\Theta}$. Για τους ίδιους λόγους $\widehat{\Gamma\Delta E} = \widehat{AB\Theta}$. Έχουμε και $\hat{\Gamma} = \hat{A}$, $\hat{\Theta} = \hat{E}$. Άρα το ΑΘ είναι ισογώνιο προς το ΓΕ, έχουν και ανάλογες τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες. Άρα το ευθύγραμμο σχήμα ΑΘ είναι όμοιο προς το ευθύγραμμο σχήμα ΓΕ.

Κατασκευάστηκε ευθύγραμμο σχήμα με πλευρά δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα που να είναι όμοιο και όμοια τοποθετημένο με δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 19 (570) *Ο λόγος των εμβαδών δυο όμοιων τριγώνων ισούται με τον λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους.*



Απόδειξη. Έστω ΑΒΓ, ΔΕΖ δύο όμοια τρίγωνα με $\hat{B} = \hat{E}$ και

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$$

ώστε η ΒΓ να είναι ομόλογη της ΕΖ. Ισχυρίζομαι ότι $|AB\Gamma|/|\Delta EZ| = B\Gamma^2/EZ^2$.

Ας λάβουμε την ΒΗ τρίτη ανάλογο των ΒΓ, ΕΖ (Π11, σελ. 150) ώστε ΒΓ/ΕΖ = ΕΖ/ΒΗ και φέρνουμε την ΑΗ.

Επειδή ΑΒ/ΒΓ = ΔΕ/ΕΖ εναλλάξ προκύπτει ΑΒ/ΔΕ = ΒΓ/ΕΖ (Β5, Π16, σελ. 134), αλλά ΒΓ/ΕΖ = ΕΖ/ΒΗ άρα ΑΒ/ΔΕ = ΕΖ/ΒΗ.

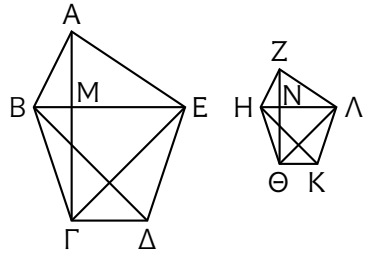
Οπότε οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΗ, ΔΕΖ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες. Τα τρίγωνα που το ένα έχει μια γωνία ίση με μια γωνία του άλλου και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες αντιστρόφως ανάλογες είναι ισεμβαδικά (Π15, σελ. 152), οπότε |ΑΒΗ| = |ΔΕΖ|. Επειδή ΒΓ/ΕΖ = ΕΖ/ΒΗ αλλά και αν τρία ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα το πρώτο προς το τρίτο έχει διπλάσιο λόγο του πρώτου προς

το δεύτερο (Β5, Ορ9, σελ. 126) οπότε $\text{ΒΓ}/\text{ΒΗ} = \text{ΒΓ}^2/\text{ΕΖ}^2$ και $\text{ΒΓ}/\text{ΒΗ} = |\text{ΑΒΓ}|/|\text{ΑΒΗ}|$ (Π1, σελ. 142) άρα και $|\text{ΑΒΓ}|/|\text{ΑΒΗ}| = \text{ΒΓ}^2/\text{ΕΖ}^2$. Είναι και $|\text{ΑΒΗ}| = |\Delta\text{ΕΖ}|$, άρα και $|\text{ΑΒΓ}|/|\Delta\text{ΕΖ}| = \text{ΒΓ}^2/\text{ΕΖ}^2$.

Άρα ο λόγος των εμβαδών δυο όμοιων τριγώνων ισούται με τον λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα 10 *Προκύπτει ότι αν τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ είναι ανάλογα, ο λόγος του πρώτου προς το τρίτο ισούται με το λόγο των εμβαδών των όμοιων πολυγώνων με πλευρές το πρώτο και δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα.* Δ

Πρόταση 20 (571) *Τα όμοια πολύγωνα διαιρούνται σε ίσα στο πλήθος όμοια τρίγωνα τα οποία είναι ομόλογα ως προς όλα και ο λόγος των εμβαδών των πολυγώνων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους.*



Απόδειξη. Έστω τα όμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ και έστω η πλευρά ΑΒ ομόλογη προς την ΖΗ. Ισχυρίζομαι ότι τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ διαιρούνται σε όμοια τρίγωνα τα οποία είναι και ίσα στον πλήθος και ομόλογα προς όλα και ο λόγος των εμβαδών των πολυγώνων ΑΒΓΔΕ προς ΖΗΘΚΛ ισούται με το λόγο του τετραγώνου της ΑΒ προς το τετράγωνο της ΖΗ

Φέρνουμε τις ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ. Επειδή τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ είναι όμοια έχουμε $\widehat{\text{ΒΑΕ}} = \widehat{\text{ΗΖΛ}}$ (Ορ1, σελ. 141). Και $\text{ΒΑ}/\text{ΑΕ} = \text{ΗΖ}/\text{ΖΛ}$ (Ορ1, σελ. 141). Επειδή λοιπόν υπάρχουν δύο τρίγωνα τα ΑΒΕ, ΖΗΛ που έχουν μια γωνία ίση και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες, τα τρίγωνα αυτά θα είναι ισογώνια (Π6, σελ. 146) και όμοια (Π4, σελ. 144 και Ορ1, σελ. 141). Οπότε $\widehat{\text{ΑΒΕ}} = \widehat{\text{ΖΗΛ}}$. Όμως από την ομοιότητα των πολυγώνων $\widehat{\text{ΑΒΓ}} = \widehat{\text{ΖΗΘ}}$, άρα και οι γωνίες $\widehat{\text{ΕΒΓ}} = \widehat{\text{ΛΗΘ}}$ ως διαφορά ίσων γωνιών.

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΕ, ΖΗΛ έχουμε $\text{ΕΒ}/\text{ΒΑ} = \text{ΛΗ}/\text{ΗΖ}$, ενώ από την ομοιότητα των πολυγώνων έχουμε $\text{ΑΒ}/\text{ΒΓ} = \text{ΖΗ}/\text{ΗΘ}$, άρα δι' ίσου (Β5, Π22, σελ. 137 και Ορ17, σελ. 127) προκύπτει $\text{ΕΒ}/\text{ΒΓ} = \text{ΛΗ}/\text{ΗΘ}$ και οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες $\widehat{\text{ΕΒΓ}}, \widehat{\text{ΛΗΘ}}$ είναι ανάλογες. Άρα τα τρίγωνα ΕΒΓ, ΛΗΘ θα είναι ισογώνια (Π6, σελ. 146) και όμοια (Π5, σελ. 145 και Ορ1, σελ. 141). Όμοια προκύπτει ότι και τα τρίγωνα ΕΓΔ, ΛΘΚ είναι όμοια. Άρα τα όμοια πολύγωνα διαιρέθηκαν σε ίσα στο πλήθος όμοια τρίγωνα.

Ισχυρίζομαι ότι τα τρίγωνα είναι ομόλογα ως προς όλα, δηλαδή έχουν εμβαδά ανάλογα

$$|\text{ΑΒΕ}|/|\text{ΖΗΛ}| = |\text{ΕΒΓ}|/|\text{ΛΗΘ}| = |\text{ΕΓΔ}|/|\text{ΛΘΚ}|$$

και

$$|\text{ABΓΔE}|/|\text{ZHΘKΛ}| = \text{AB}^2/\text{ZH}^2.$$

Φέρνουμε τις ΑΓ, ΖΘ. Από την ομοιότητα πολυγώνων έχουμε $\widehat{\text{ABΓ}} = \widehat{\text{ZHΘ}}$ και ΑΒ/ΒΓ = ΖΗ/ΗΘ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΖΗΘ θα είναι ισογώνια (Π6, σελ. 146), άρα $\widehat{\text{BAΓ}} = \widehat{\text{HZΘ}}$ και $\widehat{\text{BΓA}} = \widehat{\text{HΘZ}}$. Και επειδή $\widehat{\text{BAM}} = \widehat{\text{HZN}}$ και $\widehat{\text{ABM}} = \widehat{\text{ZHN}}$ θα είναι και $\widehat{\text{AMB}} = \widehat{\text{ZNH}}$ (Β1, Π32, σελ. 40) άρα τα τρίγωνα ΑΒΜ, ΖΗΝ θα είναι ισογώνια. Όμοια αποδεικνύεται ότι και τα τρίγωνα ΒΜΓ, ΗΝΘ είναι ισογώνια οπότε ΑΜ/ΜΒ = ΖΝ/ΝΗ και ΒΜ/ΜΓ = ΗΝ/ΝΘ (Β4, Π4, σελ. 113) ώστε και δι' ίσου προκύπτει ΑΜ/ΜΓ = ΖΝ/ΝΘ (Β5, Π22, σελ. 137 και Ορ17, σελ. 127).

Αλλά ΑΜ/ΜΓ = |ΑΒΜ|/|ΜΒΓ| = |ΑΜΕ|/|ΕΜΓ| γιατί ο λόγος τους είναι ίσος με τον λόγο των βάσεών τους. Οπότε ο λόγος αυτός είναι ίσος με το λόγο του αθροίσματος των αριθμητών προς το άθροισμα των παρονομαστών.

$$\frac{|\text{ABM}|}{|\text{MBΓ}|} = \frac{|\text{AME}|}{|\text{EMΓ}|} = \frac{|\text{ABM}| + |\text{AME}|}{|\text{MBΓ}| + |\text{EMΓ}|} = \frac{|\text{ABE}|}{|\text{ΓBE}|}$$

(Β5, Π12, σελ. 133). Άρα |ΑΒΜ|/|ΜΒΓ| = ΑΜ/ΜΓ = |ΑΒΕ|/|ΓΒΕ|.

Όμοια προκύπτει ότι ΖΝ/ΝΘ = |ΖΗΛ|/|ΗΛΘ|

$$\text{AM}/\text{MΓ} = \text{ZN}/\text{NΘ} = |\text{ABE}|/|\text{BEΓ}| = |\text{ZHΛ}|/|\text{HΛΘ}|$$

και εναλλάξ

$$|\text{ABE}|/|\text{BEΓ}| = |\text{ZHΛ}|/|\text{HΛΘ}| = |\text{BEΓ}|/|\text{HΛΘ}|$$

(Π16, σελ. 153).

Όμοια αποδεικνύεται, αφού φέρουμε τις ΒΔ, ΗΚ ότι |ΒΕΓ|/|ΛΗΘ| = |ΕΓΔ|/|ΛΘΚ| οπότε έχουμε

$$\frac{|\text{ABE}|}{|\text{ZHΛ}|} = \frac{|\text{EBΓ}|}{|\text{ΛHΘ}|} = \frac{|\text{EΓΔ}|}{|\text{ΛΘK}|} = \frac{|\text{ABE}| + |\text{EBΓ}| + |\text{EΓΔ}|}{|\text{ZHΛ}| + |\text{ΛHΘ}| + |\text{ΛΘK}|} = \frac{|\text{ABΓΔE}|}{|\text{ZHΘKΛ}|}$$

(Β5, Π12, σελ. 133). Συνεπώς |ΑΒΕ|/|ΖΗΛ| = |ΑΒΓΔΕ|/|ΖΗΘΚΛ|. Αλλά |ΑΒΕ|/|ΖΗΛ| = AB^2/ZH^2 γιατί ο λόγος των εμβαδών δυο όμοιων τριγώνων ισούται με τον λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους (Π19, σελ. 155). Προκύπτει λοιπόν ότι |ΑΒΓΔΕ|/|ΖΗΘΚΛ| = AB^2/ZH^2.

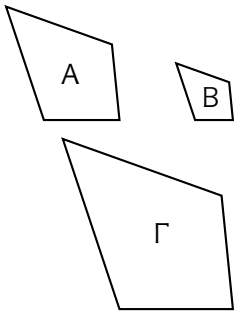
Άρα τα όμοια πολύγωνα διαιρούνται σε ίσα στο πλήθος όμοια τρίγωνα τα οποία είναι ομόλογα ως προς όλα και ο λόγος των εμβαδών των πολυγώνων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους· όπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα 11 *Όμοια αποδεικνύεται στην περίπτωση των όμοιων τετράπλευρων ότι ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους. Το δείξαμε και για τα τρίγωνα οπότε συμπεραίνουμε ότι ο λόγος των εμβαδών όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους· όπερ ἔδει δεῖξαι.*

Πόρισμα 12 *Αν θεωρήσουμε το ευθύγραμμο τμήμα ξ ως τρίτη ανάλογο των* AB, ZH *τότε* $BA/\xi = AB^2/ZH^2$.

Επίσης ο λόγος εμβαδών πολυγώνων ή ο λόγος εμβαδών τετράπλευρων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους δηλαδή AB/ZH. *Αποδείχθηκε και για τρίγωνα, οπότε φαίνεται ότι γενικά αν τρία ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα, τότε ο λόγος του πρώτου προς το τρίτο θα ισούται με το λόγο των εμβαδών των σχημάτων που αναγράφονται από το πρώτο και δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα και είναι όμοια και ομοίως αναγραφόμενα· όπερ ἔδει δεῖξαι.* Δ

Πρόταση 21 (573) *Σχήματα που είναι όμοια με το ίδιο ευθύγραμμο σχήμα είναι και μεταξύ τους όμοια.*



Απόδειξη. Έστω ότι καθένα από τα ευθύγραμμα σχήματα Α, Β είναι όμοιο προς το Γ. Ισχυρίζομαι ότι και το Α είναι όμοιο προς το Β

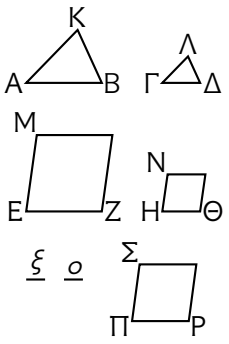
Αφού το ευθύγραμμο σχήμα Α είναι όμοιο προς το Γ θα είναι και ισογώνιο προς αυτό και θα έχουν τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες (Ορ1, σελ. 141). Επίσης αφού το ευθύγραμμο σχήμα Β είναι όμοιο προς το Γ θα είναι και ισογώνιο προς αυτό και θα έχουν τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες (Ορ1, σελ. 141). Άρα καθένα από τα Α, Β είναι ισογώνιο προς το Γ και έχει τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες [ώστε και το Α είναι ισογώνιο προς το Β και έχει τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες].

Άρα το Α είναι όμοιο προς το Β· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 22 (573) *Αν τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα τότε τα εμβαδά των όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων που έχουν κατασκευαστεί ομοίως από αυτά είναι ανάλογα· και αν τα εμβαδά ομοίων ευθύγραμμων σχημάτων τα οποία έχουν κατασκευαστεί ομοίως από τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα τότε και τα ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα.* (στμ: κατασκευάζουμε τα τέσσαρα όμοια ευθύγραμμα σχήματα χρησιμοποιώντας για κάθε σχήμα ένα μόνο ευθύγραμμο τμήμα για πλευρά του).

Απόδειξη. Έστω AB, ΓΔ, EZ, HΘ τέσσαρα ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα με $AB/\Gamma\Delta = EZ/H\Theta$ και ας κατασκευάσουμε από τα AB, ΓΔ τα όμοια και ομοίως τοποθετημένα τρίγωνα ΚΑΒ, ΛΓΔ ενώ από τα EZ, HΘ κατασκευάζουμε τα όμοια και ομοίως τοποθετημένα τετράπλευρα MZ, NΘ. Ισχυρίζομαι ότι $|KAB|/|\Lambda\Gamma\Delta| = |MZ|/|N\Theta|$.

Ας θεωρήσουμε το ευθύγραμμο τμήμα ξ ως τρίτη ανάλογο των AB, ΓΔ και το *ο* τρίτη ανάλογος των EZ, HΘ (Π11, σελ. 150) $AB/\Gamma\Delta = \Gamma\Delta/\xi$ και $EZ/H\Theta = H\Theta/o$.



Επειδή ΑΒ/ΓΔ = ΕΖ/ΗΘ και ΓΔ/ξ = ΗΘ/ο προκύπτει δι' ίσου ΑΒ/ξ = ΕΖ/ο (Β5, Π22, σελ. 137 και Ορ17, σελ. 127). Αλλά ΑΒ/ξ = |ΚΑΒ|/|ΛΓΔ| και ΕΖ/ο = |ΜΖ|/|ΝΘ| (Πόρισμα, Π19, σελ. 155), άρα |ΚΑΒ|/|ΛΓΔ| = |ΜΖ|/|ΝΘ|.

Αλλά τώρα έστω |ΚΑΒ|/|ΛΓΔ| = |ΜΖ|/|ΝΘ|. Ισχυρίζομαι ότι ΑΒ/ΓΔ = ΕΖ/ΗΘ.

Γιατί αν δεν ισχύει ότι ΑΒ/ΓΔ = ΕΖ/ΗΘ θα υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα ΠΡ τέτοιο ώστε ΑΒ/ΓΔ = ΕΖ/ΠΡ (Π12, σελ. 150). Ας κατασκευαστεί ένα ευθύγραμμο τετράπλευρο το ΣΡ με πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα ΠΡ που να είναι όμοιο και όμοια τοποθετημένο προς καθένα από τα (ΜΖ, ΝΘ) (Π18, σελ. 154 και Π19, σελ. 155).

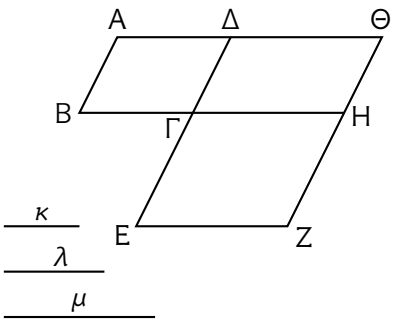
Επειδή ΑΒ/ΓΔ = ΕΖ/ΠΡ και έχουν κατασκευαστεί από τα ΑΒ, ΓΔ τα όμοια και ομοίως τοποθετημένα τρίγωνα ΚΑΒ, ΛΓΔ ενώ από τα ΕΖ, ΠΡ έχουν κατασκευαστεί τα όμοια και ομοίως τοποθετημένα τετράπλευρα ΜΖ, ΣΡ. Άρα |ΚΑΒ|/|ΛΓΔ| = |ΜΖ|/|ΣΡ| (πρώτο μέρος της Πρότασης). Από υπόθεση |ΚΑΒ|/|ΛΓΔ| = |ΜΖ|/|ΝΘ|, οπότε |ΜΖ|/|ΣΡ| = |ΜΖ|/|ΝΘ|. Συνεπώς το τετράπλευρο ΜΖ έχει τον ίδιο λόγο προς καθένα από τα ΝΘ, ΣΡ που σημαίνει |ΝΘ| = |ΣΡ| (Β5, Π9, σελ. 132). Επειδή το τετράπλευρο ΣΡ είναι όμοιο και ομοίως τοποθετημένο προς το τετράπλευρο ΝΘ, άρα ΗΘ = ΠΡ. Και επειδή ΑΒ/ΓΔ = ΕΖ/ΠΡ προκύπτει ΠΡ = ΗΘ οπότε ΑΒ/ΓΔ = ΕΖ/ΗΘ.

Άρα αν τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα τότε τα εμβαδά των όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων που έχουν κατασκευαστεί ομοίως από αυτά είναι ανάλογα· και αν τα εμβαδά ομοίων ευθύγραμμων σχημάτων τα οποία έχουν κατασκευαστεί ομοίως από τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα τότε και τα ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα· όπερ έδει δεῖξαι.

Λήμμα 1 *Ότι αν ευθύγραμμα σχήματα είναι ίσα και όμοια, οι ομόλογες πλευρές τους είναι ίσες αποδεικνύεται ως εξής.*

Έστω ίσα και όμοια τα τετράπλευρα ΝΘ, ΣΡ *και έστω* ΘΗ/ΗΝ = ΡΠ/ΠΣ. *Ισχυρίζομαι ότι* ΡΠ = ΘΗ. *Διότι αν δεν είναι ίσες, η μια από αυτές θα είναι μεγαλύτερη. Έστω* ΡΠ > ΘΗ *και επειδή* ΡΠ/ΠΣ = ΘΗ/ΗΝ *και εναλλάξ* ΡΠ/ΘΗ = ΠΣ/ΗΝ *θα έχω* ΠΡ > ΘΗ *άρα και* ΠΣ > ΗΝ *ώστε και* |ΡΣ| > |ΘΝ| *αλλά από υπόθεση* |ΡΣ| = |ΘΝ| *το οποίο είναι αδύνατον. Άρα η* ΠΡ *δεν είναι άνιση προς την* ΗΘ *που σημαίνει ότι είναι ίση· όπερ έδει δεῖξαι.]* Δ

Πρόταση 23 (575) *Τα ισογώνια παραλληλόγραμμα έχουν μεταξύ τους λόγο εμβαδών που ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών τους.*



Απόδειξη. Έστω τα ισογώνια παραλληλόγραμμα ΑΓ, ΓΖ με $\widehat{\text{ΒΓΔ}} = \widehat{\text{ΕΓΗ}}$. Ισχυρίζομαι ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΓ προς το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΓΖ έχει λόγο που ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών τους

$$\frac{|\text{ΑΓ}|}{|\text{ΓΖ}|} = \frac{\text{ΒΓ} \cdot \text{ΔΓ}}{\text{ΓΗ} \cdot \text{ΓΕ}}.$$

Ας πάρουμε στην ίδια ευθεία την ΒΓ με την ΓΗ, οπότε θα είναι στην ίδια ευθεία και η ΔΓ με την ΓΕ. Στη συνέχεια συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο ΔΗ και παίρνουμε ευθύγραμμα τμήματα κ, λ, μ τέτοια ώστε $\text{ΒΓ}/\text{ΓΗ} = \kappa/\lambda$ και $\text{ΔΓ}/\text{ΓΕ} = \lambda/\mu$.

Αλλά $\kappa/\mu = (\kappa/\lambda) \cdot (\lambda/\mu)$ ώστε $\kappa/\mu = \text{ΒΓ}/\text{ΓΗ} \cdot \text{ΔΓ}/\text{ΓΕ}$. Και επειδή $\text{ΒΓ}/\text{ΓΗ} = |\text{ΑΓ}|/|\text{ΓΘ}|$ (Π1, σελ. 142) άρα $\text{ΒΓ}/\text{ΓΗ} = \kappa/\lambda = |\text{ΑΓ}|/|\text{ΓΘ}|$. Επειδή πάλι $\text{ΔΓ}/\text{ΓΕ} = |\text{ΓΘ}|/|\text{ΓΖ}|$ (Π1, σελ. 142) άρα $\text{ΔΓ}/\text{ΓΕ} = \lambda/\mu = |\text{ΓΘ}|/|\text{ΓΖ}|$.

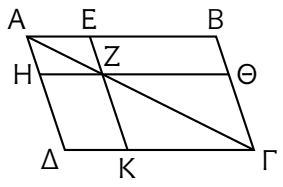
Δείξαμε ότι $\kappa/\lambda = |\text{ΑΓ}|/|\text{ΓΘ}|$ και $\lambda/\mu = |\text{ΓΘ}|/|\text{ΓΖ}|$ και δι' ίσου προκύπτει $\kappa/\mu = |\text{ΑΓ}|/|\text{ΓΖ}|$ (Β5, Π22, σελ. 137).

Αλλά και $\kappa/\mu = \text{ΒΓ}/\text{ΓΗ} \cdot \text{ΔΓ}/\text{ΓΕ}$ άρα και $\text{ΑΓ}/\text{ΓΖ} = \text{ΒΓ}/\text{ΓΗ} \cdot \text{ΔΓ}/\text{ΓΕ}$.

Άρα τα ισογώνια παραλληλόγραμμα έχουν μεταξύ τους λόγο εμβαδών που ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών τους· όπερ ἔδει δεῖξαι.

Δ

Πρόταση 24 (575) *Σε κάθε παραλληλόγραμμο τα περί την διαγώνιο παραλληλόγραμμα είναι όμοια προς το αρχικό παραλληλόγραμμο αλλά και μεταξύ τους.*



Απόδειξη. Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με διαγώνιο ΑΓ και ΕΗ, ΘΚ τα περί αυτή την διαγώνιο παραλληλόγραμμα. Ισχυρίζομαι ότι καθένα από τα ΕΗ, ΘΚ είναι όμοιο προς το ΑΒΓΔ αλλά και μεταξύ τους.

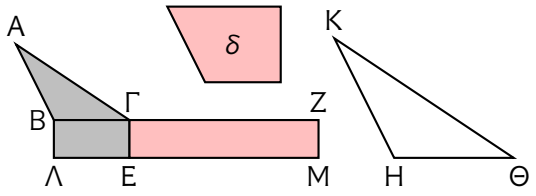
Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΕΖ είναι παράλληλη προς μια πλευρά του την ΒΓ προκύπτει ότι $\text{ΒΕ}/\text{ΕΑ} = \text{ΓΖ}/\text{ΖΑ}$ (Π2, σελ. 142). Επειδή στο τρίγωνο ΑΓΔ η ΖΗ είναι παράλληλη προς μια πλευρά του, την ΓΔ, προκύπτει ότι $\text{ΓΖ}/\text{ΖΑ} = \text{ΔΗ}/\text{ΗΑ}$ (Π2, σελ. 142). Συνεπώς $\text{ΒΕ}/\text{ΕΑ} = \text{ΔΗ}/\text{ΗΑ}$ και με τη σύνθεση των δυο λόγων $\text{ΒΑ}/\text{ΑΕ} = \text{ΔΑ}/\text{ΑΗ}$ (Β5, Π18, σελ. 135) και εναλλάξ $\text{ΒΑ}/\text{ΑΔ} = \text{ΕΑ}/\text{ΑΗ}$ (Β5, Π16, σελ. 134).

Άρα οι πλευρές των παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ, ΕΗ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες, οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι όμοιο με το ΕΗ (Ορ1, σελ. 141). Για αυτούς τους λόγους το παραλληλόγραμμο

ΑΒΓΔ είναι όμοιο και προς το ΚΘ. Άρα καθένα από τα παραλληλόγραμμα ΕΗ, ΘΚ είναι όμοιο με το ΑΒΓΔ και επειδή σχήματα που είναι όμοια με το ίδιο ευθύγραμμο σχήμα είναι και μεταξύ τους όμοια (Π21, σελ. 158) θα είναι και το παραλληλόγραμμο ΕΗ όμοιο προς το ΘΚ.

Άρα σε κάθε παραλληλόγραμμο τα περί την διαγώνιο παραλληλόγραμμα είναι όμοια προς το αρχικό παραλληλόγραμμο αλλά και μεταξύ τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 25 (576) *Να κατασκευαστεί σχήμα όμοιο προς δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα και ίσο προς άλλο δοσμένο σχήμα.*



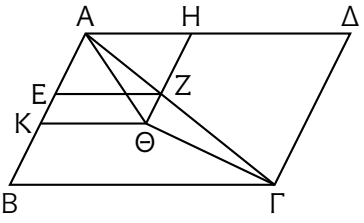
Υλοποίηση: Έστω ΑΒΓ το δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα με το οποίο πρέπει να είναι όμοιο το σχήμα που θα κατασκευαστεί και δ εκείνο με το οποίο πρέπει να είναι ίσο. Πρέπει να κατασκευαστεί ένα σχήμα όμοιο προς το ΑΒΓ και ισεμβαδικό με το δ.

Με πλευρά ΒΓ κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΒΕ ώστε να έχει ίσο εμβαδόν με το τρίγωνο ΑΒΓ (Β1, Π44, σελ. 46) και με πλευρά τη ΓΕ κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΓΜ ώστε να έχει ίσο εμβαδόν με το τρίγωνο δ ώστε $\widehat{ΖΓΕ} = \widehat{ΓΒΛ}$ (Β1, Π45, σελ. 47). Άρα η ΒΖ και η ΓΖ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, όπως επίσης και η ΛΕ με την ΕΜ. Λαμβάνουμε την ΗΘ ως μέση ανάλογο των ΒΓ, ΓΖ ($ΗΘ^2 = ΒΓ \cdot ΓΖ$) (Π13, σελ. 151) και με πλευρά την ΗΘ κατασκευάζουμε τρίγωνο ΚΗΘ όμοιο και όμοια τοποθετημένο με το ΑΒΓ (Π18, σελ. 154).

Επειδή λοιπόν $ΒΓ/ΗΘ = ΗΘ/ΓΖ$ και γνωρίζουμε ότι αν τρία ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα, ο λόγος του πρώτου προς το τρίτο ισούται με το λόγο των εμβαδών των όμοιων και όμοια τοποθετημένων πολυγώνων με πλευρές το πρώτο και δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα (Πόρισμα, Π19, σελ. 155), θα είναι $ΒΓ/ΓΖ = |ΑΒΓ|/|ΚΗΘ|$. Αλλά και $ΒΓ/ΓΖ = |ΒΕ|/|ΕΖ|$ (Π1, σελ. 142). Οπότε $|ΑΒΓ|/|ΚΗΘ| = |ΒΕ|/|ΕΖ|$ άρα εναλλάξ (Π16, σελ. 153) $|ΑΒΓ|/|ΒΕ| = |ΚΗΘ|/|ΕΖ|$. Όμως $|ΑΒΓ| = |ΒΕ|$ άρα και το τρίγωνο $|ΚΗΘ| = |ΕΖ|$. Αλλά $|ΕΖ| = |\delta|$ άρα $|ΚΗΘ| = |\delta|$. Αλλά το ΚΗΘ είναι και όμοιο προς το ΑΒΓ.

Άρα κατασκευάσαμε όμοιο τρίγωνο προς το δοσμένο ευθύγραμμο ΑΒΓ το ΚΗΘ το οποίο είναι και ίσο προς το άλλο δοσμένο σχήμα το δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρόταση 26 (577) *Αν από παραλληλόγραμμο αφαιρεθεί παραλληλόγραμμο όμοιο και όμοια τοποθετημένο προς το αρχικό με κοινή γωνία μ᾽ αυτό, τότε το παραλληλόγραμμο αυτό είναι περί την ίδια διαγώνιο με το αρχικό.*

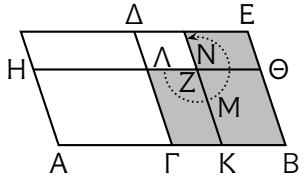


Απόδειξη. Ας αφαιρεθεί από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το παραλληλόγραμμο ΑΖ που είναι όμοιο και όμοια τοποθετημένο προς το ΑΒΓΔ και με κοινή γωνία την $\widehat{\Delta AB}$. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΒΓΔ με το ΑΖ είναι περί την ίδια διαγώνιο παραλληλόγραμμα.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι δεν είναι περί την ίδια διαγώνιο παραλληλόγραμμα, τότε θα υπάρχει άλλη διαγώνιος έστω ΑΘΓ. Προεκτείνουμε την ΗΖ μέχρι το Θ και από το Θ φέρνουμε παράλληλη την ΘΚ προς τις ΑΔ, ΒΓ (Β1, Π30, σελ. 39 και Β1, Π31, σελ. 39). Επειδή το ΑΒΓΔ είναι τα περί την ίδια διαγώνιο με το ΚΗ έχουμε ΔΑ/ΑΒ = ΗΑ/ΑΚ. Όμως το παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΕΗ είναι όμοια, οπότε ΔΑ/ΑΒ = ΗΑ/ΑΕ (Ορ1, σελ. 141). Άρα ΗΑ/ΑΚ = ΗΑ/ΑΕ δηλαδή η ΗΑ έχει τον ίδιο λόγο προς καθεμιά από τις ΑΚ, ΚΕ που σημαίνει ΑΕ = ΑΚ (Β5, Π9, σελ. 132) κάτι που είναι αδύνατον γιατί δεν γίνεται να είναι η μικρότερη ίση με τη μεγαλύτερη. Άρα το ΑΒΓΔ δεν είναι γύρω από την ίδια διαγώνιο με το ΑΖ, οπότε είναι με το παραλληλόγραμμο ΑΖ.

Άρα αν από παραλληλόγραμμο αφαιρεθεί παραλληλόγραμμο όμοιο και όμοια τοποθετημένο προς το αρχικό με κοινή γωνία μ᾽ αυτό, τότε το παραλληλόγραμμο αυτό είναι περί την ίδια διαγώνιο με το αρχικό· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 27 (577) *Απ᾽ όλα τα παραλληλόγραμμα που έχουν σχηματιστεί πάνω σε δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα και από τα οποία υπολείπονται σχήματα παραλληλόγραμμα όμοια και ομοίως τοποθετημένα προς παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται με πλευρά το μισό του δοσμένου ευθυγράμμου τμήματος, μέγιστο είναι εκείνο που σχηματίζεται με πλευρά το μισό του δοσμένου ευθυγράμμου τμήματος και είναι όμοιο προς το παραλληλόγραμμο που υπολείπεται.*



Απόδειξη. Έστω ΑΒ το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα και Γ το μέσο του. Με πλευρά επί του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΔ που είναι το υπόλοιπο του παραλληλογράμμου ΔΒ το οποίο έχει σχηματιστεί με πλευρά το μισό του δοσμένου ευθυγράμμου τμήματος δηλαδή την ΓΒ. Ισχυρίζομαι ότι απ᾽ όλα τα παραλληλόγραμμα που έχουν σχηματιστεί πάνω στο ΑΒ και από τα οποία υπολείπονται σχήματα παραλληλόγραμμα όμοια και ομοίως τοποθετημένα προς το ΔΒ, μέγιστο είναι το ΑΔ. Κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΑΖ με πλευρά πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, από το οποίο λείπει σχήμα παραλληλόγραμμο το ΖΒ, το οποίο είναι όμοιο και

ομοίως τοποθετημένο προς το ΔΒ. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΔ είναι μεγαλύτερο του ΑΖ.

Επειδή το παραλληλόγραμμο ΔΒ είναι όμοιο προς το ΖΒ είναι και τα δύο περί την ίδια διαγώνιο (Π26, σελ. 161). Φέρνουμε τη διαγώνιό τους ΔΒ και γράφουμε το σχήμα (στμ: το παραλληλόγραμμο ΖΒ και προεκτείνω την ΚΖ ως την ΔΕ).

Τώρα ο $|\Gamma Z| = |ZE|$ (Β1, Π43, σελ. 45) και το ΖΒ είναι κοινό, άρα $|\Gamma\Theta| = |KE|$. Αλλά $|\Gamma\Theta| = |\Gamma H|$ επειδή και ΑΓ = ΓΒ (ΠΙ, σελ. 142). Άρα και το $|H\Gamma| = |EK|$. Αν προστεθεί σε αυτά το κοινό $|\Gamma Z|$ δηλαδή $|H\Gamma| + |\Gamma Z| = |EK| + |\Gamma Z|$ άρα $|AZ| = |EB\Gamma\Lambda ZN|$ (το ΕΒΓΛΖΝ είναι ο γνώμονας ΛΜΝ) ώστε το $|\Delta B| = |A\Delta| > |AZ|$.

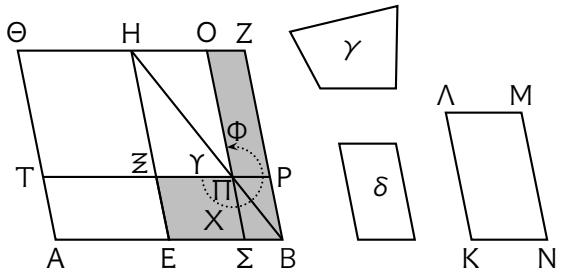
Άρα απ' όλα τα παραλληλόγραμμα που έχουν σχηματιστεί πάνω σε δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα και από τα οποία υπολείπονται σχήματα παραλληλόγραμμα όμοια και ομοίως τοποθετημένα προς παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται με πλευρά το μισό του δοσμένου ευθυγράμμου τμήματος, μέγιστο είναι εκείνο που σχηματίζεται με πλευρά το μισό του δοσμένου ευθυγράμμου τμήματος και είναι όμοιο προς το παραλληλόγραμμο που υπολείπεται· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 28 (578) *Πάνω σε δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο με εμβαδό ίσο με το εμβαδόν δοσμένου ευθύγραμμου σχήματος, από το οποίο υπολείπεται παραλληλόγραμμο όμοιο προς δοσμένο παραλληλόγραμμο. Έτσι, το ευθύγραμμο σχήμα που δίνεται δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται με πλευρά το μισό του δοσμένου ευθυγράμμου τμήματος και όμοιο με το υπολειπόμενο.*

Υλοποίηση: Έστω ΑΒ το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα, γ το ευθύγραμμο σχήμα και δ δοσμένο παραλληλόγραμμο. Υποθέτουμε επίσης ότι το γ δεν είναι μεγαλύτερο του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται με πλευρά το μισό του ΑΒ και πλάτος τέτοιο που να είναι όμοιο με το δ.

Πρέπει να κατασκευαστεί πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ένα παραλληλόγραμμο ίσο προς το δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα γ και να είναι τέτοιο ώστε να του υπολείπεται παραλληλόγραμμο όμοιο με το δ.

Ας διχοτομηθεί το ΑΒ από το σημείο Ε και ας σχηματιστεί με πλευρά την ΕΒ παραλληλόγραμμο όμοιο και ομοίως τοποθετημένο προς το δ το ΕΒΖΗ. Ας συμπληρωθεί το ΑΗ (Π27, σελ. 162).



Αν $|AH| = |\gamma|$ αυτό που θέλαμε θα έχει γίνει. Διότι έχει κατασκευαστεί πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AB ένα παραλληλόγραμμο ίσο προς το δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα γ, το AH, του οποίου υπολείπεται παραλληλόγραμμο το HB, το οποίο είναι όμοιο προς το δ.

Αν όμως δεν είναι ίσα, έστω $|\Theta E| > |\gamma|$. Έχουμε όμως ότι $|\Theta E| = |HB|$ άρα $|HB| > |\gamma|$. Όσο τώρα μεγαλύτερο του γ είναι το HB, ίσο με αυτή τη διαφορά εμβαδών, θα κατασκευάσουμε το ΚΛΜΝ όμοιο και ομοίως τοποθετημένο προς το δ (Π25, σελ. 161). Αλλά το δ είναι όμοιο προς το HB, άρα και το ΚΜ είναι όμοιο προς το HB (Π21, σελ. 158). Έστω λοιπόν ότι η ΚΛ είναι ομόλογος της της ΗΕ και η ΛΜ της ΗΖ. Επειδή $|HB| = |\gamma| + |KM|$ άρα $|HB| > |KM|$ οπότε και $HE > K\Lambda$, $HZ > \Lambda M$. Λαμβάνουμε $H\Xi = K\Lambda$ και $HO = \Lambda M$ οπότε δημιουργείται το παραλληλόγραμμο ΞΗΟΠ. Άρα το $|H\Pi| = |KM|$ και όμοια [αλλά το ΚΜ είναι όμοιο προς το HB]. Άρα και το ΗΠ είναι όμοιο προς το HB (Π21, σελ. 158) άρα το ΗΠ και το HB είναι περί την ίδια διαγώνιο (Π26, σελ. 161). Έστω ΗΠΒ η διαγώνιος των ΗΠ, HB.

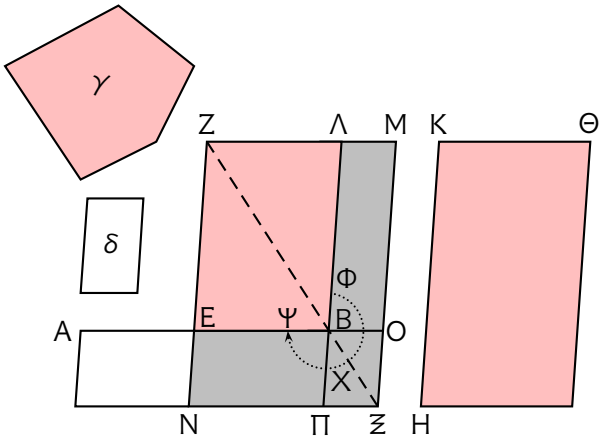
Επειδή λοιπόν $|BH| = |\gamma| + |KM|$ όπου $|H\Pi| = |KM|$ προκύπτει ότι ο γνώμονας ΥΧΦ, δηλαδή το πολυγωνικό χωρίο ΟΖΒΕΞΠ έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του γ. Και επειδή $|OP| = |\Xi\Sigma|$ (Β1, Π43, σελ. 45) αν προστεθεί το κοινό ΠΒ και στα δυο μέλη $|OP| + |\Pi B| = |\Xi\Sigma| + |\Pi B|$ προκύπτει $|OB| = |\Xi B|$. Αλλά $|\Xi B| = |TE|$ επειδή και η πλευρά $AE = EB$ (Π1, σελ. 142) και άρα $|TE| = |OB|$. Αν προστεθεί το κοινό $|\Xi\Sigma|$ και στα δυο μέλη $|TE| + |\Xi\Sigma| = |OB| + |\Xi\Sigma|$ προκύπτει $|T\Sigma| = |OZBE\Xi\Pi|$. Αλλά δείξαμε για τον γνώμονα $|OZBE\Xi\Pi| = |\gamma|$ οπότε και $|T\Sigma| = |\gamma|$.

Άρα πάνω στο δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα AB κατασκευάστηκε παραλληλόγραμμο ΣΤ με εμβαδό ίσο προς το εμβαδον δοσμένου ευθύγραμμου σχήματος γ, από το οποίο υπολείπεται παραλληλόγραμμο ΠΒ όμοιο προς δοσμένο δ [επειδή το ΠΒ είναι όμοιο προς το ΗΠ]· όπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρόταση 29 (579) *Πάνω σε δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο που έχει εμβαδόν ίσο προς δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα και υπερβάλλει κατά παραλληλόγραμμο όμοιο με δοσμένο.*

Υλοποίηση: Έστω AB το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα, γ το δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα προς το οποίο πρέπει να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο

με ίσο εμβαδό επί του ΑΒ και δ το όμοιο παραλληλόγραμμο κατά το οποίο πρέπει να υπερβάλλει. Πρέπει να κατασκευαστεί επί του ΑΒ παραλληλόγραμμο με εμβαδό ίσο προς το ευθύγραμμο σχήμα γ το οποίο να έχει εμβαδό μεγαλύτερο κατά παραλληλόγραμμο όμοιο με το δ.



Ας διχοτομηθεί το ΑΒ στο σημείο Ε και ας σχεδιαστεί από την ΕΒ παραλληλόγραμμο ΒΖ όμοιο και ομοίως κείμενο με το δ. Ας κατασκευασθεί το ΗΘ έτσι ώστε $|\text{ΗΘ}| = |\text{ΒΖ}| + |\gamma|$ και να είναι όμοιο και ομοίως κείμενο με το δ (Π25, σελ. 161). Η ΚΘ είναι ομόλογη προς τη ΖΛ και η ΚΗ προς τη ΖΕ. Επειδή $|\text{ΗΘ}| > |\text{ΖΒ}|$ άρα και ΚΘ > ΖΛ και ΚΗ > ΖΕ. Προεκτείνουμε τη ΖΛ ως το Μ ώστε ΖΜ = ΚΘ, την ΖΕ ως το Ν ώστε ΖΝ = ΚΗ, και στη συνέχεια συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο ΜΝ. Άρα τα ΜΝ, ΗΘ είναι όμοια και ίσα $|\text{ΜΝ}| = |\text{ΗΘ}|$. Αλλά το ΗΘ είναι όμοιο προς το ΕΛ άρα και το ΜΝ όμοιο προς το ΕΛ (Π21, σελ. 158). Συνεπώς τα ΕΛ, ΜΝ είναι περί την ίδια διαγώνιο (Π26, σελ. 161). Φέρνουμε τη διαγώνιό τους ΖΞ.

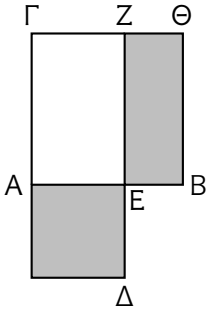
Επειδή $|\text{ΗΘ}| = |\text{ΕΛ}| + |\Gamma|$ αλλά και $|\text{ΗΘ}| = |\text{ΜΝ}|$ προκύπτει $|\text{ΜΝ}| = |\text{ΕΛ}| + |\Gamma|$. Αν αφαιρεθεί το κοινό $|\text{ΕΛ}|$ τότε για το εμβαδόν του γνώμονα ΦΧΨ, δηλαδή του πολυγωνικού χωρίου ΕΝΞΜΛΒ, ισχύει $|\text{ΕΝΞΜΛΒ}| = |\gamma|$. Και επειδή ΑΕ = ΕΒ έχουμε και $|\text{ΑΝ}| = |\text{ΝΒ}|$ οπότε και $|\text{ΑΝ}| = |\text{ΝΒ}| = |\text{ΛΟ}|$ (Β1, Π43, σελ. 45). Αν προστεθεί και στα δύο μέλη το $|\text{ΕΞ}|$ θα πάρουμε $|\text{ΑΝ}| + |\text{ΕΞ}| = |\text{ΛΟ}| + |\text{ΕΞ}|$ άρα $|\text{ΑΞ}| = |\text{ΕΝΞΜΛΒ}|$. Αλλά $|\text{ΕΝΞΜΛΒ}| = |\gamma|$ οπότε $|\text{ΑΞ}| = |\gamma|$.

Άρα πάνω στο δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ κατασκευάστηκε παραλληλόγραμμο ΑΞ με ίσο εμβαδό προς το δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα γ το οποίο υπερβάλλει κατά παραλληλόγραμμο σχήμα το ΠΟ όμοιο με το δ επειδή το ΟΠ είναι όμοιο και προς το ΕΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

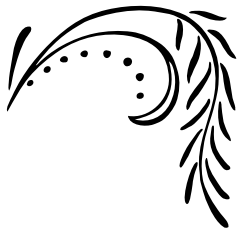
Πρόταση 30 (580) *Δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα να τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο.*

Υλοποίηση: Έστω δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Πρέπει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ να τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο.

Με πλευρά το ΑΒ γράφουμε τετράγωνο το ΒΓ και κατασκευάζουμε στην ΑΓ παραλληλόγραμμο ΓΔ ισεμβαδικό με το ΒΓ, δηλαδή $|\Gamma\Delta| = |B\Gamma|$, το οποίο υπερέχει από το τετράγωνο κατά παραλληλόγραμμο ΑΔ όμοιο του ΒΓ (Π29, σελ. 164).



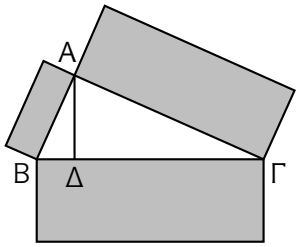
Το ΒΓ είναι τετράγωνο, άρα και το ΑΔ είναι τετράγωνο. Και επειδή $|B\Gamma| = |\Gamma\Delta|$ αν αφαιρεθεί και από τα δύο το κοινό ΓΕ προκύπτει $|BZ| = |A\Delta|$. Επειδή είναι και ισογώνια άρα και οι πλευρές των ΒΖ, ΑΔ που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογες (Π14, σελ. 151), άρα είναι $ZE/E\Delta = AE/EB$ και επειδή $ZE = AB$ και $E\Delta = AE$ άρα $BA/AE = AE/EB$. Όμως $AB > AE$ άρα και $AE > EB$ (Β5, Π14, σελ. 134). Άρα η ευθεία ΑΒ χωρίστηκε σε μέσο και άκρο λόγο κατά το Ε και το μεγαλύτερο τμήμα της είναι το ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*



ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

ΙΣΧΥΕΙ ΓΙΑ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΧΗΜΑΤΑ ΟΜΟΙΑ ΚΑΙ ΟΜΟΙΩΣ ΤΟΠΟΘΕΤΗΜΕΝΑ ΣΤΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Πρόταση 31 (580) *Στα ορθογώνια τρίγωνα το σχήμα που γράφεται με πλευρά την υποτείνουσα έχει εμβαδό ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των ομοίων και όμοια τοποθετημένων σχημάτων με πλευρές εκείνες που περιέχουν την ορθή γωνία.*



Απόδειξη. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή την γωνία $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$. Ισχυρίζομαι ότι το σχήμα που γράφεται με πλευρά την ΒΓ έχει εμβαδό ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των ομοίων και όμοια τοποθετημένων σχημάτων με πλευρές τις ΒΑ, ΑΓ.

Φέρνουμε την κάθετο ΑΔ στη ΒΓ. Επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέραμε από την κορυφή Α της ορθής γωνίας κάθετη την ΑΔ στη βάση ΒΓ, τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ που βρίσκονται εκατέρωθεν της καθέτου είναι όμοια και μεταξύ τους και με ολόκληρο ΑΒΓ (Π8, σελ. 148). Επειδή το ΑΒΓ είναι όμοιο προς το ΑΒΔ έχουμε ΓΒ/ΒΑ = ΑΒ/ΒΔ. Και επειδή τρία ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα, όσος είναι ο λόγος του πρώτου προς το τρίτο, τόσος είναι και ο λόγος του σχήματος που γράφτηκε από το πρώτο ευθύγραμμο τμήμα προς το σχήμα που γράφτηκε από το δεύτερο όμοιο και ομοίως τοποθετημένο (Πόρισμα, Π19, σελ. 155). Άρα

$$\frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\text{Σχήμα ΓΒ}}{\text{Σχήμα ΒΑ}} \qquad \textit{και} \qquad \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{Σχήμα ΒΓ}}{\text{Σχήμα ΓΑ}}.$$

Συνεπώς

$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{Σχήμα ΒΑ}}{\text{Σχήμα ΒΓ}} \qquad \textit{και} \qquad \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{Σχήμα ΓΑ}}{\text{Σχήμα ΒΓ}}.$$

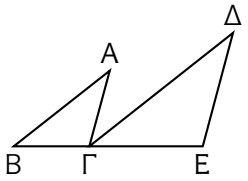
Κατά συνέπεια

$$\frac{\text{ΒΔ} + \text{ΓΔ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{Σχήμα ΒΑ} + \text{Σχήμα ΓΑ}}{\text{Σχήμα ΒΓ}}.$$

Αλλά ΒΓ = ΒΔ + ΓΔ συνεπώς Σχήμα ΒΑ + Σχήμα ΓΑ = Σχήμα ΒΓ.

Άρα στα ορθογώνια τρίγωνα το σχήμα που γράφεται με πλευρά την υποτείνουσα έχει εμβαδό ίσο προς το άθροισμα των εμβαδών των ομοίων και όμοια τοποθετημένων σχημάτων με πλευρές εκείνες που περιέχουν την ορθή γωνία· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 32 (581) *Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ανάλογες προς δυο πλευρές και συντεθούν σε μια γωνία* (στμ: να έχουν μια κοινή κορυφή) *έτσι ώστε οι ομόλογες πλευρές τους να είναι παράλληλες, οι λοιπές πλευρές θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία.*



Απόδειξη. Έστω δυο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΓΕ που έχουν ανάλογες πλευρές ΒΑ/ΑΓ = ΔΓ/ΔΕ και ΑΒ // ΔΓ, ΑΓ // ΔΕ. Ισχυρίζομαι ότι οι ΒΓ και η ΓΕ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Διότι αφού ΑΒ // ΔΓ και η ΑΓ τις τέμνει, οι (στμ: εντός) εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται θα είναι ίσες $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\text{ΑΓΔ}}$ (ΒΙ, Π29, σελ. 38). Όμοια προκύπτει ότι $\widehat{\text{ΓΔΕ}} = \widehat{\text{ΑΓΔ}}$. Οπότε και $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\text{ΓΔΕ}}$. Επειδή υπάρχουν δυο τρίγωνα τα ΑΒΓ, ΔΓΕ που έχουν μια γωνία την $\hat{A}$ ίση με μια γωνία την $\hat{\Delta}$ και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες ΒΑ/ΑΓ = ΓΔ/ΔΕ άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΓΕ είναι ισογώνια (Π6, σελ. 146) οπότε $\widehat{\text{ΑΒΓ}} = \widehat{\text{ΔΓΕ}}$. Δείξαμε και ότι $\widehat{\text{ΑΓΔ}} = \widehat{\text{ΒΑΓ}}$ άρα $\widehat{\text{ΑΓΕ}} = \widehat{\text{ΑΒΓ}} + \widehat{\text{ΒΑΓ}}$. Ας προσθέσουμε τώρα και την κοινή $\widehat{\text{ΑΓΒ}}$ και στα δυο μέλη

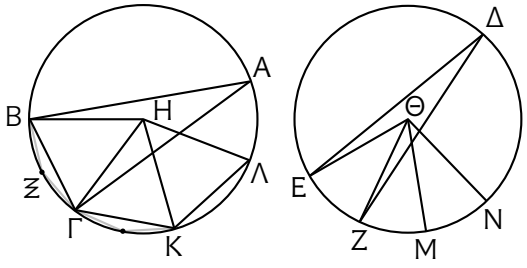
$$\widehat{\text{ΑΓΕ}} + \widehat{\text{ΑΓΒ}} = \widehat{\text{ΑΒΓ}} + \widehat{\text{ΒΑΓ}} + \widehat{\text{ΑΓΒ}}.$$

Αλλά $\widehat{\text{ΑΒΓ}} + \widehat{\text{ΒΑΓ}} + \widehat{\text{ΑΓΒ}} = 2$ ορθές. Επομένως με την ευθεία ΑΓ και στο σημείο Γ αυτής τα δυο ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ, ΓΕ που δεν βρίσκονται προς το ίδιο μέρος, σχηματίζουν τις εφεξής γωνίες $\widehat{\text{ΑΓΕ}} + \widehat{\text{ΑΓΒ}} = 2$ ορθές. Άρα οι ΒΓ, ΓΕ βρίσκονται στην ίδια ευθεία (ΒΙ, Π14, σελ. 29).

Άρα αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ανάλογες προς δυο πλευρές και συντεθούν σε μια γωνία (στμ: να έχουν μια κοινή κορυφή) έτσι ώστε οι ομόλογες πλευρές τους να είναι παράλληλες, οι λοιπές πλευρές θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 33 (582) *Δυο τόξα σε ίσους κύκλους έχουν τον ίδιο λόγο με τις επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά και με τις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε αυτά.*

Απόδειξη. Έστω ΑΒΓ, ΔΕΖ ίσοι κύκλοι, $\widehat{\text{ΒΗΓ}}, \widehat{\text{ΕΘΖ}}$ οι επίκεντρες γωνίες στα κέντρα Η, Θ και $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$, $\widehat{\text{ΕΔΖ}}$ οι εγγεγραμμένες γωνίες. Ισχυρίζομαι ότι $\widehat{\text{ΒΓ}} / \widehat{\text{ΕΖ}} = \widehat{\text{ΒΗΓ}}/\widehat{\text{ΕΘΖ}} = \widehat{\text{ΒΑΓ}}/\widehat{\text{ΕΔΖ}}$.



Στη συνέχεια του τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$ λαμβάνουμε οσαδήποτε ίσα τόξα με το $\overset{\frown}{ΒΓ}$ έστω $\overset{\frown}{ΓΚ} = \overset{\frown}{ΚΛ} = \overset{\frown}{ΒΓ}$, ενώ στη συνέχεια του τόξου $\overset{\frown}{ΕΖ}$ λαμβάνουμε οσαδήποτε τόξα ίσα με το $\overset{\frown}{ΕΖ}$ έστω $\overset{\frown}{ΖΜ} = \overset{\frown}{ΜΝ} = \overset{\frown}{ΕΖ}$ και φέρνουμε τις ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Επειδή τα τόξα είναι ίσα θα είναι ίσες και οι επίκεντρες γωνίες τους $\overset{\frown}{ΒΗΓ} = \overset{\frown}{ΓΗΚ} = \overset{\frown}{ΚΗΛ}$ (Β3, Π27, σελ. 101). Άρα όσες φορές πολλαπλάσια είναι τα τόξα, τόσες φορές πολλαπλάσιες είναι και οι γωνίες $\overset{\frown}{ΒΛ}$ / $\overset{\frown}{ΒΓ}$ = $\overset{\frown}{ΒΗΛ}/\overset{\frown}{ΒΗΓ}$. Όμοια $\overset{\frown}{ΝΕ}$ / $\overset{\frown}{ΕΖ}$ = $\overset{\frown}{ΝΘΕ}/\overset{\frown}{ΕΘΖ}$.

Άρα αν $\overset{\frown}{ΒΛ} = \overset{\frown}{ΕΝ}$ τότε και $\overset{\frown}{ΒΗΛ} = \overset{\frown}{ΕΘΝ}$, αν $\overset{\frown}{ΒΛ} > \overset{\frown}{ΕΝ}$ τότε και $\overset{\frown}{ΒΗΛ} > \overset{\frown}{ΕΘΝ}$ και αν $\overset{\frown}{ΒΛ} < \overset{\frown}{ΕΝ}$ τότε και $\overset{\frown}{ΒΗΛ} < \overset{\frown}{ΕΘΝ}$. Υπάρχουν λοιπόν τέσσαρα μεγέθη, δυο τα τόξα $\overset{\frown}{ΒΓ}$, $\overset{\frown}{ΕΖ}$ και δυο οι γωνίες $\overset{\frown}{ΒΗΓ}$, $\overset{\frown}{ΕΘΖ}$. Πήραμε το τόξο $\overset{\frown}{ΒΛ}$ και τη γωνία $\overset{\frown}{ΒΗΛ}$ να είναι ίσες φορές πολλαπλάσια του τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$ και τη γωνίας $\overset{\frown}{ΒΗΓ}$ και το τόξο $\overset{\frown}{ΕΝ}$ και τη γωνία $\overset{\frown}{ΕΘΝ}$ να είναι ίσες φορές πολλαπλάσια του τόξου $\overset{\frown}{ΕΖ}$ και τη γωνίας $\overset{\frown}{ΕΘΖ}$.

Αποδείξαμε ότι αν $\overset{\frown}{ΒΛ} > \overset{\frown}{ΕΝ}$ τότε και $\overset{\frown}{ΒΗΛ} > \overset{\frown}{ΕΘΝ}$, αν $\overset{\frown}{ΒΛ} = \overset{\frown}{ΕΝ}$ τότε και $\overset{\frown}{ΒΗΛ} = \overset{\frown}{ΕΘΝ}$ και αν $\overset{\frown}{ΒΛ} < \overset{\frown}{ΕΝ}$ τότε και $\overset{\frown}{ΒΗΛ} < \overset{\frown}{ΕΘΝ}$.

Άρα $\overset{\frown}{ΒΓ}$ / $\overset{\frown}{ΕΖ}$ = $\overset{\frown}{ΒΗΓ}/\overset{\frown}{ΕΘΖ}$ (Β5, Ορ5, σελ. 126), αλλά $\overset{\frown}{ΒΗΓ}/\overset{\frown}{ΕΘΖ}$ = $\overset{\frown}{ΒΑΓ}/\overset{\frown}{ΕΔΖ}$ (Β5, Ορ5, σελ. 126) γιατί καθεμιά από τις $\overset{\frown}{ΒΗΓ}$, $\overset{\frown}{ΕΘΖ}$ είναι διπλάσια καθεμιάς από τις $\overset{\frown}{ΒΑΓ}$, $\overset{\frown}{ΕΔΖ}$ (Β3, Π20, σελ. 97). Άρα $\overset{\frown}{ΒΓ}$ / $\overset{\frown}{ΕΖ}$ = $\overset{\frown}{ΒΗΓ}/\overset{\frown}{ΕΘΖ} = \overset{\frown}{ΒΑΓ}/\overset{\frown}{ΕΔΖ}$.

Άρα δυο τόξα σε ίσους κύκλους έχουν τον ίδιο λόγο με τις επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά και με τις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε αυτά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

ΘΥΜΑΡΙΔΑΣ Ο ΠΑΡΙΟΣ

ΟΡΙΑΚΕΣ ΠΟΣΟΤΗΤΕΣ

ΣΟΥΠΡΕΜΟΥΜ
ΑΝΩ ΠΕΡΑΣ

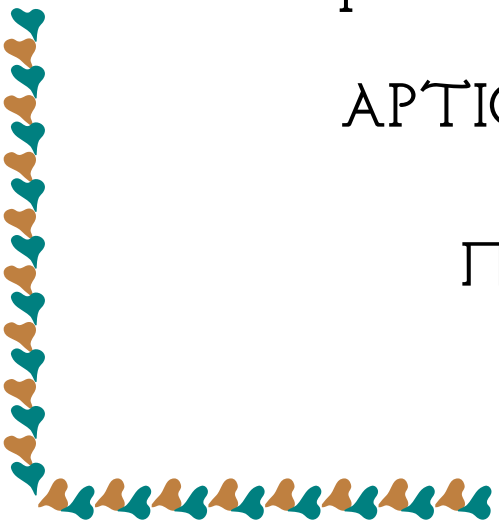
ΜΟΝΑΔΕΣ

ΑΝΘΥΦΑΙΡΕΣΗ

ΑΡΤΙΟΙ

ΠΕΡΙΤΤΟΙ

ΤΕΛΕΙΟΙ



Βιβλίο 7ο

Προλεγόμενα των μεταφραστών

Σύμφωνα με τον Ιάμβλιχο (περί το 300 μαχχ) για τον ορισμό της μονάδας ο Ευκλείδης (ή οι μεταγενέστεροι Μαθηματικοί που επηρέασαν το κείμενο) επιλέγει τον δημοφιλέστερο. Όμως δεν ήταν ο μοναδικός αλλά κυκλοφορούσαν ανάμεσα στους Μαθηματικούς διάφοροι ορισμοί. Εδώ θέλουμε να ξεχωρίσουμε τον ορισμό του Πυθαγόρειου Μαθηματικού Θυμαρίδα από την Πάρο (400–350 παχχ), ο οποίος δίνει τον ορισμό της μονάδας με αυτό που σήμερα έχει επικρατήσει να λέγεται supremum, αν και ο ελληνικός όρος είναι εύηχος: «άνω πέρας». Ο Θυμαρίδας, σύμφωνα με τον Ιάμβλιχο (στο «Σχόλια στον Νικόμαχο»), όριζε τη μονάδα ως «οριακή ποσότητα» (περαίνουσα ποσότης) «το άνω πέρας των μορίων», δηλαδή των λόγων α/β με $\alpha < \beta$· ενώ διάφοροι Πυθαγόρειοι έλεγαν ότι «η μονάδα είναι το *σύνορο* ανάμεσα στους αριθμούς και στα μόρια».

Αυτό που έχει ενδιαφέρον εδώ είναι το προφανές συμπέρασμα ότι ο ορισμός του Θυμαρίδα ήταν κατανοητός στην εποχή του. Δηλαδή δεν διέφευγε της αντίληψής τους η έννοια του supremum.

Ας δούμε τώρα τους ορισμούς κατά τον Ευκλείδη.

Ορισμοί

Ορισμοί 1 (583)

(ορ. 1) Μια «μονάδα» είναι εκείνο, εξ' αιτίας του οποίου, καθένα από υπαρκτά πράγματα δύναται να ονομάζεται «ένα».

(ορ. 2) «Αριθμός» είναι ένα πλήθος συγκείμενων μονάδων (στμ: διαδοχικών, χωρίς διακοπή).

(ορ. 3) Ένας αριθμός λέγεται «μέρος» ενός μεγαλύτερου αριθμού αν τον μετρά (στμ: είναι παράγοντάς του).

(ορ. 4) Ένας αριθμός είναι «μέρη» ενός άλλου (στμ: κλάσμα του άλλου) αν δεν τον μετρά και είναι κλασματικό μέρος του.

(ορ. 5) Ένας αριθμός είναι «πολλαπλάσιος» ενός άλλου αριθμού όταν μετριέται από αυτόν.

(ορ. 6) Ένας αριθμός λέγεται «άρτιος» όταν χωρίζεται σε δύο ίσους αριθμούς.

(ορ. 7) Ένας αριθμός λέγεται «περιττός» όταν δεν χωρίζεται σε δύο ίσους αριθμούς ή όταν διαφέρει κατά μια μονάδα από έναν άρτιο αριθμό.

(ορ. 8) Ένας αριθμός λέγεται «αρτιάκις άρτιος» όταν μετριέται άρτιο πλήθος φορών από άρτιο αριθμό.

(ορ. 9) Ένας αριθμός λέγεται «αρτιάκις περιττός» όταν μετριέται άρτιο πλήθος φορών από περιττό αριθμό.

(ορ. 10) Ένας αριθμός λέγεται «περισσάκις άρτιος» αν μετριέται περιττό πλήθος φορών από άρτιο αριθμό.

(ορ. 11) Ένας αριθμός λέγεται «περισσάκις περιττός» όταν μετριέται περιττό πλήθος φορών από περιττό αριθμό.

(ορ. 12) Ένας αριθμός λέγεται «πρώτος» όταν μετριέται μόνο από τη μονάδα.

(ορ. 13) Δυο αριθμοί λέγονται «πρώτοι μεταξύ τους» όταν το μόνο κοινό τους μέτρο είναι μια μονάδα.

(ορ. 14) Ένας αριθμός λέγεται «σύνθετος» όταν μετριέται από κάποιον αριθμό (στμ: διαφορετικό της μονάδας).

(ορ. 15) Δυο αριθμοί λέγονται «σύνθετοι μεταξύ τους» όταν υπάρχει ένας αριθμός (στμ: εκτός από την μονάδα) που να τους μετρά και τους δυο.

(ορ. 16) Ένας αριθμός λέγεται ότι «πολλαπλασιάζει» έναν άλλο αριθμό όταν ο πολλαπλασιαζόμενος αριθμός προστίθεται στον εαυτό του τόσες φορές όσες και οι μονάδες που υπάρχουν στον αριθμό που τον πολλαπλασιάζει. Έτσι, προκύπτει ένας άλλος αριθμός (στμ: το γινόμενό τους).

(ορ. 17) Ο αριθμός που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό δύο αριθμών λέγεται «επίπεδος» ενώ «πλευρές» του καλούνται οι δυο αριθμοί που πολλαπλασιάζονται.

(ορ. 18) Ο αριθμός που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό τριών αριθμών λέγεται «στερεός» ενώ «πλευρές» του καλούνται οι τρεις αριθμοί που πολλαπλασιάζονται.

(ορ. 19) «Τετράγωνος» λέγεται ένας αριθμός όταν προκύπτει από πολλαπλασιασμό ίσου με ίσο ή όταν (στμ: είναι επίπεδος και) περιέχεται σε δυο ίσες πλευρές.

(ορ. 20) Ένας αριθμός λέγεται «κύβος» όταν προκύπτει όταν ένας αριθμός πολλαπλασιαστεί με έναν ίσο αριθμό και το γινόμενο που προκύπτει πολλαπλασιαστεί ξανά με τον τον ίδιο αριθμό ή όταν (στμ: είναι στερεός και) περιέχεται σε τρεις ίσες πλευρές.

(ορ. 21) Τέσσαρες αριθμοί λέγονται «ανάλογοι» όταν ο πρώτος και ο τρίτος είναι ίσα πολλαπλάσια (ή ίδιο μέρος ή ίδια μέρη) του δεύτερου και του τέταρτου αντίστοιχα.

(ορ. 22) Οι επίπεδοι και στερεοί αριθμοί λέγονται «όμοιοι» όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

(ορ. 23) Ένας αριθμός λέγεται «τέλειος» όταν είναι ίσος με το άθροισμα των αριθμών που είναι μέρη του.

Προτάσεις και Θεωρήματα

Πρόταση 1 (584) *Έστω ότι δίνονται δύο άνισοι αριθμοί και ανθυφαιρείται συνεχώς ο μικρότερος από τον μεγαλύτερο. Αν ο αριθμός που προκύπτει κάθε φορά δεν μετρά τον προηγούμενό του μέχρι να γίνει μονάδα τότε οι δύο αρχικοί αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Έστω οι δύο άνισοι αριθμοί α και β με $\alpha > \beta$ και έστω ότι κατά την ανθυφαίρεση του β από τον α το υπόλοιπο δεν μετρά τον προηγούμενο του μέχρι αυτό να γίνει μονάδα. Ισχυρίζομαι ότι οι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους δηλαδή ότι το μόνο κοινό μέτρο τους είναι η μονάδα.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι οι α και β δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε θα υπάρχει ένας αριθμός (στμ: όχι το 1), έστω ο ε, που θα τους μετρά.

Κατά την ανθυφαίρεση του β από το α ας υποθέσουμε ότι μετράμε τον α με τον β και περισσεύει υπόλοιπο γ. Στην συνέχεια, μετρώντας τον β με τον γ περισσεύει υπόλοιπο δ. Μετρώντας τέλος τον γ με τον δ περισσεύει η μονάδα.

Αλλά ο ε μετρά τον β που μετρά τον $\alpha - \gamma$ (διότι μετρώντας τον α με τον β μένει υπόλοιπο γ). Έτσι, ο ε μετρά και τον $\alpha - \gamma$. Καθώς όμως ο ε μετρά τον α έπεται ότι ο ε μετρά και τον γ.

Επιπλέον ο γ μετρά τον $\beta - \delta$ (διότι μετρώντας τον β με τον γ μένει υπόλοιπο δ) και επομένως ο ε μετρά τον $\beta - \delta$. Καθώς ο ε μετρά τον β έπεται ότι ο ε μετρά τον δ.

Όμως ο δ μετρά και τη διαφορά του γ από τη μονάδα (διότι μετρώντας τον γ με τον δ περισσεύει μονάδα). Συνεπώς και ο ε μετρά αυτή τη διαφορά.

Παραπάνω όμως δείξαμε ότι ο ε μετρά τον γ και άρα ο ε μετρά και την μονάδα. Αυτό όμως είναι αδύνατον και έτσι συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει αριθμός (στμ: εκτός από την μονάδα) που να μετρά τους α και β, άρα είναι πρώτοι μεταξύ τους· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 2 (Κατασκευή) (585) *Να βρεθεί το μέγιστο κοινό μέτρο δύο αριθμών* (στμ: ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους) *που δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους.*

Υλοποίηση: Έστω οι α και β με $\alpha > \beta$ που δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους και των οποίων πρέπει να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης.

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις καθώς ο β είτε μετρά τον α είτε όχι.

$1^η$ περίπτωση: Ο β μετρά τον α.

Τότε ο β είναι και ένας από κοινούς διαιρέτες των α και β και καθώς δεν υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος του β που να τον μετρά έπεται ότι είναι ο μέγιστος από τους κοινούς διαιρέτες των α και β, δηλαδή $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = \beta$.

$2^η$ περίπτωση: Οι β δεν μετρά τον α.

Ανθυφαιρούμε τον β από τον α οπότε το υπόλοιπο που περισσεύει θα μετρά τον προηγούμενο του και δε θα γίνει ποτέ μονάδα καθώς τότε θα έπρεπε οι α και β να είναι πρώτοι μεταξύ τους κάτι που δεν ισχύει από την υπόθεση.

Έστω λοιπόν ότι κατά την ανθυφαίρεση μετρώντας τον α με τον β περισσεύει ο $\gamma < \beta$. Στην συνέχεια μετρώντας τον β με τον γ περισσεύει ο $\delta < \gamma$ και ο δ μετρά τον γ. Τότε επειδή ο δ μετρά τον γ και ο γ μετρά τον $\beta - \delta$ (μετρώντας τον β με τον γ περισσεύει ο δ) έπεται ότι ο δ μετρά τον $\beta - \delta$. Άρα ο δ μετρά τον β. Ο β όμως μετρά τον $\alpha - \gamma$ (μετρώντας τον α με τον β περισσεύει ο γ) και άρα ο δ μετρά τον $\alpha - \gamma$. Παραπάνω δείξαμε ότι ο δ μετρά τον γ οπότε ο δ μετρά και τον α.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο δ μετρά τους α και β και άρα είναι ένα κοινό τους μέτρο.

Ισχυρίζομαι ότι ο δ είναι το μέγιστο κοινό μέτρο των α και β.

Πράγματι αν υποθέσουμε ότι ο δ δεν είναι το μέγιστο κοινό μέτρο των α και β τότε αυτό θα είναι ένας άλλος αριθμός, έστω ο ε με $\varepsilon > \delta$.

Επειδή τώρα ο ε μετρά τον β και ο β μετρά τον $\alpha - \gamma$ έπεται ότι ο ε μετρά τον $\alpha - \gamma$. Καθώς ο ε μετρά τον α έπεται ότι ο ε μετρά και τον γ. Ο γ μετρά τον $\beta - \delta$ (μετρώντας τον β με τον γ περισσεύει ο δ) οπότε και ο ε μετρά τον $\beta - \delta$. Όμως ο ε μετρά τον β και άρα μετρά και τον δ. Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς $\varepsilon > \delta$.

Συνεπώς, δεν υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος του δ που να είναι κοινό μέτρο των α και β. Έτσι $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = \delta$· όπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα 13 *Προφανώς, αν ένας αριθμός μετρά δύο άλλους τότε μετρά και το μέγιστο κοινό μέτρο τους.* Δ

Πρόταση 3 (Κατασκευή) (586) *Να βρεθεί το μέγιστο κοινό μέτρο τριών δοθέντων αριθμών* (στμ: ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους) *που δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους.*

Υλοποίηση: Έστω οι α, β και γ που δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους και των οποίων πρέπει να βρεθεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης.

Λαμβάνουμε (Π2, σελ. 176) τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των α και β και έστω ΜΚΔ$(\alpha, \beta) = \delta$. Για τον δ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις καθώς ο δ είτε μετρά τον γ είτε δεν τον μετρά.

$1^η$ περίπτωση: Ο δ μετρά τον γ.

Τότε ο δ μετρά τους α, β και γ και άρα είναι ένα κοινό τους μέτρο. Ισχυρίζομαι ότι ο δ είναι το μέγιστο κοινό μέτρο τους, δηλαδή ότι ΜΚΔ$(\alpha, \beta, \gamma) = \delta$.

Πράγματι αν δεν είναι, τότε θα υπάρχει ένας άλλος αριθμός, έστω ο ε με ΜΚΔ$(\alpha, \beta, \gamma) = \varepsilon$. Τότε όμως ο ε, καθώς μετρά τους α και β, μετρά και τον ΜΚΔ$(\alpha, \beta) = \delta$ (Πόρισμα Π2, σελ. 176). Άρα ο ε μετρά τον δ και $\varepsilon > \delta$. Αυτό όμως είναι αδύνατον.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος από τον δ που μετρά τους α, β και γ και άρα ΜΚΔ$(\alpha, \beta, \gamma) = \delta$.

$2^η$ περίπτωση: Οι δ δεν μετρά τον γ.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι οι γ και δ δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Πράγματι επειδή οι α, β και γ δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους υπάρχει ένας αριθμός που τους μετρά. Ο αριθμός αυτός, καθώς μετρά τους α και β μετρά και τον ΜΚΔ$(\alpha, \beta) = \delta$ (Πόρισμα Π2, σελ. 176). Επειδή μετρά και τον γ έπεται ότι οι γ και δ δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Στην συνέχεια λαμβάνουμε το μέγιστο κοινό μέτρο των γ και δ (Π2, σελ. 176) και έστω ΜΚΔ$(\gamma, \delta) = \varepsilon$. Επειδή ο ε μετρά τον δ που μετρά τους α και β έπεται ότι ο ε μετρά τους α και β. Καθώς λοιπόν ο ε μετρά τον γ ο ε είναι ένα κοινό μέτρο των α, β και γ.

Ισχυρίζομαι ότι ο ε είναι το μέγιστο κοινό μέτρο των α, β και γ δηλαδή ότι ΜΚΔ$(\alpha, \beta, \gamma) = \varepsilon$.

Πράγματι, αν ο ε δεν είναι το μέγιστο κοινό μέτρο των α, β και γ τότε αυτό είναι ένας άλλος αριθμός, έστω ο ζ με $\zeta > \varepsilon$. Τότε όμως ο ζ μετρά και τον ΜΚΔ$(\alpha, \beta) = \delta$ (Πόρισμα Π2, σελ. 176). Συνεπώς, ο ζ μετρά τους γ και δ και άρα μετρά και τον ΜΚΔ$(\gamma, \delta) = \varepsilon$ (Πόρισμα Π2, σελ. 176). Αυτό όμως είναι αδύνατον διότι $\zeta > \varepsilon$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος του ε που μετρά τους α, β και γ και άρα ΜΚΔ$(\alpha, \beta, \gamma) = \varepsilon$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 4 (586) *Ένας αριθμός που είναι μικρότερος από έναν άλλο είτε είναι μέρος του είτε είναι μέρη του.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι αριθμοί α και β ικανοποιούν την $\beta < \alpha$. Ισχυρίζομαι ότι ο β είτε είναι μέρος του α είτε είναι μέρη του α.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις καθώς οι α και β είτε είναι πρώτοι μεταξύ τους είτε όχι.

1η περίπτωση: Οι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Αν ο β χωριστεί στις μονάδες που τον αποτελούν κάθε μια από αυτές είναι μέρος του α και άρα ο β είναι μέρη του α.

2η περίπτωση: Οι α και β δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Ο β είτε μετρά είτε δεν μετρά τον α.

Αν ο β μετρά τον α τότε είναι μέρος του.

Αν ο β δεν μετρά τον α λαμβάνουμε σύμφωνα με την Π2, σελ. 176, το μέγιστο κοινό μέτρο (στμ: τον ΜΚΔ) των α και β και έστω ότι $\delta = \text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta)$.

Χάριν απλότητας υποθέτουμε ότι ο δ μετρά τρεις φορές τον β. Ενώ ο δ μετρά και τον α έστω κ φορές, με κ μεγαλύτερο του τρία, διότι $\alpha > \beta$ και με το τρία να μη μετρά το κ (αφού ο β δεν μετρά τον α). Έτσι ο β είναι τα τρία από τα κ μέρη του α δηλαδή $\beta = (3/\kappa)\alpha$.

Συνεπώς, κάθε αριθμός που είναι μικρότερος από έναν άλλο είτε είναι μέρος του είτε είναι μέρη του· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 5 (587) *Αν ένας αριθμός είναι μέρος ενός δεύτερου αριθμού και ένας τρίτος αριθμός είναι το ίδιο μέρος ενός τέταρτου αριθμού τότε το άθροισμα του αρχικού αριθμού και του τρίτου αριθμού είναι το ίδιο μέρος του αθροίσματος των δεύτερου και τέταρτου.* (στμ: Αν $\beta = \kappa \cdot \alpha$ και $\delta = \kappa \cdot \gamma$ τότε $\beta + \delta = \kappa \cdot (\alpha + \gamma)$).

Απόδειξη. Έστω οι αριθμοί α, β, γ και δ ώστε ο α να είναι μέρος του β και ο γ να είναι το ίδιο μέρος του δ. Ισχυρίζομαι ότι ο $\alpha + \gamma$ είναι το ίδιο μέρος του $\beta + \delta$.

Επειδή ο α είναι μέρος του β έπεται ότι ο β μετριέται από τον α, έστω κ φορές. Έτσι και ο δ μετριέται κ φορές από τον γ. Χάριν απλότητας υποθέτουμε ότι το κ είναι δύο. Τότε $\beta = \alpha + \alpha$ και $\delta = \gamma + \gamma$. Έτσι, στο άθροισμα $\beta + \delta$ υπάρχουν δύο αριθμοί ίσοι με $\alpha + \gamma$ δηλαδή $\beta + \delta = 2 \cdot (\alpha + \gamma)$.

Άρα ο $\beta + \delta$ μετριέται δύο φορές από τον $\alpha + \gamma$ και επομένως ο $\alpha + \gamma$ είναι το ίδιο μέρος του $\beta + \delta$ όπως ο α του γ και ο β του δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 6 (587) *Αν ένας αριθμός είναι μέρη ενός δεύτερου αριθμού και ένας τρίτος αριθμός είναι ίδια μέρη ενός τέταρτου αριθμού τότε το άθροισμα του αρχικού αριθμού και του τρίτου αριθμού είναι τα ίδια μέρη του αθροίσματος*

των δεύτερου και τέταρτου. (στμ: Αν $\alpha = (\kappa/\lambda)\beta$ και $\gamma = (\kappa/\lambda)\delta$ με $\alpha > \gamma$ τότε $\alpha + \gamma = (\kappa/\lambda)(\beta + \delta)$).

Απόδειξη. Έστω οι αριθμοί α, β, γ και δ ώστε οι α και γ να είναι τα ίδια μέρη των β και δ αντίστοιχα. Ισχυρίζομαι ότι όσα μέρη είναι ο α του β ίσα μέρη είναι και ο $\alpha + \gamma$ του $\beta + \delta$.

Χάριν απλότητας υποθέτουμε ότι ο α είναι τα $2/3$ του β οπότε και ο γ είναι τα $2/3$ του δ. Καθώς ο α είναι τα 2 από τα 3 μέρη του β αν $\beta = 3x$ τότε $\alpha = 2x$. Ομοίως, αν $\delta = 3y$ τότε $\gamma = 2y$.

Τότε από την Π5, σελ. 178, καθώς οι x και y είναι το ίδιο μέρος των α και γ αντίστοιχα, έπεται ότι το άθροισμα τους $x + y$ είναι το ίδιο μέρος του αθροίσματος $\alpha + \gamma$, δηλαδή $\alpha + \gamma = 2 \cdot (x + y)$.

Ομοίως, καθώς οι x και y είναι το ίδιο μέρος των β και δ αντίστοιχα, έπεται ότι ο $x + y$ είναι το ίδιο μέρος του $\beta + \delta$ δηλαδή $\beta + \delta = 3 \cdot (x + y)$.

Συνεπώς, ο $\alpha + \gamma$ είναι τα $2/3$ του $\beta + \delta$ όπως οι α και γ είναι τα $2/3$ των β και δ αντίστοιχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 7 (588) *Αν ένας αριθμός είναι μέρος ενός δεύτερου αριθμού και ένας τρίτος αριθμός είναι το ίδιο μέρος ενός τέταρτου αριθμού τότε η διαφορά του τέταρτου από τον δεύτερο αριθμό* (στμ: ο αρχικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του τρίτου και ο δεύτερος του τέταρτο) *είναι το ίδιο μέρος της διαφοράς του τρίτου από τον αρχικό αριθμό.* (στμ: Αν $\beta = \kappa \cdot \alpha$ και $\delta = \kappa \cdot \gamma$ με $\alpha > \gamma$ τότε $\beta - \delta = \kappa \cdot (\alpha - \gamma)$).

Απόδειξη. Έστω ότι ο α είναι μέρος του β και ότι ο γ είναι ίδιο μέρος του δ. Ισχυρίζομαι ότι ο $\alpha - \gamma$ είναι ίδιο μέρος του $\beta - \delta$.

Επειδή ο α είναι μέρος του β έπεται ότι ο β μετριέται από τον α, έστω κ φορές. Ομοίως, επειδή ο γ είναι το ίδιο μέρος του δ και ο δ μετριέται κ φορές από τον γ. Θεωρούμε τον αριθμό ε που μετριέται κ φορές από τον $\alpha - \gamma$. Άρα ο $\alpha - \gamma$ είναι το ίδιο μέρος του ε όπως ο γ του δ. Τότε από την Π5, σελ. 178, καθώς οι $\alpha - \gamma$ και γ είναι το ίδιο μέρος των ε και δ αντίστοιχα, έπεται ότι το άθροισμα τους $\alpha - \gamma + \gamma = \alpha$ είναι το ίδιο μέρος του αθροίσματος $\varepsilon + \delta$. Συνεπώς ο $\varepsilon + \delta$ μετριέται κ φορές από τον αριθμό α. Επειδή όμως και ο β μετριέται κ φορές από τον α είναι $\varepsilon + \delta = \beta$ ή $\varepsilon = \beta - \delta$.

Τελικά, ο $\beta - \delta$ μετριέται κ φορές από τον $\alpha - \gamma$ και άρα ο $\alpha - \gamma$ είναι το ίδιο μέρος του $\beta - \delta$ όπως είναι ο α του γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 8 (588) *Αν ένας αριθμός είναι μέρη ενός δεύτερου αριθμού και ένας τρίτος αριθμός είναι ίδια μέρη ενός τέταρτου αριθμού τότε η διαφορά του τρίτου από τον αρχικό αριθμό* (στμ: ο αρχικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του τρίτου και ο δεύτερος του τέταρτο) *είναι τα ίδια μέρη της διαφοράς του τέταρτου από τον δεύτερο.* (στμ: Αν $\alpha = (\kappa/\lambda)\beta$ και $\gamma = (\kappa/\lambda)\delta$ με $\alpha > \gamma$ τότε $\alpha - \gamma = (\kappa/\lambda)(\beta - \delta)$).

Απόδειξη. Έστω οι αριθμοί α, β, γ και δ ώστε οι α και γ να είναι τα ίδια μέρη των β και δ αντίστοιχα και $\alpha > \gamma$. Ισχυρίζομαι ότι όσα μέρη είναι ο α του β (στμ: και ο γ του δ) ίσα μέρη είναι και ο $\alpha - \gamma$ του $\beta - \delta$.

Χάριν απλότητας υποθέτουμε ότι ο α είναι τα $2/3$ του β οπότε και ο γ είναι τα $2/3$ του δ. Καθώς ο α είναι τα 2 από τα 3 μέρη του β αν $\beta = 3x$ τότε $\alpha = 2x$. Ομοίως, αν $\delta = 3y$ τότε $\gamma = 2y$. Επειδή $\beta > \delta$ (καθώς $\alpha > \gamma$) είναι και $x > y$. Από την Π7, σελ. 179, καθώς οι x και y είναι το ίδιο μέρος των α και γ αντίστοιχα, έπεται ότι και ο $x - y$ είναι το ίδιο μέρος του $\alpha - \gamma$, δηλαδή $\alpha - \gamma = 2 \cdot (x - y)$.

Ομοίως, καθώς οι x και y είναι το ίδιο μέρος των β και δ αντίστοιχα έπεται ότι ο $x - y$ είναι το ίδιο μέρος του $\beta - \delta$, δηλαδή $\beta - \delta = 3 \cdot (x - y)$.

Συνεπώς, ο $\alpha - \gamma$ είναι τα $2/3$ του $\beta - \delta$ όπως οι α και γ είναι τα $2/3$ των γ και δ αντίστοιχα· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 9 (589) *Αν ένας αριθμός είναι μέρος ενός δεύτερου αριθμού και ένας τρίτος αριθμός είναι το ίδιο μέρος ενός τέταρτου αριθμού τότε όσα μέρη ή μέρος του τρίτου είναι ο αρχικός αριθμός ίσα μέρη ή μέρος του τέταρτου είναι ο δεύτερος.*

Απόδειξη. Έστω οι αριθμοί α, β, γ και δ ώστε οι α και γ να είναι το ίδιο μέρος των β και δ αντίστοιχα. Ισχυρίζομαι ότι όσα μέρη ή μέρος είναι ο α του γ ίσα μέρη ή μέρος είναι και ο β του δ.

Καθώς οι α και γ είναι το ίδιο μέρος των β και δ αντίστοιχα, όσοι αριθμοί ίσοι με α περιέχονται στον β τόσοι είναι και οι αριθμοί που είναι ίσοι με γ και περιέχονται στον δ.

Χάριν απλότητας υποθέτουμε ότι στον β περιέχονται 2 αριθμοί ίσοι με α οπότε στον δ περιέχονται 2 αριθμοί ίσοι με γ. Δηλαδή ισχύουν $\beta = \alpha + \alpha$ και $\delta = \gamma + \gamma$. Από την Π5, σελ. 178 (και την Π6, σελ. 178) όμως έπεται ότι το άθροισμα $\alpha + \alpha$ είναι το ίδιο μέρος (ή μέρη) του αθροίσματος $\gamma + \gamma$ όπως ο α του γ.

Τελικά, καθώς $\beta = \alpha + \alpha$ και $\delta = y + y$, συμπεραίνουμε ότι οι β και δ είναι το ίδιο μέρος ή μέρη όπως είναι ο α του γ· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 10 (589) *Αν ένας αριθμός είναι μέρη ενός δεύτερου αριθμού και ένας τρίτος αριθμός είναι τα ίδια μέρη ενός τέταρτου αριθμού τότε όσα μέρη ή μέρος του τρίτου είναι ο αρχικός αριθμός ίσα μέρη ή μέρος του τέταρτου είναι ο δεύτερος.*

Απόδειξη. Έστω οι αριθμοί α, β, γ και δ ώστε οι α και γ να είναι τα ίδια μέρη των β και δ αντίστοιχα. Ισχυρίζομαι ότι όσα μέρη ή μέρος είναι ο α του γ ίσα μέρη ή μέρος είναι και ο β του δ.

Χάριν απλότητας υποθέτουμε ότι οι α και γ είναι τα $2/3$ των β και δ αντίστοιχα. Καθώς ο α είναι τα 2 από τα 3 μέρη του β αν $\beta = x + x + x$ τότε $\alpha = x + x$. Ομοίως, αν $\delta = y + y + y$ τότε $\gamma = y + y$. Άρα οι x και

y είναι το ίδιο μέρος των β και δ αντίστοιχα. Τότε από την Π9, σελ. 180 έπεται ότι το άθροισμα $x + x$ είναι το ίδιο μέρος ή μέρη του αθροίσματος $y + y$ όπως ο β του δ.

Καθώς $\alpha = x + x$ και $\gamma = y + y$ συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι α και β είναι το ίδιο μέρος ή μέρη των γ και δ αντίστοιχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 11 (590) *Σε μια αναλογία δύο ίσων λόγων, ο λόγος της διαφοράς των αριθμητών προς την διαφορά των παρονομαστών είναι ίσος με κάθε έναν από τους ίσους λόγους της αναλογίας.*

Απόδειξη. Έστω οι αριθμοί α, β, γ και δ ώστε $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ με $\alpha > \gamma$ και $\beta > \delta$. Ισχυρίζομαι ότι

$$\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Επειδή $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ καθώς οι α και β είναι ανάλογοι των β και δ έπεται ότι ό,τι μέρος (αντίστοιχα μέρη) του β είναι ο α ίδιο μέρος (αντίστοιχα μέρη) του δ είναι ο γ (Ορ21, σελ. 175). Από την Π7, σελ. 179 (αντίστοιχα Π8, σελ. 179) συμπεραίνουμε ότι το ίδιο μέρος (αντίστοιχα μέρη) του $\beta - \delta$ είναι ο $\alpha - \gamma$.

Συνεπώς έπεται ότι

$$\frac{\beta - \delta}{\alpha - \gamma} = \frac{\alpha}{\beta},$$

(Ορ 21, σελ. 175)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 12 (590) *Αν υπάρχουν οσοιδήποτε αριθμοί σε μια αναλογία τότε κάθε ένας από τους ίσους λόγους της αναλογίας είναι ίσος με τον λόγο του αθροίσματος των ηγούμενων όρων* (στμ: των αριθμητών) *προς το άθροισμα των επόμενων όρων* (στμ: των παρονομαστών)[13].

Απόδειξη. Έστω οι τέσσαρες αριθμοί α, β, γ και δ που βρίσκονται στην αναλογία $\alpha/\beta = \gamma/\delta$. Ισχυρίζομαι ότι ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}.$$

Πράγματι επειδή $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ έπεται ότι ό,τι μέρος (αντίστοιχα μέρη) είναι ο α του β το ίδιο μέρος (αντίστοιχα μέρη) είναι ο γ του δ (Ορ21, σελ. 175).

Από την Π6, σελ. 178 (αντίστοιχα Π7, σελ. 179), καθώς ό,τι μέρος (αντίστοιχα μέρη) είναι ο α του β το ίδιο μέρος (αντίστοιχα μέρη) είναι ο γ του δ, προκύπτει ότι το ίδιο μέρος (αντίστοιχα μέρη) είναι και ο $\alpha + \gamma$ του $\beta + \delta$.

---

13. Στμ: Η Π12, σελ. 181 είναι ισοδύναμη με την Π12 του Β5, σελ. 133.

Συνεπώς,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta},$$

όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 13 (591) *Αν τέσσαρες αριθμοί είναι σε αναλογία τότε οι ενδιάμεσοι όροι της αναλογίας μπορούν να αλλάξουν θέση μεταξύ τους*[14].

Απόδειξη. Έστω οι τέσσαρες αριθμοί α, β, γ και δ που βρίσκονται στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Ισχυρίζομαι ότι ισχύει $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$.

Πράγματι, επειδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ό,τι μέρος (αντίστοιχα μέρη) είναι ο α του β το ίδιο μέρος (αντίστοιχα μέρη) είναι ο γ του δ. (Ορ21, σελ. 175). Από την Π10, σελ. 180 όμως έπεται ότι ό,τι μέρος (αντίστοιχα μέρη) είναι ο α του γ το ίδιο μέρος (αντίστοιχα μέρη) είναι ο β του δ.

Συνεπώς, $\alpha/\gamma = \beta/\delta$· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 14 (591) *Σε μια αναλογία οσωνδήποτε ίσων λόγων οι δι' ίσου όροι* (στμ: εφόσον υπάρχουν τέτοιοι) *έχουν λόγο ίσο με τους λόγους της αναλογίας*[15].

Απόδειξη. Έστω οι αριθμοί α, β, γ, δ, ε και ζ ώστε να ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

Ισχυρίζομαι ότι $\alpha/\gamma = \delta/\zeta$.

Πράγματι, επειδή $\alpha/\beta = \delta/\varepsilon$ προκύπτει ότι $\alpha/\delta = \beta/\varepsilon$ (Π13, σελ. 182). Ομοίως είναι και $\beta/\varepsilon = \gamma/\zeta$. Έτσι, $\alpha/\delta = \gamma/\zeta$ οπότε και πάλι σύμφωνα με την Π13, σελ. 182 παίρνουμε $\alpha/\gamma = \delta/\zeta$· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 15 (591) *Αν ένας αριθμός μετριέται από την μονάδα και ένας άλλος αριθμός μετριέται ίσες φορές από έναν άλλο αριθμό τότε η μονάδα μετρά τον τρίτο αριθμό όσες φορές μετρά ο δεύτερος τον τέταρτο*.

Απόδειξη. Έστω ο αριθμός α που προφανώς μετριέται από την μονάδα α φορές και ο β που μετριέται α φορές από τον αριθμό γ. Ισχυρίζομαι ότι όσες φορές μετρά η μονάδα τον γ ίσες φορές μετρά και ο α τον β.

Πράγματι, επειδή $\alpha = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{\alpha\ \text{φορές}}$ και $\beta = \underbrace{\gamma+\gamma+\gamma+\ldots+\gamma}_{\alpha\ \text{φορές}}$

από την Π12, σελ. 181 έχουμε

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} = \ldots = \frac{1}{\gamma} = \frac{\overbrace{1+1+\ldots+1}^{\alpha\ \text{φορές}}}{\underbrace{\gamma+\gamma+\ldots+\gamma}_{\alpha\ \text{φορές}}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

---

14. Στμ: Η Π13, σελ. 182 είναι ισοδύναμη με την Π16 του Β5, σελ. 134.

15. Στμ: Η Π14, σελ. 182 είναι ισοδύναμη με την Π22 του Β5, σελ. 137.

Δηλαδή ισχύει $1/\gamma = \alpha/\beta$ και άρα όσες φορές μετρά η μονάδα τον γ ίσες φορές μετρά ο α τον β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 16 (αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού) (592) *Αν δυο αριθμοί α και β πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους τότε τα γινόμενα που προκύπτουν, δηλαδή τα $\alpha \cdot \beta$ και $\beta \cdot \alpha$ είναι ίσα.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι αριθμοί α και β πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους και έστω ότι προκύπτουν τα γινόμενα $\alpha \cdot \beta = \gamma$ και $\beta \cdot \alpha = \delta$. Ισχυρίζομαι ότι $\gamma = \delta$.

Επειδή $\alpha \cdot \beta = \gamma$, ο β μετρά α φορές τον γ. Προφανώς ο αριθμός α μετριέται α φορές από την μονάδα. Άρα οι 1 και β μετρούν ίσες φορές (δηλαδή α φορές) τους α και γ αντίστοιχα. Τότε από την Π15, σελ. 182 έπεται ότι η μονάδα και ο α μετρούν ίσες φορές τους β και γ αντίστοιχα και μάλιστα ισχύει $1/\beta = \alpha/\gamma$. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι $1/\beta = \alpha/\delta$. Συνεπώς,

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha}{\gamma}$$

από όπου προκύπτει ότι $\gamma = \delta$.

Άρα $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 17 (απλοποίηση κλάσματος) (592) *Άν ένας αριθμός πολλαπλασιάζει δύο άλλους αριθμούς τότε τα γινόμενα που προκύπτουν έχουν λόγο ίσο με τους δυο αριθμούς.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο α πολλαπλασιάζει τους β και γ ώστε $\alpha \cdot \beta = \delta$ και $\alpha \cdot \gamma = \varepsilon$. Ισχυρίζομαι ότι $\delta/\varepsilon = \beta/\gamma$.

Επειδή $\alpha \cdot \beta = \delta$ έπεται ότι ο β μετρά α φορές τον δ και καθώς $\alpha = \alpha \cdot 1$ παίρνουμε $1/\alpha = \beta/\delta$ (Ορ21, σελ. 175). Ομοίως προκύπτει και ότι $1/\alpha = \gamma/\varepsilon$.

Συνεπώς, $\beta/\delta = \gamma/\varepsilon$ οπότε προκύπτει ότι $\beta/\gamma = \delta/\varepsilon$ (Π13, σελ. 182)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 18 (593) *Αν δύο αριθμοί πολλαπλασιαστούν επί έναν άλλο αριθμό τότε ο λόγος των γινομένων που προκύπτουν είναι ίσος με τον λόγο των δύο αρχικών αριθμών.*

Απόδειξη. Έστω α και β οι δυο αριθμοί και $\alpha \cdot \gamma = \delta$ και $\beta \cdot \gamma = \varepsilon$. Ισχυρίζομαι ότι $\delta/\varepsilon = \alpha/\beta$.

Πράγματι, καθώς $\alpha \cdot \gamma = \delta$ λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού (Π16, σελ. 183) είναι και $\gamma \cdot \alpha = \delta$. Ομοίως προκύπτει και ότι $\beta \cdot \gamma = \gamma \cdot \beta = \varepsilon$. Άρα ο αριθμός γ πολλαπλασιαζόμενος επί τους α και β δίνει δ και ε αντίστοιχα και άρα

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\gamma \cdot \alpha}{\gamma \cdot \beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

(Π17, σελ. 183)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 19 (χιαστί γινόμενα ίσων κλασμάτων) (593) *Αν τέσσαρες αριθμοί είναι σε αναλογία τότε το γινόμενο του πρώτου επί τον τέταρτο είναι ίσο με το γινόμενο του δεύτερου επί τον τρίτο και αντιστρόφως.*

Απόδειξη. Έστω οι τέσσαρες αριθμοί α, β, γ και δ που είναι σε αναλογία, δηλαδή ισχύει $\alpha/\beta = \gamma/\delta$. Έστω ακόμα ότι $\alpha \cdot \delta = \varepsilon$ και $\beta \cdot \gamma = \zeta$.

(Ευθύ) Ισχυρίζομαι ότι είναι $\varepsilon = \zeta$. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι $\alpha \cdot \gamma = \eta$ τότε από την Π17, σελ. 183 έπεται ότι $\gamma/\delta = \eta/\varepsilon$ και καθώς $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ είναι και $\alpha/\beta = \eta/\varepsilon$.

Επειδή πάλι $\alpha \cdot \gamma = \eta$ και $\beta \cdot \gamma = \zeta$ υπάρχουν δυο αριθμοί, οι α και β, που όταν πολλαπλασιαστούν επί τον γ δίνουν τους η και ζ ανίστοιχα και άρα από την Π18, σελ. 183 έπεται ότι $\alpha/\beta = \eta/\zeta$. Αλλά $\alpha/\beta = \eta/\varepsilon$ και επομένως ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\eta}{\zeta} = \frac{\eta}{\varepsilon},$$

και έτσι καθώς το η σχηματίζει ίσους λόγους με τα ζ και ε συμπεραίνουμε ότι $\zeta = \varepsilon$ (Β5, Π9, σελ. 132).

(Αντίστροφο) Έστω ότι $\varepsilon = \zeta$. Ισχυρίζομαι ότι είναι και $\alpha/\beta = \gamma/\delta$.

Όπως παραπάνω, υποθέτουμε ότι $\alpha \cdot \gamma = \eta$, $\alpha \cdot \delta = \varepsilon$ και $\beta \cdot \gamma = \zeta$. Τότε επειδή $\varepsilon = \zeta$ είναι και $\eta/\varepsilon = \eta/\zeta$ καθώς ίσα μεγέθη σχηματίζουν ίσους λόγους με ένα τρίτο μέγεθος (Β5, Π7, σελ. 131).

Από την Π17, σελ. 183 είναι $\eta/\varepsilon = \gamma/\delta$ ενώ από την Π18, σελ. 183 αντίστοιχα προκύπτει ότι $\eta/\zeta = \alpha/\beta$.

Έτσι, $\alpha/\beta = \gamma/\delta$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 20 (594) *Οι ελάχιστοι από τους αριθμούς που έχουν λόγο ίσο με τον λόγο δύο άλλων αριθμών μετρούν ίσες φορές τους αριθμούς αυτούς. Ο μικρότερος τον μικρότερο και ο μεγαλύτερος τον μεγαλύτερο.*

Απόδειξη. Έστω κ και λ οι ελάχιστοι από τους αριθμούς που έχουν λόγο ίσο με τον λόγο α/β, δηλαδή ισχύει $\kappa/\lambda = \alpha/\beta$ με $\kappa < \alpha$ και $\lambda < \beta$. Ισχυρίζομαι ότι οι κ και λ μετρούν ίσες φορές τους α και β αντίστοιχα.

Πράγματι αν υποθέσουμε ότι ο κ δεν είναι μέρος αλλά είναι μέρη του α (στμ: και άρα δεν τον μετρά) τότε και ο λ είναι τα ίδια μέρη του β, αφού $\kappa/\alpha = \lambda/\beta$ (Π13, σελ. 182 και Ορ21, σελ. 175).

Χάριν απλότητας υποθέτουμε ότι οι κ και λ είναι τα $2/3$ των α και β αντίστοιχα. Δηλαδή ότι ισχύουν $\kappa = (2/3)\alpha$ και $\lambda = (2/3)\beta$.

Διαιρούμε τον κ σε δυο από τα τρία ίσα μέρη του α και έστω x το καθένα από αυτά, οπότε $\kappa = x + x$. Ομοίως, διαιρούμε τον λ σε δυο από τα τρία ίσα μέρη του β και έστω y το καθένα από αυτά, οπότε $\lambda = y + y$. Τότε από την Π12, σελ. 181 έχουμε

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{y} = \frac{x+x}{y+y} = \frac{\kappa}{\lambda}.$$

Άρα

$$\frac{x}{y} = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha}{\beta},$$

με $x < \kappa$, $y < \lambda$.

Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς οι κ και λ είναι οι ελάχιστοι από τους αριθμούς που έχουν λόγο ίσο με α/β.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο κ δεν είναι μέρη του α και άρα από την Π4, σελ. 178 έπεται ότι ο κ είναι μέρος του α. Από την Π13, σελ. 182 προκύπτει δε ότι και ο λ είναι το ίδιο μέρος του β.

Συνεπώς, οι κ και λ μετρούν ίσες φορές τους α και β αντίστοιχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 21 (594) *Οι αριθμοί που είναι πρώτοι μεταξύ τους είναι οι ελάχιστοι από τους αριθμούς που έχουν λόγο ίσο με τον λόγο τους.*

Απόδειξη. Έστω οι α και β πρώτοι μεταξύ τους. Ισχυρίζομαι ότι οι α και β είναι οι ελάχιστοι από τους αριθμούς που έχουν λόγο ίσο με α/β.

Πράγματι αν δεν είναι οι α και β ελάχιστοι με λόγο ίσο με α/β τότε υπάρχουν αριθμοί, έστω οι γ και δ, με $\gamma/\delta = \alpha/\beta$, $\gamma < \alpha$ και $\delta < \beta$.

Από την Π20, σελ. 184 έπεται ότι οι γ και δ μετρούν ίσες φορές τους α και β αντίστοιχα. Έστω ότι ο γ μετρά κ φορές τον α οπότε και ο δ μετρά κ φορές τον β. Τότε από την Π15, σελ. 182 έπεται ότι και ο κ μετρά γ φορές (δηλαδή όσες μονάδες υπάρχουν στον γ) τον α. Ομοίως αποδεικνύεται ότι ο κ μετρά δ φορές τον β. Έτσι ο κ μετρά τους α και β κάτι που είναι αδύνατον καθώς είναι πρώτοι μεταξύ τους (Ορ13, σελ. 174).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχουν αριθμοί μικρότεροι των α και β που να έχουν λόγο ίσο με α/β. Και άρα οι α και β είναι οι ελάχιστοι με λόγο ίσο με α/β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 22 (595) *Οι ελάχιστοι από τους αριθμούς που έχουν λόγο ίσο με αυτούς είναι πρώτοι μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Έστω α και β οι ελάχιστοι από τους αριθμούς που έχουν λόγο ίσο με α/β. Ισχυρίζομαι ότι οι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Πράγματι, αν δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε θα έχουν κοινό μέτρο έναν αριθμό (στμ: εκτός της μονάδας) έστω τον γ. Έστω ότι ο γ μετρά δ φορές τον α και ε φορές τον β.

Τότε $\gamma \cdot \delta = \alpha$ και $\gamma \cdot \varepsilon = \beta$ (Ορ16, σελ. 174) και άρα $\delta/\varepsilon = \alpha/\beta$ (Π17, σελ. 183).

Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς $\delta < \alpha$ και $\varepsilon < \beta$ διότι, σύμφωνα με την υπόθεση, οι α και β είναι οι ελάχιστοι από τους αριθμούς με λόγο ίσο με α/β.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει αριθμός που να μετρά τους α και β (στμ: εκτός από τη μονάδα) που είναι πρώτοι μεταξύ τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 23 (595) *Αν δυο αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε ένας αριθμός που μετρά τον έναν από αυτούς θα είναι πρώτος προς τον άλλον.*

Απόδειξη. Έστω οι α και β που είναι πρώτοι μεταξύ τους και έστω ότι ο γ μετρά τον α. Ισχυρίζομαι ότι οι β και γ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Πράγματι αν υποθέσουμε ότι οι β και γ δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε υπάρχει ένας αριθμός (στμ: εκτός της μονάδας) που τους μετρά, έστω ο δ. Επειδή ο δ μετρά τον γ και ο γ μετρά τον α έπεται ότι ο δ μετρά τον α. Και άρα ο δ μετρά τους α και β. Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς οι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει κοινό μέτρο για τους β και γ που είναι πρώτοι μεταξύ τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 24 (596) *Αν δυο αριθμοί είναι πρώτοι προς έναν άλλο αριθμό τότε το γινόμενό τους είναι αριθμός πρώτος προς αυτόν.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι α και β είναι πρώτοι προς τον γ και ότι $\alpha \cdot \beta = \delta$. Ισχυρίζομαι ότι οι γ και δ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Αν υποθέσουμε ότι οι γ και δ δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε θα έχουν κοινό μέτρο τον αριθμό ε (στμ: που δεν είναι η μονάδα). Επειδή οι α και γ είναι πρώτοι μεταξύ τους και ο ε μετρά τον γ από την Π23, σελ. 186 έπεται ότι οι α και ε είναι πρώτοι μεταξύ τους. Όσες φορές μετρά ο ε τον δ, έστω ζ, τόσες φορές μετρά και ο ζ τον δ (Π15, σελ. 182). Έτσι, έπεται ότι $\varepsilon \cdot \zeta = \delta$ (Ορ15, σελ. 174).

Αλλά $\alpha \cdot \beta = \delta$ και επομένως είναι $\alpha \cdot \beta = \varepsilon \cdot \zeta$, οπότε από την Π19, σελ. 184 συμπεραίνουμε ότι $\varepsilon / \alpha = \beta / \zeta$.

Οι α και ε είναι πρώτοι μεταξύ τους και άρα είναι οι ελάχιστοι από τους αριθμούς που έχουν λόγο ίσο με ε / α και μετρούν ίσες φορές τους β και ζ αντίστοιχα σύμφωνα με την Π20, σελ. 184. Ο ε λοιπόν μετρά τον β ενώ μετρά και τον γ. Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς οι β και γ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Άρα οι γ και δ δεν έχουν κοινό μέτρο και άρα είναι πρώτοι μεταξύ τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 25 (596) *Αν δυο αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε το τετράγωνο του ενός από αυτούς είναι αριθμός πρώτος προς τον άλλον.*

Απόδειξη. Έστω οι α και β πρώτοι μεταξύ τους και $\alpha \cdot \alpha = \gamma$. Ισχυρίζομαι ότι οι β και γ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Λαμβάνουμε τον αριθμό $\delta = \alpha$. Καθώς οι α και β είναι πρώοι μεταξύ τους έπεται ότι και οι β και δ είναι πρώτοι μεταξύ τους. Έτσι κάθε ένας από τους α και δ είναι αριθμός πρώτος προς τον β. Τότε, από την Π24, σελ. 186, έπεται ότι και το γινόμενο τους $\alpha \cdot \delta$ είναι αριθμός πρώτος προς τον β. Έτσι, καθώς $\gamma = \delta \cdot \alpha$ (διότι $\alpha = \delta$) έπεται ότι οι γ και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Άρα, ο $\alpha \cdot \alpha$ είναι πρώτος προς τον β· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 26 (596) *Αν δυο αριθμοί είναι και οι δύο πρώτοι προς κάθε έναν από δυο άλλους αριθμούς τότε το γινόμενό τους είναι αριθμός πρώτος προς το γινόμενο των δυο άλλων αριθμών.*

Απόδειξη. Έστω οι αριθμοί α, β που είναι και οι δύο πρώτοι προς κάθε έναν από τους γ, δ. Έστω ακόμα ότι $\alpha \cdot \beta = \varepsilon$ και $\gamma \cdot \delta = \zeta$. Ισχυρίζομαι ότι οι ε, ζ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Επειδή οι α και γ είναι πρώτοι μεταξύ τους όπως και οι β και γ από την Π24, σελ. 186 έπεται ότι και ο $\alpha \cdot \beta = \varepsilon$ είναι πρώτος προς τον γ. Ομοίως αποδεικνύεται ότι και οι ε, δ είναι πρώτοι μεταξύ τους. Άρα κάθε ένας από τους γ, δ είναι αριθμός πρώτος προς τον ε και άρα και το γινόμενό τους $\gamma \cdot \delta = \zeta$ είναι πρώτος προς τον ε (Π24, σελ. 186).

Συνεπώς, οι ε και ζ είναι πρώτοι μεταξύ τους· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 27 (597) *Αν δυο αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους όταν ο καθένας από αυτούς πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του τότε οι αριθμοί που προκύπτουν* (στμ: τα τετράγωνα των δυο αριθμών) *είναι πρώτοι μεταξύ τους.*

Αν οι αρχικοί αριθμοί πολλαπλασιαστούν με τα παραπάνω γινόμενα τότε οι αριθμοί που προκύπτουν (στμ: οι κύβοι των αρχικών αριθμών) *είναι πρώτοι μεταξύ τους. Και πάντοτε περί τους άκρους συμβαίνει αυτό.*

Απόδειξη. Έστω οι α και β που είναι πρώτοι μεταξύ τους. Έστω ακόμα ότι $\alpha \cdot \alpha = \gamma$, $\gamma \cdot \gamma = \delta$, $\beta \cdot \beta = \varepsilon$ και $\varepsilon \cdot \varepsilon = \zeta$ (στμ: δηλαδή $\delta = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$ και $\zeta = \beta \cdot \beta \cdot \beta$). Ισχυρίζομαι ότι οι γ και ε είναι πρώτοι μεταξύ τους και ότι οι δ και ζ είναι επίσης πρώτοι μεταξύ τους.

Επειδή οι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους και $\alpha \cdot \alpha = \gamma$ από την Π25, σελ. 186 έπεται ότι και οι β και γ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Ομοίως επειδή οι β και γ είναι πρώτοι μεταξύ τους και $\beta \cdot \beta = \varepsilon$, οι γ και ε είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Έτσι οι α και γ είναι και οι δύο πρώτοι προς κάθε έναν από τους β και ε και άρα από την Π26, σελ. 187 έπεται ότι το γινόμενο $\alpha \cdot \gamma$ είναι αριθμός πρώτος προς το γινόμενο $\beta \cdot \varepsilon$. Καθώς όμως $\alpha \cdot \gamma = \delta$ και $\beta \cdot \varepsilon = \zeta$ έπεται ότι οι δ και ζ είναι πρώτοι μεταξύ τους· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 28 (597) *Αν δυο αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε και το άθροισμά τους είναι αριθμός πρώτος προς κάθε έναν από αυτούς. Και αντιστρόφως αν το άθροισμα δυο αριθμών είναι αριθμός πρώτος προς οποιονδήποτε από αυτούς τότε οι αριθμοί αυτοί είναι πρώτοι μεταξύ τους.*

Απόδειξη. (Ευθύ) Έστω ότι οι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους. Αν $\gamma = \alpha + \beta$ ισχυρίζομαι ότι ο γ είναι πρώτος προς κάθε έναν από τους α και β.

Αν υποθέσουμε ότι οι γ και α δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε υπάρχει ένας αριθμός (στμ: όχι το 1) που θα τους μετρά. Έστω δ αυτός αριθμός.

Τότε ο δ μετρά τους γ και α και άρα μετρά και τον β. Άρα ο δ μετρά τους α και β που είναι πρώτοι μεταξύ τους. Αυτό όμως είναι αδύνατον. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι γ και α είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι οι γ και β είναι πρώτοι μεταξύ τους. Συνεπώς, ο γ είναι πρώτος προς κάθε έναν από τους α και β.

(Αντίστροφο) Έστω α και β δυο αριθμοί και έστω $\gamma = \alpha + \beta$. Αν οι γ και α είναι πρώτοι μεταξύ τους ισχυρίζομαι ότι και οι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Πράγματι, αν οι α και β δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε έπεται ότι υπάρχει κάποιος αριθμός (στμ: όχι το 1) , έστω ο δ που τους μετρά. Τότε ο δ μετρά και το άθροισμά τους $\alpha + \beta = \gamma$ και άρα ο δ μετρά τους α και γ που είναι πρώτοι μεταξύ τους. Αυτό όμως είναι αδύνατον.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει αριθμός (στμ: εκτός από τη μονάδα) που να μετρά τους α και β, άρα είναι πρώτοι μεταξύ τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 29 (598) *Ένας αριθμός που είναι πρώτος είναι πρώτος και προς κάθε αριθμό που δεν μετρά.*

Απόδειξη. Έστω ο πρώτος α που δεν μετρά τον β. Ισχυρίζομαι ότι οι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Πράγματι, αν οι α και β δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε υπάρχει ένας αριθμός (στμ: όχι το 1), έστω ο γ, που τους μετρά. Επειδή ο γ μετρά τον β και ο α δεν μετρά τον β συμπεραίνουμε ότι ογ είναι διαφορετικός από τον α. Ο γ λοιπόν μετρά τον α που είναι πρώτος και δεν είναι ίσος με τον α. Αυτό όμως είναι αδύνατον.

Συνεπώς, δεν υπάρχει αριθμός (στμ: εκτός της μονάδας) που να μετρά τους α και β, άρα είναι πρώτοι μεταξύ τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 30 (δ πρώτος και $\delta|\alpha\beta \Rightarrow$ ($\delta|\alpha$ ή $\delta|\beta$) (598) *Αν ένας πρώτος μετρά το γινόμενο δυο άλλων αριθμών τότε μετρά και τον έναν από αυτούς.*

Απόδειξη. Έστω οι αριθμοί α και β με $\alpha \cdot \beta = \gamma$. Έστω ακόμα ότι ο γ μετριέται από τον πρώτο δ. Ισχυρίζομαι ότι ο δ μετρά έναν από τους α και β.

Υποθέτουμε ότι ο δ δεν μετρά τον α. Καθώς ο δ είναι πρώτος έπεται από την Π29, σελ. 188 ότι οι α και δ είναι πρώτοι μεταξύ τους. Έστω ότι ο δ μετρά ε φορές τον γ. Τότε από την Π15, σελ. 182 έπεται ότι $\delta \cdot \varepsilon = \gamma = \alpha \cdot \beta$. Έτσι, από την Π19, σελ. 184, είναι $\delta/\alpha = \beta/\varepsilon$. Καθώς όμως οι δ και α είναι πρώτοι μεταξύ τους έπεται ότι αυτοί είναι οι ελάχιστοι με λόγο ίσο με δ/α (Π21, σελ. 185). Επιπλέον, από την Π20, σελ. 184, προκύπτει ότι οι δ και α μετρούν ίσες φορές τους β και ε αντίστοιχα. Συνεπώς ο δ μετρά τον β.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι αν ο δ δεν μετρά τον β τότε μετρά τον α.

Συνεπώς, ο δ μετρά τον έναν από τους α και β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 31 (ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων) (599) *Κάθε σύνθετος αριθμός μετριέται από έναν πρώτο αριθμό.*

Απόδειξη. Έστω ο σύνθετος αριθμός α. Ισχυρίζομαι ότι ο α μετριέται από έναν πρώτο αριθμό.

Καθώς ο α είναι σύνθετος θα μετριέται από κάποιον αριθμό, έστω τον β. Αν ο β είναι πρώτος η πρόταση έχει αποδειχθεί. Αν πάλι ο β είναι σύνθετος τότε θα τον μετρά ένας άλλος αριθμός, έστω ο γ. Αν ο γ είναι πρώτος τότε η πρόταση έχει αποδειχθεί. Αν ο γ είναι σύνθετος τότε θα τον μετρά ένας άλλος αριθμός που είναι είτε πρώτος είτε σύνθετος. Επαναλαμβάνοντας τον παραπάνω συλλογισμό στο τέλος καταλήγουμε σε έναν πρώτο αριθμό που μετρά τον α.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι δεν γίνει αυτό, τότε θα μετρούν τον α άπειροι αριθμοί από τους οποίους ο καθένας είναι μικρότερος από τον προηγούμενό του. Αλλά αυτό είναι αδύνατον στους αριθμούς.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στο τέλος θα ληφθεί ένας πρώτος αριθμός που μετρά τον προηγούμενό του, ο οποίος μετρά και τον α.

Συνεπώς, κάθε σύνθετος αριθμός μετριέται από έναν πρώτο αριθμό· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 32 (599) *Κάθε αριθμός είτε είναι πρώτος είτε μετριέται από έναν πρώτο αριθμό.*

Απόδειξη. Έστω ο αριθμός α. Ισχυρίζομαι ότι είτε ο α είναι πρώτος είτε ο α μετριέται από έναν πρώτο αριθμό.

Αν ο α είναι πρώτος η πρόταση έχει αποδειχθεί. Αν ο α είναι σύνθετος τότε θα τον μετρά ένας πρώτος αριθμός σύμφωνα με την Π31, σελ. 189.

Συνεπώς, ένας αριθμός είτε είναι πρώτος είτε τον μετρά ένας πρώτος αριθμός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 33 (Κατασκευή) (600) *Δοθέντων οσωνδήποτε αριθμών να βρεθούν οι ελάχιστοι αριθμοί που έχουν ίσους λόγους προς αυτούς.*

Υλοποίηση: Έστω ότι δίνονται οι αριθμοί α, β και γ. Πρέπει να βρεθούν οι ελάχιστοι αριθμοί που έχουν ίσους λόγους προς τους α, β και γ.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις καθώς οι α, β και γ είτε είναι πρώτοι μεταξύ τους είτε όχι.

$1^η$ περίπτωση: Οι α, β και γ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Τότε από την Π21, σελ. 185 έπεται ότι αυτοί είναι και οι ελάχιστοι αριθμοί που έχουν ίσους λόγους προς τους α, β και γ.

$2^η$ περίπτωση: Οι $α$, $β$ και $γ$ δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Λαμβάνουμε τον ΜΚΔ των $α$, $β$ και $γ$ (Π3, σελ. 177) και έστω ότι ΜΚΔ$(α, β, γ) = δ$. Έστω ότι ο $δ$ μετρά $ε$ φορές τον $α$, $ζ$ φορές τον $β$ και $η$ φορές τον $γ$.

Τότε από την Π15, σελ. 182 έπεται ότι οι οι $ε$, $ζ$ και $η$ μετρούν ίσες φορές τους $α$, $β$ και $γ$ και άρα (Ορ21, σελ. 175) ισχύει

$$\frac{ε}{α} = \frac{ζ}{β} = \frac{η}{γ}.$$

Ισχυρίζομαι ότι οι $ε$, $ζ$ και $η$ είναι οι ελάχιστοι αριθμοί που σχηματίζουν τους παραπάνω λόγους.

Αν δεν είναι αυτοί οι ελάχιστοι τότε θα υπάρχουν οι αριθμοί $θ$, $κ$ και $λ$ με $θ < ε$, $κ < ζ$ και $λ < η$ ώστε

$$\frac{θ}{α} = \frac{κ}{β} = \frac{λ}{γ}$$

και οι οποίοι μετρούν ίσες φορές, έστω $μ$, τους $α$, $β$ και $γ$ (στμ: η περίπτωση κάποιος από τους $θ$, $κ$, $λ$ να είναι ίσος με κάποιον από τους $ε$, $ζ$, $η$ δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει και δεν εξετάζεται. Διότι αν για παράδειγμα $λ = η$ τότε $λ/γ = η/γ$ άρα $κ/β = λ/γ = η/γ = ζ/β$, συνεπώς και $κ = ζ$, και ομοίως $θ = ε$).

Από την Π15, σελ. 182 έπεται τότε ότι και ο $μ$ θα μετρά $θ$ φορές τον $α$, $κ$ φορές τον $β$ και $λ$ φορές τον $γ$. Έτσι, ο $μ$ μετρά τους $α$, $β$ και $γ$ και επειδή ο $θ$ μετρά $μ$ φορές τον $α$ είναι $θ \cdot μ = α$ (Ορ16, σελ. 174), όμως $ε \cdot δ = α$ και άρα είναι $θ \cdot μ = ε \cdot δ$. Οπότε από την Π19, σελ. 184 προκύπτει ότι $ε/θ = μ/δ$.

Τότε, επειδή $ε > θ$ είναι και $μ > δ$ (Π13, σελ. 182 και Β5, Π14, σελ. 134).

Άρα ο $μ$ μετρά τους $α, β$ και $γ$ και είναι μεγαλύτερος από τον ΜΚΔ$(α, β, γ)$. Αυτό όμως είναι αδύνατον.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχουν αριθμοί μικρότεροι από τους $ε$, $ζ$ και $η$ που να έχουν ίσους λόγους προς τους $α$, $β$ και $γ$ αντίστοιχα.

Συνεπώς, οι $ε$, $ζ$ και $η$ είναι οι ελάχιστοι αριθμοί για τους οποίους ισχύει ότι $ε/α = ζ/β = η/γ$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 34 (Κατασκευή. Αλγόριθμος υπολογισμού του ΕΚΠ.) (600) *Δοθέντων δύο αριθμών να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός που μετρούν* (στμ: το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους).

Υλοποίηση: Έστω ότι οι δοθέντες αριθμοί είναι οι $α$ και $β$ των οποίων πρέπει να βρεθεί το ΕΚΠ.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, καθώς οι $α$ και $β$ είτε θα είναι πρώτοι μεταξύ τους είτε όχι.

$1^η$ περίπτωση: Οι $α$ και $β$ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Έστω ότι $\alpha \cdot \beta = \gamma$ οπότε είναι και $\beta \cdot \alpha = \gamma$ (Π16, σελ. 183). Ενώ οι α και β μετρούν τον γ (Ορ16, σελ. 174). Ισχυρίζομαι ότι ο γ είναι ο ελάχιστος που μετρούν οι α και β.

Πράγματι, αν ο ελάχιστος που μετρούν οι α και β δεν είναι ο γ τότε αυτός θα είναι ένας άλλος αριθμός, έστω ο δ με $\delta < \gamma$.

Έστω ακόμα ότι ο α μετρά ε φορές τον δ και ότι ο β μετρά ζ φορές τον δ. Τότε είναι $\alpha \cdot \varepsilon = \delta$ και $\beta \cdot \zeta = \delta$ (Ορ16, σελ. 174) οπότε $\alpha \cdot \varepsilon = \beta \cdot \zeta$. Από την Π19, σελ. 184 έπεται ότι $\alpha/\beta = \zeta/\varepsilon$. Καθώς όμως οι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους είναι οι ελάχιστοι από τους αριθμούς που έχουν λόγο ίσο με α/β και επιπλέον μετρούν ίσες φορές τους ζ και ε αντίστοιχα (Π21, σελ. 185).

Ακόμα επειδή $\alpha \cdot \beta = \gamma$ και $\alpha \cdot \varepsilon = \delta$ είναι και $\beta/\varepsilon = \gamma/\delta$ (Π17, σελ. 183). Τότε καθώς ο β μετρά τον ε και ο γ μετρά τον δ (Ορ21, σελ. 175). Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς $\delta < \gamma$.

Συμπεραίνουμε ότι οι α και β δεν μετρούν αριθμό μικρότερο του γ και άρα ΕΚΠ$(\alpha, \beta) = \gamma$.

$2^{η}$ περίπτωση: Οι α και β δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Λαμβάνουμε τους ελάχιστους αριθμούς ζ και ε που έχουν λόγο ίσο με α/β (Π33, σελ. 189). Δηλαδή ισχύει

$$\frac{\zeta}{\varepsilon} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{9}$$

Τότε από την Π19, σελ. 184 έπεται ότι $\alpha \cdot \varepsilon = \beta \cdot \zeta$. Αν $\alpha \cdot \varepsilon = \gamma$ τότε είναι και $\beta \cdot \zeta = \gamma$ οπότε οι α και β μετρούν τον γ.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι ο γ είναι ο ελάχιστος αριθμός που μετρούν οι α και β.

Πράγματι αν αυτός δεν είναι ο γ θα είναι ένας άλλος αριθμός, έστω ο δ με $\delta < \gamma$. Έστω ακόμα ότι ο α μετρά η φορές τον δ και ότι ο β μετρά θ φορές τον δ. Τότε $\alpha \cdot \eta = \delta$ και $\beta \cdot \theta = \delta$ (Ορ16, σελ. 174) οπότε είναι $\alpha \cdot \eta = \beta \cdot \theta$ και άρα $\alpha/\beta = \theta/\eta$ (Π19, σελ. 184). Έτσι, λόγω της (9) παίρνουμε $\zeta/\varepsilon = \theta/\eta = \alpha/\beta$ με τους ζ και ε να είναι οι ελάχιστοι από τους αριθμούς με λόγο ίσο με α/β. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο ζ μετρά τον θ και ο ε τον η. Επειδή $\alpha \cdot \varepsilon = \gamma$ και $\alpha \cdot \eta = \delta$ είναι και $\varepsilon/\eta = \gamma/\delta$ (Π17, σελ. 183) και καθώς ο ε μετρά τον η, ο γ μετρά τον δ (Ορ21, σελ. 175). Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς $\delta < \gamma$.

Άρα οι α και β δεν μετρούν αριθμό μικρότερο του γ και επομένως ΕΚΠ$(\alpha, \beta) = \gamma$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 35 (601) *Αν δυο αριθμοί μετρούν έναν άλλο αριθμό τότε και ο ελάχιστος αριθμός που μετρούν* (στμ: το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους) *μετρά τον αριθμό αυτό.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι α και β μετρούν τον γ. Αν ΕΚΠ$(\alpha, \beta) = \varepsilon$ ισχυρίζομαι ότι ο ε μετρά τον γ.

Αν υποθέσουμε ότι ο ε δεν μετρά τον γ τότε υπάρχουν οι αριθμοί γ_1 και γ_2 τέτοιοι ώστε $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, ο ε να μετρά τον γ_1 και $\gamma_2 < \varepsilon$.

Οι α και β μετρούν τον ε και αυτός μετρά τον γ_1. Καθώς όμως οι α και β μετρούν και τον γ έπεται ότι μετρούν και τον γ_2 κάτι που είναι αδύνατον καθώς $\gamma_2 < \varepsilon$.

Συνεπώς, ο ε μετρά τον γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 36 (Κατασκευή) (602) *Δοθέντων τριών αριθμών να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός που μετρούν* (στμ: το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους).

Υλοποίηση: Έστω οι α, β και γ των οποίων πρέπει να βρεθεί το ΕΚΠ.

Καταρχήν λαμβάνουμε το ΕΚΠ των α και β (Π34, σελ. 190) και έστω ότι ΕΚΠ$(\alpha, \beta) = \delta$. Τότε ο γ είτε μετρά είτε δεν μετρά τον δ.

$1^η$ περίπτωση: ο γ μετρά τον δ.

Τότε οι α, β και γ μετρούν τον δ. Ισχυρίζομαι τώρα ότι ο δ είναι το ΕΚΠ(α, β, γ).

Πράγματι αν δεν είναι ο δ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α, β και γ τότε ΕΚΠ$(\alpha, \beta, \gamma) = \varepsilon$ με $\varepsilon < \delta$. Τότε οι α και β μετρούν τον ε και άρα και ο δ μετρά τον ε (Π35, σελ. 191). Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς $\varepsilon < \delta$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι α, β και γ δεν μετράνε άλλο αριθμό μικρότερο του δ και άρα ΕΚΠ$(\alpha, \beta, \gamma) = \delta$.

$2^η$ περίπτωση: ο γ δεν μετρά τον δ.

Λαμβάνουμε το ΕΚΠ των γ και δ (Π34, σελ. 190) και έστω ότι ΕΚΠ$(\gamma, \delta) = \varepsilon$. Τότε επειδή οι α και β μετρούν τον ε καθώς μετρούν τον δ και ο δ μετρά τον ε. Τον ε όμως τον μετρά και γ οπότε οι α, β και γ μετρούν τον ε.

Ισχυρίζομαι ότι ο ε είναι ο ελάχιστος αριθμός που μετρούν, δηλαδή ότι ΕΚΠ$(\alpha, \beta, \gamma) = \varepsilon$.

Πράγματι αν ΕΚΠ$(\alpha, \beta, \gamma) = \zeta$ με $\zeta < \varepsilon$ τότε οι α, β και γ μετρούν τον ζ. Και άρα το ΕΚΠ$(\alpha, \beta) = \delta$ μετρά τον ζ (Π35, σελ. 191). Τον ζ όμως τον μετρά και ο γ οπότε οι γ και δ μετρούν τον ζ. Τότε όμως το ΕΚΠ$(\gamma, \delta) = \varepsilon$ μετρά τον ζ (Π35, σελ. 191), κάτι που είναι αδύνατον καθώς $\zeta < \varepsilon$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει αριθμός μικρότερος του ε που να τον μετρούν οι α, β και γ και άρα ο $\varepsilon =$ ΕΚΠ(α, β, γ)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Στμ: στις επόμενες δυο προτάσεις ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τον όρο «ομώνυμος» για την περιγραφή ενός μέρους ενός αριθμού που μετριέται από κάποιον άλλο. Επειδή ο όρος δεν περιλαμβάνεται στους ορισμούς αυτού του βιβλίου τον εξηγούμε εδώ.

Όταν ένας αριθμός α μετριέται κ φορές από τον β φορές τότε $\alpha = \kappa \cdot \beta$ και $\alpha/\beta = \kappa/1$ ενώ λέμε ότι «ο α έχει μέρος τον κ ομώνυμο προς το μέρος του β».

Πρόταση 37 (602) *Αν ένας αριθμός μετρά έναν άλλο τότε ο μετρούμενος έχει κάποιο μέρος ομώνυμο προς τον μετρούντα.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο β μετρά κ φορές τον α. Προφανώς ο κ μετριέται από την μονάδα κ φορές.

Άρα οι 1 και β μετρούν ίσες φορές τους κ και α οπότε από την Π15, σελ. 182 έπεται ότι η μονάδα μετρά τον β ίσες φορές όπως ο κ τον α. Έτσι ισχύει $1/\beta = \kappa/\alpha$. Δηλαδή ο α έχει μέρος τον κ που είναι ομώνυμος προς τον β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 38 (603) *Κάθε αριθμός που έχει ως μέρος του έναν άλλο αριθμό, έχει αριθμό, ομώνυμο προς τον αριθμό που είναι μέρος του, ο οποίος τον μετρά.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο α έχει μέρος τον β και έστω ο γ που είναι ομώνυμος προς τον β. Ισχυρίζομαι ότι ο γ μετρά τον α.

Επειδή ο β, που είναι μέρος του α, είναι ομώνυμος προς τον γ έπεται ότι $\alpha/\beta = \gamma/1$.

Τότε όμως οι 1 και β μετρούν ίσες φορές τους γ και α αντίστοιχα οπότε από την Π15, σελ. 182 συμπεραίνουμε ότι οι 1 και γ μετρούν ίσες φορές τους β και α αντίστοιχα.

Συνεπώς, ο γ μετρά τον α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 39 (Κατασκευή) (603) *Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός που περιέχει δοθέντα μέρη.*

Υλοποίηση: Έστω ότι δίνονται οι αριθμοί α, β και γ. Πρέπει να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός που περιέχει τα α, β και γ.

Έστω οι αριθμοί δ, ε και ζ που είναι ομώνυμοι των α, β και γ αντίστοιχα. Αν η είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δ, ε και ζ τότε από την Π37, σελ. 193 έπεται ότι ο η έχει μέρη ομώνυμα προς τους δ, ε και ζ. Καθώς αυτοί είναι ομώνυμοι προς τους α, β και γ αντίστοιχα συμπεραίνουμε ότι ο η έχει μέρη τους α, β και γ.

Ισχυρίζομαι ότι ο η είναι και ο ελάχιστος από τους αριθμούς που περιέχουν ως μέρη τους α, β και γ.

Πράγματι, αν δεν είναι τότε θα υπάρχει ένας άλλος αριθμός, έστω ο θ με $\theta < \eta$ που να περιέχει τους α, β και γ. Τότε όμως από την Π38, σελ. 193 έπεται ότι ο θ μετριέται από αριθμούς ομώνυμους προς τους α, β και γ. Και καθώς οι δ, ε και ζ είναι ομώνυμοι προς τους α, β και γ αντίστοιχα συμπεραίνουμε ότι ο θ μετριέται από τους δ, ε και ζ. Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς $\theta < \eta$ και $\eta = \text{ΕΚΠ}(\delta, \varepsilon, \zeta)$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει αριθμός μικρότερος του η που να έχει μέρη τους α, β και γ. Έτσι ο η είναι ο ελάχιστος αριθμός που έχει μέρη τους α, β και γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Θυμαρίδας ο Πάριος: Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Ο Θυμαρίδας ο Πάριος εκτός από τον ορισμό της μονάδας ως supremum που είδαμε στην αρχή του τρέχοντος βιβλίου ήταν γνωστός για τη δουλειά του στους πρώτους (τους οποίους αποκαλούσε «ευθύγραμμους», αφού δεν έχουν παράγοντες ώστε να μπορούν να θεωρηθούν εμβαδά παραλληλογράμμων) και στην επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Το έργο του έχει χαθεί. Διασώζεται μόνο (από τον Ιάμβλιχο στο «Ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή») ένα συγκεκριμένου τύπου σύστημα, η επίλυση του οποίου ονομάζεται «Θυμαρίδειο Επάνθημα». Και παρόλο που η διατύπωσή του είναι γεωμετρική η απόδειξή του είναι καθαρά αλγεβρική:

Θεώρημα (Θυμαρίδειο Επάνθημα). *Αν το άθροισμα n ποσοτήτων είναι δοσμένο καθώς και το άθροισμα μιας από αυτές τις ποσότητες με κάθε άλλη, τότε η ποσότητα αυτή είναι η διαφορά των αθροισμάτων των ζευγών από το συνολικό άθροισμα δια* $(n-2)$.

Δηλαδή σε σύγχονο συμβολισμό αν

$$\begin{cases} x + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = s \\ x + x_1 = s_1 \\ x + x_2 = s_2 \\ \vdots \\ x + x_{n-1} = s_{n-1} \end{cases}$$

τότε

$$x = \frac{(s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}) - s}{n-2}.$$

Στη συνέχεια ο Ιάμβλιχος περιγράφει πώς κάποια συστήματα γραμμικών εξισώσεων που δεν είναι σε αυτή τη μορφή μπορούν να αναχθούν σε αυτή, και άρα να λυθούν.

Βιβλίο 8ο

Πρόταση 1 (605) *Αριθμοί σε συνεχή αναλογία με τον πρώτο και τον τελευταίο να είναι πρώτοι μεταξύ τους είναι οι ελάχιστοι με αυτές τις αναλογίες.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι σε συνεχή αναλογία, δηλαδή θεωρούμε τους λόγους

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{\gamma}{\delta},$$

και ότι ο α και ο δ είναι μεταξύ τους πρώτοι. Αν δεν είναι ελάχιστοι με αυτή την ιδιότητα υπάρχουν $\varepsilon, \zeta, \eta, \theta$ ώστε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\zeta}{\eta}, \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\eta}{\theta},$$

και $\varepsilon < \alpha$, $\zeta < \beta$, $\eta < \gamma$ και $\delta < \theta$. Έτσι (Β7, Π14, σελ. 182) ισχύει ότι οι δι᾽ ίσου λόγοι είναι ίσοι: $\alpha/\delta = \varepsilon/\theta$. Αλλά οι α και δ είναι πρώτοι μεταξύ τους και άρα είναι οι ελάχιστοι με αυτή την αναλογία (Β7, Π21, σελ. 185). Δηλαδή (Β7, Π20, σελ. 184) ο α μετρά τον ε και ο δ τον θ. Άρα $\alpha \leq \varepsilon$ και $\delta \leq \theta$ το οποίο είναι άτοπο. Δεν είναι λοιπόν οι $\varepsilon, \zeta, \eta, \theta$ μικρότεροι των $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με τις ίδιες αναλογίες, δηλαδή οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι οι ελάχιστοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

$\alpha/\beta = \varepsilon/\zeta$, $\beta/\gamma = \zeta/\eta$, $\gamma/\delta = \eta/\theta \Rightarrow \varepsilon/\theta = \alpha/\delta$ ανάγωγο. Άρα $\alpha|\varepsilon \Rightarrow \alpha \leq \varepsilon$ και $\delta|\theta \Rightarrow \delta \leq \theta$ άτοπο.

Πρόταση 2 (605) *Να βρεθούν οσοιδήποτε και αν ζητηθούν ελάχιστοι αριθμοί σε συνεχή αναλογία με λόγο ίσο με δοσμένο λόγο.*

Απόδειξη. Ας είναι α/β ο δοσμένος λόγος με ελάχιστους όρους (στμ: ανάγωγο κλάσμα). (στμ: θα δείξουμε ότι οι όροι της μορφής:

$$\alpha^2,\ \alpha\beta,\ \beta^2$$

$$\alpha^3,\ \alpha^2\beta,\ \alpha\beta^2,\ \beta^3$$

$$\alpha^4,\ \alpha^3\beta,\ \alpha^2\beta^2,\ \alpha\beta^3,\ \beta^4$$

κοκ, ικανοποιούν το ζητούμενο.) Ας υποθέσουμε ότι μας ζητείται να βρούμε τρεις ή τέσσαρες όρους σε συνεχή αναλογία με λόγους ίσους με α/β. Θεωρούμε τους $\gamma = \alpha\alpha$, $\delta = \alpha\beta$, $\varepsilon = \beta\beta$, $\zeta = \alpha\gamma = \alpha\alpha\alpha$, $\eta = \beta\gamma = \alpha\alpha\beta$, $\theta = \alpha\varepsilon = \alpha\beta\beta$, $\kappa = \beta\varepsilon = \beta\beta\beta$. Ισχύει $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ (Β7, Π17, σελ. 183)

Γράφουμε $x \wedge y$ για το ΜΚΔ(x, y) και $x \vee y$ για το ΕΚΠ(x, y).

$\frac{\alpha^4}{\alpha^3\beta} = \frac{\alpha^3\beta}{\alpha^2\beta^2} = \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha\beta^3} = \frac{\alpha\beta^3}{\beta^4} = \alpha/\beta$. Επίσης $\alpha \wedge \beta = 1$ άρα $\alpha^4 \wedge \beta^4 = 1$ οπότε (Π1, σελ. 195) οι α^4, $\alpha^3\beta$, $\alpha^2\beta^2$, $\alpha\beta^3$, β^4 είναι ελάχιστοι.

και $\alpha/\beta = \delta/\varepsilon$ (Β7, Π18, σελ. 183). Οπότε $\alpha/\beta = \gamma/\delta = \delta/\varepsilon$. Ομοίως $\gamma/\delta = \zeta/\eta$ (Β7, Π17, σελ. 183). Άρα $\alpha/\beta = \zeta/\eta$. Ομοίως $\delta/\varepsilon = \eta/\theta$ (Β7, Π17, σελ. 183). Συνεπώς $\alpha/\beta = \eta/\theta$. Τέλος $\alpha/\beta = \theta/\kappa$ (Β7, Π18, σελ. 183). Έτσι

$$\alpha/\beta = \gamma/\delta = \delta/\varepsilon \qquad \text{και} \qquad \alpha/\beta = \zeta/\eta = \eta/\theta = \theta/\kappa.$$

Άρα οι τρεις γ, δ, ε και τέσσαρες ζ, η, θ, κ έχουν σε συνεχή αναλογία λόγο ίσο με α/β.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι είναι και οι ελάχιστοι. Οι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους ως οι ελάχιστοι με αυτόν τον λόγο (Β7, Π22, σελ. 185). Άρα πρώτοι μεταξύ τους είναι και ο γ με τον ε καθώς και ζ με τον κ, αφού $\gamma = \alpha\alpha$, $\varepsilon = \beta\beta$ και $\zeta = \alpha\alpha\alpha$, $\kappa = \beta\beta\beta$ (Β7, Π27, σελ. 187). Άρα οι γ, δ, ε είναι ελάχιστοι καθώς και οι ζ, η, θ, κ (Π1, σελ. 195)· όπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα 14 Αν τρεις αριθμοί είναι σε συνεχή αναλογία και είναι οι ελάχιστοι με αυτόν τον λόγο τότε οι άκροι είναι τέλεια τετράγωνα. Αν τέσσαρες αριθμοί είναι σε συνεχή αναλογία και είναι οι ελάχιστοι με αυτόν τον λόγο τότε οι άκροι είναι κύβοι. *Δ*

Πρόταση 3 (606) *Αν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία είναι οι ελάχιστοι ώστε να σχηματίζουν ίσους λόγους, τότε οι άκροι είναι πρώτοι μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Έστω ότι για παράδειγμα δίνονται τέσσαρες αριθμοί α, β, γ, δ οι οποίοι σε συνεχή αναλογία σχηματίζουν ίσους λόγους, δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$$

και οι οποίοι είναι οι ελάχιστοι *τέσσαρες* με αυτή την ιδιότητα. Θεωρούμε ελάχιστους αριθμούς ε και ζ (Β7, Π33, σελ. 189) ώστε να ισχύει

$$\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Αν ε, ζ ελάχιστοι με λόγο ίσο με τον κοινό λόγο τότε οι ε^3, $\varepsilon^2\zeta$, $\varepsilon\zeta^2$ και ζ^3 είναι ελάχιστοι σε συνεχή αναλογία και λόγο ε/ζ. Και επειδή και οι α, β, γ, δ είναι ελάχιστοι θα ισχύει $\alpha = \varepsilon^3$ και $\delta = \zeta^3$.

Τότε οι ε και ζ είναι μεταξύ τους πρώτοι (στμ: αλλιώς υπάρχουν μικρότεροι με τον ίδιο λόγο) (Β7, Π22, σελ. 185). Σχηματίζουμε τώρα από τους ε και ζ τόσους αριθμούς όσοι και οι α, β, γ, δ (στμ: όπως περιγράφηκε στην Π3, σελ. 196). Οπότε για τέσσαρες αριθμούς σχηματίζουμε τους $\lambda = \varepsilon\varepsilon\varepsilon$, $\mu = \varepsilon\varepsilon\zeta$, $\nu = \varepsilon\zeta\zeta$ και $\xi = \zeta\zeta\zeta$. Έτσι και οι α, β, γ, δ και οι λ, μ, ν, ξ είναι οι ελάχιστοι τέσσαρες με τον ίδιο λόγο συνεπώς $\alpha = \lambda = \varepsilon\varepsilon\varepsilon$ και $\delta = \xi = \zeta\zeta\zeta$, οπότε είναι και πρώτοι μεταξύ τους, αφού οι ε και ζ είναι πρώτοι μεταξύ τους· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 4 (607) *Αν δοθούν οσοιδήποτε λόγοι με ελάχιστους αριθμούς* (στμ: δηλαδή ανάγωγα κλάσματα) *να βρεθούν ελάχιστοι αριθμοί σε συνεχή αναλογία και λόγους ίσους με τους δοθέντες.*

(στμ: για παράδειγμα για τους δύο λόγους $2/3$ και $5/6$ τα κλάσματα $10/15$ και $15/18$ είναι ίσα με τα προηγούμενα και με τους ελάχιστους αριθμούς ώστε να είναι σε συνεχή αναλογία.)

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τους αριθμούς α, β, γ, δ, ε, ζ ώστε τα κλάσματα α/β, γ/δ και ε/ζ έχουν ελάχιστους όρους (στμ: δηλαδή είναι ανάγωγα). Βρίσκουμε τον ελάχιστο αριθμό η μετρούμενο και από το β και από το γ (στμ: δηλαδή $\eta = \text{ΕΚΠ}(\beta, \gamma)$) (Β7, Π34, σελ. 190). Θέτουμε

$$\theta = \frac{\eta}{\beta}\alpha, \quad \text{και} \quad \kappa = \frac{\eta}{\gamma}\delta.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η: ο ε μετρά τον κ (στμ: δηλαδή ο κ είναι πολλαπλάσιο του ε).

Θέτουμε $\lambda = (\kappa/\varepsilon)\zeta$. Έτσι έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\theta}{\eta} \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\eta}{\kappa} \quad \text{και} \quad \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\kappa}{\lambda}$$

(Β7, Ορ21, σελ. 175). Έτσι οι αριθμοί θ, η, κ και λ σχηματίζουν λόγους σε συνεχή αναλογία ίσους με τα α/β, γ/δ και ε/ζ. Ισχυρίζομαι τώρα ότι είναι και ελάχιστοι. Αν όχι, έστω οι ν, ξ, μ και $ο$, οι οποίοι σε συνεχή αναλογία έχουν ίσους λόγους με τους αρχικούς και $\nu < \theta$, $\xi < \eta$, $\mu < \kappa$, $ο < \lambda$. Άρα $\alpha/\beta = \nu/\xi$. Αλλά οι α και β είναι ελάχιστοι με αυτόν τον λόγο (στμ: δηλαδή είναι ανάγωγο κλάσμα) θα πρέπει ο α να μετρά τον ν και ο β τον ξ (Β7, Π20, σελ. 184). Ομοίως, επειδή $\gamma/\delta = \xi/\mu$ ο γ μετρά τον ξ. Άρα ο β και ο γ μετρούν τον ξ. Αλλά ο ελάχιστος που μετρούν είναι ο η άρα ο η μετράει τον ξ (Β7, Π35, σελ. 191). Αλλά αυτό είναι άτοπο, αφού $\xi < \eta$.

Περίπτωση 2η: ο ε δεν μετρά τον κ (στμ: δηλαδή ο κ δεν είναι πολλαπλάσιο του ε).

Θεωρούμε τον ελάχιστο μ που μετρά ο ε και ο κ. (στμ: δηλαδή ο μ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των ε και κ). Θέτουμε $\nu = (\mu/\kappa)\theta$ και $\xi = (\mu/\kappa)\eta$ και $ο = (\mu/\varepsilon)\zeta$. Έτσι $\theta/\nu = \kappa/\mu$ και $\eta/\xi = \kappa/\mu$ άρα $\theta/\nu = \eta/\xi$ οπότε $\theta/\eta = \nu/\xi$ (Β7, Π13, σελ. 182 και Ορ21, σελ. 175). Αλλά $\theta/\eta = \alpha/\beta$ άρα $\alpha/\beta = \nu/\xi$. Ομοίως $\gamma/\delta = \xi/\mu$.

Πάλι, αφού $ο = (\mu/\varepsilon)\zeta$ ισχύει $\varepsilon/\zeta = \mu/ο$ (Β7, Π13, σελ. 182 και Ορ21, σελ. 175). Άρα οι ν, ξ, μ και $ο$ σε συνεχή αναλογία έχουν ίσους λόγους με τους αρχικούς. Ισχυρίζομαι ότι είναι και ελάχιστοι. Αν όχι έστω οι π, ρ, σ και τ με $\pi < \nu$, $\rho < \xi$, $\sigma < \mu$, $\tau < ο$, οι οποίοι σε συνεχή αναλογία έχουν ίδιους λόγους με τους αρχικούς. Έτσι $\alpha/\beta = \pi/\rho$ και οι α, β είναι ελάχιστοι με αυτόν τον λόγο, άρα ο β μετρά τον ρ. Για τον ίδιο λόγο και ο γ μετρά τον ρ άρα και ο ελάχιστος που μετρούν οι β, γ, δηλαδή ο η μετρά τον ρ (Β7, Π35, σελ. 191). Αλλά $\rho/\sigma = \gamma/\delta = \xi/\mu = \eta/\kappa$ άρα $\eta/\rho = \kappa/\sigma$,

Για τέσσαρες αριθμούς α, β, γ, δ παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^{\frac{\beta \vee \gamma}{\beta}}}{\beta \vee \gamma}, \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\beta \vee \gamma}{\delta^{\frac{\beta \vee \gamma}{\gamma}}}$$

Για έξι αριθμούς α, β, γ, δ, ε, ζ παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^{\frac{\beta \vee \gamma}{\beta}}\left(\varepsilon \vee \left(\delta^{\frac{\beta \vee \gamma}{\gamma}}\right)\right)}{(\beta \vee \gamma)\left(\varepsilon \vee \left(\delta^{\frac{\beta \vee \gamma}{\gamma}}\right)\right)}$$

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{(\beta \vee \gamma)\left(\varepsilon \vee \left(\delta^{\frac{\beta \vee \gamma}{\gamma}}\right)\right)}{\delta^{\frac{\beta \vee \gamma}{\gamma}}\left(\varepsilon \vee \left(\delta^{\frac{\beta \vee \gamma}{\gamma}}\right)\right)}$$

$$\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\delta^{\frac{\beta \vee \gamma}{\gamma}}\left(\varepsilon \vee \left(\delta^{\frac{\beta \vee \gamma}{\gamma}}\right)\right)}{\zeta\delta^{\frac{\beta \vee \gamma}{\gamma}}\frac{\varepsilon \vee \left(\delta^{\frac{\beta \vee \gamma}{\gamma}}\right)}{\varepsilon}}.$$

Ομοίως για περισσότερους.

συνεπώς και ο κ μετρά τον σ. Αλλά και ο ε μετρά τον σ, αφού $\varepsilon/\zeta = \sigma/\tau$ και οι ε και ζ είναι ελάχιστοι με αυτόν τον λόγο. Έτσι και ο ε και ο κ μετρά τον σ άρα και ο ελάχιστος μετρούμενός τους μ (στμ: το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους) μετρά τον σ. Αλλά αυτό είναι αδύνατο αφού $\sigma < \mu$· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 5 (608) *Οι επίπεδοι αριθμοί έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με το γινόμενο των λόγων των αντιστοίχων πλευρών τους.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι αριθμοί α και β έχουν πλευρές γ, δ και ε, ζ αντίστοιχα. Ισχυρίζομαι ότι $\alpha/\beta = (\gamma/\varepsilon)(\delta/\zeta)$. Έστω οι αριθμοί η, θ, κ οι οποίοι είναι οι ελάχιστοι που σε συνεχή αναλογία έχουν ίσους λόγους με τους γ/ε και δ/ζ. Έτσι $\eta/\theta = \gamma/\varepsilon$ και $\theta/\kappa = \delta/\zeta$ (Π4, σελ. 196). Επίσης θέτουμε $\lambda = \delta\varepsilon$.

Ισχύει $\eta/\theta = \gamma/\varepsilon = \alpha/\lambda$, αφού $\alpha = \gamma\delta$ (Β7, Π17, σελ. 183). Ομοίως $\theta/\kappa = \delta/\zeta = \lambda/\beta$, αφού $\beta = \varepsilon\zeta$. Άρα $\eta/\theta = \alpha/\lambda$ και $\theta/\kappa = \lambda/\beta$, οπότε είναι ίσοι και οι δι᾽ ίσου λόγοι, δηλαδή $\eta/\kappa = \alpha/\beta$. Αλλά ο η/κ είναι ο δι᾽ ίσου λόγος των $\eta/\theta = \gamma/\varepsilon$ και $\theta/\kappa = \delta/\zeta$, δηλαδή $\eta/\kappa = (\gamma/\varepsilon)(\delta/\zeta)$· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 6 (609) *Αν έχουμε οσουσδήποτε αριθμούς σε συνεχή αναλογία και ο πρώτος δεν μετρά τον δεύτερο τότε κανείς δεν μετρά κανέναν.*

Απόδειξη. Έστω ότι έχουμε τους αριθμούς α, β, γ, δ, ε ώστε ο α δεν μετρά τον β και

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Το ότι κανείς δεν μετρά τον προηγούμενο ή τον επόμενό του είναι φανερό γιατί ούτε ο α μετρά τον β.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο α μετρά τον γ. Και όσοι είναι οι αριθμοί από τον α στον γ ας ληφθούν τόσοι αριθμοί ζ, η, θ ελάχιστοι με τους ίδιους λόγους: $\alpha/\beta = \zeta/\eta$, $\beta/\gamma = \eta/\theta$ (Β7, Π33, σελ. 189). Άρα και οι δι᾽ ίσου είναι ίσοι, δηλαδή $\alpha/\gamma = \zeta/\theta$ (Β7, Π14, σελ. 182). Αφού ο α δεν μετρά τον β δεν θα μετρά και ο ζ τον η. Άρα ο ζ δεν είναι 1 (διότι η μονάδα μετρά κάθε αριθμό). Επίσης οι ζ και θ είναι πρώτοι μεταξύ τους (Π3, σελ. 196), και αφού $\zeta \neq 1$, ο ζ δεν μετρά τον θ. Αλλά αφού $\zeta/\theta = \alpha/\gamma$ ούτε ο α μετρά τον γ το οποίο είναι άτοπο· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 7 (609) *Σε οσουσδήποτε αριθμούς σε συνεχή αναλογία, αν ο πρώτος μετρά τον τελευταίο, τότε ο πρώτος μετρά και τον δεύτερο.*

Απόδειξη. Αν έχουν δοθεί οσοιδήποτε αριθμοί α, β, γ, δ σε συνεχή αναλογία με τον α να μετρά τον δ τότε ο α μετρά και τον β. Διότι αν όχι τότε κανείς από τους αριθμούς δεν θα έπρεπε να μετρά κανέναν (Π6, σελ. 198), αλλά ο α μετρά τον δ· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 8 (610) *Αν δυο αριθμοί έχουν ίδιους λόγους με δύο άλλους αριθμούς, τότε όσοι αριθμοί σε συνεχή αναλογία παρεμβληθούν μεταξύ των δύο πρώτων τόσοι μπορούν να παρεμβληθούν σε συνεχή αναλογία ανάμεσα στους δύο δεύτερους.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε τους αριθμούς α, β και ε, ζ ώστε $\alpha/\beta = \varepsilon/\zeta$. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι ανάμεσα στους α και β παρεμβάλλονται σε συνεχή αναλογία οσοιδήποτε αριθμοί, έστω δύο, οι γ και δ· δηλαδή ισχύει

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\delta}{\beta}.$$

Ισχυρίζομαι ότι ακριβώς το ίδιο πλήθος μπορεί να παρεμβληθεί σε συνεχή αναλογία ανάμεσα στους ε και ζ.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε τους αριθμούς η, θ, κ, λ ελάχιστοι ώστε να έχουν τον ίδιο λόγο με τους α, γ, δ, β (Β7, Π33, σελ. 189), οπότε οι άκροι η και λ είναι μεταξύ τους πρώτοι (Π3, σελ. 196). Αφού οι η, θ, κ, λ έχουν τον ίδιο λόγο με τους α, γ, δ, β οι δι᾽ ίσου λόγοι θα είναι ίσοι, δηλαδή $\alpha/\beta = \eta/\lambda$ (Β7, Π14, σελ. 182). Αλλά $\alpha/\beta = \varepsilon/\zeta$, οπότε

$$\alpha/\beta = \eta/\lambda = \varepsilon/\zeta.$$

Οι η, λ είναι πρώτοι μεταξύ τους άρα είναι ελάχιστοι με αυτόν τον λόγο (στμ: το κλάσμα τους είναι ανάγωγο) (Β7, Π20, σελ. 184). Οπότε όσες φορές μετρά ο η τον ε τόσες φορές μετρά ο λ τον ζ. Θέτουμε $\mu = (\varepsilon/\eta)\theta$ και $\nu = (\varepsilon/\eta)\kappa$, δηλαδή όσες φορές μετρά ο η τον ε τόσες φορές μετρά ο θ τον μ. Ομοίως και για τα κ και ν.

Έτσι οι η, θ, κ, λ μετρούν ίσα τους ε, μ, ν, ζ (Β7, Π21, σελ. 185). Οι η, θ, κ, λ έχουν τους ίδιους λόγους με τους α, γ, δ, β. Άρα και οι α, γ, δ, β έχουν τους ίδιους λόγους με τους ε, μ, ν, ζ. Συνεπώς όπως οι α, γ, δ, β είναι σε συνεχή αναλογία είναι και οι ε, μ, ν, ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 9 (610) *Αν ανάμεσα σε δύο αριθμούς που είναι μεταξύ τους πρώτοι παρεμβάλλονται οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία, τόσοι μπορούν να παρεμβληθούν ανάμεσα σε καθέναν από αυτούς τους δύο αριθμούς και της μονάδας.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι αριθμοί α και β είναι μεταξύ τους πρώτοι, και ας παρεμβάλλονται σε συνεχή αναλογία ανάμεσά τους οι γ και δ και έστω ε η μονάδα. Ισχυρίζομαι ότι όσοι αριθμοί παρεμβάλλονται σε συνεχή αναλογία ανάμεσα στον α και β τόσοι μπορούν να παρεμβληθούν σε συνεχή αναλογία ανάμεσα σε καθέναν από αυτούς και στη μονάδα.

Θεωρούμε ελάχιστους ζ και η με λόγο ίσο με τους λόγους των α, γ, δ, β, μετά τρεις ελάχιστους θ, κ, λ με λόγους ίσους με τους λόγους των α, γ, δ, β, κλπ μέχρι να έχουμε ίσο πλήθος όρων με τους α, γ, δ, β (Π2, σελ. 195).

Έστω ότι αυτοί είναι οι μ, ν, ξ και o. Ισχύει $\theta = \zeta^2$ και $\mu = \zeta\theta = \zeta^3$. Επίσης $\lambda = \eta^2$, $o = \eta\lambda = \eta^3$.

Επειδή τώρα οι μ, ν, ξ και o είναι ελάχιστοι με λόγο σε συνεχή αναλογία ίσο με τον λόγο των α, γ, δ, β και επειδή και οι α, γ, δ, β είναι ελάχιστοι με αυτόν τον λόγο (Π3, σελ. 196), συμπεραίνουμε ότι $\mu = \alpha$, $\nu = \gamma$, $\xi = \delta$ και $o = \beta$.

Ο ζ όμως μετρά τον $\theta = \zeta^2$, ζ φορές όπως και η μονάδα ε μετρά ζ φορές τον ζ. Δηλαδή $1/\zeta = \zeta/\theta$. Πάλι επειδή $\zeta^3 = \mu = \zeta\theta$ δηλαδή ο θ μετρά τον μ κατά ζ φορές όπως και η μονάδα τον ζ. Άρα $1/\zeta = \theta/\mu$. Αλλά $\mu = \alpha$. Έτσι παρεμβάλαμε τους ζ και θ σε συνεχή αναλογία ανάμεσα στη μονάδα ε και στον α. Ομοίως παρεμβάλλουμε τους η και λ ανάμεσα στη μονάδα και στον β.

Έτσι όσοι αριθμοί παρεμβλήθηκαν σε συνεχή αναλογία μεταξύ α και β παρεμβλήθηκαν και μεταξύ ε και α και μεταξύ ε και β· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 10 (611) *Αν ανάμεσα καθενός από δύο αριθμούς και της μονάδας παρεμβληθούν ίσου πλήθος αριθμοί σε συνεχή αναλογία, όσοι είναι αυτοί τόσοι μπορούν να παρεμβληθούν ανάμεσα στους δύο αρχικούς αριθμούς.*

Απόδειξη. Έστω ότι ανάμεσα στη μονάδα γ και στο α παρεμβάλλεται σε συνεχή αναλογία το ίδιο πλήθος αριθμών όσο και ανάμεσα στη μονάδα και στο β. Ας θεωρήσουμε ότι ανάμεσα στη μονάδα και στο α παρεμβάλλονται σε συνεχή αναλογία οι δ, ε και ανάμεσα στη μονάδα και στο β παρεμβάλλονται σε συνεχή αναλογία οι ζ και η. Ισχυρίζομαι ότι και ανάμεσα στο α και το β μπορούν να παρεμβληθούν σε συνεχή αναλογία δύο αριθμοί.

Θέτουμε $\theta = \delta\zeta$, $\kappa = \delta\theta = \delta^2\zeta$και $\lambda = \theta\zeta = \delta\zeta^2$.

Ισχύει $\gamma/\delta = \delta/\varepsilon = \varepsilon/\alpha$, αφού οι δ και ε παρεμβάλλονται σε συνεχή αναλογία ανάμεσα στους γ και α, οπότε $\delta^2 = \gamma\varepsilon = \varepsilon$. Ομοίως $\delta\varepsilon = \gamma\alpha = \alpha$. Ομοίως $\zeta^2 = \eta$ και $\zeta\eta = \beta$. Οπότε, αφού $\delta^2 = \varepsilon$ και $\delta\zeta = \theta$ ισχύει $\delta/\zeta = \varepsilon/\theta$. Ομοίως $\delta/\zeta = \theta/\eta$.

Πάλι, επειδή $\delta\varepsilon = \alpha$ και $\delta\theta = \kappa$ ισχύει $\varepsilon/\theta = \alpha/\kappa$ (Β7, Π17, σελ. 183). Αλλά $\varepsilon/\theta = \delta/\zeta$ και άρα $\delta/\zeta = \alpha/\kappa$.

Πάλι, επειδή $\delta\theta = \kappa$ και $\zeta\theta = \lambda$ ισχύει $\delta/\zeta = \kappa/\lambda$ (Β7, Π18, σελ. 183). Αλλά $\delta/\zeta = \alpha/\kappa$ άρα $\kappa/\lambda = \alpha/\kappa$.

Επιπλέον, επειδή $\zeta\theta = \lambda$ και $\zeta\eta = \beta$ ισχύει $\theta/\eta = \lambda/\beta$ (Β7, Π17, σελ. 183). Αλλά $\theta/\eta = \delta/\zeta$ άρα $\delta/\zeta = \lambda/\beta$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\delta/\zeta = \alpha/\kappa = \kappa/\lambda$ και άρα $\alpha/\kappa = \kappa/\lambda = \lambda/\beta$. Έτσι οι α, κ, λ, και β είναι σε συνεχή αναλογία.

Όσοι λοιπόν αριθμοί παρεμβλήθηκαν σε συνεχή αναλογία ανάμεσα στη μονάδα και καθέναν από τους α και β τόσοι παρεμβλήθηκαν ανάμεσα στους α και β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 11 (612) *Ανάμεσα σε δυο τετράγωνους αριθμούς υπάρχει μέσος ανάλογος, και ο ένας τετράγωνος προς τον άλλον ισούται με το τετράγωνο του λόγου των πλευρών τους.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τους τετράγωνους αριθμούς $\alpha = \gamma^2$ και $\beta = \delta^2$. Ισχυρίζομαι ότι υπάρχει ε ώστε $\alpha/\varepsilon = \varepsilon/\beta$ και $\alpha/\beta = (\gamma/\delta)^2$.

Έστω $\varepsilon = \gamma \cdot \delta$. Επειδή $\gamma \cdot \gamma = \alpha$ συμπεραίνουμε ότι $\gamma/\delta = \alpha/\varepsilon$ (Β7, Π17, σελ. 183). Ομοίως $\gamma/\delta = \varepsilon/\beta$, οπότε $\alpha/\varepsilon = \varepsilon/\beta$. Οπότε βρέθηκε μέσος ανάλογος των α και β.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι $\alpha/\beta = (\gamma/\delta)^2$. Επειδή οι α, ε και β είναι σε συνεχή αναλογία, ισχύει $\alpha/\beta = (\alpha/\varepsilon)^2$ (Β5, Ορ9, σελ. 126). Αλλά $\alpha/\varepsilon = \gamma/\delta$· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 12 (613) *Για κάθε δύο αριθμούς που είναι κύβοι υπάρχουν δύο μέσοι ανάλογοι και ο λόγος τους ισούται με τον λόγο των πλευρών τους στον κύβο.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\alpha = \gamma^3$ και $\beta = \delta^3$. Ισχυρίζομαι ότι υπάρχουν δύο μέσοι ανάλογοι για τους α και β και επιπλέον $\alpha/\beta = (\gamma/\delta)^3$.

Έστω $\varepsilon = \gamma^2$, $\zeta = \gamma\delta$, $\eta = \delta^2$ και $\theta = \gamma\zeta = \gamma^2\delta$ και $\kappa = \delta\zeta = \gamma\delta^2$. Οπότε

$$\left.\begin{matrix} \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\gamma}{\delta} \\ \frac{\zeta}{\eta} = \frac{\gamma}{\delta} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\zeta}{\eta} \quad \text{και} \quad \left.\begin{matrix} \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\theta} = \frac{\gamma}{\delta} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\alpha}{\theta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

Επιπλέον

$$\left.\begin{matrix} \frac{\zeta}{\eta} = \frac{\gamma}{\delta} \\ \frac{\theta}{\kappa} = \frac{\gamma}{\delta} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\theta}{\kappa} = \frac{\zeta}{\eta} \quad \text{και} \quad \left.\begin{matrix} \frac{\kappa}{\beta} = \frac{\zeta}{\eta} \\ \frac{\theta}{\kappa} = \frac{\gamma}{\delta} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\theta}{\kappa} = \frac{\kappa}{\beta}.$$

Άρα

$$\frac{\alpha}{\theta} = \frac{\theta}{\kappa} = \frac{\kappa}{\beta},$$

και οι θ και κ είναι μέσοι ανάλογοι των α και β.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι $\alpha/\beta = (\gamma/\delta)^3$. Διότι $\alpha/\theta = \gamma/\delta$ και επειδή οι τέσσαρες αριθμοί α, θ, κ, β είναι σε συνεχή αναλογία, το α/β είναι ο κύβος του α/θ (Β5, Π10, σελ. 132)· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 13 (614) *Αν δοθούν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία, και τα τετράγωνά τους είναι σε συνεχή αναλογία, και οι κύβοι τους είναι σε συνεχή αναλογία.*

Απόδειξη. Ας είναι οι α, β, γ σε συνεχή αναλογία, $\alpha/\beta = \beta/\gamma$, και ας θέσουμε $\delta = \alpha^2$, $\varepsilon = \beta^2$, $\zeta = \gamma^2$ και $\eta = \alpha^3$, $\theta = \beta^3$, $\kappa = \gamma^3$.

Θέτουμε $\lambda = \alpha\beta$, $\mu = \alpha\lambda = \alpha^2\beta$, $\nu = \beta\lambda = \alpha\beta^2$, $\xi = \beta\gamma$ $o = \beta\xi = \beta^2\gamma$ και $\pi = \gamma\xi = \beta\gamma^2$.

Όπως και στην προηγούμενη πρόταση δείχνουμε ότι οι δ, λ, ε και οι η, μ, ν, θ είναι σε συνεχή αναλογία έχοντας λόγο α/β, και οι ε, ξ, ζ και θ, o, π, κ είναι σε συνεχή αναλογία με λόγο β/γ. Αλλά $\alpha/\beta = \beta/\gamma$ άρα οι δ, λ, ε έχουν τον ίδιο λόγο με τους ε, ξ, ζ, και οι η, μ, κ, θ με τους θ, o, π, κ και έχουν το ίδιο πλήθος. Άρα και οι δι᾽ ίσου λόγοι είναι ίσοι δηλαδή $\delta/\varepsilon = \varepsilon/\zeta$ και $\eta/\theta = \theta/\kappa$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δ

Πρόταση 14 (614) *Αν ένας τετράγωνος αριθμός μετράει έναν άλλο και πλευρά του θα μετρά την πλευρά του δεύτερου. Αντιστρόφως, αν η πλευρά μετρά την πλευρά τότε ο τετράγωνος της πρώτης πλευράς μετρά τον τετράγωνο της δεύτερης.*

Απόδειξη. Ας είναι $\alpha = \gamma^2$ και $\beta = \delta^2$ και ο α μετρά τον β. Ισχυρίζομαι ότι ο γ μετρά τον δ.

Θέτοντας $\varepsilon = \gamma\delta$, οι α, ε, β είναι σε συνεχή αναλογία με λόγο γ/δ (Π11, σελ. 200). Και επειδή ο α μετρά τον β θα μετρά και ο α τον ε (Π7, σελ. 198). Και άρα $\alpha/\varepsilon = \gamma/\delta$, συνεπώς ο γ μετρά τον δ (Β7, Ορ21, σελ. 175).

Τώρα αν ο γ μετρά τον δ ισχυρίζομαι ότι ο α μετρά τον β. Διότι με την ίδια κατασκευή οι α, ε και β είναι σε συνεχή αναλογία και λόγο γ/δ. Και αφού $\gamma/\delta = \alpha/\varepsilon$ και ο γ μετράει τον δ θα μετρά και ο α τον ε (Β7, Ορ21, σελ. 175). Και αφού οι α, ε και β είναι σε συνεχή αναλογία, θα μετά και ο α τον β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 15 (615) *Αν ένας κύβος μετράει έναν άλλο κύβο και πλευρά του θα μετρά την πλευρά του δεύτερου. Αντιστρόφως, αν η πλευρά μετρά την πλευρά τότε ο κύβος της πρώτης πλευράς μετρά τον κύβο της δεύτερης.*

Απόδειξη. Ας είναι $\alpha = \gamma^3$ και $\beta = \delta^3$ και ας μετρά ο α τον β. Ισχυρίζομαι ότι και ο γ μετρά τον δ.

Θέτουμε $\varepsilon = \gamma^2$, $\eta = \delta^2$, $\zeta = \gamma\delta$, $\theta = \gamma\zeta = \gamma^2\delta$ και $\kappa = \delta\zeta = \gamma\delta^2$. Φανερά οι $\varepsilon\zeta\eta$ και οι $\alpha\theta\kappa\beta$ είναι σε συνεχή αναλογία με λόγο γ/δ (Π12, σελ. 201), και επειδή ο α μετρά τον β, μετρά και τον θ (Π7, σελ. 198). Και αφού $\alpha/\theta = \gamma/\delta$, άρα και ο γ μετρά τον δ.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο γ μετρά τον δ. Ισχυρίζομαι ότι και ο α μετρά τον β. Διότι αφού γίνει η ίδια κατασκευή, αποδεικνύουμε με όμοιο τρόπο ότι οι α, θ, κ, β είναι σε συνεχή αναλογία με λόγο γ/δ. Και αφού ο γ μετρά τον δ και και $\gamma/\delta = \alpha/\theta$ μετρά ο α τον θ (Β7, Ορ21, σελ. 175)· άρα ο α μετρά τον β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 16 (615) *Αν τετράγωνος αριθμός δεν μετρά τετράγωνο αριθμό, ούτε και η πλευρά του πρώτου μετρά την πλευρά του δεύτερου.*

Αν η πλευρά δεν μετρά την πλευρά ούτε και το τετράγωνο μετρά το τετράγωνο.

Απόδειξη. Έστω οι $\alpha = \gamma^2$ και $\beta = \delta^2$ και ας μη μετρά ο α τον β. Ισχυρίζομαι ότι ούτε ο γ μετρά τον δ.

Διότι αν ο γ μετρά τον δ θα μετρά και ο α τον β (Π14, σελ. 202). Αλλά δεν μετρά ο α τον β άρα ούτε και ο γ τον δ.

Αν τώρα ο γ δεν μετρά τον δ, ισχυρίζομαι ότι ούτε ο α μετρά τον β.

Διότι αν ο α μετρά τον β θα μετρά και ο γ τον δ (Π14, σελ. 202). Αλλά δεν μετρά ο γ τον δ άρα ούτε και ο α τον β· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 17 (615) *Αν κύβος αριθμός δεν μετρά κύβο αριθμό, ούτε και η πλευρά του πρώτου μετρά την πλευρά του δεύτερου.*

Αν η πλευρά δεν μετρά την πλευρά ούτε και ο κύβος μετρά τον κύβο.

Απόδειξη. Έστω ότι $\alpha = \gamma^3$, $\beta = \delta^3$ και ο α δεν μετρά τον β. Ισχυρίζομαι ότι ούτε ο γ μετρά τον δ.

Διότι αν ο γ μετρά τον δ θα έπρεπε και ο α να μετρά τον β (Π15, σελ. 202). Αλλά ο α δεν μετρά τον β, άρα ούτε και ο γ τον δ.

Έστω τώρα ότι ο γ δεν μετρά τον δ. Ισχυρίζομαι ότι ούτε ο α μετρά τον β, διότι αλλιώς θα έπρεπε και ο γ να μετρά τον δ (Π15, σελ. 202) που δεν συμβαίνει· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 18 (616) *Δύο όμοιοι επίπεδοι αριθμοί έχουν μέσο ανάλογο. Και ο επίπεδος προς τον όμοιο επίπεδο έχει λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου των ομόλογων πλευρών τους.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\alpha = \gamma\delta$ και $\beta = \varepsilon\zeta$ και αφού είναι όμοιοι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες (Β7, Ορ22, σελ. 175). Δηλαδή $\gamma/\delta = \varepsilon/\zeta$. Ισχυρίζομαι ότι οι α και β έχουν μέσο ανάλογο και ότι $\alpha/\beta = (\gamma/\varepsilon)^2 = (\delta/\zeta)^2$.

Επειδή $\gamma/\delta = \varepsilon/\zeta$ είναι ίσοι και οι εναλλάξ λόγοι, δηλαδή $\gamma/\varepsilon = \delta/\zeta$. Θέτουμε $\eta = \delta\varepsilon$. Οπότε $\alpha/\eta = \gamma/\varepsilon$ (Β7, Π17, σελ. 183). Άρα $\gamma/\varepsilon = \delta/\zeta = \alpha/\eta$. Επιπλέον $\delta/\zeta = \eta/\beta$, αλλά έχει δειχθεί ότι $\delta/\zeta = \alpha/\eta$, άρα $\alpha/\eta = \eta/\beta$ και συνεπώς οι α, β έχουν τον μέσο ανάλογο η.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι $\alpha/\beta = (\gamma/\varepsilon)^2 = (\delta/\zeta)^2$. Πράγματι επειδή οι α, η, β είναι σε συνεχή αναλογία ο $\alpha/\beta = (\alpha/\eta)^2$ (Β5, Ορ9, σελ. 126). Και $\alpha/\eta = \gamma/\varepsilon = \delta/\zeta$. Άρα ο $\alpha/\beta = (\gamma/\varepsilon)^2 = (\delta/\zeta)^2$· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 19 (617) *Ανάμεσα σε δύο όμοιους στερεούς αριθμούς παρεμβάλλονται δύο μέσοι ανάλογοι. Και ο στερεός προς τον όμοιο στερεό έχει λόγο ίσο με τον κύβο του λόγου των ομόλογων πλευρών τους.*

Απόδειξη. Έστω $\alpha = \gamma\delta\varepsilon$ και $\beta = \zeta\eta\theta$ και επειδή τους θεωρούμε όμοιους θα ισχύει $\gamma/\delta = \zeta/\eta$ και $\delta/\varepsilon = \eta/\theta$. Ισχυρίζομαι ότι μεταξύ των α και β παρεμβάλλονται δύο μέσοι ανάλογοι και επιπλέον ότι

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\gamma}{\zeta}\right)^3 = \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^3 = \left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^3.$$

Θέτουμε $\kappa = \gamma\delta$ και $\lambda = \zeta\eta$. Επειδή $\gamma/\delta = \zeta/\eta$ και $\kappa = \gamma\delta$ και $\lambda = \zeta\eta$ συμπεραίνουμε ότι οι κ και λ είναι όμοιοι επίπεδοι αριθμοί (Β7, Ορ22, σελ. 175). Έτσι υπάρχει μέσος ανάλογος για τους κ και λ (Π18, σελ. 203). Ας είναι αυτός ο μ. Έτσι όμως δείχθηκε στο προηγούμενο θεώρημα $\mu = \delta\zeta$.

Θέτουμε τώρα $\nu = \varepsilon\mu = \varepsilon\delta\zeta$ και $\xi = \theta\mu = \theta\delta\zeta$. Ο α είναι στερεός αριθμός με πλευρές τα γ, δ, ε, οπότε ο γ πολλαπλασιαζόμενος με τον $\delta\varepsilon$ δίνει τον α. Και ο ζ πολλαπλασιαζόμενος με τον $\delta\varepsilon$ δίνει τον ν. Άρα $\alpha/\nu = \gamma/\zeta$. Ομοίως, ο ε πολλαπλασιαζόμενος με τον $\delta\zeta$ δίνει τον ν και ο θ πολλαπλασιαζόμενος με τον $\delta\zeta$ δίνει τον ξ. Άρα

$$\frac{\nu}{\xi} = \frac{\varepsilon}{\theta} = \frac{\gamma}{\zeta} = \frac{\alpha}{\nu}.$$

Επιπλέον, ο δ πολλαπλασιαζόμενος με τον $\zeta\theta$ δίνει ξ και ο η πολλαπλασιαζόμενος με τον $\zeta\theta$ δίνει β. Άρα

$$\frac{\xi}{\beta} = \frac{\delta}{\eta} = \frac{\gamma}{\zeta} = \frac{\alpha}{\nu}.$$

Συνεπώς

$$\frac{\alpha}{\nu} = \frac{\nu}{\xi} = \frac{\xi}{\beta},$$

δηλαδή οι ν και ξ είναι μέσοι ανάλογοι των α και β.

Τέλος, επειδή οι α, ν, ξ, β είναι τέσσαρες αριθμοί σε συνεχή αναλογία ισχύει $\alpha/\beta = (\alpha/\nu)^3$ (Β5, Ορ10, σελ. 126). Αλλά $\alpha/\nu = \gamma/\zeta = \delta/\eta = \varepsilon/\theta$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 20 (618) *Αν μεταξύ δύο αριθμών υπάρχει μέσος ανάλογος τότε οι αριθμοί είναι όμοιοι επίπεδοι.*

Απόδειξη. Ας είναι ο γ ο παρεμβαλλόμενος μέσος ανάλογος των α και β. Ισχυρίζομαι ότι οι α και β είναι όμοιοι επίπεδοι αριθμοί.

Διότι ας θεωρήσουμε ελάχιστους αριθμούς δ, ε με τον ίδιο λόγο με τους α και γ (Β7, Π33, σελ. 189). Άρα όσες φορές ο δ μετρά τον α τόσες μετρά και ο ε τον γ. Ας θέσουμε $\zeta = \alpha/\delta$ οπότε $\zeta\delta = \alpha$ (Β7, Ορ16, σελ. 174). Έτσι ο α είναι επίπεδος με πλευρές ζ και δ. Πάλι επειδή οι δ και ε είναι οι ελάχιστοι με λόγο ίδιο με τους γ και β θέτοντας όπως και πριν $\eta = \beta/\varepsilon$ παίρνουμε ότι $\beta = \eta\varepsilon$ δηλαδή ο β είναι επίπεδος με πλευρές η και ε. Έτσι οι α και β είναι επίπεδοι και ισχυρίζομαι τώρα ότι είναι όμοιοι.

Ο ζ πολλαπλασιάζοντας τον δ δίνει α και με τον ε δίνει γ. Άρα $\delta/\varepsilon = \alpha/\gamma = \gamma/\beta$. Πάλι επειδή ο ε πολλαπλασιάζοντας τον ζ δίνει γ και με τον η δίνει β θα ισχύει $\zeta/\eta = \gamma/\beta = \delta/\varepsilon$. Άρα και οι εναλλάξ λόγοι είναι ίσοι δηλαδή $\delta/\zeta = \varepsilon/\eta$ (Β7, Π13, σελ. 182). Συνεπώς οι α και β είναι όμοιοι αφού έχουν ανάλογες πλευρές (Β7, Ορ22, σελ. 175)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 21 (619) *Αν μεταξύ δυο αριθμών παρεμβάλλονται δύο μέσοι ανάλογοι αριθμοί, τότε αυτοί είναι όμοιοι και στερεοί.*

Απόδειξη. Ας είναι οι γ και δ δύο μέσοι ανάλογοι των α και β. Ισχυρίζομαι ότι οι α και β είναι όμοιοι στερεοί.

Θεωρούμε ελάχιστους ε, ζ, η ώστε $\alpha/\gamma = \varepsilon/\zeta$ και $\gamma/\delta = \zeta/\eta$ (Π2, σελ. 195). Επειδή $\alpha/\gamma = \gamma/\delta$ οι ε, ζ, η είναι σε συνεχή αναλογία, δηλαδή ο ζ είναι μέσος ανάλογος των ε και η, άρα οι ε και η είναι πρώτοι μεταξύ τους (Π3, σελ. 196) και είναι και όμοιοι επίπεδοι (Π20, σελ. 204). Άρα υπάρχουν θ, κ, λ, μ ώστε $\varepsilon = \theta\kappa$, $\eta = \lambda\mu$ και

$$\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\zeta}{\eta} = \frac{\theta}{\lambda} = \frac{\kappa}{\mu}. \qquad (*)$$

Όμως $\varepsilon/\gamma = \alpha/\gamma$ και $\zeta/\eta = \gamma/\delta$ άρα και οι δι᾽ ίσου είναι ίσοι: $\varepsilon/\eta = \alpha/\delta$ (Β7, Π14, σελ. 182). Αλλά οι ε, η είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε όσες φορές μετράει ο ε τον α τόσες μετράει ο η τον δ (Β7, Π20, σελ. 184). Έστω $\nu = \alpha/\varepsilon = \delta/\eta$. Έτσι $\alpha = \nu\varepsilon = \nu\theta\kappa$ (Β7, Ορ16, σελ. 174) και ο α είναι στερεός με πλευρές ν, θ και κ.

Επιπλέον $\varepsilon/\zeta = \alpha/\gamma = \gamma/\delta$ και $\zeta/\eta = \gamma/\delta = \delta/\beta$ άρα και οι δι᾽ ίσου είναι ίσοι: $\varepsilon/\eta = \gamma/\beta$. Πάλι επειδή οι ε και η είναι πρώτοι μεταξύ τους όσες φορές ο ε μετράει τον γ τόσες φορές ο η μετράει τον β· έστω $\xi = \gamma/\varepsilon = \beta/\eta$ (Β7, Π20, σελ. 184). Οπότε $\beta = \xi\eta = \xi\lambda\mu$ (Β7, Ορ16, σελ. 174) στερεός με πλευρές ξ, λ και μ. Επίσης παρατηρούμε από το προηγούμενο ότι $\gamma = \xi\varepsilon$. Μένει να δείξουμε ότι οι α και β είναι και όμοιοι.

Πράγματι, $\alpha = \nu\varepsilon$ και $\gamma = \xi\varepsilon$, άρα $\alpha/\gamma = \nu/\xi$ (Β7, Π18, σελ. 183). Αλλά $\alpha/\gamma = \varepsilon/\zeta$ οπότε και χρησιμοποιώντας την $(*)$ παίρνουμε

$$\frac{\nu}{\xi} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\theta}{\lambda} = \frac{\kappa}{\mu},$$

δηλαδή οι α και β γράφονται ως $\alpha = \nu\theta\kappa$ και $\beta = \xi\lambda\mu$ και ισχύει

$$\frac{\nu}{\xi} = \frac{\theta}{\lambda} = \frac{\kappa}{\mu}.$$

Άρα οι α και β είναι όμοιοι και στερεοί (Β7, Ορ22, σελ. 175)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 22 (619) *Αν τρεις αριθμοί είναι σε συνεχή αναλογία και ο πρώτος είναι τετράγωνος τότε και ο τρίτος είναι τετράγωνος.*

Απόδειξη. Αν οι α, β, γ είναι σε συνεχή αναλογία και ο α είναι τετράγωνος, ισχυρίζομαι ότι και ο τρίτος, ο γ, είναι τετράγωνος.

Διότι επειδή ο β είναι ο μέσος ανάλογος των α και γ, οι α και γ είναι όμοιοι επίπεδοι (Π20, σελ. 204). Αλλά ο α είναι τετράγωνος άρα και ο γ (Β7, Ορ22, σελ. 175)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 23 (620) *Αν τέσσαρες αριθμοί είναι σε συνεχή αναλογία και ο πρώτος είναι κύβος, τότε και ο τέταρτος είναι κύβος.*

Απόδειξη. Έστω οι α, β, γ, δ σε συνεχή αναλογία και ο α έστω ότι είναι κύβος. Ισχυρίζομαι ότι και ο δ είναι κύβος.

Διότι οι β και γ είναι μέσοι ανάλογοι των α και δ άρα οι α και δ είναι όμοιοι στερεοί (Π21, σελ. 205). Ο α όμως είναι κύβος άρα και ο δ (Β7, Ορ22, σελ. 175)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 24 (620) *Αν δυο αριθμοί έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με τον λόγο δύο τετράγωνων αριθμών και ο πρώτος είναι τετράγωνος τότε είναι τετράγωνος και ο δεύτερος.*

Απόδειξη. Ας είναι ο λόγος των α και β ίσος με τον λόγο των τετράγωνων γ και δ. Υποθέτω ότι και ο α είναι τετράγωνος. Ισχυρίζομαι ότι και ο β είναι τετράγωνος.

Διότι αφού οι γ και δ είναι τετράγωνοι είναι όμοιοι επίπεδοι. Άρα μεταξύ των γ και δ παρεμβάλλεται ένας μέσος ανάλογος (Π18, σελ. 203). Και αφού $\gamma/\delta = \alpha/\beta$ συμπεραίνουμε ότι και ανάμεσα στους α και β παρεμβάλλεται μέσος ανάλογος (Π8, σελ. 199). Οπότε αφού ο α είναι τετράγωνος είναι και ο β (Π22, σελ. 205)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 25 (620) *Αν δυο αριθμοί έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με τον λόγο δυο κύβων, και ο πρώτος είναι κύβος τότε είναι και ο δεύτερος κύβος.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ και οι γ και δ και α κύβοι. Ισχυρίζομαι ότι και ο β είναι κύβος.

Διότι αφού οι γ και δ είναι κύβοι είναι όμοιοι στερεοί· άρα μεταξύ των γ και δ παρεμβάλλονται δύο μέσοι ανάλογοι (Π19, σελ. 203), άρα και ανάμεσα στους α και β (Π8, σελ. 199). Ας είναι αυτοί οι ε και ζ. Άρα οι τέσσαρες α, ε, ζ, β είναι σε συνεχή αναλογία και ο α είναι κύβος. Οπότε και ο β είναι κύβος (Π23, σελ. 206)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 26 (621) *Όμοιοι επίπεδοι αριθμοί έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με τον λόγο δυο τετράγωνων αριθμών.*

Απόδειξη. Ας είναι α και β δυο όμοιοι επίπεδοι αριθμοί· ισχυρίζομαι ότι ο α/β είναι λόγος ίσος με τον λόγο δύο τετράγωνων αριθμών.

Διότι αφού α, β όμοιοι επίπεδοι, παρεμβάλλεται μεταξύ τους ένας μέσος ανάλογος (Π18, σελ. 203)· ας είναι ο γ. Θεωρούμε ελάχιστους αριθμούς δ,

ε, ζ με τους ίδιους λόγους με τους α, γ, β (Π2, σελ. 195). Άρα οι άκροι δ και ζ είναι τετράγωνοι (Πόρισμα Π2, σελ. 195). Αλλά $\delta/\zeta = \alpha/\beta$ και οι δ και ζ είναι τετράγωνοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 27 (621) *Οι όμοιοι στερεοί αριθμοί έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με λόγο δυο κύβων αριθμών.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τους όμοιους στερεούς αριθμούς α και β· ισχυρίζομαι ότι ο λόγος α/β είναι ίσος με τον λόγο δυο κύβων.

Διότι, επειδή οι α και β είναι όμοιοι στερεοί, θα παρεμβάλλονται μεταξύ τους δύο μέσοι ανάλογοι (Π19, σελ. 203). Ας είναι αυτοί οι γ και δ. Θεωρούμε ελάχιστους αριθμούς ε, ζ, η, θ με τους ίδιους λόγους με τους α, γ, δ, β (Π2, σελ. 195). Άρα οι άκροι ε και θ είναι κύβοι (Πόρισμα Π2, σελ. 195). Και ισχύει $\varepsilon/\theta = \alpha/\beta$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Βιβλίο 9ο

Πρόταση 1 (623) *Εάν δύο όμοιοι επίπεδοι πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους δίνουν αριθμό που είναι τετράγωνος.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι α, β είναι όμοιοι και επίπεδοι αριθμοί, και έστω γ το γινόμενό τους· ισχυρίζομαι ότι ο γ είναι τετράγωνος.

Ο $\delta = \alpha^2$ είναι τετράγωνος και επειδή $\gamma = \alpha\beta$ ισχύει $\alpha/\beta = \delta/\gamma$ (Β7, ΠΙ7, σελ. 183). Επειδή οι α και β είναι όμοιοι επίπεδοι παρεμβάλλεται ανάμεσά τους ένας μέσος ανάλογος (Β8, ΠΙ8, σελ. 203). Όσοι παρεμβάλλονται σε συνεχή αναλογία ανάμεσα σε δύο αριθμούς τόσοι παρεμβάλλονται και ανάμεσα σε εκείνους που έχουν ίδιο λόγο με τους αρχικούς (Β8, Π8, σελ. 199)· άρα και ανάμεσα στους δ και γ παρεμβάλλεται ένας μέσος ανάλογος. Αλλά ο δ είναι τετράγωνος άρα είναι και ο γ (Β8, Π22, σελ. 205)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 2 (αντίστροφη της ΠΙ, σελ. 209) (623) *Αν δύο αριθμοί πολλαπλασιαζόμενοι μεταξύ τους δίνουν αριθμό τετράγωνο, τότε είναι όμοιοι επίπεδοι αριθμοί.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο $\gamma = \alpha\beta$ είναι τετράγωνος αριθμός· ισχυρίζομαι ότι οι α και β είναι όμοιοι επίπεδοι αριθμοί.

Έστω ότι $\delta = \alpha^2$. Αφού $\gamma = \alpha\beta$ τότε $\alpha/\beta = \delta/\gamma$ (Β7, ΠΙ7, σελ. 183). Και αφού και ο δ και ο γ είναι τετράγωνος οι δ και γ είναι όμοιοι επίπεδοι. Άρα μεταξύ των δ και γ παρεμβάλλεται μέσος ανάλογος (Β8, Π8, σελ. 199)· και αφού $\delta/\gamma = \alpha/\beta$ παρεμβάλλεται μέσος ανάλογος μεταξύ των α και β (Β8, Π8, σελ. 199), οπότε είναι όμοιοι επίπεδοι (Β8, Π20, σελ. 204)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 3 (624) *Το τετράγωνο ενός κύβου είναι κύβος.*

Απόδειξη. Έστω $\beta = \alpha^2$ και α κύβος. Ισχυρίζομαι ότι και ο β είναι κύβος.

Ας είναι γ η πλευρά του α και θέτουμε $\delta = \gamma^2$. Άρα ο γ μετράει τον δ κατά γ φορές, και η μονάδα μετράει τον γ κατά γ φορές, οπότε $1/\gamma = \gamma/\delta$. Ομοίως ο δ μετρά τον α κατά γ φορές όπως μετρά τον γ η μονάδα, άρα $1/\gamma = \delta/\alpha$. Οπότε $1/\gamma = \gamma/\delta = \delta/\alpha$ δηλαδή οι γ, δ παρεμβάλλονται σε συνεχή αναλογία μεταξύ του 1 και του α.

Τώρα ο α μετρά τον β τόσες φορές όσες και η μονάδα τον α, άρα $1/\alpha = \alpha/\beta$. Αλλά από πριν ανάμεσα στο 1 και στο α παρεμβάλλονται δύο μέσοι ανάλογοι, άρα και μεταξύ των α και β (Β8, Π8, σελ. 199). Αλλά ο α είναι κύβος άρα και ο β (Β8, Π23, σελ. 206)· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 4 (624) *Κύβος επί κύβο δίνει κύβο.*

Απόδειξη. Ας είναι $\gamma = \alpha\beta$ με τους α, β να είναι κύβοι αριθμοί. Ισχυρίζομαι ότι και ο γ είναι κύβος.

Αν $\delta = \alpha^2$ τότε ο δ είναι κύβος (Π3, σελ. 209). Αλλά $\alpha\alpha = \delta$ και $\alpha\beta = \gamma$, άρα $\alpha/\beta = \delta/\gamma$. Και αφού οι α, β είναι κύβοι είναι όμοιοι στερεοί, οπότε ανάμεσά τους παρεμβάλλονται δύο μέσοι ανάλογοι (Β8, Π19, σελ. 203). Συνεπώς δύο παρεμβάλλονται ανάμεσα στους δ και γ (Β8, Π8, σελ. 199). Και αφού ο δ είναι κύβος είναι και ο γ (Β8, Π23, σελ. 206)· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 5 (625) *Αν ένας αριθμός πολλαπλασιαστεί με ένα κύβο δίνει κύβο τότε και ο ίδιος είναι κύβος.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο κύβος α πολλαπλασιάζεται με τον β και δίνει τον κύβο γ· ισχυρίζομαι ότι και ο β είναι κύβος.

Αν $\delta = \alpha^2$, ο δ είναι κύβος (Π3, σελ. 209). Επειδή επιπλέον $\alpha\beta = \gamma$ θα ισχύει $\alpha/\beta = \delta/\gamma$ (Β7, Π17, σελ. 183). Αλλά δ και γ κύβοι άρα όμοιοι στερεοί, οπότε ανάμεσά τους παρεμβάλλονται δύο μέσοι ανάλογοι (Β8, Π19, σελ. 203). Συνεπώς και ανάμεσα στον α και β παρεμβάλλονται δύο μέσοι ανάλογοι (Β8, Π8, σελ. 199). Αλλά ο α είναι κύβος άρα είναι και ο β (Β8, Π23, σελ. 206)· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 6 (625) *Αν αριθμός στο τετράγωνο είναι κύβος τότε και ο ίδιος ο αριθμός είναι κύβος.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο $\beta = \alpha^2$ είναι κύβος. Ισχυρίζομαι ότι και ο α είναι κύβος.

Διότι αν $\gamma = \alpha\beta$ ο γ είναι κύβος. Επιπλέον ο α μετρά τον β α φορές, όσες και η μονάδα τον α. Οπότε $1/\alpha = \alpha/\beta$. Ακόμα ο β μετρά τον γ κατά α φορές, όσες και η μονάδα τον α, οπότε $1/\alpha = \beta/\gamma$. Συνεπώς $\alpha/\beta = \beta/\gamma$. Αλλά οι β και γ είναι κύβοι άρα όμοιοι στερεοί. Οπότε ανάμεσά τους παρεμβάλλονται δύο μέσοι ανάλογοι (Β8, Π19, σελ. 203), άρα και ανάμεσα στον α και β παρεμβάλλονται δύο μέσοι ανάλογοι (Β8, Π8, σελ. 199). Και αφού ο β είναι κύβος είναι και ο α· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 7 (625) *Αν πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με ένα σύνθετο αριθμό ο αριθμός που προκύπτει είναι στερεός.*

Απόδειξη. Αν ο α είναι σύνθετος έστω $\gamma = \alpha\beta$. Ισχυρίζομαι ότι ο γ είναι στερεός.

Αφού ο α είναι σύνθετος υπάρχει αριθμός που τον μετράει, έστω ο δ. Ας θέσουμε ε τον αριθμό που αποτελείται από τόσες μονάδες όσες φορές ο δ μετράει τον α. Άρα $\varepsilon\delta = \alpha$ (B7, Op16, σελ. 174). Άρα ο γ είναι το γινόμενο των ε, δ και β δηλαδή στερεός· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

ΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΠΛΗΡΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗ

Υπάρχουν διάφορες αναφορές και κριτικές για την πατρότητα της Επαγωγής. Οι ιστορικοί την αποδίδουν στον Pascal θεωρώντας ότι εκείνος απομόνωσε την ιδέα ως «αρχή» έξω από συγκεκριμένα προβλήματα. Αναλυτική συζήτηση για αυτό το θέμα βρίσκει κανείς στο *The development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra* του Roshdi Rashed, BSPS, Vol. 156, Springer, σελ. 62. Παρόλα αυτά η επιχειρηματολογία απέχει από το να είναι πειστική. Ο Pascal γράφει στο Traité du triangle arithmétique (ed. Seuil, 1963, σελ. 57): «Αν βρεθεί ένα τρίγωνο με την ιδιότητα ... ισχυρίζομαι ότι και το επόμενο θα έχει αυτή την ιδιότητα. Οπότε συνεπάγεται ότι όλα τα τρίγωνα έχουν αυτή την ιδιότητα. Γιατί το πρώτο την έχει από το πρώτο λήμμα και είναι φανερή στο δεύτερο. Οπότε από το δεύτερο λήμμα την έχει και το τρίτο, και άρα και το επόμενο, κλπ επ᾽ άπειρο.»

Καμία «απομονωμένη» διατύπωση της επαγωγής δεν υπάρχει στο παραπάνω. Αν το δούμε μαθηματικώς αυστηρά θα έπρεπε να αποδώσουμε την επαγωγή στον Peano για τη φράση

$$\forall p \left(p(0) \wedge \forall n\big(p(n) \to p(n+1)\big) \to \forall n(p(n)) \right)$$

(second order logic). Η αιτιολογία που προβάλεται για τον Pascal είναι ότι αφού ο Peano έκανε την αυστηρή θεμελίωση όλες οι παλαιότερες προσεγγίσεις είναι αναγκαστικά «αφελείς» (naïve).

Μόνο που ακριβώς το ίδιο επιχείρημα ισχύει και για όσους πριν τον Pascal χρησιμοποίησαν αυτή την ιδέα. Πόσο μάλλον που στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορεί κανείς να επιχειρηματολογήσει επαγωγικά! Όσο πιο «αφελής» σε σχέση με τον Peano είναι η χρήση της επαγωγής από τον Pascal, ακόμα μικρότερη είναι η απόσταση του Pascal από τους Bernoulli, και ακόμα πιο μικρή από τους Bernoulli στον Μαυρόλυκο, και από εκεί στους προηγούμενους είτε Έλληνες είτε Άραβες είτε άλλους. Η ίδια λοιπόν επιχειρηματολογία ισχύει και για τον Ευκλείδη και τους Πυθαγόρειους.

Πρόταση 8 (Πρώτη χρήση της ιδέας της Επαγωγής) (626) *Έστω ότι δίνονται οσοιδήποτε αριθμοί ξεκινώντας με τη μονάδα, οι οποίοι βρίσκονται σε συνεχή αναλογία. Τότε οι αριθμοί από τον τρίτο και ανά δύο μετά από αυτόν, είναι τετράγωνοι. Επιπλέον οι αριθμοί από τον τέταρτο και ανά τρεις μετά από αυτόν είναι κύβοι. Επίσης οι αριθμοί από τον έβδομο και ανά πέντε μετά από αυτόν είναι και τετράγωνοι και κύβοι.*

Απόδειξη. Έστω ότι έχουμε τους αριθμούς 1, α, β, γ, δ, ε, ζ σε συνεχή αναλογία. Ισχυρίζομαι ότι ο τρίτος (δηλαδή ο β) και καθένας μετά από αυτόν ανά δύο (δηλαδή ο δ και ο ζ) είναι τετράγωνοι. Ο τέταρτος (ο γ) και οι επόμενοι ανά τρεις (δηλαδή ο ζ) είναι κύβοι. Και ο έβδομος (ο ζ) και οι επόμενοι ανά πέντε είναι και τετράγωνοι και κύβοι.

Αφού $1/\alpha = \alpha/\beta$ όσες φορές μετράει η μονάδα τον α τόσες φορές μετράει ο α τον β. (Β7, Ορ21, σελ. 175). Άρα ο α τόσες φορές μετράει τον β όσες οι μονάδες του α. Οπότε $\alpha\alpha = \beta$ (Β7, Ορ16, σελ. 174) και ο β είναι τετράγωνος (στμ: η επαγωγή ξεκίνησε). Τώρα, αφού ο β είναι τετράγωνος και οι β, γ, δ σε συνεχή αναλογία είναι και ο δ τετράγωνος (Β8, Π22, σελ. 205). Συνεχίζουμε ομοίως: αφού ο δ είναι τετράγωνος και οι δ, ε, ζ σε συνεχή αναλογία είναι και ο ζ τετράγωνος. Συνεπώς όσοι αριθμοί και να δοθούν σε συνεχή αναλογία από τη μονάδα, συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο θα είναι όλοι ανά δύο, ξεκινώντας από τον β, τετράγωνοι.

Τώρα, επειδή $1/\alpha = \alpha/\beta = \beta/\gamma$ όσες φορές μετρά η μονάδα τον α τόσες φορές μετράει ο β τον γ. Άρα ο β μετράει τον γ κατά α φορές. Δηλαδή $\gamma = \beta\alpha$. Όμως $\beta = \alpha\alpha$, άρα ο γ είναι κύβος (στμ: η επαγωγή ξεκίνησε). Τώρα οι γ, δ, ε, ζ είναι σε συνεχή αναλογία, άρα και ο ζ είναι κύβος (Β8, Π23, σελ. 206). Συνεπώς όσοι αριθμοί και να δοθούν σε συνεχή αναλογία από τη μονάδα, συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο θα είναι όλοι ανά τρεις, ξεκινώντας από τον γ, κύβοι.

Έτσι ο έβδομος (ο ζ) είναι και τετράγωνος και κύβος. Με όμοιο τρόπο ξεκινώντας από το ότι ο ζ είναι τετράγωνος και κύβος συνεχίζοντας ανά πέντε μετά τον ζ οι αριθμοί είναι και τετράγωνοι και κύβοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 9 (Πρώτη χρήση της ιδέας της Πλήρους Επαγωγής) (626) *Αν δοθούν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία ξεκινώντας από τη μονάδα, και ο πρώτος μετά τη μονάδα είναι τετράγωνος, τότε όλοι είναι τετράγωνοι. Ενώ αν ο πρώτος μετά τη μονάδα είναι κύβος τότε όλοι είναι κύβοι.*

Απόδειξη. Έστω ότι έχουμε τους αριθμούς 1, α, β, γ, δ, ε, ζ σε συνεχή αναλογία και ότι ο α είναι τετράγωνος. Ισχυρίζομαι ότι και οι υπόλοιποι αριθμοί είναι τετράγωνοι.

Ο β είναι τετράγωνος (Π8, σελ. 213) (στμ: η επαγωγή ξεκίνησε). Αφού ο α είναι τετράγωνος και οι α, β, γ είναι σε συνεχή αναλογία προκύπτει ότι και ο γ είναι τετράγωνος (Β8, Π22, σελ. 205). Αφού ο β είναι τετράγωνος και οι β, γ, δ είναι σε συνεχή αναλογία, και ο δ είναι τετράγωνος. Αφού οι γ, δ, ε είναι σε συνεχή αναλογία και ο γ είναι τετράγωνος είναι και ο ε τετράγωνος και ομοίως συνεχίζοντας όλοι είναι τετράγωνοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 10 (627) *Αν δοθούν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία ξεκινώντας με τη μονάδα και ο αριθμός μετά τη μονάδα δεν είναι τετράγωνος τότε εκτός του τρίτου αριθμού και των επόμενων ανά δύο κανείς άλλος δεν είναι τετράγωνος.*

Και αν ο αριθμός μετά τη μονάδα δεν είναι κύβος, εκτός του τέταρτου αριθμού και των επόμενων ανά τρεις, κανείς άλλος δεν είναι κύβος.

Απόδειξη. Έστω ότι οι 1, α, β, γ, δ, ε, ζ είναι σε συνεχή αναλογία και ο α δεν είναι τετράγωνος. Ισχυρίζομαι ότι κανείς άλλος δεν είναι τετράγωνος εκτός από τον τρίτο (τον β) και τους επόμενούς του ανά δύο.

Διότι αν αυτό δεν είναι σωστό, έστω ότι για παράδειγμα ο γ είναι τετράγωνος. Ο β όμως είναι τετράγωνος (Π8, σελ. 213) άρα οι β και γ είναι όμοιοι επίπεδοι και έτσι και οι α και β είναι όμοιοι επίπεδοι αφού $\alpha/\beta = \beta/\gamma$ (Β8, Π26, σελ. 206). Αλλά ο β είναι τετράγωνος άρα και ο α, το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι κανείς άλλος δεν είναι τετράγωνος εκτός από τον τρίτο από τη μονάδα και τους επόμενούς του ανά δύο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο α δεν είναι κύβος. Ισχυρίζομαι ότι εκτός του τέταρτου και των επόμενών του ανά τρεις, κανείς άλλος δεν είναι κύβος. Αν όχι, ας είναι ο δ κύβος. Κύβος όμως είναι και ο γ (Π8, σελ. 213). Αλλά $\gamma/\delta = \beta/\gamma$· και αφού δ και β κύβοι είναι και ο β κύβος (Β8, Π13, σελ. 201 και Β8, Π25, σελ. 206). Ο α τώρα έχει τόσες μονάδες όσες φορές μετράει τον α ο β, αφού $1/\alpha = \alpha/\beta$. Συνεπώς $\alpha^2 = \beta$ και ο β είναι κύβος. Δηλαδή ο α^2 είναι κύβος οπότε και ο α είναι κύβος (Π6, σελ. 210) πράγμα αντίθετο με την υπόθεση. Έτσι ο δ δεν μπορεί να είναι κύβος. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι κανείς άλλος εκτός από τον τέταρτο από τη μονάδα και τους επόμενους του ανά τρεις δεν είναι κύβος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 11 (628) *Αν δοθούν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία ξεκινώντας από τη μονάδα τότε οποιοσδήποτε από αυτούς, μετράει οποιονδήποτε μεγαλύτερό του, τόσες φορές όσες κάποιος από τους δοθέντες αριθμούς.*

Απόδειξη. Ας είναι οι $\alpha = 1$, β, γ, δ, ε σε συνεχή αναλογία. Ισχυρίζομαι ότι οποιοσδήποτε από αυτούς μετράει οποιονδήποτε μεγαλύτερό του τόσες φορές όσες κάποιος από αυτούς τους αριθμούς. Ας θεωρήσω για παράδειγμα τον β. Ισχυρίζομαι ότι αυτός μετράει τον ε ακριβώς δ φορές, δηλαδή αριθμό που υπάρχει στη συνεχή αναλογία.

Διότι επειδή $\alpha/\beta = \delta/\varepsilon$ άρα και εναλλάξ $\alpha/\delta = \beta/\varepsilon$ οπότε ο β μετράει τον ε τόσες φορές όσες οι μονάδες του δ (Β7, Π15, σελ. 182), δηλαδή κατά αριθμό (τον δ) που υπάρχει στη συνεχή αναλογία.

Πόρισμα 15 ($\lambda^k\lambda^{n-k} = \lambda^n$) *Και είναι φανερό ότι όποια τάξη έχει ο αριθμός που μετράει* (τον μετρούμενο) *από τη μονάδα την ίδια τάξη από τον μετρού-*

μενο, προς τα πίσω όμως, έχει το αποτέλεσμα της μέτρησης· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 12 (Αν p πρώτος τότε $p|\lambda^n \Rightarrow p|\lambda$) (628) *Αν δοθούν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία ξεκινώντας από τη μονάδα, τότε το πλήθος των πρώτων που μετράει τον τελευταίο είναι το ίδιο με το πλήθος των πρώτων που μετράει τον αριθμό μετά τη μονάδα.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι 1, α, β, γ, δ είναι σε συνεχή αναλογία. Ισχυρίζομαι ότι όσοι πρώτοι μετρούν τον δ τόσοι μετρούν και τον α.

Διότι ας μετράται ο δ από τον πρώτο αριθμό ε. Ισχυρίζομαι ότι ο ε μετράει και τον α. Έστω ότι δεν τον μετράει, οπότε οι α και ε είναι πρώτοι μεταξύ τους (Β7, Π29, σελ. 188). Υποθέτουμε επιπλέον ότι ο ε μετράει τον δ κατά ζ φορές, δηλαδή $\delta = \varepsilon\zeta$. Ο α όμως μετράει τον δ κατά γ φορές (Πόρισμα, Π11, σελ. 214), δηλαδή $\alpha\gamma = \delta$. Συμπεραίνουμε ότι $\alpha\gamma = \delta = \varepsilon\zeta$, οπότε $\alpha/\varepsilon = \zeta/\gamma$ (Β7, Π19, σελ. 184). Αλλά οι α, ε είναι μεταξύ τους πρώτοι, άρα ο λόγος α/ε έχει ελάχιστους όρους (Β7, Π21, σελ. 185) οπότε ο α μετρά τον ζ και ο ε τον γ (Β7, Π20, σελ. 184). Έστω ότι τον μετρά η φορές, οπότε $\varepsilon\eta = \gamma$. Αλλά $\alpha\beta = \gamma$ (Πόρισμα Π11, σελ. 214). Έτσι $\alpha\beta = \varepsilon\eta$ οπότε $\alpha/\varepsilon = \eta/\beta$ (Β7, Π19, σελ. 184). Όμοια με πριν συμπεραίνουμε ότι ο ε μετρά και τον β, έστω κατά θ μονάδες. Δηλαδή $\beta = \theta\varepsilon$. Αλλά $\beta = \alpha^2$ (Π8, σελ. 213) οπότε $\alpha^2 = \theta\varepsilon$ άρα $\alpha/\varepsilon = \theta/\alpha$ και ομοίως με πριν ο ε μετρά τον α, το οποίο είναι αδύνατο αφού υποθέσαμε ότι ο ε δεν μετρά τον α.

Έτσι ο ε πράγματι μετράει τον α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 13 (629) *Αν δοθούν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία ξεκινώντας από τη μονάδα και ο αριθμός αμέσως μετά τη μονάδα είναι πρώτος τότε καθένας από τους μεγαλύτερούς του στη συνεχή αναλογία δεν μετριέται από κανέναν άλλον παρά μόνο από τους προηγούμενούς του στην αναλογία.*

Απόδειξη. Έστω οι 1, α, β, γ, δ σε συνεχή αναλογία και ο α πρώτος. Ισχυρίζομαι ότι ο δ δεν διαιρείται από κανέναν άλλον παρά μόνο από τους α, β και γ.

Διότι ας υποθέσουμε ότι ο δ μετρείται από τον ε ο οποίος δεν είναι κανένας από τους α, β, γ. Φανερά ο ε δεν είναι πρώτος γιατί σε αυτή την περίπτωση θα έπρεπε, αφού μετρά τον δ, να μετρά και τον α (Π12, σελ. 215), ο οποίος α όμως είναι πρώτος και όχι ο ε το οποίο είναι άτοπο. Έτσι ο ε δεν είναι πρώτος, άρα είναι σύνθετος.

Κάθε σύνθετος τώρα μετριέται από κάποιον πρώτο (Β7, Π32, σελ. 189). Ισχυρίζομαι τώρα ότι μόνο από τον α μπορεί να μετρείται. Αυτό είναι φανερό γιατί αν μετρείται από κάποιον άλλον αυτός μετρά τον ε και άρα και τον δ οπότε και τον α (Π12, σελ. 215), ο οποίος α όμως είναι πρώτος οπότε έχουμε άτοπο. Άρα αφού ο ε είναι σύνθετος και δεν μετριέται από κανέναν άλλον πλην του α μετριέται από τον α. Και αφού ο ε μετρά τον

δ ας τον μετρά κατά ζ μονάδες. Ο ζ όμως δεν είναι κανένας από τους α, β, γ. Γιατί στην αντίθετη περίπτωση επειδή μετράει τον δ κατά ε μονάδες κάποιος από τους α, β, γ μετράει τον δ κατά ε μονάδες. Αλλά ένας από τους α, β, γ μετρά τον δ κατά έναν από τους α, β, γ (Π11, σελ. 214)· και άρα ο ε είναι ίσος με έναν από τους α, β, γ αντιφάσκοντας την υπόθεση. Έτσι ο ζ δεν είναι ένας από τους α, β, γ.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι ο ζ μετρείται από τον α και δεν είναι πρώτος. Διότι αν είναι επειδή μετρά τον δ μετρά και τον α (Π12, σελ. 215) ο οποίος α ως πρώτος δεν μπορεί να είναι διαφορετικός του ζ το οποίο είναι άτοπο. Έτσι ο ζ είναι σύνθετος, άρα μετρείται από κάποιον πρώτο (Β7, Π32, σελ. 189). Ισχυρίζομαι τώρα ότι αναγκαστικά μετρείται από τον α. Διότι όποιος μετρά τον ζ μετρά και τον δ άρα και τον α (Π12, σελ. 215) που είναι όμως πρώτος. Άρα ο α μετρά τον ζ.

Τώρα έχουμε ότι $\varepsilon\zeta = \delta$ αλλά και $\alpha\gamma = \delta$ (Π11, σελ. 214). Έτσι $\varepsilon\zeta = \alpha\gamma$ οπότε $\alpha/\varepsilon = \zeta/\gamma$ (Β7, Π19, σελ. 184). Αλλά ο α μετρά τον ε άρα και ο ζ μετρά τον γ έστω κατά η μονάδες. Ομοίως δείχνουμε ότι ο η δεν είναι ούτε ο α ούτε ο β και μετρείται από τον α. Και επειδή ο ζ μετρά τον γ κατά τον η έχουμε $\zeta\eta = \gamma$. Αλλά $\alpha\beta = \gamma$ (Π11, σελ. 214) άρα $\alpha\beta = \zeta\eta$, οπότε $\alpha/\zeta = \eta/\beta$ (Β7, Π19, σελ. 184). Αλλά ο α μετρά τον ζ άρα και ο η τον β, έστω κατά τον θ, δηλαδή $\eta\theta = \beta$. Αλλά και $\alpha^2 = \beta$ οότε $\alpha^2 = \theta\eta$, οπότε $\theta/\alpha = \alpha/\eta$ (Β7, Π19, σελ. 184). Ο α όμως μετρά τον η άρα και ο θ μετρά τον α ο οποίος όμως είναι πρώτος, άτοπο.

Έτσι ο δ δεν μετράται από άλλον αριθμός εκτός των α, β, γ· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 14 (631) *Αν δίνονται κάποιοι πρώτοι αριθμοί ο ελάχιστος αριθμός που όλοι αυτοί μετρούν δεν μετριέται από κανέναν άλλο πρώτο εκτός από αυτούς τους πρώτους.*

Απόδειξη. Ας μετρείται ο ελάχιστος αριθμός α από τους πρώτους β, γ, δ. Ισχυρίζομαι ότι ο α δεν μετρείται από κανέναν άλλον εκτός από τους β, γ και δ.

Διότι ας υποθέσουμε ότι μετρείται από τον πρώτο ε με τον ε να μην είναι κανείς από τους β, γ, δ. ΑΣ υποθέσουμε επίσης ότι ο ε μετράει τον α κατά τον ζ, δηλαδή $\varepsilon\zeta = \alpha$. Επειδή όμως οι β, γ, δ είναι πρώτοι και μετρούν τον $\alpha = \varepsilon\zeta$ θα μετρούν έναν από τους ε, ζ (Β7, Π30, σελ. 188). Αλλά δεν γίνεται να μετρούν τον ε αφού ο ε είναι πρώτος και δεν είναι κανείς από τους β, γ, δ. Άρα μετρούν τον ζ. Αλλά $\zeta < \alpha$ οπότε έχουμε άτοπο αφού ο α ήταν ο ελάχιστος που μετρούν οι β, γ, δ.

Έτσι ο α δεν μετρείται από κανέναν άλλον εκτός από τους β, γ, δ· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 15 (631) *Αν τρεις αριθμοί είναι σε συνεχή αναλογία και είναι ελάχιστοι με αυτό το λόγο, τότε το άθροισμα οποιωνδήποτε δύο από αυτούς και ο τρίτος που απομένει είναι μεταξύ τους πρώτοι.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι οι α, β και γ είναι σε συνεχή αναλογία και ελάχιστοι με αυτόν τον λόγο. Θα αποδείξουμε ότι οι $\alpha+\beta$, γ είναι μεταξύ τους πρώτοι. Ομοίως και οι $\beta+\gamma$, α καθώς και οι $\alpha+\gamma$, β.

Ας Θεωρήσουμε ελάχιστους δ και ε ώστε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Αφού οι α, β, γ είναι ελάχιστοι με αυτόν τον λόγο θα είναι της μορφής $\alpha=\delta^2$, $\beta=\delta\varepsilon$ και $\gamma=\varepsilon^2$. (Β8, Π2, σελ. 195 (στμ: ο λόγος δ/ε παίζει τον ρόλο του λόγου α/β αυτής της πρότασης)). Οι δ και ε ως ελάχιστοι με αυτόν τον λόγο είναι μεταξύ τους πρώτοι (Β7, Π22, σελ. 185), οπότε οι $\delta+\varepsilon$ και ε είναι πρώτοι μεταξύ τους όπως και οι $\delta+\varepsilon$ και δ (Β7, Π28, σελ. 187). Συνεπώς οι τρεις $\delta+\varepsilon$, δ, ε είναι μεταξύ τους πρώτοι. Άρα και οι $(\delta+\varepsilon)\cdot\delta$, ε είναι μεταξύ τους πρώτοι (Β7, Π24, σελ. 186), οπότε και οι $(\delta+\varepsilon)\cdot\delta$, ε^2 (Β7, Π25, σελ. 186). Αλλά $(\delta+\varepsilon)\cdot\delta=\delta^2+\varepsilon\delta$ (Β2, Π3, σελ. 61). Όμως $\delta^2=\alpha$ και $\varepsilon\delta=\beta$ άρα ο $\alpha+\beta$ είναι πρώτος με τον $\varepsilon^2=\gamma$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι οι $\beta+\gamma$ και α είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι και οι $\alpha+\gamma$ και β είναι μεταξύ τους πρώτοι. Πράγματι, ο $\delta+\varepsilon$ είναι πρώτος τόσο με τον δ όσο και με τον ε, οπότε και ο $(\delta+\varepsilon)^2$ είναι πρώτος με τον $\delta\cdot\varepsilon$ (Β7, Π25, σελ. 186). Αλλά

$$(\delta+\varepsilon)^2=\delta^2+\varepsilon^2+2\delta\varepsilon=\alpha+\gamma+2\delta\varepsilon.$$

Δηλαδή ο $\alpha+\gamma+2\delta\varepsilon$ με τον $\delta\varepsilon$ είναι μεταξύ τους πρώτοι. Αλλά τότε είναι πρώτοι και οι $\delta\varepsilon$, $(\alpha+\gamma+2\delta\varepsilon)-\delta\varepsilon$ και άρα και οι $\delta\varepsilon=\beta$ και $(\alpha+\gamma+2\delta\varepsilon)-\delta\varepsilon-\delta\varepsilon=\alpha+\gamma$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 16 (632) *Αν δυο αριθμοί είναι μεταξύ τους πρώτοι. Τότε δεν υπάρχει αριθμός ώστε ο πρώτος προς τον δεύτερο να έχει ίσο λόγο με τον δεύτερο προς τον τρίτο.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι α και β είναι μεταξύ τους πρώτοι. Ισχυρίζομαι ότι αν γ οποιοσδήποτε αριθμός τότε δεν είναι δυνατόν να ισχύει $\alpha/\beta=\beta/\gamma$.

Διότι αν είναι αυτό δυνατό τότε επειδή οι α και β είναι μεταξύ τους πρώτοι, είναι και ελάχιστοι (Β7, Π21, σελ. 185), και οι ελάχιστοι μετρούν αυτούς που έχουν ίσο λόγο, ο αριθμητής τον αριθμητή και ο παρονομαστής τον παρονομαστή (Β7, Π20, σελ. 184)· άρα ο α μετράει τον β, οπότε αφού μετράει και τον εαυτό του, ο α μετρά και τον α και τον β το οποίο είναι άτοπο, αφού οι α, β είναι μεταξύ τους πρώτοι. Άρα δεν είναι σωστό ότι $\alpha/\beta=\beta/\gamma$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 17 (632) *Αν έχουμε οσουσδήποτε αριθμούς σε συνεχή αναλογία και οι άκροι αυτών είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε ο πρώτος προς τον δεύτερο δεν έχει λόγο ίσο με τον τελευταίο προς κάποιον άλλον.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε τους αριθμούς α, β, γ, δ σε συνεχή αναλογία με τους α και δ να είναι μεταξύ τους πρώτοι. Ισχυρίζομαι ότι δεν υπάρχει αριθμός ε ώστε να ισχύει $\alpha/\beta = \delta/\varepsilon$.

Διότι αν αυτό ήταν δυνατόν τότε και ο εναλλάξ λόγος $\alpha/\delta = \beta/\varepsilon$ (Β7, Π13, σελ. 182). Αλλά οι α και δ είναι μεταξύ τους πρώτοι, άρα και ελάχιστοι (Β7, Π21, σελ. 185) και άρα μετράει ο αριθμητής τον αριθμητή και παρονομαστής τον παρονομαστή (Β7, Π20, σελ. 184). Άρα ο α μετράει τον β. Αλλά $\alpha/\beta = \beta/\gamma$, άρα ο β μετράει τον γ (Β7, Ορ21, σελ. 175)· συνεπώς και ο α μετράει τον γ. Αλλά $\beta/\gamma = \gamma/\delta$ και αφού ο β μετράει τον γ μετράει και ο γ τον δ. Έτσι ο α μετράει και τον δ (αφού μετράει τον γ και ο γ τον δ).

Έτσι ο α μετράει και τον α και τον δ το οποίο είναι άτοπο, αφού οι α και δ είναι μεταξύ τους πρώτοι· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 18 (633) *Δοθέντων δύο αριθμών να εξετασθεί αν είναι δυνατόν να βρεθεί τρίτος ανάλογος προς αυτούς.*

Απόδειξη. Ας είναι α και β οι δύο δοθέντες αριθμοί. Πρέπει να εξετασθεί αν μπορεί να βρεθεί τρίτος αριθμός ανάλογος προς αυτούς.

Αν α και β πρώτοι μεταξύ τους τότε αυτό είναι αδύνατο (Π16, σελ. 217).

Έστω τώρα ότι οι α, β δεν είναι μεταξύ τους πρώτοι, και ας θέσουμε $\beta^2 = \gamma$. Ο α τώρα είτε μετράει είτε δεν μετράει τον γ. Αν τον μετράει κατά τον δ τότε $\alpha\delta = \gamma$. Οπότε $\alpha\delta = \beta^2$, και άρα $\alpha/\beta = \beta/\delta$ (Β7, Π19, σελ. 184). Άρα για τους α και β βρέθηκε τρίτος ανάλογος, ο δ.

Έστω τώρα ότι ο α δεν μετράει τον γ. Ισχυρίζομαι ότι δεν γίνεται να βρεθεί τρίτος ανάλογος για τους α και β. Διότι αν γίνεται έστω ότι αυτός είναι ο δ. Οπότε $\alpha\delta = \beta^2$ (Β7, Π19, σελ. 184). Αλλά το τετράγωνο του β είναι ο γ, άρα $\alpha\delta = \gamma$, δηλαδή ο α μετράει τον γ κατά τον δ. Αλλά έχουμε υποθέσει ότι ο α δεν μετράει τον γ, άρα άτοπο. Άρα δεν είναι να βρεθεί τρίτος ανάλογος αριθμός για τους α και β όταν ο α δεν μετράει τον γ· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 19 (633) *Δοθέντων τριών αριθμών να εξετασθεί πότε μπορεί να βρεθεί τέταρτος ανάλογος.*

Στμ: Η παρακάτω απόδειξη *δεν* είναι αυτή που περιλαμβάνεται στα Στοιχεία. Διότι η απόδειξη που είναι γραμμένη στον πάπυρο που έφτασε στα χέρια μας έχει μια απόδειξη η οποία είναι καταφανώς λανθασμένη. Ο πάπυρος αυτός προέρχεται από την περιοχή της Αλεξάνδρειας και πιθανώς αυτή η «απόδειξη» να έφτασε και στην εποχή του Θέωνα, πατέρα

της Υπατίας. Ο Θέωνας στα σχόλιά του στον Ευκλείδη επισκευάζει την απόδειξη με κομψό τρόπο, απόδειξη που παραθέτουμε παρακάτω. Αξίζει να σημειωθεί ότι τον Ευκλείδη και τον Θέωνα τους χωρίζουν περίπου 6 αιώνες. Σε αυτό το διάστημα το έργο έχει δεχθεί πάμπολλες αντιγραφές και δεδομένου του ότι το σφάλμα της απόδειξης είναι εντελώς προφανές και δοθείσης της εκπληκτικής επιμονής του Ευκλείδη στην Μαθηματική αυστηρότητα και ακρίβεια για 8 Βιβλία μέχρι εδώ, είναι τουλάχιστον αφελές να αποδίδεται το σφάλμα στον Ευκλείδη. Η απόδειξη που βρίσκεται στον πάπυρο παρατίθεται στο πρωτότυπο στη σελίδα 633.

Απόδειξη. [Θέων ο Αλεξανδρεύς, πατέρας της Φιλοσόφου Υπατίας] Ας είναι οι α, β και γ τρεις αριθμοί για τους οποίους πρέπει να εξετασθεί αν είναι δυνατόν να βρεθεί τέταρτος ανάλογος.

Θέτουμε $\delta = \beta\gamma$. Ο α είτε μετράει τον δ είτε δεν τον μετράει.

Αν τον μετράει τότε έστω ότι τον μετράει κατά ε μονάδες. Οπότε $\alpha\varepsilon = \delta = \beta\gamma$. Συνεπώς $\alpha/\beta = \gamma/\varepsilon$ (Β7, Π19, σελ. 184) και βρέθηκε τέταρτος ανάλογος (ο ε).

Αν όμως ο α δεν μετράει τον δ τότε ισχυρίζομαι ότι δεν μπορεί να βρεθεί τέταρτος ανάλογος. Διότι αν αυτό δεν ισχύει, δηλαδή αν υπάρχει τέταρτος ανάλογος έστω ότι αυτός είναι ο ε. Τότε ισχύει $\alpha/\beta = \gamma/\varepsilon$, αλλά τότε $\alpha\varepsilon = \beta\gamma = \delta$ (Β7, Π19, σελ. 184) και ο α μετράει τον δ που είναι αδύνατον· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 20 (Υπάρχει άπειρο πλήθος πρώτων αριθμών) (634) *Οι πρώτοι αριθμοί είναι περισσότεροι από οποιοδήποτε πλήθος πρώτων αριθμών.*

Απόδειξη. Έστω ότι δίνονται οι πρώτοι αριθμοί α, β, γ· ισχυρίζομαι ότι υπάρχουν περισσότεροι πρώτοι αριθμοί.

Διότι ας θεωρήσουμε τον ελάχιστο μετρούμενο από τους α, β και γ (στμ: ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο) (Β7, Π36, σελ. 192). Ας είναι αυτός ο δ και σε αυτόν ας προσθέσουμε τη μονάδα. Ο $\delta + 1$ είτε είναι πρώτος είτε δεν είναι. Αν είναι πρώτος τότε έχουμε βρει τους α, β, γ και $\delta + 1$ που είναι περισσότεροι από τους α, β, γ.

Έστω τώρα ότι ο $\delta + 1$ δεν είναι πρώτος· άρα μετριέται από κάποιον πρώτο αριθμό (Β7, Π31, σελ. 189), έστω τον η. Ισχυρίζομαι ότι ο η δεν είναι κανένας εκ των α, β, γ. Διότι αν ο η είναι ένας από τους α, β, γ, επειδή αυτοί μετρούν τον δ και ο η τον μετράει. Αλλά μετράει και τον $\delta + 1$· θα μετράει συνεπώς και τη διαφορά τους, δηλαδή τη μονάδα· άτοπο. Έτσι ο η δεν είναι κανένας εκ των α, β, γ. Αλλά από την υπόθεση ο η είναι πρώτος άρα βρέθηκαν οι πρώτοι α, β, γ, η που είναι περισσότεροι από τους α, β, γ· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 21 (635) *Το άθροισμα οσωνδήποτε αρτίων είναι άρτιος.*

Απόδειξη. Αν οι α, β, γ, δ είναι άρτιοι, ισχυρίζομαι ότι και ο $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ είναι άρτιος.

Διότι αφού οι α, β, γ, δ είναι άρτιοι έχουν μισό (Β7, Ορ6, σελ. 174)· οπότε και το άθροισμα έχει μισό. Κάθε αριθμός δε που διαιρείται στα δύο είναι άρτιος, άρα ο $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ είναι άρτιος· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 22 (635) *Το άθροισμα άρτιου πλήθους περιττών αριθμών είναι άρτιος.*

Απόδειξη. Ας προσθέσουμε τους περιττούς αριθμούς α, β, γ, δ· ισχυρίζομαι ότι το άθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ είναι άρτιος.

Αν από καθένα από τους α, β, γ, δ αφαιρεθεί μια μονάδα προκύπτουν άρτιοι (Β7, Ορ7, σελ. 174)· ώστε και το άθροισμα αυτών θα είναι άρτιος (Π21, σελ. 185). Αλλά και το πλήθος των μονάδων που αφαιρέθηκαν είναι άρτιο, άρα και όλος ο $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ είναι άρτιος (Π21, σελ. 185)· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 23 (635) *Άθροισμα περιττού πλήθους περιττών είναι περιττός.*

Απόδειξη. Ας προστεθούν οι περιττοί αριθμοί α, β, γ· ισχυρίζομαι ότι ο $\alpha+\beta+\gamma$ είναι περιττός. Διότι ο $\gamma-1$ είναι άρτιος (Β7, Ορ7, σελ. 174), όπως και ο $\alpha+\beta$ (Π22, σελ. 220)· άρα και ο $\alpha+\beta+\gamma-1$ είναι άρτιος, οπότε ο $\alpha+\beta+\gamma$ είναι περιττός· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 24 (636) *Αν από άρτιο αφαιρεθεί άρτιος προκύπτει άρτιος.*

Απόδειξη. Ας αφαιρεθεί από τον άρτιο α ο άρτιος β· ισχυρίζομαι ότι ο $\alpha-\beta$ είναι άρτιος.

Διότι επειδή ο α είναι άρτιος έχει μισό (Β7, Ορ6, σελ. 174) και το ίδιο ισχύει και για τον β. Άρα έχει μισό και ο $\alpha-\beta$, οπότε είναι άρτιος· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 25 (636) *Αν από άρτιο αφαιρεθεί περιττός προκύπτει περιττός.*

Απόδειξη. Ας αφαιρεθεί από τον άρτιο α ο περιττός β· ισχυρίζομαι ότι ο $\alpha-\beta$ είναι περιττός.

Διότι ας αφαιρεθεί από τον β η μονάδα, οπότε ο $\beta-1$ είναι άρτιος. Αλλά άρτιος είναι και ο α οπότε άρτιος είναι και ο $\alpha-(\beta-1)$ (Π24, σελ. 220). Άρα ο $\alpha-\beta$ είναι περιττός (Β7, Ορ6, σελ. 174)· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 26 (636) *Αν από περιττό αριθμό αφαιρεθεί περιττός προκύπτει άρτιος.*

Απόδειξη. Ας αφαιρεθεί από τον περιττό $\alpha=$ ΑΒ ο περιττός $\beta=$ ΒΓ· ισχυρίζομαι ότι ο $\alpha-\beta=$ ΑΓ είναι άρτιος.

Διότι ας είναι θεωρήσουμε τη μονάδα $1 = \Delta\text{Β}$· επειδή ο $\alpha = \text{ΑΒ}$ είναι περιττός, ο $\alpha - 1 = \text{ΑΔ}$ είναι άρτιος. Ομοίως και ο $\beta - 1 = \Gamma\Delta$ είναι άρτιος, άρα και ο $(\alpha - 1) - (\beta - 1) = \text{ΑΓ}$ είναι άρτιος, δηλαδή ο $\alpha - \beta$· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 27 (636) *Αν από περιττό αφαιρεθεί άρτιος προκύπτει περιττός.*

Απόδειξη. Ας αφαιρεθεί από τον περιττό α ο άρτιος β· ισχυρίζομαι ότι ο $\alpha - \beta$ είναι περιττός.

Διότι αν αφαιρεθεί η μονάδα από τον α, ο $\alpha - 1$ είναι άρτιος, Αλλά και ο β είναι άρτιος άρα και ο $\alpha - 1 - \beta$ είναι άρτιος (Π24, σελ. 220). Άρα ο $\alpha - \beta$ είναι περιττός· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 28 (637) *Το γινόμενο περιττού με άρτιο είναι άρτιος.*

Απόδειξη. Διότι ας δίνει ο περιττός α πολλαπλασιαζόμενος με τον άρτιο β τον αριθμό γ· ισχυρίζομαι ότι ο γ είναι άρτιος.

Διότι αφού $\alpha\beta = \gamma$ ο γ είναι το άθροισμα τόσων αριθμών ίσων με β όσες οι μονάδες του α (Β7, Ορ16, σελ. 174). Αλλά ο β είναι άρτιος· ο γ δε άθροισμα αρτίων, άρα άρτιος (Π21, σελ. 219)· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 29 (637) *Περιττός επί περιττό δίνει περιττό.*

Απόδειξη. Διότι ας δίνει ο περιττός α πολλαπλασιαζόμενος με τον περιττό β τον αριθμό γ· ισχυρίζομαι ότι ο γ είναι περιττός.

Διότι αφού $\alpha\beta = \gamma$ ο γ είναι άθροισμα τόσων αριθμών ίσων με β όσες είναι οι μονάδες του α (Β7, Ορ16, σελ. 174). Και οι α, β είναι περιττοί· άρα ο γ είναι άθροισμα περιττού πλήθους περιττών, άρα περιττός (Π23, σελ. 220)· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 30 (637) *Αν περιττός αριθμός μετράει έναν άρτιο τότε μετράει και το μισό αυτού.*

Απόδειξη. Διότι ας μετράει ο περιττός α τον άρτιο β· ισχυρίζομαι ότι μετράει και το μισό του β.

Διότι, αφού ο α μετράει τον β, ας τον μετράει κατά τον γ. Ισχυρίζομαι ότι ο γ δεν είναι περιττός. Διότι αν ήταν τότε ο $\beta = \alpha\gamma$ είναι γινόμενο περιττών και θα ήταν περιττός (Π23, σελ. 220) το οποίο δεν συμβαίνει. Άρα ο γ δεν είναι περιττός, δηλαδή είναι άρτιος. Άρα ο α μετράει τον β αρτιάκις (στμ: άρτιο πλήθος φορών), Συνεπώς μετράει και το μισό του (στμ: οι μισές από τις άρτιες φορές που ο α μετράει τον β θα δώσουν τον μισό β)· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 31 (637) *Αν περιττός είναι πρώτος με κάποιον άλλο αριθμό είναι πρώτος και με το διπλάσιο αυτού του αριθμού.*

Απόδειξη. Έστω ο περιττός αριθμός α ο οποίος είναι πρώτος με τον β, και έστω γ ο διπλάσιος του β. Ισχυρίζομαι ότι ο α είναι πρώτος και με τον γ.

Διότι αν οι α και γ δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους υπάρχει αριθμός που τους μετράει και τους δύο, έστω ο δ. Ο α είναι περιττός άρα περιττός είναι και ο δ. Αλλά ο περιττός δ μετράει τον άρτιο γ άρα μετράει και το μισό του γ, δηλαδή τον β. Άρα ο δ μετράει και τον α και τον β το οποίο είναι άτοπο. Άρα οι α και γ είναι μεταξύ τους πρώτοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 32 (638) *Αν ξεκινήσουμε από το 2 και διπλασιάζουμε συνεχώς οι αριθμοί που προκύπτουν είναι μόνο αρτιάκις άρτιοι.*

Απόδειξη. Διπλασιάζοντας συνεχώς από τον $\alpha = 2$ ας πάρουμε τους αριθμούς β, γ, δ. Ισχυρίζομαι ότι οι β, γ, δ είναι μόνο αρτιάκις άρτιοι.

Το ότι είναι αρτιάκις άρτιοι είναι φανερό διότι έχουμε κάνει συνεχείς διπλασιασμούς από τη δυάδα (Β7, Ορ8, σελ. 174). Αλλά ξεκινώντας από τη μονάδα, οι 1, α, β, γ, δ είναι σε συνεχή αναλογία και ο επόμενος της μονάδας, ο α, είναι πρώτος. Άρα ο δ δεν μετριέται από κανέναν άλλον εκτός από τους α, β, και γ (Π13, σελ. 215). Αλλά οι α, β, γ είναι όλοι άρτιοι άρα ο δ είναι μόνο αρτιάκις άρτιος (Β7, Ορ8, σελ. 174). Ομοίως αποδεικνύουμε ότι και οι β και γ είναι μόνο αρτιάκις άρτιοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 33 (638) *Αν αριθμός έχει περιττό το μισό του, τότε είναι μόνο αρτιάκις περιττός.*

Απόδειξη. Διότι ας έχει ο α περιττό το μισό του. Ισχυρίζομαι ότι ο α είναι μόνο αρτιάκις περιττός.

Το ότι είναι αρτιάκις περιττός είναι φανερό· διότι ο μισός αυτού είναι περιττός και τον μετράει άρτιες φορές (Β7, Ορ9, σελ. 174). Αν τώρα υποθέσω ότι είναι και αρτιάκις άρτιος, θα μετριέται από άρτιο αριθμός άρτιο πλήθος φορών (Β7, Ορ8, σελ. 174)· άρα και ο μισός του θα μετριέται από άρτιο αριθμό, αλλά αυτός είναι περιττός, άτοπο. Έτσι ο α είναι μόνο αρτιάκις περιττός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 34 (638) *Αν ένας αριθμός δεν προκύπτει με διπλασιασμούς ξεκινώντας από το δύο ούτε έχει περιττό το μισό του, τότε είναι και αρτιάκις άρτιος και αρτιάκις περιττός.*

Απόδειξη. Έστω ο αριθμός α ο οποίος ούτε προκύπτει με διπλασιασμούς από το δύο ούτε έχει το μισό του περιττό. Ισχυρίζομαι ότι ο α είναι αρτιάκις περιττός.

Το ότι είναι αρτιάκις άρτιος είναι φανερό (Β7, Ορ8, σελ. 174)· διότι δεν έχει το μισό του περιττό. Ισχυρίζομαι τώρα ότι είναι και αρτιάκις περιττός.

Διότι αν διαιρέσουμε τον α σε δύο ίσα τμήματα και συνεχίσουμε να διχοτομούμε θα καταλήξουμε σε κάποιον περιττό αριθμό ο οποίος θα μετράει τον α άρτιο πλήθος φορών. Γιατί αν αυτό δεν συμβεί θα καταλήξουμε στη δυάδα και ο α θα είναι αποτέλεσμα συνεχών διπλασιασμών από τη δυάδα, πράγμα αντίθετο με την υπόθεση (Β7, Ορ9, σελ. 174). Έτσι ο α είναι και αρτιάκις περιττός και αρτιάκις άρτιος· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 35 (Άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου) (639) *Αν δοθούν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία τότε ο λόγος της διαφοράς του δεύτερου όρου από τον πρώτο όρο προς τον πρώτο όρο ισούται με τον λόγο της διαφοράς του τελευταίου όρου από τον πρώτο όρο προς το άθροισμα όλων των δοσμένων αριθμών εκτός του τελευταίου.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι α, β, γ, δ είναι σε συνεχή αναλογία με ελάχιστο τον α και ας αφαιρεθεί από τους β και δ ο α. Ισχυρίζομαι ότι

$$\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\frac{\delta-\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Πράγματι, αφού

$$\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\beta}{\alpha},$$

συνεπάγεται ότι

$$\frac{\delta-\gamma}{\gamma}=\frac{\gamma-\beta}{\beta}=\frac{\beta-\alpha}{\alpha}$$

(Β7, Π11, σελ. 181). Αυτός ο λόγος τώρα ισούται με τον λόγο του αθροίσματος των αριθμητών προς το άθροισμα των παρονομαστών (Β7, Π12, σελ. 181) δηλαδή

$$\frac{\delta-\gamma}{\gamma}=\frac{\gamma-\beta}{\beta}=\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\frac{\delta-\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$$

όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 36 (Τέλειοι από πρώτους του Mersenne) (639) *Αν το άθροισμα οποιουδήποτε πλήθους αριθμών σε συνεχή αναλογία που ξεκινά από τη μονάδα και έχει λόγο τη δυάδα είναι πρώτος αριθμός, τότε το γινόμενο του αθροίσματος αυτού με τον τελευταίο της συνεχούς αναλογίας είναι τέλειος αριθμός.*

Απόδειξη. Διότι ας πάρουμε οσουσδήποτε αριθμούς σε συνεχή αναλογία ξεκινώντας από τη μονάδα μέχρι το άθροισμα όλων να γίνει πρώτος. Ας είναι αυτοί οι αριθμοί οι 1, α, β, γ και δ. Θέτουμε $\varepsilon=1+\alpha+\beta+\gamma+\delta$ και $\zeta=\varepsilon\cdot\delta$. ισχυρίζομαι ότι ο ζ είναι τέλειος.

Όσοι είναι το πλήθος οι α, β, γ και δ ας πάρουμε ξεκινώντας από τον ε με λόγο ένα προς δύο σε συνεχή αναλογία τους ε, θ, λ, μ, δηλαδή

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\theta}=\frac{\theta}{\lambda}=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{2}.$$

Δι᾽ ίσου τώρα $\alpha/\delta = \varepsilon/\mu$ (Β7, Π14, σελ. 182), οπότε $\alpha\mu = \varepsilon\delta$ (Β7, Π19, σελ. 184). Αλλά $\varepsilon\delta = \zeta$, άρα $\alpha\mu = \zeta$. Έτσι ο μ μετράει τον ζ κατά τις μονάδες του α. Αλλά ο α είναι η δυάδα, οπότε ο ζ είναι διπλάσιος του μ. Είναι επίσης και οι μ, λ, θ, ε ο ένας διπλάσιος του επόμενου, άρα οι ε, θ, λ, μ, ζ βρίσκονται σε συνεχή αναλογία με λόγο ένα προς δύο:

$$\frac{\varepsilon}{\theta} = \frac{\theta}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mu}{\zeta} = \frac{1}{2}.$$

Αφαιρώντας τον ε από τον δεύτερο (τον θ) και τον τελευταίο (τον ζ), προκύπτει ότι

$$\frac{\theta - \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\zeta - \varepsilon}{\varepsilon + \theta + \lambda + \mu}$$

(Π35, σελ. 223). Αλλά $\theta - \varepsilon = \varepsilon$ αφού ο θ είναι διπλάσιος του ε, οπότε και $\zeta - \varepsilon = \varepsilon + \theta + \lambda + \mu$. Ο ε τώρα είναι ίσος με $1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta$ (Π35, σελ. 223), άρα

$$\zeta = 1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \theta + \lambda + \mu,$$

και ο ζ μετριέται από καθέναν από αυτούς τους προσθετέους. Ισχυρίζομαι τώρα ότι ο ζ δεν μετριέται από κανένα άλλο εκτός από αυτούς. Αν όχι, έστω ότι ο ξ μετράει τον ζ και δεν είναι κανένας από τους α, β, γ, δ, ε, θ, λ, μ, και ας τον μετράει κατά π μονάδες, δηλαδή $\xi\pi = \zeta = \varepsilon\delta$. Άρα $\varepsilon/\pi = \xi/\delta$ (Β7, Π19, σελ. 184). Επειδή τώρα οι 1, α, β, γ, δ είναι σε συνεχή αναλογία, ο δ δεν μετριέται από κανένα άλλο εκτός των α, β και γ (Π13, σελ. 215). Ο ξ τώρα, αφού δεν είναι κανείς από τους α, β, γ δεν μετράει τον δ. Άρα, αφού $\xi/\delta = \varepsilon/\pi$ ούτε ο ε μετράει τον π (Βιβλίο7, Ορ21, σελ. 175). Ο ε όμως είναι πρώτος και κάθε πρώτος με κάποιον που δεν μετράει είναι με αυτόν πρώτος (Β7, Π29, σελ. 188). Έτσι οι ε και π είναι μεταξύ τους πρώτοι, άρα και ελάχιστοι (Β7, Π21, σελ. 185), και οι ελάχιστοι μετράνε αυτούς που έχουν ίδιο λόγο μαζί τους, ο αριθμητής τον αριθμητή και ο παρονομαστής τον παρονομαστή (Β7, Π20, σελ. 184). Συνεπώς όσες φορές μετράει ο ε τον ξ τόσες φορές μετράει ο π τον δ. Ο δ όμως μετριέται μόνο από τους α, β και γ, άρα ο π είναι ένας από αυτούς. Ας υποθέσουμε ότι είναι ο β.

Όσοι είναι στο πλήθος οι β, γ, δ ας θεωρήσουμε το ίδιο πλήθος από τον ε, δηλαδή τους ε, θ και λ, οι οποίοι έχουν τον ίδιο λόγο με τους β, γ, δ. Δι᾽ ίσου τώρα ισχύει $\beta/\delta = \varepsilon/\lambda$ (Β7, Π14, σελ. 182). Οπότε $\beta\lambda = \delta\varepsilon$ (Β7, Π19, σελ. 184). Αλλά $\delta\varepsilon = \xi\pi$ άρα $\beta\lambda = \xi\pi$. Οπότε $\pi/\beta = \lambda/\xi$. Αλλά $\pi = \beta$ άρα $\lambda = \xi$ το οποίο είναι αδύνατο αφού ο ξ δεν είναι ίσος με κανέναν από τους θεωρούμενους αριθμούς.

Συνεπώς κανείς εκτός των 1, α, β, γ, δ, ε, θ, λ, μ δεν μετράει τον ζ. Τέλειος όμως είναι ο αριθμός που είναι ίσος με το άθροισμα των μερών του (στμ: εκείνων που τον μετρούν) (Β7, Ορ23, σελ. 175), άρα ο ζ είναι τέλειος· Δ

Βιβλίο 10ο

Ορισμοί

Ορισμοί 1 (643)

(ορ. 1) Σύμμετρα ονομάζονται τα μεγέθη για τα οποία υπάρχει κοινό μέτρο, ενώ ασύμμετρα αυτά για τα οποία δεν υπάρχει κοινό μέτρο.

(ορ. 2) Δυνάμει σύμμετρα ονομάζονται τα ευθύγραμμα τμήματα για τα οποία υπάρχει χωρίο του οποίου το εμβαδόν είναι κοινό μέτρο των εμβαδών των τετραγώνων τους. Ενώ λέγονται δυνάμει ασύμμετρα όταν δεν υπάρχει χωρίο του οποίου το εμβαδόν να είναι κοινό μέτρο των εμβαδών των τετραγώνων τους.

(στμ: για τον επόμενο ορισμό είναι βοηθητική η εξής παρατήρηση: αν ένας αριθμός είναι ρητός και το τετράγωνό του είναι ρητό· ενώ αν είναι άρρητος το τετράγωνό του μπορεί να είναι ρητός (όπως για παράδειγμα το $\sqrt{2}$) ή να παραμένει άρρητος (όπως για παράδειγμα το $\sqrt[3]{2}$). Δηλαδή υπάρχουν τρεις περιπτώσεις όταν εξετάζουμε τη ρητότητα ενός αριθμού μαζί με το τετράγωνό του.)

(ορ. 3) Δοθέντος ενός ευθύγραμμου τμήματος υπάρχει άπειρο πλήθος ευθύγραμμων τμημάτων που είναι σύμμετρα ως προς το μήκος, άπειρο πλήθος ευθύγραμμων τμημάτων που είναι σύμμετρα μόνο δυνάμει και άπειρο πλήθος ευθύγραμμων τμημάτων που είναι ασύμμετρα και ως προς το μήκος και δυνάμει. Ονομάζουμε το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα *ρητό*. *Ρητά* ονομάζουμε και τα ευθύγραμμα τμήματα που είναι σύμμετρα ως προς αυτό και ως προς το μήκος και δυνάμει ή μόνο δυνάμει. Τέλος εκείνα που είναι ασύμμετρα ως προς το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα και ως προς το μήκος και δυνάμει τα ονομάζουμε *άλογα*.

(στμ: προσοχή: εδώ έχουμε διαφοροποίηση σε σχέση με τη σύγχρονη ορολογία. Με βάση τα παραπάνω, ο $\sqrt{2}$ λέγεται ρητός (!) ως

προς τη μονάδα γιατί είναι δυνάμει ρητός (αφού $\sqrt{2}^2 = 2$). Η σημερινή του ...αρρητότητα εκφράζεται με το ότι είναι ασύμμετρος ως προς τη μονάδα. Για αυτό τον λόγο κρατάμε τον όρο «άλογος»· ώστε οι έννοιες «ρητός-άλογος» να παραπέμπουν στον ορισμό του Ευκλείδη και όχι στις σύγχρονες έννοιες «ρητός-άρρητος». Για την αποφυγή σύγχυσης όποτε θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε σύγχρονη ορολογία θα χρησιμοποιούμε το «$\in \mathbb{Q}$» ή «$\notin \mathbb{Q}$». Έτσι η φράση «ο ρ είναι ρητός» στη συνέχεια θα έχει αποκλειστικά το νόημα του πρωτότυπου κειμένου, δηλαδή θα σημαίνει $\rho^2 \in \mathbb{Q}$ (και όχι μόνο $\rho \in \mathbb{Q}$). Για περισσότερο σχολιασμό δείτε σελίδα 244.)

(ορ. 4) Το τετράγωνο του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος το ονομάζουμε και αυτό *ρητό*, και *ρητά* ονομάζουμε τα εμβαδά που είναι σύμμετρα με αυτό. Αλλά εκείνα που είναι ασύμμετρα με αυτό τα ονομάζουμε *άλογα* καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα που τα σχηματίζουν, δηλαδή την πλευρά τους αν είναι τετράγωνα και τα ευθύγραμμα τμήματα που δίνουν τετράγωνα ισεμβαδικά με τα εν λόγω χωρία.

(στμ: προσοχή και εδώ: άλογο είναι ένα εμβαδόν όχι όταν η αριθμητική του τιμή είναι άλογη με τον Ορισμό 3, σελ. 225, αλλά όταν η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου είναι άλογη, δηλαδή με τη σημερινή ορολογία όταν η ρίζα του εμβαδού είναι άλογη. Έτσι αν ένα μήκος ισούται με $\sqrt{2}$ αυτό είναι ρητό. Αλλά αν ένα εμβαδόν είναι ίσο με $\sqrt{2}$ τότε αυτό δεν είναι ρητό αλλά είναι άλογο γιατί ένα ισεμβαδικό τετράγωνο έχει πλευρά $\sqrt[4]{2}$ που είναι άλογη. Ρητά είναι τα εμβαδά E που η πλευρά του ισεμβαδικού τετραγώνου τους $\rho = \sqrt{E}$ είναι ρητός, δηλαδή $\rho^2 \in \mathbb{Q}$. Άρα όσο αφορά στα εμβαδά, ένα εμβαδόν E λέγεται ρητό όταν απλώς $E \in \mathbb{Q}$. Για περισσότερο σχολιασμό δείτε σελίδα 244.)

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

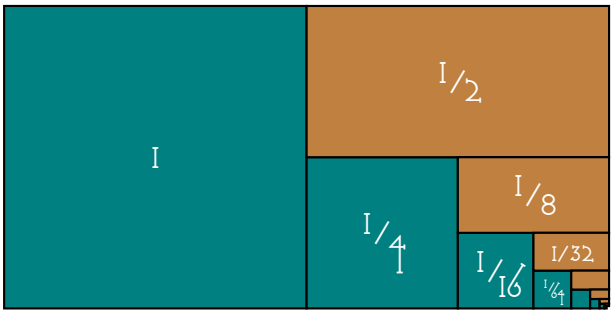
Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ

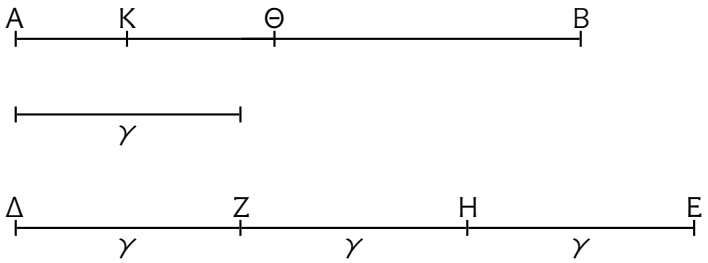
ΣΕΙΡΕΣ

ΣΥΓΚΛΙΣΗ

ΑΠΕΙΡΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ



Πρόταση 1 (Όριο, σειρά, σύγκλιση, ε-επιχειρήματα) (643) *Δοθέντων δύο άνισων μεγεθών, εάν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μεγαλύτερο του μισού του, και από το υπόλοιπο αφαιρεθεί μεγαλύτερο του μισού του και αυτό επαναλαμβάνεται συνεχώς θα προκύψει μέγεθος μικρότερο του δοθέντος μικρότερου μεγέθους.*

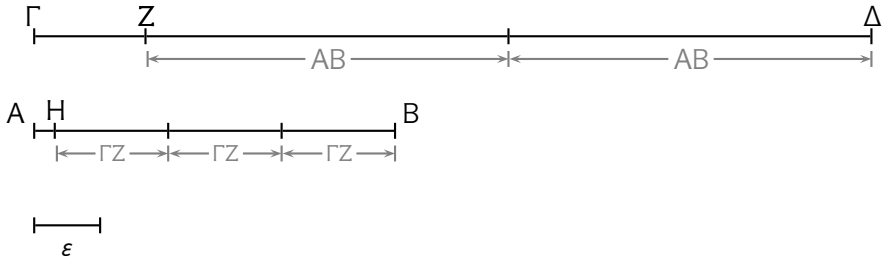


Απόδειξη. Έστω δύο μεγέθη, τα ΑΒ και γ ώστε $AB > \gamma$. Ισχυρίζομαι ότι αν από το ΑΒ αφαιρεθεί μεγαλύτερο του μισού του και από το υπόλοιπο μεγαλύτερο του μισού του και αυτό γίνεται συνεχώς, θα προκύψει μέγεθος μικρότερο του μεγέθους γ.

Διότι το γ πολλαπλασιαζόμενο με κατάλληλο φυσικό αριθμό δίνει γινόμενο ΔΕ μεγαλύτερο του ΑΒ (Β5, Ορ4, σελ. 125). Διαιρούμε το ΔΕ σε τμήματα μήκους γ. Ας είναι αυτά τα ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, και ας αφαιρεθεί από το ΑΒ μέγεθος μεγαλύτερο του μισού του, έστω το ΒΘ, από το ΑΘ μεγαλύτερο από το μισό του, έστω το ΘΚ και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία τόσες φορές όσες οι διαιρέσεις του ΔΕ.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε τις διαιρέσεις ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ ισοπληθείς με τις διαιρέσεις ΔΖ, ΖΗ και ΗΕ. Επειδή $\Delta E > AB$, και αφαιρέθηκε από το μεν ΔΕ το ΕΗ που είναι μικρότερο του μισού του ενώ από το ΑΒ το ΒΘ μεγαλύτερο από το μισό του, για τα υπόλοιπα θα ισχύει $H\Delta > \Theta A$. Αλλά και πάλι από το μεν ΗΔ αφαιρούμε το ΗΖ που είναι το μισό του, ενώ από το ΘΑ το ΘΚ που είναι μεγαλύτερο από το μισό του θα ισχύει $\Delta Z > AK$. Αλλά $\Delta Z = \gamma$, οπότε $\gamma > AK$. Έτσι από το μέγεθος ΑΒ μένει το μέγεθος ΑΚ που είναι μικρότερο του γ· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Ομοίως γίνεται η απόδειξη αν κάθε φορά αφαιρούμε το μισό μέγεθος.* Δ

Πρόταση 2 (Πρώτη εφαρμογή της ΠΙ, σελ. 229) (644) *Αν δίνονται δύο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντα το μικρότερο από το μεγαλύτερο, και το εκάστοτε υπόλοιπο ποτέ δεν μετράει το προηγούμενο μέγεθος, τα αρχικά μεγέθη είναι ασύμμετρα.*



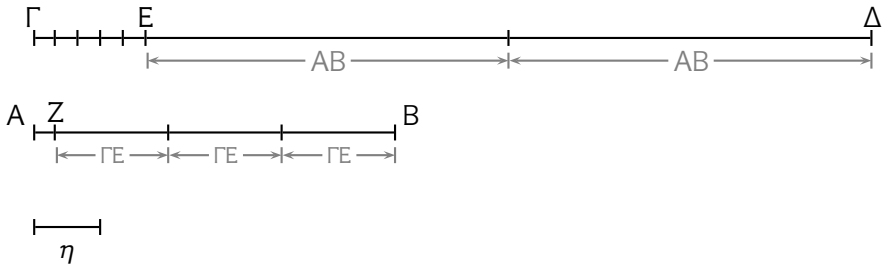
Απόδειξη. Διότι ας είναι ΑΒ < ΓΔ και ας ανθυφαιρείται πάντα το μικρότερο από το μεγαλύτερο χωρίς ποτέ το υπόλοιπο να μετράει το προηγούμενο· ισχυρίζομαι ότι τα ΑΒ και ΓΔ είναι ασύμμετρα.

Έστω ότι αυτό δεν είναι αληθές και το *ε* μετράει και το ΑΒ και το ΓΔ. Το ΑΒ αφού καταμετρήσει το ΖΔ ας αφήσει υπόλοιπο ΓΖ < ΑΒ, και το ΓΖ αφού μετρήσει το ΒΗ ας αφήσει υπόλοιπο ΑΗ < ΓΖ, και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να λάβουμε μέγεθος μικρότερο του *ε* (ΠΙ, σελ. 229). Έστω ότι ΑΗ < *ε*.

Το *ε* μετράει το ΑΒ άρα και το ΔΖ. Αλλά μετράει όλο το ΓΔ άρα και τη διαφορά ΓΖ. Αλλά το ΓΖ μετράει το ΒΗ άρα και ο *ε* μετράει το ΒΗ. Αλλά μετράει και το ΑΒ άρα και τη διαφορά ΑΗ < *ε*. Δηλαδή μετράει το μεγαλύτερο το μικρότερο, το οποίο είναι αδύνατον. Συνεπώς τα ΑΒ και ΓΔ δεν έχουν κοινό μέτρο και άρα είναι ασύμμετρα.

Άρα αν δοθούν δυο άνισα μεγέθη, κλπ κλπ *Δ*

Πρόταση 3 (645) *Δοθέντων δύο σύμμετρων μεγεθών να βρεθεί το μέγιστο κοινό τους μέτρο.* (στμ: προσοχή: δεν αφορά μόνο σε φυσικούς αριθμούς, δηλαδή δεν αναφέρεται στον μέγιστο κοινό διαιρέτη.)



Απόδειξη. Ας είναι τα ΑΒ < ΓΔ δυο σύμμετρα μεγέθη. Πρέπει να βρούμε το μέγιστο κοινό τους μέτρο.

Είτε το ΑΒ μετράει το ΓΔ είτε όχι. Αν το μετράει, αφού μετράει και τον εαυτό του αναγκαστικά το μέγιστο κοινό τους μέτρο είναι το ίδιο το ΑΒ, αφού δεν γίνεται το ΑΒ να μετριέται από μεγαλύτερο μέγεθος.

Έστω τώρα ότι το ΑΒ δεν μετράει το ΓΔ. Αφού αυτά τα μεγέθη είναι σύμμετρα η ανθυφαίρεση μεταξύ τους θα δώσει μέγεθος που μετράει το προηγούμενο μέγεθος της τελευταίας αφαίρεσης. Ας υποθέσουμε ότι το ΑΒ αφού μετρήσει το ΕΔ αφήνει υπόλοιπο το ΕΓ < ΑΒ, και το ΕΓ αφού μετρήσει το ΖΒ αφήνει υπόλοιπο το ΑΖ < ΕΓ το οποίο μετράει το ΓΕ.

Το ΑΖ μετράει το ΓΕ το οποίο μετράει το ΖΒ άρα το ΑΖ (αφού μετράει και τον εαυτό του) μετράει και το ΑΒ. Το δε ΑΒ μετράει το ΔΕ, άρα και το ΑΖ μετράει το ΔΕ, και αφού μετράει και το ΓΕ μετράει όλο το ΓΔ. Συνεπώς το ΑΖ είναι κοινό μέτρο για τα ΑΒ και ΓΔ.

Ισχυρίζομαι ότι το ΑΖ είναι το μέγιστο κοινό μέτρο τους. Αν δεν είναι θα υπάρχει μεγαλύτερο μέγεθος, έστω το $\eta >$ ΑΖ, που μετράει και το ΑΒ και το ΓΔ. Άρα το η μετράει το ΕΔ και αφού μετράει όλο το ΓΔ μετράει και το ΓΕ. Το τελευταίο με τη σειρά του μετράει το ΖΒ, άρα το η μετράει το ΖΒ, αλλά μετράει και το ΑΒ άρα μετράει και το ΑΖ. Δηλαδή το η μετράει το μικρότερο ΑΖ το οποίο είναι άτοπο. Δεν υπάρχει δηλαδή κοινό μέτρο για τα ΑΒ και ΓΔ μεγαλύτερο από το ΑΖ, άρα το ΑΖ είναι το μέγιστο κοινό μέτρο.

Δοθέντων άρα δύο σύμμετρων μεγεθών ΑΒ, ΓΔ βρέθηκε το μέγιστο κοινό τους μέτρο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα 16 *Από αυτό είναι φανερό ότι αν ένα μέγεθος μετράει δύο άλλα μεγέθη, τότε μετράει και το μέγιστο κοινό τους μέτρο.* Δ

Πρόταση 4 (645) *Δοθέντων τριών σύμμετρων μεγεθών να βρεθεί το μέγιστο κοινό τους μέτρο.*

Απόδειξη. Έστω ότι τα α, β, γ είναι τρία σύμμετρα μεγέθη. Πρέπει να βρούμε το μέγιστο κοινό τους μέτρο.

Έστω ότι δ είναι το μέγιστο κοινό μέτρο των α και β (Π3, σελ. 230). Το δ είτε μετράει το γ είτε όχι. Αν το μετράει τότε είναι φανερά κοινό μέτρο για τα α, β, γ και είναι το μέγιστο γιατί κανένα μεγαλύτερο του δ δεν μετράει τα α και β.

Έστω τώρα ότι το δ δεν μετράει το γ. Ισχυρίζομαι πρώτα ότι τα δ και γ είναι σύμμετρα. Διότι αφού τα α, β, γ είναι σύμμετρα υπάρχει μέγεθος που τα μετράει. Άρα αυτό θα μετράει και το δ (Πόρισμα, Π3, σελ. 230), άρα μετράει και το δ και το γ.

Ας θεωρήσουμε τώρα το μέγιστο κοινό μέτρο ε των δ και γ (Π3, σελ. 230). Άρα το ε μετράει το δ και άρα και τα α και β. Μετράει όμως και

το γ άρα μετράει τα α, β, γ, δηλαδή είναι κοινό τους μέτρο. Ισχυρίζομαι τώρα ότι το ε είναι το μέγιστο κοινό μέτρο. Πράγματι, αν όχι, έστω ότι το $\zeta > \varepsilon$ είναι κοινό μέτρο των α, β, γ. Άρα το ζ αφού μετράει τα α, β μετράει και το δ (Πόρισμα, Π3, σελ. 230). Άρα μετράει και το δ και το γ, συνεπώς και το μέγιστο κοινό τους μέτρο ε. Δηλαδή το μεγαλύτερο δ μετράει το μικρότερο ε, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα το ε είναι το μέγιστο κοινό μέτρο των α, β, γ όταν το δ δεν μετράει το γ, και είναι το δ όταν το δ μετράει το γ.

Δοθέντων λοιπόν τριών σύμμετρων μεγεθών, βρέθηκε το μέγιστο κοινό τους μέτρο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα 17 *Από αυτό είναι φανερό ότι αν ένα μέγεθος μετράει τρία μεγέθη, τότε μετράει και το μέγιστο κοινό τους μέτρο.*

(στμ: χρήση της αρχής της επαγωγής:) *Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε και το μέγιστο κοινό μέτρο περισσότερων μεγεθών, και το πόρισμα θα ισχύει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.* Δ

Πρόταση 5 (646) *Τα σύμμετρα μεγέθη έχουν λόγο ίσο με λόγο φυσικών αριθμών.*

Απόδειξη. Έστω ότι τα μεγέθη α και β είναι σύμμετρα· ισχυρίζομαι ότι ο λόγος τους είναι ίσος με λόγο φυσικών αριθμών.

Διότι έστω ότι το γ είναι κοινό μέτρο των α και β. Και έστω ότι το γ μετράει το α τόσες φορές όσες οι μονάδες του δ, και το γ μετράει το β τόσες φορές όσες οι μονάδες του ε. Έτσι $\gamma/\alpha = 1/\delta$ (Β7, Ορ21, σελ. 175). Αντιστρέφοντας τώρα $\alpha/\gamma = \delta/1$. Ομοίως $\gamma/\beta = 1/\varepsilon$ και δι' ίσου $\alpha/\beta = \delta/\varepsilon$.

Άρα για τα σύμμετρα μεγέθη α, β ισχύει ότι ο λόγος τους είναι ίσος με τον λόγο του φυσικού αριθμού δ προς τον φυσικό αριθμό ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 6 (647) *Αν δυο μεγέθη έχουν λόγο ίσο με λόγο φυσικών αριθμών τότε είναι σύμμετρα.*

Απόδειξη. Διότι ας ισχύει $\alpha/\beta = \delta/\gamma$ με δ και γ φυσικούς αριθμούς. Ισχυρίζομαι ότι τα μεγέθη α και β είναι σύμμετρα.

Διότι διαιρούμε το μέγεθος α σε δ ίσα τμήματα μήκους γ και θέτουμε $\zeta = \gamma\varepsilon$. Έτσι ισχύει $\gamma/\alpha = 1/\delta$ (Β7, Ορ21, σελ. 175). Η μονάδα όμως μετράει τον δ άρα και το γ μετράει το α. Αντιστρέφοντας, $\alpha/\gamma = \delta/1$ (Πόρισμα Β7, Π7, σελ. 179). Πάλι, αφού $\zeta = \gamma\varepsilon$ ισχύει $\gamma/\zeta = 1/\varepsilon$ (Β7, Ορ21, σελ. 175). Δι' ίσου τώρα θα έχουμε $\alpha/\zeta = \delta/\varepsilon$ (Β5, Π22, σελ. 137). Αλλά $\delta/\varepsilon = \alpha/\beta$ άρα $\alpha/\beta = \alpha/\zeta$, οπότε $\beta = \zeta$ (Β5, Π9, σελ. 132). Αλλά το γ μετράει το ζ άρα και το β. Μετράει όμως και το α, άρα τα α, β είναι σύμμετρα με κοινό μέτρο το γ.

Άρα αν δυο μεγέθη κλπ κλπ.

Πόρισμα 18 *Από αυτό είναι φανερό ότι αν υπάρχουν δυο φυσικοί αριθμοί δ και ε και ένα μέγεθος α τότε υπάρχει μέγεθος ζ ώστε* $\alpha/\zeta = \delta/\varepsilon$.

Αν β *ο μέσος ανάλογος των α και ζ τότε* $\alpha/\zeta = \alpha^2/\beta^2$. *Αλλά* $\alpha/\zeta = \delta/\varepsilon$ *οπότε* $\delta/\varepsilon = \alpha^2/\beta^2$· *ὅπερ ἔδει δεῖξαι.* Δ

Πρόταση 7 (648) *Τα ασύμμετρα μεγέθη δεν έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με λόγο φυσικών αριθμών.*

Απόδειξη. Έστα τα ασύμμετρα μεγέθη α, β. Ισχυρίζομαι ότι ο λόγος του α προς το β δεν είναι ίσος με λόγο φυσικών αριθμών.

Διότι αν το α/β ισούται με λόγο φυσικών αριθμών τότε το α είναι σύμμετρο με το β (Π6, σελ. 232). Αλλά δεν είναι. Άρα το α δεν έχει λόγο με το β ίσο με λόγο φυσικών αριθμών.

Τα ασύμμετρα δηλαδή μεγέθη δεν έχουν μεταξύ τους λόγο κλπ κλπ. Δ

Πρόταση 8 (648) *Αν δυο μεγέθη δεν έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με λόγο φυσικών αριθμών τότε είναι ασύμμετρα.*

Απόδειξη. Έστω ότι τα μεγέθη α και β δεν έχουν λόγο ίσο με λόγο φυσικών αριθμών. Τότε τα μεγέθη θα είναι ασύμμετρα.

Διότι αν τα α και β είναι σύμμετρα, ο λόγος τους είναι ίσος με λόγο φυσικών αριθμών (Π5, σελ. 232). Αλλά δεν είναι. Άρα τα α, β είναι ασύμμετρα.

Συνεπώς δυο μεγέθη που δεν έχουν μεταξύ τους λόγο κλπ κλπ Δ

Πρόταση 9 (648) *Τα τετράγωνα με μήκη πλευρών σύμμετρα μεγέθη έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με το τετράγωνο φυσικού αριθμού προς το τετράγωνο φυσικού αριθμού, και αντιστρόφως.*

Τα τετράγωνα με μήκη πλευρών ασύμμετρα μεγέθη δεν έχουν μεταξύ τους λόγο τετράγωνο φυσικού αριθμού προς τετράγωνο φυσικού αριθμού, και αντιστρόφως.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα μήκους α και β τα οποία είναι σύμμετρα. Ισχυρίζομαι ότι το α^2/β^2 είναι ίσο με τον λόγο του τετραγώνου φυσικού αριθμού προς τετραγώνου φυσικού αριθμού.

Διότι ο λόγος α/β είναι ίσος με λόγο φυσικών αριθμών (Π5, σελ. 232)· έστω των φυσικών αριθμών γ και δ. Δηλαδή $\alpha/\beta = \gamma/\delta$. Αλλά $(\alpha/\beta)^2 = \alpha^2/\beta^2$, αφού όμοια σχήματα έχουν λόγο ίσο με τον λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών τους (Πόρισμα, Β6, Π20, σελ. 156). Επιπλέον $(\gamma/\delta)^2 = \gamma^2/\delta^2$, διότι μεταξύ δύο τετράγωνων αριθμών παρεμβάλλεται ένας μέσος ανάλογος αριθμός, και ο τετράγωνος προς τον τετράγωνο έχει λόγο το τετράγωνο εκείνου που έχει η πλευρά προς την πλευρά (Β7, Π11, σελ. 181). Άρα $\alpha^2/\beta^2 = \gamma^2/\delta^2$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $\alpha^2/\beta^2 = \gamma^2/\delta^2$ με γ και δ φυσικούς αριθμούς. Ισχυρίζομαι ότι τα α, β είναι σύμμετροι.

Διότι $\alpha^2/\beta^2 = \gamma^2/\delta^2$ αλλά $\alpha^2/\beta^2 = (\alpha/\beta)^2$ και $\gamma^2/\delta^2 = (\gamma/\delta)^2$ άρα $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ οπότε οι α, β είναι σύμμετροι (Π6, σελ. 232).

Έστω τώρα ότι οι α, β είναι ασύμμετροι. Ισχυρίζομαι ότι ο λόγος α^2/β^2 δεν είναι ίσος με λόγο του τετραγώνου φυσικού αριθμού προς το τετράγωνο φυσικού αριθμού.

Διότι αλλιώς τα α και β θα είναι σύμμετρα, αλλά δεν είναι.

Αντιστρόφως αν ο λόγος α^2/β^2 δεν είναι ίσος με λόγο του τετραγώνου φυσικού αριθμού προς το τετράγωνο φυσικού αριθμού, ισχυρίζομαι ότι οι α, β είναι ασύμμετροι.

Διότι αλλιώς, αν οι α, β είναι σύμμετροι ο λόγος α^2/β^2 θα είναι ίσος με λόγο του τετραγώνου φυσικού αριθμού προς το τετράγωνο φυσικού αριθμού, αλλά δεν είναι, άρα οι α, β είναι ασύμμετροι.

Πόρισμα 19 Είναι λοιπόν φανερό ότι τα ευθύγραμμα τμήματα με σύμμετρα μήκη είναι και δυνάμει σύμμετρα. Τα δε δυνάμει σύμμετρα δεν είναι πάντα και μήκη σύμμετρα (εκτός αν τα τετράγωνα των σύμμετρων μηκών ευθυγράμμων τμημάτων έχουν λόγο ίσο με τετράγωνο φυσικού αριθμού προς τετράγωνο φυσικού αριθμού, οπότε είναι σύμμετρα. Έτσι τα ευθύγραμμα τμήματα με σύμμετρα μήκη είναι και δυνάμει σύμμετρα.

Επιπλέον, επειδή δείχθηκε ότι όσα τετράγωνα έχουν λόγο τετράγωνο φυσικού αριθμού προς τετράγωνο φυσικού αριθμού έχουν σύμμετρα μήκη πλευρών, και είναι σύμμετρα τα τετράγωνα (στμ: τα εμβαδά τους) που έχουν λόγο φυσικό αριθμό προς φυσικό αριθμό, όσα τετράγωνα δεν έχουν λόγο τετράγωνο φυσικού αριθμού προς τετράγωνο φυσικού αριθμού, αλλά απλώς λόγο φυσικού αριθμού προς φυσικό αριθμό τα μεν τετράγωνα είναι δυνάμει σύμμετρα αλλά όχι ως προς το μήκος των πλευρών τους, εκτός αν έχουν λόγο τετράγωνο αριθμό προς τετράγωνο αριθμό.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι και τα ευθύγραμμα τμήματα που είναι κατά μήκος ασύμμετρα δεν είναι απαραίτητα και δυνάμει, αφού οι δυνάμει σύμμετροι είναι δυνατόν να μην έχουν λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό, και για αυτό μπορεί να είναι δυνάμει σύμμετρα αλλά κατά μήκος ασύμμετρα. Έτσι αν είναι κατά μήκος ασύμμετρα δυο ευθύγραμμα τμήματα δεν είναι απαραίτητα και δυνάμει αλλά είναι δυνατόν να είναι κατά μήκος ασύμμετρα και δυνάμει είτε σύμμετρα είτε ασύμμετρα.

Πάντως τα δυνάμει ασύμμετρα είναι και κατά μήκος ασύμμετρα, διότι αν ήταν κατά μήκος σύμμετρα θα ήταν και δυνάμει.)

Στμ: στο παρακάτω λήμμα ο Ευκλείδης παραπέμπει σε ένα αποτέλεσμα που δεν βρέθηκε στον πάπυρο που έφτασε σε εμάς. Συγκεκριμένα παραπέμπει στο αντίστροφο του αποτελέσματος στο Β8, Π26, σελ. 206· ότι δηλαδή αν ο λόγος δυο αριθμών είναι ίσος με τον λόγο τετράγωνου προς τετράγωνου τότε οι αριθμοί είναι όμοιοι επίπεδοι. Το αποτέλεσμα φαίνεται

να έλλειπε ήδη από τον πάπυρο που έφτασε στον Ήρωνα (Ήρων ο Αλεξανδρεύς 10–70 μαχχ) ο οποίος σύμφωνα με αραβικές πηγές συμπλήρωσε το κενό. Θα δούμε πρώτα το λήμμα του Ευκλείδη (Λήμμα 1, σελ. 235) και στη συνέχεια θα παρεμβάλουμε ένα επιπλέον λήμμα (Λήμμα 2, σελ. 235), με την απόδειξη του Ήρωνα, που δεν βρίσκεται στα *Στοιχεία*, αλλά ως αποτέλεσμα το επικαλείται ο Ευκλείδης στο δικό του λήμμα, και είναι απαραίτητο για την συνέχεια.

Λήμμα 2 *Στα βιβλία των αριθμητικών αποδείχθηκε ότι οι όμοιοι επίπεδοι αριθμοί έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με τον λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό* (Β8, Π26, σελ. 206)*, και ότι αν δυο αριθμοί έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με τον λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό τότε είναι όμοιοι επίπεδοι* (στμ: δες Λήμμα 2, σελ. 235).

Από αυτό είναι φανερό ότι οι μη όμοιοι αριθμοί, δηλαδή εκείνοι που δεν έχουν ανάλογες πλευρές, δεν έχουν λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό, διότι αν είχαν θα ήταν όμοιοι αντιφάσκοντας με την υπόθεση. Άρα οι μη όμοιοι επίπεδοι αριθμοί δεν έχουν μεταξύ τους λόγο τετράγωνο αριθμό προς τετράγωνο αριθμό. Δ

Λήμμα 3 *Αν ο λόγος δυο αριθμών είναι ίσος με τον λόγο τετράγωνου φυσικού αριθμού προς τετράγωνο φυσικού αριθμού τότε οι αριθμοί είναι όμοιοι επίπεδοι.*

Ομοίως, αν ο λόγος δυο αριθμών είναι ίσος με τον λόγο κύβου προς κύβο τότε οι αριθμοί είναι όμοιοι στερεοί.

Απόδειξη. (Ήρων ο Αλεξανδρεύς) Έστω ότι $\alpha/\beta = \gamma^2/\delta^2$. Ισχυρίζομαι ότι οι α, β είναι όμοιοι επίπεδοι αριθμοί.

Διότι ανάμεσα στους γ^2 και δ^2 παρεμβάλλεται ο μέσος ανάλογος $\gamma\delta$, αφού $\gamma^2/(\gamma\delta) = \gamma/\delta = (\gamma\delta)/\delta^2$ (Β8, ΠΙ1, σελ. 200 ή Β8, ΠΙ8, σελ. 203). Άρα υπάρχει μέσος ανάλογος ανάμεσα στους α και β (Β8, Π8, σελ. 199). Συνεπώς οι α και β είναι όμοιοι επίπεδοι (Β8, Π20, σελ. 204).

Ομοίως αν οι α και β έχουν λόγο ίσο με λόγο κύβων, αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας τα Β8, ΠΙ2, σελ. 201 ή Β8, ΠΙ9, σελ. 203, Β8, Π8, σελ. 199 και Β8, Π21, σελ. 205. Δ

Πρόταση 10 (650) *Αν δοθεί ευθύγραμμο τμήμα να βρεθούν δύο άλλα με το ένα να είναι μόνο κατά μήκος ασύμμετρο με το αρχικό και το άλλο και κατά μήκος και δυνάμει.*

Απόδειξη. Έστω ευθύγραμμο τμήμα μήκους α. Πρέπει να βρεθούν δύο άλλα το ένα μόνο κατά μήκος ασύμμετρο με το α και το άλλο και δυνάμει.

Ας θεωρήσουμε δύο αριθμούς β και γ που δεν έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με λόγο τετράγωνων αριθμών· δηλαδή αριθμοί που δεν είναι όμοιοι επίπεδοι. Θεωρούμε μέγεθος δ ώστε να ισχύει $\beta/\gamma = \alpha^2/\delta^2$ (Πόρισμα, Π6, σελ. 233). Άρα τα α^2 και δ^2 είναι σύμμετρα, αφού έχουν λόγο ίσο με

λόγο φυσικών αριθμών (Π6, σελ. 232). Έτσι οι α^2 και δ^2 δεν έχουν λόγο ίσο με λόγο τετράγωνων φυσικών αριθμών, αφού αυτό ισχύει για τους β και γ. Οπότε οι α και δ είναι κατά μήκος ασύμμετροι (Π9, σελ. 233).

Ας θεωρήσουμε τώρα τον μέσο ανάλογο ε των α και δ· οπότε ισχύει $\alpha/\delta = \alpha^2/\varepsilon^2$ (Β5, Ορ9, σελ. 126). Αφού οι α και δ είναι ασύμμετροι είναι ασύμμετροι οι α^2 και ε^2 (Π7, σελ. 233). Άρα οι α και ε είναι δυνάμει ασύμμετροι (στμ: άρα και κατά μήκος).

Έτσι δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος μήκους α βρέθηκαν δύο ασύμμετρα με το α μήκη ευθυγράμμων τμημάτων, τα δ και ε, που το δ είναι μόνο κατά μήκος ασύμμετρο ενώ το ε και κατά μήκος και δυνάμει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι *Δ*

Πρόταση 11 (651) *Εάν τέσσαρα μεγέθη είναι σε αναλογία και το πρώτο είναι σύμμετρο με το δεύτερο, τότε και το τρίτο προς το τέταρτο θα είναι σύμμετρο· ενώ αν το πρώτο είναι ασύμμετρο με το δεύτερο τότε και το τρίτο θα είναι ασύμμετρο με το τέταρτο.*

Απόδειξη. Έστω ότι τα τέσσαρα μεγέθη σε αναλογία είναι τα α, β, γ δ και $\alpha/\beta = \gamma/\delta$. Υποθέτω ότι τα α και β είναι σύμμετρα. Ισχυρίζομαι ότι και τα γ και δ είναι σύμμετρα.

Διότι αφού τα α, β είναι σύμμετρα έχουν λόγο ίσο με τον λόγο φυσικού αριθμού προς φυσικό αριθμό (Π5, σελ. 232)· και αφού $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ και τα γ και δ έχουν λόγο ίσο με τον λόγο φυσικού αριθμού προς φυσικό αριθμό, άρα μεταξύ τους είναι σύμμετρα (Π6, σελ. 232).

Υποθέτουμε τώρα ότι οι α, β είναι μεταξύ τους ασύμμετρα μεγέθη. Ισχυρίζομαι ότι και το γ είναι ασύμμετρο με το δ. Διότι αφού τα α, β είναι ασύμμετρα δεν έχουν λόγο ίσο με λόγο φυσικών αριθμών (Π7, σελ. 233), και αφού $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ το ίδιο ισχύει και για τα γ και δ, άρα είναι μεταξύ τους ασύμμετρα (Π8, σελ. 233).

Συνεπώς αν τέσσερα μεγέθη, κλπ κλπ. *Δ*

Πρόταση 12 (651) *Δυο μεγέθη που είναι σύμμετρα με τρίτο μέγεθος είναι και μεταξύ τους σύμμετρα.*

Απόδειξη. Διότι έστω ότι καθένα από τα α, β είναι σύμμετρο με το γ. Ισχυρίζομαι ότι το α είναι σύμμετρο με το β.

Το α έχει με το γ λόγο ίσο με λόγο φυσικών αριθμών (Π5, σελ. 232). Ας είναι λοιπόν $\alpha/\gamma = \delta/\varepsilon$ λόγος φυσικών αριθμών. Ομοίως $\gamma/\beta = \zeta/\eta$ λόγος φυσικών αριθμών. Θεωρούμε τους φυσικούς αριθμούς θ, κ, λ σε συνεχή αναλογία με $\delta/\varepsilon = \theta/\kappa$ και $\zeta/\eta = \kappa/\lambda$ (Β8, Π4, σελ. 196).

Αφού τώρα $\alpha/\gamma = \delta/\varepsilon$ και $\gamma/\delta = \theta/\kappa$ θα είναι και $\alpha/\gamma = \theta/\kappa$, και ομοίως $\gamma/\delta = \kappa/\lambda$. Άρα δι᾽ ίσου θα είναι $\alpha/\beta = \theta/\lambda$ (Β5, Π22, σελ. 137) που είναι λόγος φυσικών αριθμών, άρα τα α, β είναι σύμμετρα μεγέθη.

Συνεπώς σύμμετρα προς κοινό μέγεθος μεγέθη είναι και μεταξύ τους σύμμετρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 13 (652) *Αν δυο μεγέθη είναι σύμμετρα και το ένα από αυτά είναι ασύμμετρο προς ένα τρίτο μέγεθος, τότε και το άλλο θα είναι ασύμμετρο προς το τρίτο αυτό μέγεθος.*

Απόδειξη. Έστω ότι τα α, β είναι μεταξύ τους σύμμετρα και το α είναι ασύμμετρο με το γ.

Διότι αν το β είναι σύμμετρο με το γ, επειδή και το α είναι σύμμετρο με το β, θα είναι και το α σύμμετρο με το γ (Π12, σελ. 236). Αλλά δεν είναι, άρα άτοπο, οπότε το β δεν είναι σύμμετρο με το γ, δηλαδή είναι ασύμμετρο με το γ.

Έτσι δυο μεγέθη σύμμετρα κλπ κλπ.

Λήμμα 4 *Αν δοθούν δυο άνισα ευθύγραμμα τμήματα να βρεθεί κατά ποιο τετράγωνο υπερέχει το τετράγωνο του μεγαλύτερου από το τετράγωνο του μικρότερου.*

Επιπλέον, αν δοθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα, να βρεθεί το ευθύγραμμο τμήμα του οποίου το τετράγωνο είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των αρχικών τμημάτων.

Απόδειξη. Ας είναι ΑΒ και γ τα ευθύγραμμα τμήματα με $\text{ΑΒ} > \gamma$. Πρέπει να βρεθεί ποιο τετράγωνο είναι η διαφορά $\text{ΑΒ}^2 - \gamma^2$ (στμ: δηλαδή αναζητάμε ευθύγραμμο τμήμα μήκους $\sqrt{\text{ΑΒ}^2 - \gamma^2}$).

Γράφουμε επί του ΑΒ ημικύκλιο, το ΑΔΒ και εναρμόζουμε την ΑΔ ίση με το γ (Β4, Π1, σελ. 111). Φέρνουμε και τη ΔΒ, οπότε η $\widehat{\text{ΑΔΒ}}$ είναι ορθή (Β3, Π31, σελ. 102), και ΑΒ^2 μεγαλύτερο της $\text{ΑΔ}^2 = \gamma^2$ κατά το ΔΒ^2 (Β1, Π47, σελ. 51).

Αν τώρα δοθούν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΔΒ κατασκευάζουμε ορθή γωνία με κάθετες πλευρές ίσες με ΑΔ και ΔΒ και φέρνουμε την ΑΒ. Είναι φανερό ότι $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 14 (652) *Αν τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα είναι σε αναλογία και το τετράγωνο του πρώτου είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο του δευτέρου κατά τετράγωνο ευθύγραμμου τμήματος κατά μήκος σύμμετρο με το πρώτο, τότε το τετράγωνο του τρίτου ευθύγραμμου τμήματος είναι μεγαλύτερο του τετραγώνου του τέταρτου κατά το τετράγωνο ευθύγραμμου τμήματος κατά μήκος σύμμετρο με το τρίτο.*

Και αν το τετράγωνο του πρώτου είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο του δευτέρου κατά τετράγωνο ευθύγραμμου τμήματος κατά μήκος ασύμμετρο με το πρώτο, τότε το τετράγωνο του τρίτου ευθύγραμμου τμήματος είναι μεγαλύτερο του τετραγώνου του τέταρτου κατά το τετράγωνο ευθύγραμμου τμήματος κατά μήκος ασύμμετρο με το τρίτο.

Απόδειξη. Έστω ότι τα τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα είναι τα α, β, γ, δ και $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ και $\varepsilon^2 = \alpha^2 - \beta^2$, $\zeta^2 = \gamma^2 - \delta^2$. Ισχυρίζομαι ότι αν τα α, ε είναι σύμμετρα είναι και τα γ, ζ. Ενώ αν τα α, ε είναι ασύμμετρα, τότε και τα γ, ζ είναι ασύμμετρα.

Αφού $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ ισχύει και $\alpha^2/\beta^2 = \gamma^2/\delta^2$ (Β6, Π22, σελ. 158). Αλλά $\alpha^2 = \beta^2 + \varepsilon^2$ και $\gamma^2 = \delta^2 + \zeta^2$ άρα

$$\frac{\varepsilon^2 + \beta^2}{\beta^2} = \frac{\delta^2 + \zeta^2}{\delta^2}.$$

Συνεπώς $\varepsilon^2/\beta^2 = \zeta^2/\delta^2$ (Β5, Π17, σελ. 135), και άρα $\varepsilon/\beta = \zeta/\delta$ (Β6, Π22, σελ. 158). Αντιστρέφοντας $\beta/\varepsilon = \delta/\zeta$ (Πόρισμα, Β5, Π7, σελ. 131). Και αφού $\alpha/\beta = \gamma/\delta$, δι᾽ ίσου θα είναι $\alpha/\varepsilon = \gamma/\zeta$ (Β5, Π22, σελ. 137).

Αν λοιπόν τα α, ε είναι σύμμετρα είναι και τα γ και ζ. Ομοίως αν είναι ασύμμετρα (Π11, σελ. 236).

Άρα, κλπ κλπ. *Δ*

Πρόταση 15 (653) *Αν δυο σύμμετρα μεγέθη προστεθούν, και το άθροισμα θα είναι σύμμετρο με καθένα από αυτά· και αν το άθροισμα είναι σύμμετρο με ένα από αυτά τότε τα δυο μεγέθη είναι και μεταξύ τους σύμμετρα.*

Απόδειξη. Διότι ας προστεθούν δυο σύμμετρα μεγέθη, τα ΑΒ και ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι το άθροισμα ΑΓ είναι σύμμετρο με καθένα από τα ΑΒ και ΒΓ.

Διότι, αφού τα ΑΒ, ΒΓ είναι σύμμετρα θα έχουν κοινό μέτρο, έστω το δ. Το δ αφού μετράει και τα δύο, μετράει και το άθροισμά τους ΑΓ. Άρα μετράει και τα τρία μεγέθη ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ. Άρα το ΑΓ είναι σύμμετρο με καθένα από τα ΑΒ, ΒΓ.

Αν τώρα το ΑΓ είναι σύμμετρο με το ΑΒ, ισχυρίζομαι ότι τα ΑΒ και ΒΓ είναι σύμμετρα.

Διότι έστω δ κοινό μέτρο των ΑΓ και ΑΒ. Άρα το δ θα μετράει και τη διαφορά τους ΒΓ. Αλλά μετράει και το Α, άρα τα ΑΒ, ΒΓ είναι σύμμετρα.

Έτσι αν δυο μεγέθη, κλπ κλπ. *Δ*

Πρόταση 16 (653) *Αν δυο ασύμμετρα μεγέθη προστεθούν και το άθροισμα θα είναι ασύμμετρο προς καθένα από αυτά· και αν το άθροισμα είναι ασύμμετρο προς ένα από αυτά και τα αρχικά μεγέθη είναι μεταξύ τους ασύμμετρα.*

Απόδειξη. Ας προστεθούν τα δυο ασύμμετρα μεγέθη ΑΒ και ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι και το άθροισμα ΑΓ με καθένα από τα ΑΒ, ΒΓ είναι ασύμμετρο.

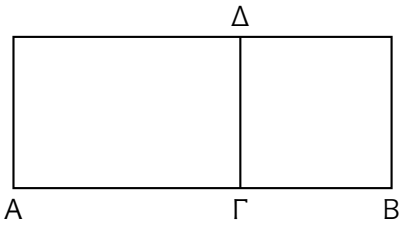
Διότι αν τα ΓΑ, ΑΒ δεν είναι ασύμμετρα θα έχουν κοινό μέτρο, έστω το δ. Το δ λοιπόν μετράει το ΓΑ και ΑΒ άρα μετράει και τη διαφορά τους ΒΓ. Και αφού μετράει και ΑΒ, τα ΑΒ και ΒΓ είναι σύμμετρα. Αλλά δεν είναι, άτοπο. Άρα τα ΓΑ και ΒΑ είναι ασύμμετρο. Ομοίως και τα ΑΓ, ΓΒ είναι ασύμμετρα.

Τώρα ισχυρίζομαι ότι αν το ΑΓ είναι ασύμμετρο με ένα από τα ΑΒ, ΒΓ, έστω με το ΑΒ, τότε τα ΑΒ, ΒΓ είναι ασύμμετρα. Αν όχι έχουν κοινό μέτρο, έστω το δ. Επειδή το δ μετράει και τα δύο, μετράει και το άθροισμά τους ΑΓ. Άρα το δ μετράει το ΑΓ και το ΑΒ τα οποία όμως ήταν ασύμμετρα, άτοπο. Άρα τα ΑΒ, ΒΓ είναι ασύμμετρα.

Εάν λοιπόν δυο μεγέθη, κλπ κλπ.

Λήμμα 5 *Εάν σε ευθύγραμμο τμήμα θεωρήσουμε παραλληλόγραμμο από το οποίο να λείπει τετράγωνο για να σχηματιστεί παραλληλόγραμμο με πλευρά ολόκληρο το αρχικό τμήμα, τότε το θεωρούμενο παραλληλόγραμμο είναι ίσο με το ορθογώνιο με πλευρές τα τμήματα που σχηματίστηκαν στο αρχικό ευθύγραμμο τμήμα.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το παραλληλόγραμμο ΑΔ που το ΔΒ είναι τετράγωνο. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΔ είναι ίσο με το ορθογώνιο ΑΓ × ΓΒ.



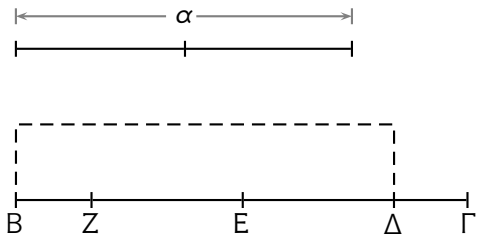
Αυτό είναι φανερό από το σχήμα, διότι το ΔΒ είναι τετράγωνο, άρα ΔΓ = ΓΒ.

Άρα εάν σε ευθύγραμμο τμήμα κλπ κλπ. Δ

Πρόταση 17 (654) *Αν δοθούν δυο άνισα ευθύγραμμα τμήματα και τοποθετηθεί στο μεγάλο τμήμα παραλληλόγραμμο ίσο με το ένα τέταρτο του τετραγώνου του μικρού, διαιρώντας το μεγάλο τμήμα σε σύμμετρα μεγέθη και περισσεύει από το μεγάλο τμήμα τετράγωνο, το τετράγωνο του μεγαλύτερου ευθύγραμμου τμήματος είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο του μικρότερου κατά τετράγωνο του οποίου η πλευρά είναι κατά μήκος σύμμετρη με το μεγάλο τμήμα.*

Και αντιστρόφως, αν το τετράγωνο του μεγάλου τμήματος υπερέχει του τετραγώνου του μικρότερου τμήματος κατά τετράγωνο με πλευρά σύμμετρη προς το μεγάλο τμήμα, αν τοποθετηθεί στο μεγάλο τμήμα παραλληλόγραμμο ίσο με το ένα τέταρτο του τετραγώνου του μικρότερου ώστε να υπολείπεται τετράγωνο, τα τμήματα στα οποία χωρίζεται το μεγαλύτερο είναι κατά μήκος σύμμετρα.

Απόδειξη. Έστω ότι δόθηκαν δυο άνισα ευθύγραμμα τμήματα α και ΒΓ με $\alpha < \text{ΒΓ}$. Φτιάχνουμε πάνω στη ΒΓ παραλληλόγραμμο ισεμβαδικό με το ένα τέταρτο του α^2, δηλαδή με το τετράγωνο του $\alpha/2$, ώστε να περισσεύει σχήμα τετράγωνο χωρίζοντας το ΒΓ με το σημείο Δ. Και ας είναι το ΒΔ σύμμετρο με το ΔΓ. Ισχυρίζομαι ότι το ΒΓ^2 είναι μεγαλύτερο του τετραγώνου του α κατά τετράγωνο του οποίου η πλευρά είναι κατά μήκος σύμμετρη με τη μεγαλύτερη ΒΓ.



Ας θεωρήσουμε το μέσο Ε του ΒΓ και σημείο Ζ ώστε $ΕΖ = ΔΕ$ (στμ: το συμμετρικό του Δ ως προς το Ε). Έτσι $ΔΓ = ΒΖ$ και επιπλέον θα ισχύει $ΒΔ \cdot ΔΓ + ΕΔ^2 = ΕΓ^2$ (Β2, Π5, σελ. 63). Πολλαπλασιάζοντας με το τέσσαρα θα πάρουμε

$$4ΕΓ^2 = 4ΒΔ \cdot ΔΓ + 4ΕΔ^2 = \alpha^2 + ΔΖ^2,$$

αφού το ΔΖ είναι διπλάσιο του ΔΕ. Επίσης $4ΕΓ^2 = ΒΓ^2$ διότι $ΒΓ = 2ΓΕ$. Άρα $\alpha^2 + ΔΖ^2 = ΒΓ^2$· δηλαδή το τετράγωνο του ΒΓ είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο του α κατά το τετράγωνο του ΔΖ. Πρέπει να αποδειχθεί ότι το ΒΓ είναι σύμμετρο με το ΔΖ. Αλλά το ΒΓ είναι σύμμετρο με το ΔΓ και άρα με το ΓΔ (Π15, σελ. 238). Όμως το ΔΓ είναι σύμμετρο με τα ΓΔ, ΒΖ, διότι $ΓΔ = ΒΖ$. Οπότε το ΒΓ είναι σύμμετρο με τα ΒΖ, ΓΔ (Π12, σελ. 236)· οπότε το ΒΓ είναι σύμμετρο με τη διαφορά, το ΖΔ. Έτσι το $ΒΓ^2$ υπερέχει του α^2 κατά τετράγωνο του οποίου η πλευρά είναι σύμμετρη με τη ΒΓ.

Ας είναι τώρα το $\sqrt{ΒΓ^2 - \alpha^2}$ σύμμετρο με το ΒΓ, και ας φτιαχτεί στη ΒΓ παραλληλόγραμμο ίσο με το ένα τέταρτο του α^2, από του οποίου παραλληλόγραμμου να λείπει τετράγωνο. Ας είναι το παραλληλόγραμμο με πλευρές ΒΔ και ΔΓ. Πρέπει να δειχθεί ότι το ΒΔ είναι σύμμετρο με το ΔΓ.

Αφού γίνει η ίδια με πριν κατασκευή, ομοίως αποδεικνύεται ότι $ΖΔ^2 = ΒΓ^2 - \alpha^2$. Είναι δε το τετράγωνο της ΒΓ μεγαλύτερο του α^2 κατά το τετράγωνο του οποίου η πλευρά είναι σύμμετρη με το ΒΓ. Άρα είναι σύμμετρο το ΒΓ με το ΖΔ· οπότε το ΒΓ είνα σύμμετρο και με τη διαφορά $ΒΓ - ΖΔ = ΒΖ + ΔΓ$ (Π15, σελ. 238). Αλλά το $ΒΖ + ΔΓ$ είνα σύμμετρο με το ΔΓ (Π6, σελ. 232). Έτσι και το ΒΓ είναι σύμμετρο με το ΓΔ· και άρα με αφαίρεση το ΒΔ είναι σύμμετρο με το ΔΓ.

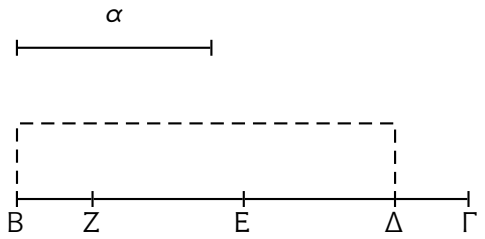
Αν λοιπόν δοθούν δυο άνισα ευθύγραμμα τμήματα, κλπ κλπ. *Δ*

Πρόταση 18 (655) *Αν δοθούν δυο άνισα ευθύγραμμα τμήματα και τοποθετηθεί στο μεγάλο τμήμα παραλληλόγραμμο ίσο με το ένα τέταρτο του τετραγώνου του μικρού, διαιρώντας το μεγάλο τμήμα σε ασύμμετρα μεγέθη και περισσεύει από το μεγάλο τμήμα τετράγωνο, το τετράγωνο του μεγαλύτερου ευθύγραμμου τμήματος είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο του μικρότερου κατά τετράγωνο του οποίου η πλευρά είναι κατά μήκος ασύμμετρη με το μεγάλο τμήμα.*

Και αντιστρόφως, αν το τετράγωνο του μεγάλου τμήματος υπερέχει του τετραγώνου του μικρότερου τμήματος κατά τετράγωνο με πλευρά ασύμμετρη προς το μεγάλο τμήμα, αν τοποθετηθεί στο μεγάλο τμήμα παραλληλόγραμμο

ίσο με το ένα τέταρτο του τετραγώνου του μικρότερου ώστε να υπολείπεται τετράγωνο, τα τμήματα στα οποία χωρίζεται το μεγαλύτερο είναι κατά μήκος ασύμμετρα.

Απόδειξη. Έστω ότι δόθηκαν δύο άνισα ευθύγραμμα τμήματα α και ΒΓ με $\alpha <$ ΒΓ. Φτιάχνουμε πάνω στη ΒΓ παραλληλόγραμμο ισεμβαδικό με το ένα τέταρτο του α^2, δηλαδή με το τετράγωνο του $\alpha/2$, ώστε να περισσεύει σχήμα τετράγωνο χωρίζοντας το ΒΓ με το σημείο Δ. Και ας είναι το ΒΔ ασύμμετρο με το ΔΓ. Ισχυρίζομαι ότι το ΒΓ^2 είναι μεγαλύτερο του τετραγώνου του α κατά τετράγωνο του οποίου η πλευρά είναι κατά μήκος ασύμμετρο με τη μεγαλύτερη ΒΓ.



Διότι αφού γίνει η ίδια κατασκευή όπως στην προηγούμενη Πρόταση αποδεικνύεται ομοίως ότι $\text{ΖΔ}^2 = \text{ΒΓ}^2 - \alpha^2$. Τώρα πρέπει να αποδειχθεί ότι το ΒΓ είναι ασύμμετρο με το ΔΖ. Επειδή το ΒΔ είναι ασύμμετρο με το ΔΓ, είναι και ασύμμετρο με το ΓΔ (Π16, σελ. 238). Αλλά το ΔΓ είναι ασύμμετρο με το ΒΖ + ΔΓ (Π6, σελ. 232), και άρα το ΒΓ είναι ασύμμετρο με το ΒΖ + ΔΓ (Π13, σελ. 237). Άρα το ΒΓ είναι ασύμμετρο με τη διαφορά ΖΔ (Π16, σελ. 238), και $\text{ΖΔ}^2 = \text{ΒΓ}^2 - \alpha^2$. Συνεπώς το ΒΓ^2 υπερέχει του α^2 κατά το τετράγωνο του ΖΔ που με το ΒΓ είναι ασύμμετρο.

Αντιστρόφως, ας υπερέχει τώρα το τετράγωνο του ΒΓ του τετραγώνου του α κατά τετράγωνο του οποίου η πλευρά είναι ασύμμετρη με το ΒΓ. Ας φτιαχτεί επί του ΒΓ παραλληλόγραμμο ισεμβαδικό με το ένα τέταρτο του α^2 ώστε να λείπει σχήμα τετράγωνο και να χωρίζει το ΒΓ με το σημείο Δ. Πρέπει να δειχθεί ότι τα ΒΔ, ΔΓ είναι ασύμμετρα.

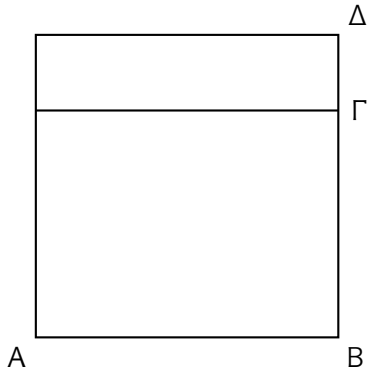
Αφού γίνει η ίδια κατασκευή με την προηγούμενη Πρόταση, ομοίως αποδεικνύεται ότι $\text{ΖΔ}^2 = \text{ΒΓ}^2 - \alpha^2$. Αλλά το ΒΓ^2 υπερέχει του α^2 κατά τετράγωνο πλευράς ασύμμετρης με το ΒΓ. Έτσι το ΒΓ είναι ασύμμετρο με το ΖΔ, άρα και τη διαφορά ΒΓ − ΖΔ = ΒΖ + ΔΓ (Π16, σελ. 238). Αλλά το ΒΖ + ΔΓ είναι ασύμμετρο με το ΔΓ (Π6, σελ. 232), και άρα το ΒΓ είναι ασύμμετρο με το ΔΓ (Π13, σελ. 237). Οπότε αφαιρώντας, το ΒΔ είναι ασύμμετρο με το ΔΓ.

Άρα αν δοθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα, κλπ κλπ.

Λήμμα 6 *Επειδή δείχθηκε ότι τα σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα είναι και δυνάμει σύμμετρα, αλλά τα δυνάμει ασύμμετρα μπορεί να είναι κατά μήκος είτε σύμμετρα είτε ασύμμετρα, είναι φανερό ότι αν θεωρήσουμε σύμμετρο ευθύγραμμο τμήμα προς δοθέν ρητό ευθύγραμμο τμήμα, αυτό θα είναι ρητό και σύμμετρο όχι μόνο κατά μήκος αλλά και δυνάμει.*

Αν τώρα προς δοθέν ρητό ευθύγραμμο τμήμα δοθεί δυνάμει σύμμετρο ευθύγραμμο τμήμα αν είναι και κατά μήκος σύμμετρο λέγεται ρητό και σύμμετρο και κατά μήκος και δυνάμει. Ενώ αν κατά μήκος είναι ασύμμετρο τότε λέγεται και πάλι ρητό αλλά δυνάμει μόνο σύμμετρο. Δ

Πρόταση 19 (656) *Το παραλληλόγραμμο με πλευρές ρητές και κατά μήκος σύμμετρες είναι ρητό* (στμ: έχει ρητό εμβαδόν).

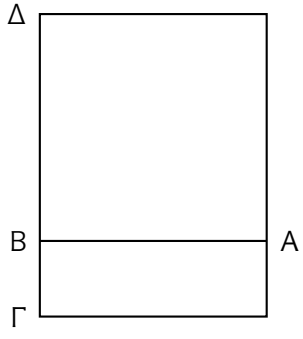


Απόδειξη. Διότι ας υποθέσουμε ότι το ορθογώνιο ΑΓ έχει πλευρές τα ρητά και κατά μήκος σύμμετρα ΑΒ, ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΓ είναι ρητό.

Κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΔ με πλευρά ΑΒ· άρα το ΑΔ είναι ρητό (Ορ4, σελ. 226). Επειδή τα ΑΒ, ΒΓ είναι σύμμετρα άρα και τα ΒΔ, ΒΓ, αφού ΒΔ = ΑΒ. Επιπλέον ΒΔ/ΒΓ = |ΔΑ|/|ΑΓ| (Β5, ΠΙ, σελ. 128). Άρα το ΔΑ είναι σύμμετρο με το ΑΓ (ΠΙ1, σελ. 236). Το ΔΑ είναι ρητό άρα ρητό είναι και το ΑΓ.

Το ορθογώνιο λοιπόν που περιέχεται σε ρητές και κατά μήκος σύμμετρες πλευρές κλπ κλπ. Δ

Πρόταση 20 (657) *Αν ρητό ορθογώνιο έχει μια πλευρά ρητή τότε και η άλλη του πλευρά είναι ρητή και με την πρώτη πλευρά κατά μήκος σύμμετρη.*



Απόδειξη. Ας κατασκευαστεί το ρητό ΑΓ στην ΑΒ με πλάτος ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι το ΒΓ είναι ρητό και κατά μήκος σύμμετρο με το ΒΑ.

Διότι ας κατασκευαστεί με πλευρά ΑΒ το τετράγωνο ΑΔ, οπότε το ΑΔ είναι ρητό (Ορ4, σελ. 226). Αλλά είναι και το ΑΓ ρητό, οπότε το ΔΑ είναι σύμμετρο με το ΑΓ. Επίσης |ΔΑ|/|ΑΓ| = ΔΒ/ΒΓ (Β6, ΠΙ, σελ. 142). Άρα τα ΔΒ, ΒΓ είναι σύμμετρα (ΠΙ1, σελ. 236). Αλλά ΔΒ = ΒΑ άρα τα ΑΒ, ΒΓ είναι σύμμετρα. Το ΑΒ είναι ρητό άρα και το ΒΓ και κατά μήκος σύμμετρο με το ΑΒ.

Αν λοιπόν ρητό ορθογώνιο με πλευρά ρητή, κλπ κλπ. Δ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

Στο υπόλοιπο του Βιβλίου ο Ευκλείδης αναπτύσσει τη θεωρία των αρρήτων που αποτελεί μια πρώτη προσπάθεια κατηγοριοποίησής τους. Αυτό, με σημερινούς όρους, γίνεται με προσθήκη στο $\mathbb{Q}$ (που το αντιλαμβανόμαστε εδώ ως ρητά εμβαδά) εμβαδών της μορφής $\sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$ (με $\sigma \in \mathbb{Q}$) και της πλευράς ισεμβαδικών με αυτά τετράγωνα, δηλαδή της μορφής $\sqrt[4]{\sigma}$ με $(\sqrt[4]{\sigma})^2 = \sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$.

Όταν ο Ευκλείδης στο εξής μιλάει για «ρητούς» και για «μέσους» εννοεί ρητά εμβαδά και μέσα εμβαδά. Αυτό είναι το πρώτο επίπεδο κατηγοριοποίησης. Το μήκος πλευράς ισεμβαδικού τετραγώνου με ρητό εμβαδό ονομάζεται και αυτό «ρητό» μήκος. Έτσι ένα εμβαδό μεγέθους 2 είναι προφανώς ρητό με τη σύγχρονη ορολογία και με την ορολογία του Ευκλείδη, αλλά ονομάζει ρητή και την πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου. Άρα και το $\sqrt{2}$ ως μήκος ονομάζεται «ρητό»(!) αν και ασύμμετρο με τη μονάδα.

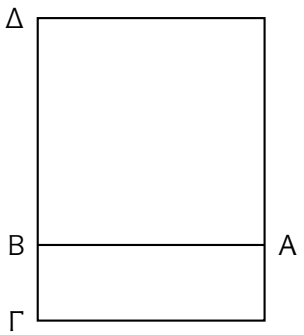
Το πρώτο «επίπεδο» ασυμμετρίας με τα ρητά εμβαδά είναι τα μέσα εμβαδά, δηλαδή τα εμβαδά της μορφής $\sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$. Άρα και το $\sqrt{2}$ είναι μέσο εμβαδόν και το $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ είναι μέσο εμβαδόν.

Σε κάθε μέσο εμβαδόν αντιστοιχεί και ένα ευθύγραμμο τμήμα, η πλευρά του ισεμβαδικού τετραγώνου. Και αυτή η πλευρά ονομάζεται μέση, δηλαδή είναι της μορφής $\sqrt[4]{\sigma}$, όπου $(\sqrt[4]{\sigma})^2 = \sqrt{\sigma}$ μέσο εμβαδόν (δηλαδή $\sigma \in \mathbb{Q}$ αλλά $\sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$).

	Ρητό	Μέσο
Εμβαδόν	$E = \rho \in \mathbb{Q}$	$E = \sqrt{\sigma}$ $\sigma \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$
Μήκος	$\sqrt{E} = \sqrt{\rho}$ με $\rho \in \mathbb{Q}$	$\sqrt{E} = \sqrt[4]{\sigma}$ $\sigma \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$
Μήκος εναλλακτική γραφή	$M = \rho$ με $\rho^2 \in \mathbb{Q}$	$M = \sqrt[4]{\sigma}$ $\sigma \in \mathbb{Q}$, και $(\sqrt[4]{\sigma})^2 = \sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$

Πρόταση 21 (657) *Το ορθογώνιο που περιέχεται σε ρητές πλευρές δυνάμει μόνο σύμμετρες είναι άλογο*[16] *και η πλευρά του ισοδύναμου τετραγώνου είναι άλογη.*[17] *Ας ονομάζεται αυτή μέση.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Ας είναι οι πλευρές ρ_1 και ρ_2 ρητές, δηλαδή ρ_1^2, $\rho_2^2 \in \mathbb{Q}$, και δυνάμει μόνο σύμμετρες, δηλαδή $\rho_1/\rho_2 \notin \mathbb{Q}$ αλλά $\rho_1^2/\rho_2^2 \in \mathbb{Q}$. Αν $\delta = \rho_1/\rho_2$, τότε $\delta \notin \mathbb{Q}$ και $\rho_1 = \rho_2\delta$. Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $\rho_1\rho_2 = \rho_2^2\delta$. Έτσι η πλευρά του ισεμβαδικού τετραγώνου είναι η $\beta = \rho_2\sqrt{\delta}$ που είναι άλογη, αφού $\beta^2 = \rho_2^2\delta \notin \mathbb{Q}$. Παρατηρούμε τέλος ότι το β είναι μέσο, αφού αν θέσουμε $\sigma = \delta^2$ θα έχουμε $\beta = \rho_2\sqrt{\delta} = \rho_2\sqrt[4]{\sigma} = \sqrt[4]{\rho_2^4\sigma}$· και $\sqrt{\rho_2^4\sigma} = \rho_2^2\delta \notin \mathbb{Q}$, και $\sigma = \delta^2 = \rho_1^2/\rho_2^2 \in \mathbb{Q}$. ∎

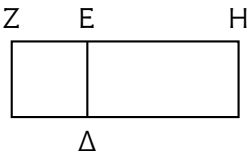


«πρωτότυπη»: Διότι ας περιέχεται το ορθογώνιο ΑΓ σε ρητές πλευρές δυνάμει μόνο σύμμετρες, τις ΑΒ, ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΓ είναι άλογο, (δηλαδή) η πλευρά του ισοδύναμου τετραγώνου είναι άλογη, και την καλούμε «μέση».

Ας κατασκευαστεί στην ΑΒ τετράγωνο, το ΑΔ. Άρα το ΑΔ είναι ρητό (Ορ4, σελ. 226). Επειδή το ΑΒ είναι κατά μήκος ασύμμετρο με το ΒΓ και ΑΒ = ΒΔ συμπεραίνουμε ότι η ΔΒ είναι κατά μήκος ασύμμετρη με την ΒΓ. Επίσης ισχύει ΔΒ/ΒΓ = |ΑΔ|/|ΑΓ|. Άρα το |ΔΑ| είναι ασύμμετρο με το |ΑΓ| (ΠΙ1, σελ. 236). Το |ΔΑ| όμως είναι ρητό, άρα είναι άλογο το |ΑΓ| (Ορ4, σελ. 226). Συνεπώς και η δυναμένη του ΑΓ (στμ: η πλευρά του ισοδύναμου τετραγώνου) είναι άλογη· όπερ ἔδει δεῖξαι. ∎

Λήμμα 7 *Αν δοθούν δυο ευθύγραμμα τμήματα τότε το πρώτο προς το δεύτερο είναι ίσο με το τετράγωνο του πρώτου προς το ορθογώνιο που περιέχεται στα ευθύγραμμα τμήματα.*

Απόδειξη. Δοσμένων των ΖΕ, ΕΗ ισχυρίζομαι ότι $ZE/EH = ZE^2/(ZE \cdot EH)$.



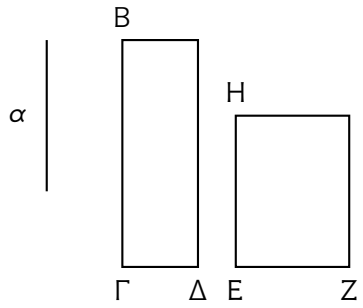
Ας κατασκευαστεί στη ΖΕ τετράγωνο ΔΖ και ας συμπληρωθεί με το ΗΔ. Επειδή $ZE/EH = Z\Delta/\Delta H$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142) και το μεν $Z\Delta = ZE^2$ και $\Delta H = \Delta E \cdot EH = ZE \cdot EH$ είναι και $ZE/EH = ZE^2/(ZE \cdot EH)$· όπερ ἔδει δεῖξαι. ∎

16. Στμ: προσέξτε ότι όταν πρόκειται για εμβαδά ο όρος σημαίνει ασύμμετρο εμβαδόν με κάποιο δοθέν αρχικό (Ορ4, σελ. 226), και όχι αριθμητικώς άλογο, (Ορ3, σελ. 226).

17. Στμ: Ορ3, σελ. 226.

Πρόταση 22 (658) *Το τετράγωνο του οποίου η πλευρά είναι μέση αν είναι ισεμβαδικό με ορθογώνιο με μια πλευρά ρητή τότε η άλλη πλευρά του, το πλάτος του, είναι ρητή και κατά μήκος ασύμμετρη με την πρώτη του πλευρά.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Έστω ότι η πλευρά α του τετραγώνου, αφού είναι μέση, είναι η $\sqrt[4]{\sigma}$, με $\sigma \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$. Έστω επίσης ότι το τετράγωνο είναι ισεμβαδικό με ορθογώνιο με πλευρές ρ_1 και β όπου ρ_1 ρητή. Πρέπει να δείξουμε ότι β ρητή και $\beta/\rho_1 \notin \mathbb{Q}$. Πράγματι, αφού τα σχήματα είναι ισεμβαδικά θα ισχύει $\sqrt{\sigma} = \rho_1\beta$, οπότε $\beta^2 = \sigma/\rho_1^2 \in \mathbb{Q}$, άρα β ρητός· ενώ $\beta/\rho_1 = (1/\rho_1^2)\sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$. ∎



«πρωτότυπη»: Έστω ότι το α είναι μέσο και το ΓΒ ρητό, και ας σχηματίζουμε ορθογώνιο ισεμβαδικό με το α^2 με πλευρά τη ΓΒ, και ας έχει αυτό πλάτος ΓΔ. Ισχυρίζομαι ότι το ΓΔ είναι δυνάμει ρητό και κατά μήκος ασύμμετρο με το ΒΓ.

Αφού το α είναι μέσο, το τετράγωνο του α είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο με πλευρές ρητές αλλά δυνάμει μόνο σύμμετρες (Π21, σελ. 245). Ας είναι το ΗΖ αυτό το ισεμβαδικό ορθογώνιο. Ισεμβαδικό όμως είναι και το ΒΔ, άρα $|\text{ΒΔ}| = |\text{ΗΖ}|$. Έχουν και ίσες γωνίες, αλλά στα ισογώνια παραλληλόγραμμα οι πλευρές περί των ίσων γωνιών είναι αντιστρόφως ανάλογες (Β6, Π14, σελ. 151)· άρα ισχύει $\text{ΒΓ}/\text{ΕΗ} = \text{ΕΖ}/\text{ΓΔ}$. Οπότε και $\text{ΒΓ}^2/\text{ΕΗ}^2 = \text{ΕΖ}^2/\text{ΓΔ}^2$ (Β6, Π20, σελ. 156). Αλλά τα ΓΒ^2 και ΕΗ^2 είναι σύμμετρα άρα οι πλευρές ΓΒ, ΕΗ είναι ρητές. Έτσι είναι σύμμετρα και τα ΕΖ^2 και ΓΔ^2 (Π11, σελ. 236). Είναι όμως ρητό το ΕΖ^2 άρα και το ΓΔ^2 (Ορ4, σελ. 226), άρα η ΓΔ είναι ρητή. Και επειδή τα ΕΖ, ΕΗ είναι κατά μήκος ασύμμετρα (διότι σύμμετρα είναι μόνο δυνάμει) και

$$\frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΕΗ}} = \frac{\text{ΕΖ}^2}{\text{ΖΕ}\cdot\text{ΕΗ}},$$

(Λήμμα, Π21, σελ. 245), έπεται ότι το ΕΖ^2 είναι ασύμμετρο προς το ορθογώνιο ΖΕ × ΕΗ (Π11, σελ. 236). Αλλά τα ΕΖ^2, ΓΔ^2 είναι σύμμετρα (αφού ΕΖ, ΓΔ μόνο δυνάμει σύμμετρα) και τα ορθογώνια ΖΕ × ΕΗ, ΔΓ × ΓΒ είναι σύμμετρα, διότι καθένα από αυτά είναι ισεμβαδικό με το α^2. Άρα το ΓΔ^2 είναι ασύμμετρο με το ορθογώνιο ΔΓ × ΓΒ (Π13, σελ. 237). Επειδή

$$\frac{\text{ΓΔ}^2}{\text{ΔΓ}\cdot\text{ΓΒ}} = \frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΓΒ}}$$

(Λήμμα, Π21, σελ. 245)· άρα το ΔΓ είναι κατά μήκος ασύμμετρο με το ΓΒ (Π11, σελ. 236).

Άρα η πλευρά ΓΔ είναι ρητή και κατά μήκος ασύμμετρη με την ΓΒ· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 23 (658) *Ένα ευθύγραμμο τμήμα που είναι σύμμετρο ως προς ένα μέσο είναι και αυτό μέσο.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Αν $\beta/\alpha = \gamma \in \mathbb{Q}$ και $\alpha = \sqrt[4]{\sigma}$ μέσο, τότε $\beta = \gamma\sqrt{\sigma} = \sqrt{\gamma^2\sigma}$, οπότε και το β είναι μέσο. Δ

«πρωτότυπη»: Έστω ότι το α είναι μέσο και το β σύμμετρο με το α. Ισχυρίζομαι ότι και το β είναι μέσο.

Διότι ας ληφθεί το ΓΔ ρητό και ας κατασκευαστεί στη ΓΔ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ισεμβαδικό με το α^2 που έχει πλάτος το ΕΔ· άρα το ΕΔ είναι ρητό και κατά μήκος ασύμμετρο με το ΓΔ (Π22, σελ. 246). Κατασκευάζουμε στην ΓΔ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΓΖ ισεμβαδικό με το β^2 με πλάτος το ΔΖ.

Επειδή λοιπόν το α είναι σύμμετρο με το β είναι σύμμετρα και τα α^2, β^2. Άρα και τα ΕΓ και ΓΖ είναι σύμμετρα. Επιπλέον $|ΕΓ|/|ΓΖ| = ΕΔ/ΔΖ$ (Β6, Π1, σελ. 142)· άρα το ΕΔ είναι κατά μήκος σύμμετρο με το ΔΖ (Π11, σελ. 236). Αλλά είναι ρητό το ΕΔ και κατά μήκος ασύμμετρο με το ΔΓ, άρα είναι ρητό το ΔΖ (Ορ2, σελ. 225) και κατά μήκος ασύμμετρο με το ΔΓ (Π13, σελ. 237).

Άρα τα ρητά ΓΔ, ΔΖ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα. Το ευθύγραμμο τμήμα όμως του οποίου το τετράγωνο είναι ισεμβαδικό με ορθογώνιο του οποίου οι πλευρές είναι ρητές και δυνάμει μόνο σύμμετρες είναι μέσο (Π21, σελ. 245). Άρα αφού $\beta^2 = ΓΔ \cdot ΔΖ$ το β είναι μέσο.

Πόρισμα 20 Από αυτό είναι φανερό, ότι το σύμμετρο προς το μέσο χωρίο είναι μέσο (διότι τα χωρία αυτά είναι ισεμβαδικά με τετράγωνα των οποίων οι πλευρές είναι δυνάμει μόνο σύμμετρες με την μια από τις δύο να είναι μέση, οπότε είναι μέση και η άλλη). Όμοια και με τα ρητά (Λήμμα, Π18, σελ. 240) ισχύουν και για τα μέσα, δηλαδή το τμήμα κατά μήκος σύμμετρο ως προς ένα μέσο λέγεται μέσο και είναι σύμμετρο ως προς αυτό όχι μόνο κατά μήκος αλλά και δυνάμει.

Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι δυνάμει σύμμετρο με ένα μέσο τότε αν είναι και κατά μήκος σύμμετρο θα λέγονται μέσα κατά μήκος και δυνάμει σύμμετρα, ενώ αν είναι ασύμμετρο ως προς το μήκος θα λέγονται μέσα μόνο δυνάμει σύμμετρα. Δ

Πρόταση 24 (659) *Το ορθογώνιο με πλευρές μέσες και κατά μήκος σύμμετρες είναι μέσο.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Ας είναι $\alpha = \sqrt[4]{\sigma_1}$ και $\beta = \sqrt[4]{\sigma_2}$ οι μέσες πλευρές του ορθογωνίου. Αφού είναι και μήκει σύμμετρες θα ισχύει $\alpha/\beta \in \mathbb{Q}$,

δηλαδή $\sqrt[4]{\sigma_1}/\sqrt[4]{\sigma_2} \in \mathbb{Q}$. Το ορθογώνιο λοιπόν έχει εμβαδόν

$$\mathrm{E} = \alpha\beta = \sqrt[4]{\sigma_1}\sqrt[4]{\sigma_2} = \frac{\sqrt[4]{\sigma_1}}{\sqrt[4]{\sigma_2}}\sqrt{\sigma_2} = \sqrt{\frac{\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_2}}\sigma_2}.$$

Αλλά $\sigma_2 \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\sigma_2} \notin \mathbb{Q}$, και

$$\frac{\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_2}} = \left(\frac{\sqrt[4]{\sigma_1}}{\sqrt[4]{\sigma_2}}\right)^2 \in \mathbb{Q},$$

άρα το Ε είναι μέσο. ∎

«πρωτότυπη»: Ας περιέχεται το ορθογώνιο ΑΓ σε πλευρές μέσες και κατά μήκος σύμμετρες, τις ΑΒ και ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΓ είναι μέσο.

Διότι ας κατασκευαστεί στην ΑΒ το τετράγωνο ΑΔ, οπότε το ΑΔ είναι μέσο. Και επειδή το ΑΒ είναι κατά μήκος σύμμετρο με το ΒΓ και ΑΒ = ΒΔ, είναι και το ΔΒ κατά μήκος σύμμετρο με το ΒΓ· οπότε και το ΔΑ είναι σύμμετρο με το ΑΓ (Β6, ΠΙ, σελ. 142 και ΠΙΙ, σελ. 236). Το δε ΔΑ είναι μέσο, άρα μέσο είναι και το ΑΓ (Πόρισμα, Π23, σελ. 247)· όπερ ἔδει δεῖξαι. ∎

Πρόταση 25 (659) *Ορθογώνιο με μέσες και μόνο δυνάμει σύμμετρες πλευρές είναι είτε ρητού είτε μέσου εμβαδού.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Ας είναι οι πλευρές του ορθογωνίου α και β. Αφού είναι μέσες θα υπάρχουν σ_1, σ_2 ώστε $\alpha = \sqrt[4]{\sigma_1}$ και $\beta = \sqrt[4]{\sigma_2}$ με σ_1, $\sigma_2 \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\sigma_1}$, $\sqrt{\sigma_2} \notin \mathbb{Q}$. Επειδή είναι μόνο δυνάμει σύμμετρες θα πρέπει επιπλέον να ισχύει $\sqrt[4]{\sigma_1}/\sqrt[4]{\sigma_2} \notin \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\sigma_1}/\sqrt{\sigma_2} \in \mathbb{Q}$.

Το ορθογώνιο έχει εμβαδόν

$$\alpha\beta = \sqrt[4]{\sigma_1\sigma_2} = \sqrt{\sigma_2\,\frac{\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_2}}}.$$

Θέτουμε

$$\gamma = \sqrt{\sigma_2\,\frac{\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_2}}},$$

οπότε $\alpha\beta = \gamma$. Αν $\gamma \in \mathbb{Q}$ τότε το εμβαδόν είναι ρητό (και αυτό μπορεί να συμβεί· για παράδειγμα αν $\sigma_1 = 2$ και $\sigma_2 = 8$). Ενώ αν $\gamma \notin \mathbb{Q}$, τότε $\alpha\beta = \sqrt{\gamma^2}$ είναι μέσο αφού εξ' υποθέσεως $\gamma^2 \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\gamma^2} = \gamma \notin \mathbb{Q}$. ∎

«πρωτότυπη»: Ας υποθέσουμε ότι το ορθογώνιο ΑΓ περιέχεται στις μέσες και δυνάμει μόνο σύμμετρες ΑΒ, ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΓ είναι ρητό ή μέσο.

Ας κατασκευαστούν στις ΑΒ και ΒΓ τα τετράγωνά τους ΑΔ, ΒΕ· άρα τα ΑΔ και ΒΕ είναι μέσα (στμ: αφού έχουν μέση πλευρά). Θεωρούμε ρητή ΖΗ και με αυτή την πλευρά κατασκευάζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΗΘ ισεμβαδικό με το ΑΔ με πλάτος ΖΘ. Στη ΘΜ επίσης κατασκευάζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΜΚ ισεμβαδικό με το ΑΓ με πλάτος τη ΘΚ. Στην *ΚΝ* κατασκευάζουμε το ΝΛ ισεμβαδικό με το ΒΕ και πλάτος ΚΛ. Έτσι τα Ζ, Θ, Κ, Λ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Επειδή λοιπόν τα ΑΔ και ΒΕ είναι μέσα και $\text{ΑΔ} = \text{ΗΘ}$, $\text{ΒΕ} = \text{ΝΛ}$ άρα είναι και τα ΗΘ και ΝΛ μέσα. Αλλά έχουν ρητή πλευρά (την ΖΗ) άρα καθεμιά εκ των ΖΘ, ΚΛ είναι ρητή και κατά μήκος ασύμμετρη με τη ΖΗ (Π22, σελ. 246). Το ΑΔ είναι σύμμετρο με το ΒΕ, άρα και το ΗΘ είναι σύμμετρο με το ΝΛ. Και ισχύει $\text{ΗΘ}/\text{ΝΛ} = \text{ΖΘ}/\text{ΚΛ}$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142)· άρα η ΖΘ είναι κατά μήκος σύμμετρη με την ΚΛ (Π21, σελ. 245). Άρα οι ρητές ΖΘ και ΚΛ είναι κατά μήκος σύμμετρες (Π19, σελ. 242). Και επειδή $\text{ΔΒ} = \text{ΒΑ}$, $\text{ΒΖ} = \text{ΒΓ}$ θα είναι $\text{ΔΒ}/\text{ΒΓ} = \text{ΑΒ}/\text{ΒΖ} = \text{ΔΑ}/\text{ΑΓ}$ (ΠΙ, σελ. 142) και $\text{ΑΒ}/\text{ΒΖ} = \text{ΑΓ}/\text{ΓΖ}$ (ΠΙ, σελ. 142)· άρα $\text{ΔΑ}/\text{ΑΓ} = \text{ΑΓ}/\text{ΓΖ}$, και άρα $\text{ΗΘ}/\text{ΜΚ} = \text{ΜΚ}/\text{ΝΛ}$, αφού $\text{ΑΔ} = \text{ΗΘ}$, $\text{ΑΓ} = \text{ΜΚ}$, $\text{ΓΖ} = \text{ΝΛ}$. Συνεπώς $\text{ΖΘ}/\text{ΘΚ} = \text{ΘΚ}/\text{ΚΛ}$ (ΠΙ, σελ. 142), δηλαδή $\text{ΖΘ} \cdot \text{ΚΛ} = \text{ΘΚ}^2$ (ΠΙ7, σελ. 154). Αλλά είναι ρητό το $\text{ΖΘ} \cdot \text{ΚΛ}$ άρα και το ΘΚ^2, άρα ρητή η ΘΚ. Και αν αυτή είναι κατά μήκος σύμμετρη με τη ΖΗ, το ΘΝ είναι ρητό (Π19, σελ. 242). Ενώ αν είναι κατά μήκος ασύμμετρη με τη ΖΗ οι ρητές ΚΘ, ΘΜ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρες, οπότε το ΘΝ είναι μέσο (Π21, σελ. 245). Το ΘΝ δηλαδή είναι ή ρητό ή μέσο. Αλλά $\text{ΘΝ} = \text{ΑΓ}$, άρα το ΑΓ είναι ρητό ή μέσο.

Συνεπώς, το ορθογώνιο με μέσες, δυνάμει μόνο σύμμετρες πλευρές, κλπ κλπ. Δ

Πρόταση 26 (660) *Διαφορά μέσων παραλληλογράμμων δεν είναι ρητό.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Έστω ότι $\alpha = \sqrt{\sigma_1}$ και $\beta = \sqrt{\sigma_2}$ μέσα εμβαδά με $\alpha > \beta$. Ισχυρίζομαι ότι η διαφορά $\alpha - \beta$ δεν είναι ρητό εμβαδόν· δηλαδή $\alpha - \beta \notin \mathbb{Q}$.

Πράγματι, αν $\alpha - \beta = \rho \in \mathbb{Q}$ συμπεραίνουμε ότι $\rho + \sqrt{\sigma_2} = \sqrt{\sigma_1}$. Υψώνοντας στο τετράγωνο θα προκύψει ότι $\sqrt{\sigma_2} \in \mathbb{Q}$ που είναι άτοπο, αφού το β είναι μέσο. Δ

«πρωτότυπη»: Ας υποθέσουμε ότι το μέσο ΑΒ υπερέχει του μέσου ΑΓ κατά το ρητό ΔΒ, και ας θεωρήσουμε το ρητό μήκος ΕΖ, και ας κατασκευάσουμε ορθογώνιο ΖΘ ίσο με το ΑΒ (στμ: δηλαδή κατασκευάζουμε ορθογώνιο με ρητή πλευρά ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ), με πλάτος ΕΘ. Και από αυτό αφαιρούμε το ΖΗ ίσο με το ΑΓ, οπότε το υπόλοιπο ΚΘ είναι ίσο με το ΒΔ δηλαδή ρητό.

Έτσι τα ΖΘ και ΖΗ είναι μέσα ορθογώνια με ρητή πλευρά. Άρα είναι ρητά τα μήκη ΘΕ και ΕΗ και κατά μήκος ασύμμετρα με την ΕΖ (Π22,

σελ. 246). Επιπλέον το ΚΘ ως ρητό με ρητή πλευρά την ΕΖ έχει ρητή και την ΗΘ και κατά μήκος σύμμετρη με την ΕΖ (Π20, σελ. 242). Συνεπώς η ΕΗ είναι κατά μήκος ασύμμετρη με την ΗΘ (Π13, σελ. 237).

Όμως ισχύει

$$\frac{\text{ΕΗ}}{\text{ΗΘ}} = \frac{\text{ΕΗ}^2}{\text{ΕΗ} \cdot \text{ΗΘ}}$$

(Λήμμα, Π11, σελ. 236)· άρα είναι ασύμμετρο το ΕΗ^2 με το ορθογώνιο $\text{ΕΗ} \cdot \text{ΗΘ}$ (Π11, σελ. 236). Αλλά προς το ΕΗ^2 είναι σύμμετρο το άθροισμα $\text{ΕΗ}^2 + \text{ΗΘ}^2$ διότι και τα δύο τετράγωνα είναι ρητά, ενώ προς το ορθογώνιο $\text{ΕΗ} \times \text{ΗΘ}$ είναι σύμμετρο το $2 \cdot \text{ΕΗ} \times \text{ΗΘ}$ (Π6, σελ. 232), διότι είναι διπλάσιό του. Συνεπώς το $\text{ΕΗ}^2 + \text{ΗΘ}^2$ είναι ασύμμετρο με το $2 \cdot \text{ΕΗ} \times \text{ΗΘ}$ (Π13, σελ. 237). Έτσι και το άθροισμα $\text{ΕΗ}^2 + \text{ΗΘ}^2 + 2 \cdot \text{ΕΗ} \cdot \text{ΗΘ} = \text{ΕΘ}^2$ (Β2, Π4, σελ. 62) είναι ασύμμετρο με το $\text{ΕΗ}^2 + \text{ΗΘ}^2$ (Π16, σελ. 238). Αλλά το $\text{ΕΗ}^2 + \text{ΗΘ}^2$ είναι ρητό άρα το ΕΘ^2 είναι άλογο (Ορ4, σελ. 226). Έτσι το ΕΘ είναι άλογο (Ορ4, σελ. 226) αλλά είναι και ρητό, άτοπο.

Μέσο λοιπόν ορθογώνιο δεν υπερέχει από μέσο κατά ρητό· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 27 (661) *Να κατασκευαστούν μέσα και μόνο δυνάμει σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία περιέχουν ρητό ορθογώνιο.*

Υλοποίηση: Έστω ότι τα α, β είναι ρητά, και δυνάμει μόνο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα (στμ: για παράδειγμα πλευρά και υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου). Θέτουμε γ τη μέση ανάλογό τους (Β6, Π13, σελ. 151), και δ το μέγεθος ώστε $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ (Β6, Π12, σελ. 150).

Επειδή τα α και β είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα, το ορθογώνιο με αυτές τις πλευρές, δηλαδή το γ^2 είναι μέσο (Π21, σελ. 245). Άρα το γ είναι μέσο (Π21, σελ. 245). Και επειδή $\alpha/\beta = \gamma/\delta$ είναι και τα γ και δ δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π11, σελ. 236). Αλλά το γ είναι μέσο άρα και το δ (Π23, σελ. 247). Τα μέσα γ και δ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα. Ισχυρίζομαι ότι το περιεχόμενο σε αυτές ορθογώνιο είναι ρητό. Διότι αφού $\alpha/\beta = \gamma/\delta$, εναλλάξ τώρα $\alpha/\gamma = \beta/\delta$ (Β6, Π16, σελ. 153). Αλλά $\alpha/\gamma = \gamma/\beta$, αφού το γ ήταν μέσο ανάλογο των α, β, άρα $\gamma/\beta = \beta/\delta$ (Β5, Π11, σελ. 133). Οπότε $\gamma\delta = \beta^2$ που είναι ρητό.

Βρέθηκαν συνεπώς μέσες, δυνάμει μόνο σύμμετρες που σχηματίζουν ρητό ορθογώνιο· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 28 (661) *Να κατασκευαστούν μέσα ευθύγραμμα τμήματα, δυνάμει μόνο σύμμετρα που περιέχουν μέσο ορθογώνιο.*

Υλοποίηση: Ας είναι α, β, γ ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα, και ας κατασκευστεί η δ μέση ανάλογος των α και β (Β6, Π13, σελ. 151), και ας κατασκευαστεί ε ώστε $\beta/\gamma = \delta/\varepsilon$ (Β6, Π12, σελ. 150).

Επειδή τα ρητά α, β είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, το ορθογώνιο με αυτές τις πλευρές έχει εμβαδόν δ^2 (Β6, Π17, σελ. 154) και είναι μέσο (Π21, σελ. 245). Άρα το δ είναι μέσο (Π21, σελ. 245). Αφού τα β, γ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα και $\beta/\gamma = \delta/\varepsilon$ είναι και τα δ, ε δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π11, σελ. 236). Είναι όμως μέσο το δ άρα και το ε (Π23, σελ. 247)· δηλαδή τα δ και ε είναι μέσα και δυνάμει μόνο σύμμετρα.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι το ορθογώνιό τους είναι μέσο. Πράγματι, επειδή $\beta/\gamma = \delta/\varepsilon$, εναλλάξ θα είναι $\beta/\delta = \gamma/\varepsilon$ (Β5, Π16, σελ. 134). Αλλά $\beta/\delta = \delta/\alpha$, άρα $\delta/\alpha = \gamma/\varepsilon$, δηλαδή το ορθογώνιο με πλευρές α και γ είναι ισεμβαδικό του ορθογωνίου με πλευρές δ και ε (Β6, Π16, σελ. 153). Αλλά το ορθογώνιο με πλευρές α, γ είναι μέσο άρα μέσο είναι και αυτό με πλευρές δ και ε.

Βρέθηκαν έτσι μέσα δυνάμει μόνο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα, που περιέχουν μέσο ορθογώνιο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ ΤΡΙΑΔΩΝ

Η διατύπωση του κειμένου σε αυτό και το επόμενο λήμμα σε σχέση με την απόδειξη που ακολουθεί είναι μαθηματικά ελλιπής υπό την έννοια ότι αποδεικνύει κάτι ισχυρότερο από το ζητούμενο. Άλλωστε η φράση «9 φορές η μονάδα και 16 φορές η μονάδα δίνουν 25 μονάδες» απαντά στη διατύπωση του Λήμματος. Παρόλα αυτά η απόδειξη κάνει κάτι γενικότερο και απαντά στην εξής διατύπωση:

«Να βρεθούν *όλοι* οι τετράγωνοι αριθμοί με άθροισμα τετράγωνο.»

Για την απόδειξη, ξεκινάμε με έναν τετράγωνο (φυσικό) αριθμό α^2 και θέλουμε να βρούμε άλλους δύο β^2 και γ^2 ώστε να ισχύει $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$. Αναλύουμε τον α^2 σε γινόμενο δύο διαφορετικών αριθμών ίδιας αρτιότητας μ και ν (αν αυτό δεν είναι εφικτό, όπως με τον 4, δεν υπάρχει τετράγωνος που προστιθέμενος στο 4 να δίνει τετράγωνο). Αν $\mu>\nu$, τότε κατασκευάζουμε τους $\beta=(\mu-\nu)/2$ και $\gamma=(\mu+\nu)/2$. Συμπεραίνουμε ότι τα α, β, γ είναι Πυθαγόρεια τριάδα, δηλαδή ισχύει $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$.

Αντιστρόφως: αν $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$ για τρεις (φυσικούς) αριθμούς α, β, γ, τότε $\alpha^2=\gamma^2-\beta^2=(\gamma-\beta)(\gamma+\beta)$. Άρα οι $\gamma-\beta$ και $\gamma+\beta$ είναι αναγκαστικά διαφορετικοί (αλλιώς, αν είναι ίσοι, τότε $\beta=0$ το οποίο είναι άτοπο, αφού β φυσικός), και ίδιας αρτιότητας, αφού αν β, γ ίδιας αρτιότητας οι $\gamma-\beta$ και $\gamma+\beta$ είναι και οι δύο άρτιοι, ενώ αν οι β, γ είναι διαφορετικής αρτιότητας τότε οι $\gamma-\beta$ και $\gamma+\beta$ είναι και οι δύο περιττοί. Θέτοντας $\mu=\gamma+\beta$ και $\nu=\gamma-\beta$ έχουμε $\alpha^2=\mu\nu$, $\beta=(\mu-\nu)/2$ και $\gamma=(\mu+\nu)/2$ δηλαδή οι αριθμοί α, β, γ είναι της μορφής της αρχικής κατασκευής.

Για να βρούμε όλες τις Πυθαγόρειες τριάδες όπου το $\alpha^2=64$ γράφουμε το 64 ως γινόμενο δύο διαφορετικών αριθμών ίδιας αρτιότητας. Υπάρχουν δύο δυνατότητες: $64=2\cdot 32$ και $64=4\cdot 16$. Παρατηρήστε ότι το 64 γράφεται και ως $1\cdot 64$ και ως $8\cdot 8$, αλλά οι 1 και 64 δεν είναι ίδιας αρτιότητας και οι 8 και 8 δεν είναι διαφορετικοί. Άρα με το 64 θα λάβουμε δύο Πυθαγόρειες τριάδες:

$$\alpha^2=64,\ \beta=\frac{32-2}{2},\ \gamma=\frac{32+2}{2}:\quad 8^2+15^2=17^2,$$

και

$$\alpha^2=64,\ \beta=\frac{16-4}{2},\ \gamma=\frac{16+4}{2}:\quad 8^2+6^2=10^2.$$

Λήμμα 8 *Να βρεθούν τετράγωνοι αριθμοί με τετράγωνο άθροισμα.*

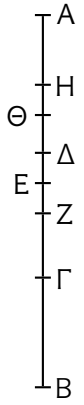
Απόδειξη: Παίρνουμε δυο αριθμούς ΑΒ και ΒΓ ίδιας αρτιότητας. Συνεπώς η διαφορά τους ΑΓ είναι άρτιος (Β9, Π24, σελ. 220 και Β9, Π26, σελ. 220). Διχοτομούμε το ΑΓ με το σημείο Δ. Οι ΑΒ, ΒΓ είναι όμοιοι επίπεδοι ή τετράγωνοι, που είναι και αυτοί όμοιοι επίπεδοι (Β9, Π2, σελ. 209). Άρα ισχύει

$$\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}+\Gamma\Delta^2=\text{Β}\Delta^2$$

(Β2, Π6, σελ. 64). Αλλά ο $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι τετράγωνος (Β9, ΠΙ, σελ. 209). Βρέθηκαν λοιπόν οι τετράγωνοι $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ και $\Gamma\Delta^2$ με άθροισμα τον τετράγωνο $\text{Β}\Delta^2$.

Έχουν βρεθεί δηλαδή δύο τετράγωνοι αριθμοί, οι $\text{Β}\Delta^2$ και $\Gamma\Delta^2$ με διαφορά τον τετράγωνο $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ όταν οι ΑΒ και ΒΓ είναι όμοιοι επίπεδοι. Όταν δεν είναι επίπεδοι, τότε έχουν βρεθεί δυο τετράγωνοι αριθμοί, οι $\text{Β}\Delta^2$ και $\Gamma\Delta^2$ των οποίων η διαφορά $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ δεν είναι τετράγωνος· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Λήμμα 9 *Να βρεθούν δύο τετράγωνοι αριθμοί, ώστε το άθροισμά τους να μην είναι τετράγωνος.*



Απόδειξη: Ας είναι ο τετράγωνος $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ όπως στο προηγούμενο λήμμα, και άρτιος ο ΓΑ τον οποίο τέμνουμε στο μέσο στο σημείο Δ. Φανερά

$$\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}+\Gamma\Delta^2=\text{Β}\Delta^2,$$

όπως και στο προηγούμενο λήμμα. Αφαιρούμε τώρα από το ΓΔ μονάδα ΔΕ· οπότε θα ισχύει

$$\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}+\Gamma\text{Ε}^2<\text{Β}\Delta^2.$$

Ισχυρίζομαι ότι ο αριθμός $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}+\Gamma\text{Ε}^2$ δεν είναι τετράγωνος.

Διότι αν είναι τετράγωνος ή θα είναι ίσος ή μικρότερος του ΒΕ^2, αλλά σίγουρα όχι μεγαλύτερος ώστε να μην τμηθεί η μονάδα.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}+\Gamma\text{Ε}^2=\text{ΒΕ}^2$ και έστω διπλάσιος της μονάδας ο ΗΑ. Επειδή λοιπόν $\text{ΑΓ}=2\Gamma\Delta$, αφού ο $\text{ΑΗ}=2\Delta\text{Ε}$, άρα και η διαφορά $\text{ΗΓ}=2\text{ΕΓ}$· άρα το ΗΓ διχοτομείται από το Ε. Άρα $\text{ΗΒ}\cdot\text{ΒΓ}+\Gamma\text{Ε}^2=\text{ΒΕ}^2$ (Β2, Π6, σελ. 64). Οπότε θα πρέπει

$$\text{ΗΒ}\cdot\text{ΒΓ}+\Gamma\text{Ε}^2=\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}+\Gamma\text{Ε}^2,$$

συνεπώς $\text{ΑΒ}=\text{ΗΒ}$ άτοπο.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}+\Gamma\text{Ε}^2<\text{ΒΕ}^2$. Έστω Ζ ώστε $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}+\Gamma\text{Ε}^2<\text{ΒΖ}^2$, και έστω ο $\Theta\text{Α}=2\Delta\text{Ζ}$. Και πάλι θα συμπεράνουμε ότι $\Theta\Gamma=2\Gamma\text{Ζ}$·

ώστε και το ΓΘ διχοτομείται από το Ζ, και άρα $\Theta B \cdot B\Gamma + Z\Gamma^2 = BZ^2$ (Β2, Π6, σελ. 64). Άρα

$$\Theta B \cdot B\Gamma + Z\Gamma^2 = AB \cdot B\Gamma + \Gamma E^2,$$

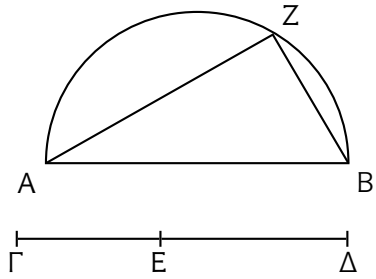
άτοπο.

Έτσι ο $AB \cdot B\Gamma + \Gamma E^2$ δεν γίνεται να είναι τετράγωνος.

Παρόλο που υπάρχουν περισσότεροι τρόπο να αποδειχθεί ότι ο παραπάνω αριθμός δεν είναι τετράγωνος, ας αρκεστούμε στους παραπάνω τρόπους για να μην μεγαλώσει και άλλο η παρούσα πραγματεία· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ∆

Πρόταση 29 (663) *Να βρεθούν δυο ρητά δυνάμει μόνο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα, ώστε το τετράγωνο του μεγαλύτερου να υπερέχει του τετραγώνου του μικρότερου κατά τετράγωνο με πλευρά κατά μήκος σύμμετρη με το μεγαλύτερο.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Έστω α ρητό μήκος ($\alpha^2 \in \mathbb{Q}$). Βρίσκω φυσικούς $\mu > \nu$ ώστε $\sqrt{\mu^2 - \nu^2} \notin \mathbb{N}$ και θέτω $\beta = (\alpha/\mu)\sqrt{\mu^2 - \nu^2}$ που είναι ρητός ($\beta^2 \in \mathbb{Q}$), $\alpha/\beta = \mu/\sqrt{\mu^2 - \nu^2} \notin \mathbb{Q}$ και $\alpha^2/\beta^2 = \mu^2/(\mu^2 - \nu^2) \in \mathbb{Q}$. Οπότε οι α, β είναι δυνάμει μόνο σύμμετροι. Τέλος, θέτω $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ και ελέγχουμε ότι $\alpha/\gamma = \mu/\nu \in \mathbb{Q}$, άρα είναι κατά μήκος σύμμετροι, ενώ $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2$. ∆



«πρωτότυπη»: Θεωρούμε ρητή ΑΒ και δυο τετράγωνους (φυσικούς) αριθμούς ΓΔ, ΔΕ ώστε η διαφορά τους ΓΕ να μην είναι τετράγωνος αριθμός (πρώτο Λήμμα Π28, σελ. 250), κατασκευάζουμε ημικύκλιο στην ΑΒ και σε αυτό βρίσκουμε σημείο Ζ ώστε να ισχύει $\Delta\Gamma/\Gamma E = BA^2/AZ^2$ (Πόρισμα, Π6, σελ. 232), και φέρνουμε και την ΖΒ.

$BA^2/AZ^2 = \Delta\Gamma/\Gamma E$, και αφού ΔΓ, ΓΕ (φυσικοί) αριθμοί τα BA^2, AZ^2 είναι σύμμετρα (Π6, σελ. 232). Αλλά το BA^2 είναι ρητό άρα και το AZ^2, οπότε η ΑΖ είναι ρητή (στμ: έχει το τετράγωνό της στο $\mathbb{Q}$).

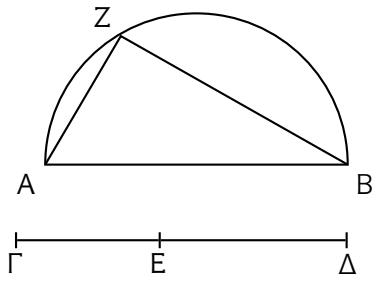
Το $\Delta\Gamma/\Gamma E$ δεν έχει λόγο τετράγωνο αριθμό προς τετράγωνο (στμ: γιατί αλλιώς ο ΓΕ θα ήταν τετράγωνος αλλά δεν είναι) συμπεραίνουμε ότι ούτε και το BA^2/AZ^2 έχει λόγο τετράγωνο προς τετράγωνο (στμ: τετράγωνο *φυσικού* αριθμού προς τετράγωνο *φυσικού* αριθμού), άρα τα ΑΒ και ΑΖ είναι κατά μήκος ασύμμετρα (Π9, σελ. 233)· έτσι τα ρητά ΒΑ, ΑΖ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα.

Αλλά $\Delta\Gamma/\Gamma E = BA^2/AZ^2$ και αναστρέφοντας (Β5, Ορ26, σελ. 127) παίρνουμε $\Delta\Gamma/\Delta E = AB^2/BZ^2$ (Πόρισμα, Β5, Π19, σελ. 136). Επιπλέον ο

λόγος ΓΔ/ΔΕ είναι τετράγωνος προς τετράγωνο (στμ: εξ ορισμού των ΓΔ, ΔΕ) άρα το ίδιο ισχύει και για τον AB^2/BZ^2 οπότε τα ΑΒ, ΒΖ είναι κατά μήκος σύμμετρα (Π9, σελ. 233). Τέλος $AB^2 = AZ^2 + ZB^2$ (Β3, Π31, σελ. 102, και Β1, Π47, σελ. 51)· δηλαδή το AB^2 υπερέχει του AZ^2 κατά τετράγωνο πλευράς ΒΖ κατά μήκος σύμμετρη με την ΑΒ.

Βρέθηκαν συνεπώς ρητά, δυνάμει μόνο σύμμετρα μεγέθη $AB > AZ$ ώστε το τετράγωνο της μεγαλύτερης AB^2 να υπερέχει του AZ^2 κατά το τετράγωνο BZ^2 του οποίου η πλευρά ΒΖ είναι κατά μήκος σύμμετρη με την μεγαλύτερη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 30 (664) *Να βρεθούν δυο ρητά δυνάμει μόνο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα, ώστε το τετράγωνο του μεγαλύτερου να υπερέχει του τετραγώνου του μικρότερου κατά τετράγωνο με πλευρά κατά μήκος ασύμμετρη με το μεγαλύτερο.*



Απόδειξη. (Στμ: στην απόδειξη που ακολουθεί αν $ΓΕ = \mu$ και $ΕΔ = \nu$ ώστε $\mu^2 + \nu^2$ όχι τετράγωνος (για παράδειγμα $\mu = 1$, $\nu = 2$), δοθέντος του ρητού $AB = \alpha$ κατασκευάζει τους αριθμούς $AZ = \alpha/\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ ρητός (δηλαδή $AZ^2 \in \mathbb{Q}$) και δυνάμει μόνο σύμμετρος με τον α, και τον $BZ = \alpha\sqrt{1 - (\mu^2 + \nu^2)^{-1}}$ κατά μήκος ασύμμετρος με τον α και $\alpha - (\alpha/\sqrt{\mu^2 + \nu^2})^2 = BZ^2$.)

Θεωρούμε ρητή ΑΒ και δυο τετράγωνους (φυσικούς) αριθμούς ΓΕ, ΕΔ ώστε το άθροισμά τους ΓΔ να μην είναι τετράγωνος αριθμός (δεύτερο Λήμμα Π28, σελ. 250), κατασκευάζουμε ημικύκλιο στην ΑΒ και σε αυτό βρίσκουμε σημείο Ζ ώστε να ισχύει $ΔΓ/ΓΕ = BA^2/AZ^2$ (Πόρισμα, Π6, σελ. 232), και φέρνουμε και την ΖΒ.

Όμοια με την προηγούμενη πρόταση, αποδεικνύεται ότι οι ΒΑ, ΑΖ είναι ρητά δυνάμει μόνο σύμμετρα μεγέθη. Και επειδή $ΔΓ/ΓΕ = BA^2/AZ^2$ με αναστροφή παίρνουμε $ΓΔ/ΔΕ = AB^2/BZ^2$ (Π19, σελ. 136).

Ο ΓΔ/ΔΕ δεν έχει λόγο όπως τετράγωνος προς τετράγωνο (φυσικό) αριθμό και άρα το ίδιο ισχύει για το AB^2/BZ^2, συνεπώς τα ΑΒ, ΒΖ είναι κατά μήκος ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Επιπλέον $AB^2 = AZ^2 + ZB^2$.

Έτσι τα ΑΒ, ΑΖ είναι ρητά, δυνάμει μόνο σύμμετρα και το τετράγωνο της ΑΒ υπερέχει του τετραγώνου της ΑΖ κατά το τετράγωνο της ΖΒ η οποία είναι κατά μήκος ασύμμετρη με τη μεγαλύτερη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 31 (664) *Να βρεθούν δυο μέσα δυνάμει μόνο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα που να περιέχουν ρητό ορθογώνιο, ώστε το τετράγωνο του μεγαλύ-*

τερου να υπερέχει του τετραγώνου του μικρότερου κατά τετράγωνο πλευράς κατά μήκος σύμμετρης με το μεγαλύτερο.

Απόδειξη. (Στμ: η απόδειξη κάνει το εξής: από την Π29, σελ. 254 θεωρούνται ρητά $\alpha > \beta$ με $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$ αλλά $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}/\alpha \in \mathbb{Q}$. Θέτει $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$ και $\delta = \beta^2/\gamma$. Οπότε τα γ, δ είναι μέσα, σχηματίζουν ορθογώνιο ρητού εμβαδού, αφού $\gamma\delta = \beta^2 \in \mathbb{Q}$, δεν είναι κατά μήκος σύμμετρα, αφού $\gamma/\delta = \alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, $\gamma^2/\delta^2 = \alpha^2/\beta^2 \in \mathbb{Q}$, άρα είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα και $\sqrt{\gamma^2 - \delta^2}/\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}/\alpha \in \mathbb{Q}$.)

Ας ληφθούν δυο ρητά δυνάμει μόνο σύμμετρα $\alpha > \beta$ ώστε το α^2 να υπερέχει του β^2 κατά τετράγωνο με πλευρά σύμμετρη με το α (Π29, σελ. 254). Και έστω $\gamma^2 = \alpha\beta$. Το ορθογώνιο $\alpha \times \beta$ είναι μέσο (Π21, σελ. 245), άρα και το γ^2, άρα η γ είναι μέση (Π21, σελ. 245). Θεωρούμε δ ώστε $\beta^2 = \gamma\delta$ (στμ: $\gamma > \delta$ αν και μόνο αν $\alpha > \beta$, που ισχύει). Το β^2 είναι ρητό άρα και το $\gamma\delta$. Και επειδή $\alpha/\beta = (\alpha\beta)/\beta^2$ (Λήμμα, Π21, σελ. 245), θα είναι $\alpha/\beta = \gamma^2/(\gamma\delta) = \gamma/\delta$ (Λήμμα, Π21, σελ. 245). α, β δυνάμει μόνο σύμμετρα, άρα και γ, δ δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π11, σελ. 236). Αλλά η γ είναι μέση άρα και η δ (Π23, σελ. 247). Όπως όμως για τα α, β έτσι και για τα γ, δ, το τετράγωνο του γ υπερέχει του τετραγώνου του δ κατά τετράγωνο πλευράς κατά μήκος σύμμετρης με τη γ (Π14, σελ. 237).

Βρέθηκαν λοιπόν δυο μέσα δυνάμει μόνο σύμμετρα, τα γ, δ, που περιέχουν ρητό ορθογώνιο και το τετράγωνο της γ υπερέχει του τετραγώνου της δ κατά τετράγωνο πλευράς κατά μήκος σύμμετρης με τη μεγαλύτερη.

Ομοίως αποδεικνύεται και για το τετράγωνο από ασύμμετρης πλευράς, όταν το τετράγωνο της α υπερέχει του τετραγώνου της β κατά τετράγωνο πλευράς ασύμμετρης με την α (Π30, σελ. 255). Δ

Πρόταση 32 (665) *Να βρεθούν δυο μέσα δυνάμει μόνο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζουν μέσο ορθογώνιο ώστε το τετράγωνο του μεγαλύτερου να υπερέχει από το τετράγωνο του μικρότερου κατά τετράγωνο πλευράς σύμμετρης με το μεγαλύτερο.*

Απόδειξη. Ας λάβουμε τρία ρητά δυνάμει μόνο σύμμετρα, τα α, β, γ, ώστε το τετράγωνο του α να υπερέχει του τετραγώνου του γ κατά τετράγωνο με πλευρά σύμμετρη με την α (Π29, σελ. 254), και θεωρούμε τετράγωνο πλευράς δ ώστε $\delta^2 = \alpha\beta$. Άρα το δ^2 είναι μέσο οπότε και το δ (Π21, σελ. 245). Θεωρούμε επίσης ε ώστε $\beta\gamma = \delta\varepsilon$, και επειδή $\alpha\beta/\beta\gamma = \alpha/\gamma$ (Λήμμα, Π21, σελ. 245), $\alpha\beta = \delta^2$ και $\beta\gamma = \delta\varepsilon$ θα ισχύει $\alpha/\gamma = \delta^2/(\delta\varepsilon) = \delta/\varepsilon$ (Λήμμα, Π21, σελ. 245)· και άρα $\alpha/\gamma = \delta/\varepsilon$. Συνεπώς τα δ, ε είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα όπως και τα α, γ (Π11, σελ. 236). Το δ είναι μέσο άρα και το ε (Π23, σελ. 247). Αφού τώρα $\alpha/\gamma = \delta/\varepsilon$ όπως ισχύει για τα α, γ έτσι και για τα δ, ε το τετράγωνο της δ θα υπερέχει του τετραγώνου της ε κατά τετράγωνο πλευράς σύμμετρης με το δ (Π14, σελ. 237). Ισχυρίζομαι

τώρα ότι το ορθογώνιο με πλευρές τα δ, ε είναι μέσο. Πράγματι, αυτό ισχύει, αφού $\delta\varepsilon = \beta\gamma$ και το ορθογώνιο με πλευρές β, γ είναι μέσο (Π21, σελ. 245) διότι τα β και γ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα.

Έτσι βρέθηκαν δύο μέσα δυνάμει μόνο σύμμετρα, τα δ, ε που περιέχουν μέσο ορθογώνιο και το τετράγωνο του μεγαλύτερου υπερέχει από το τετράγωνο του μικρότερου κατά τετράγωνο πλευράς σύμμετρης με τη μεγαλύτερη.

Με όμοιο πάλι τρόπο αποδεικνύεται και για το τετράγωνο από πλευρά ασύμμετρη, δηλαδή όταν το τετράγωνο της α υπερέχει του τετραγώνου της γ κατά τετράγωνο πλευράς ασύμμετρης με την α. Δ

Λήμμα 10 *Έστω τρίγωνο ορθογώνιο, το* ΑΒΓ *με ορθή τη γωνία στο* Α *και ας φέρουμε την κάθετη* ΑΔ *στη* ΒΓ*. Ισχυρίζομαι ότι το ορθογώνιο* $\Gamma\mathrm{B}\cdot\mathrm{B}\Delta = \mathrm{BA}^2$, $\mathrm{B}\Gamma\cdot\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{A}^2$, $\mathrm{B}\Delta\cdot\Delta\Gamma = \mathrm{A}\Delta^2$ *και* $\mathrm{B}\Gamma\cdot\mathrm{A}\Delta = \mathrm{BA}\cdot\mathrm{A}\Gamma$.

Απόδειξη. Πρώτα δείχνουμε ότι $\Gamma\mathrm{B}\cdot\mathrm{B}\Delta = \mathrm{BA}^2$.

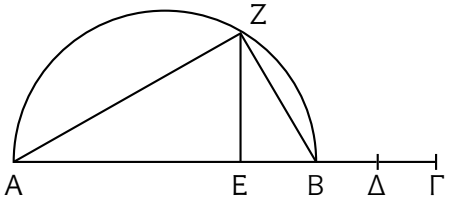
Αφού στο ορθογώνιο τρίγωνο φέραμε κάθετη από την κορυφή της ορθής, τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ είναι όμοια και μεταξύ τους και με ολόκληρο το ΑΒΓ (Β6, Π8, σελ. 148). Έτσι επειδή τα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια θα ισχύει $\Gamma\mathrm{B}/\mathrm{BA} = \mathrm{BA}/\mathrm{B}\Delta$ (Β6, Π4, σελ. 144), άρα και $\Gamma\mathrm{B}\cdot\mathrm{B}\Delta = \mathrm{AB}^2$ (Β6, Π17, σελ. 154).

Για τους ίδιους λόγους ισχύει $\mathrm{B}\Gamma\cdot\Gamma\Delta = \mathrm{A}\Gamma^2$.

Και επιπλέον η ΑΔ είναι μέση ανάλογος των τμημάτων ΒΔ και ΔΓ, άρα $\mathrm{B}\Delta/\Delta\mathrm{A} = \mathrm{A}\Delta/\Delta\Gamma$· άρα $\mathrm{B}\Delta\cdot\Delta\Gamma = \Delta\mathrm{A}^2$ (Β6, Π17, σελ. 154).

Ισχυρίζομαι τώρα ότι και $\mathrm{B}\Gamma\cdot\mathrm{A}\Delta = \mathrm{BA}\cdot\mathrm{A}\Gamma$. Διότι επειδή τα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια (Β6, Π4, σελ. 144), ισχύει $\mathrm{B}\Gamma/\Gamma\mathrm{A} = \mathrm{BA}/\mathrm{A}\Delta$ (αν τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα είναι σε αναλογία το γινόμενο των άκρων είαι ίσο με το γινόμενο των μέσων). Άρα $\mathrm{B}\Gamma\cdot\mathrm{A}\Delta = \mathrm{BA}\cdot\mathrm{A}\Gamma$ (Β6, Π16, σελ. 153)· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 33 (666) *Να βρεθούν δυο ευθύγραμμα τμήματα δυνάμει ασύμμετρα, τα οποία να σχηματίζουν μέσο ορθογώνιο αλλά να έχουν ρητό άθροισμα τετραγώνων.*



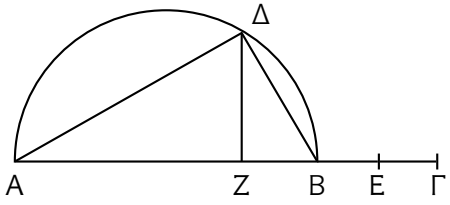
Απόδειξη. Ας λάβουμε δυο ρητά δυνάμει μόνο σύμμετρα ΑΒ και ΒΓ ώστε το τετράγωνο της μεγαλύτερης να υπερέχει του τετραγώνου της μικρότερης κατά τετράγωνο πλευράς κατά μήκος ασύμμετρης με τη μεγαλύτερη (Π30, σελ. 255), και ας διχοτομηθεί η ΒΓ με το σημείο Δ, και ας κατασκευαστεί στην ΑΒ παραλληλόγραμμο ισεμβαδικό με το τετράγωνο μιας εκ των ΒΔ, ΔΓ μειωμένο κατά τετράγωνο εμβαδού

ίσου με το $\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΒ}$ (Π28, σελ. 163). Στην ΑΒ γράφουμε το ημικύκλιο ΑΖΒ, και ας φέρουμε στην ΑΒ την κάθετη ΕΖ καθώς και τις ΑΖ και ΖΒ.

Και επειδή είναι άνισα τα ΑΒ, ΒΓ, και το ΑΒ^2 υπερέχει του ΒΓ^2 κατά τετράγωνο πλευράς ασύμμετρης με την ΑΒ, και επειδή προς το ένα τέταρτο του ΒΓ^2, δηλαδή το $(\text{ΒΓ}/2)^2$, κατασκευάστηκε στην ΑΒ ίσο παραλληλόγραμμο μείον τετράγωνο εμβαδού $\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΒ}$, άρα τα ΑΕ, ΕΒ είναι κατά μήκος ασύμμετρα (Π18, σελ. 240)· και ισχύει $\text{ΑΕ}/\text{ΕΒ} = (\text{ΒΑ}\cdot\text{ΑΕ})/(\text{ΑΕ}\cdot\text{ΒΕ})$ και $\text{ΒΑ}\cdot\text{ΑΕ} = \text{ΑΖ}^2$, $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΕ} = \text{ΒΖ}^2$ (Λήμμα, Π32, σελ. 256). Άρα το ΑΖ^2 είναι ασύμμετρο με το ΖΒ^2 (Π11, σελ. 236)· άρα τα ΑΖ, ΖΒ είναι δυνάμει ασύμμετρα. Και επειδή το ΑΒ είναι ρητό άρα ρητό είναι και το ΑΒ^2· οπότε και το $\text{ΑΖ}^2 + \text{ΖΒ}^2$ είναι ρητό (Β1, Π47, σελ. 51). Και επειδή πάλι το ορθογώνιο $\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΒ} = \text{ΕΖ}^2$, και $\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΒ} = \text{ΕΖ}^2$, άρα ισχύει $\text{ΖΕ} = \text{ΒΔ}$· συνεπώς $\text{ΒΓ} = 2\text{ΖΕ}$· οπότε το ορθογώνιο $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι ασύμμετρο με το ορθογώνιο $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΕΖ}$ (Π6, σελ. 232). Το ορθογώνιο $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι όμως μέσο (Π21, σελ. 245)· άρα είναι μέσο και το $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΕΖ}$ (Πόρισμα, Π23, σελ. 247). Αλλά $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΕΖ} = \text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΖ}$ άρα και το τελευταίο είναι μέσο. Δείξαμε δε ότι είναι και ρητό το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του.

Βρέθηκαν λοιπόν δυο ευθύγραμμα τμήματα δυνάμει ασύμμετρα, τα ΑΖ, ΖΒ που σχηματίζουν ρητό άθροισμα των τετραγώνων τους, και το ορθογώνιο που σχηματίζουν είναι μέσο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 34 (667) *Να βρεθούν δυο δυνάμει ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα με άθροισμα τετραγώνων μέσο και το ορθογώνιο που σχηματίζουν ρητό.*



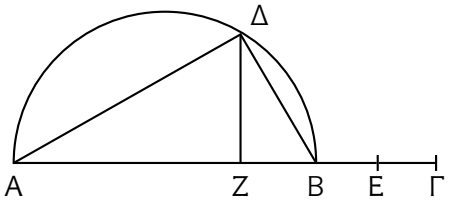
Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε δυο μέσα δυνάμει μόνο σύμμετρα ΑΒ και ΒΓ που σχηματίζουν ρητό ορθογώνιο, ώστε το ΑΒ^2 να υπερέχει του ΒΓ^2 κατά τετράγωνο πλευράς ασύμμετρης με την ΑΒ (Π31, σελ. 255), και ας κατασκευαστεί στην ΑΒ ημικύκλιο ΑΔΒ, και ας διχοτομηθεί η ΒΓ από το σημείο Ε, και ας κατασκευαστεί στην ΑΒ παραλληλόγραμμο, το $\text{ΑΖ}\times\text{ΖΒ}$ ισεμβαδικό με το ΒΕ^2 από το οποίο λείπει τετράγωνο (Β6, Π28, σελ. 163)· άρα η ΑΖ είναι κατά μήκος ασύμμμετρη με την ΖΒ (Π18, σελ. 240). Και ας φέρουμε από το Ζ κάθετη στην ΑΒ την ΖΔ, και ας φέρουμε τις ΑΔ και ΔΒ.

Επειδή η ΑΖ είναι ασύμμετρη με τη ΖΒ, άρα είναι ασύμμετρο και το ορθογώνιο $\text{ΒΑ}\cdot\text{ΑΖ}$ με το ορθογώνιο $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΖ}$ (Π11, σελ. 236). Επίσης ισχύει $\text{ΒΑ}\cdot\text{ΑΖ} = \text{ΑΔ}^2$, $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΖ} = \text{ΔΒ}^2$ (Λήμμα, Π32, σελ. 256)· άρα το ΑΔ^2 είναι ασύμμετρο με το ΔΒ^2. Και επειδή το ΑΒ^2 είναι μέσο, θα είναι μέσο και το άθροισμα $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ (Β3, Π31, σελ. 102 και Β1, Π47, σελ. 51). Και επειδή $\text{ΒΓ} = 2\text{ΔΖ}$ ισχύει $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ} = 2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΖΔ}$. Αλλά είναι ρητό το $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$· άρα

είναι ρητό και το $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΖΔ}$ (Π6, σελ. 232, Ορ4). Αλλά $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΖΔ} = \text{ΑΔ}\cdot\text{ΔΒ}$ (Λήμμα, Π32, σελ. 256)· άρα το $\text{ΑΔ}\cdot\text{ΔΒ}$ είναι ρητό.

Βρέθηκαν δηλαδή δυο ευθύγραμμα τμήματα, δυνάμει ασύμμετρα, τα ΑΔ, ΔΒ που σχηματίζουν άθροισμα τετραγώνων μέσο και ορθογώνιο ρητό· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 35 (667) *Να βρεθούν δυο ευθύγραμμα τμήματα δυνάμει ασύμμετρα των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων να είναι μέσο, το ορθογώνιο που σχηματίζουν να είναι και αυτό μέσο και ασύμμετρο με το άθροισμα των τετραγώνων τους.*



Απόδειξη. Θεωρούμε δυο μέσα δυνάμει μόνο σύμμετρα ΑΒ και ΒΓ που σχηματίζουν μέσο ορθογώνιο, ώστε το ΑΒ^2 να υπερέχει του ΒΓ^2 κατά τετράγωνο πλευράς ασύμμετρης με την ΑΒ (Π32, σελ. 256), και ας κατασκευαστεί στην ΑΒ ημικύκλιο, το ΑΔΒ, και λοιπά, όμοια με την προηγούμενη πρόταση.

Επειδή το ΑΖ είναι κατά μήκος ασύμμετρη με το ΖΒ είναι δυνάμει ασύμμετρο και το ΑΔ με το ΔΒ (Π11, σελ. 236). Και επειδή το ΑΒ^2 είναι μέσο, είναι μέσο και το $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ (Πόρισμα, Π23, σελ. 247). Και επειδή $\text{ΑΖ}\cdot\text{ΖΒ} = \text{ΒΕ}^2 = \text{ΔΖ}^2$ θα είναι και $\text{ΒΕ} = \text{ΔΖ}$· άρα είναι $\text{ΒΓ} = 2\text{ΔΖ}$· άρα $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ} = 2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΖΔ}$. Το $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι όμως μέσο, άρα είναι μέσο και το $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΖΔ}$. Αλλά $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΖΔ} = \text{ΑΔ}\cdot\text{ΔΒ}$ (Λήμμα, Π32, σελ. 256), άρα το $\text{ΑΔ}\cdot\text{ΔΒ}$ είναι μέσο. Και επειδή το ΑΒ είναι κατά μήκος ασύμμετρο με το ΒΓ, και τα ΓΒ, ΒΕ είναι σύμμετρα, άρα το ΑΒ είναι με το ΒΕ κατά μήκος ασύμμετρο. (Π13, σελ. 237)· οπότε και το ΑΒ^2 είναι ασύμμετρο με το $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΕ}$ (Π21, σελ. 245, Λήμμα Π11, σελ. 236). Αλλά $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ (ΒΙ, Π47, σελ. 51) και $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΕ} = \text{ΑΒ}\cdot\text{ΖΔ} = \text{ΑΔ}\cdot\text{ΔΒ}$· συνεπώς το $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ είναι ασύμμετρο με το $\text{ΑΔ}\cdot\text{ΔΒ}$.

Βρέθηκαν δηλαδή δυο ευθύγραμμα τμήματα, τα ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ασύμμετρα με άθροισμα τετραγώνων μέσο και ορθογώνιο μέσο και ασύμμετρο με το άθροισμα των τετραγώνων τους· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 36 (668) *Το άθροισμα δυο ρητών και δυνάμει μόνο σύμμετρων είναι άλογο, και το ονομάζουμε δυώνυμο.*

(Στμ: η ύπαρξη δυώνυμων αριθμών είναι η Π30, σελ. 255.)

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Έστω ότι τα α, β ικανοποιούν τις υποθέσεις. Παρατηρούμε ότι

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha^2(\beta/\alpha).$$

Αλλά $\alpha^2, \beta^2 \in \mathbb{Q}$, αφού τα α, β είναι ρητά. Όμως $\beta/\alpha \notin \mathbb{Q}$, αφού τα α, β είναι κατά μήκος ασύμμετρα. Άρα $(\alpha+\beta)^2 \notin \mathbb{Q}$ συνεπώς το $\alpha+\beta$ είναι άλογο. ∎

«πρωτότυπη»: Ας προστεθούν τα ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα ΑΒ, ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι το άθροισμα ΑΓ είναι άλογο.

Διότι τα ΑΒ και ΒΓ είναι κατά μήκος ασύμμετρα, αφού μόνο δυνάμει είναι σύμμετρα, και επιπλέον $\text{ΑΒ}/\text{ΒΓ} = \text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}/\text{ΒΓ}^2$ (Λήμμα, Π21, σελ. 245), άρα το $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι ασύμμετρο με το ΒΓ^2 (Π11, σελ. 236). Αλλά με το ορθογώνιο $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι σύμμετρο το $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ (Π6, σελ. 232), προς δε το ΒΓ^2 είναι σύμμετρο το $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ διότι τα ΑΒ, ΒΓ είναι ρητά δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π15, σελ. 238)· άρα το $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι ασύμμετρο με το $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ (Π13, σελ. 237). Και προσθέτοντας το $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}+\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2 = \text{ΑΓ}^2$ (Β2, Π4, σελ. 62) είναι ασύμμετρο με το $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ (Π16, σελ. 238). Αλλά είναι ρητό το $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$, άρα το ΑΓ^2 είναι άλογο (Ορ4, σελ. 226)· άρα το ΑΓ είναι άλογο. Προερχόμενο από δύο ονόματα (στμ: σύμμετρο συν ασύμμετρο εμβαδόν) ονομάζεται δυώνυμο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ∆

Πρόταση 37 (668) *Το άθροισμα δυο μέσων, δυνάμει μόνο σύμμετρων, των οποίων το ορθογώνιο είναι ρητό, είναι άλογο και ονομάζεται πρώτο εκ δυο μέσων.*

(Στμ: η ύπαρξη πρώτου εκ δύο μέσων είναι η Π31, σελ. 255.)

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Υποθέτουμε ότι τα α, β ικανοποιούν την υπόθεση. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\\ &= \alpha^2\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}+1\right)+2\alpha\beta.\end{aligned}$$

Αλλά $\alpha\beta \in \mathbb{Q}$ αφού το ορθογώνιο είναι ρητό, $\beta^2/\alpha^2 \in \mathbb{Q}$, αφού τα α, β είναι δυνάμει σύμμετρα, και $\alpha^2 \notin \mathbb{Q}$, αφού το α είναι μέσο. Συνεπώς $(\alpha+\beta)^2 \notin \mathbb{Q}$, άρα το $\alpha+\beta$ είναι άλογο. ∎

«πρωτότυπη»: Διότι ας προστεθούν δυο μέσα δυνάμει μόνο σύμμετρα, τα ΑΒ, ΒΓ με ορθογώνιο ρητό. Ισχυρίζομαι ότι το άθροισμα ΑΓ είναι άλογο.

Επειδή τα ΑΒ, ΒΓ είναι κατά μήκος ασύμμετρα άρα το άθροισμα $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ είναι ασύμμετρο με το $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$· και προσθέτοντας, το $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2+2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ} = \text{ΑΓ}^2$ (Β2, Π4, σελ. 62) είναι ασύμμετρο με το $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ (Π16, σελ. 238). Είναι ρητό όμως το $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ εξ' υποθέσεως, άρα το ΑΓ^2 είναι άλογο· άρα το ΑΓ είναι άλογο, και ονομάζεται πρώτο εκ δυο μέσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ∆

Πρόταση 38 (669) *Το άθροισμα δυο μέσων, δυνάμει μόνο σύμμετρων, των οποίων το ορθογώνιο είναι μέσο, είναι άλογο και ονομάζεται δεύτερο εκ δυο μέσων.*

(Στμ: η ύπαρξη δεύτερου εκ δύο μέσων είναι η Π32, σελ. 256.)

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Ας υποθέσουμε ότι τα α και β ικανοποιούν την υπόθεση. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^4 &= (\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)^2\\ &= \alpha^4+\beta^4+6(\alpha\beta)^2+4\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)\\ &= \alpha^4+\beta^4+6(\alpha\beta)^2+4(\alpha\beta)^2\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\\ &= \alpha^4+\beta^4+6(\alpha\beta)^2+4(\alpha\beta)^2\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+1\right).\end{aligned}$$

Αλλά

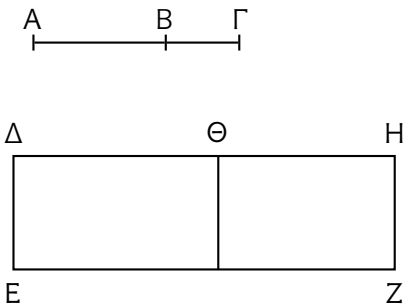
(i) $\alpha^2,\ \beta^4 \in \mathbb{Q}$ γιατί τα α, β είναι μέσα,

(ii) $(\alpha\beta)^2 = \beta^4(\alpha^2/\beta^2) \in \mathbb{Q}$ γιατί τα α, β εκτός από μέσα είναι και δυνάμει σύμμετρα,

(iii) $\alpha^2/\beta^2+1 \in \mathbb{Q}$ όπως πριν,

(iv) $\beta/\alpha \notin \mathbb{Q}$, γιατί τα α, β είναι κατά μήκος ασύμμετρα,

οπότε συμπεραίνουμε ότι $(\alpha+\beta)^4 \notin \mathbb{Q}$, άρα και $(\alpha+\beta)^2 \notin \mathbb{Q}$, δηλαδή το $\alpha+\beta$ είναι άλογο. Δ



«πρωτότυπη»: Ας προστεθούν δυο μέσα δυνάμει μόνο σύμμετρα, τα ΑΒ, ΒΓ, που σχηματίζουν μέσο ορθογώνιο. Ισχυρίζομαι ότι το άθροισμά τους ΑΓ είναι άλογο.

Διότι ας πάρουμε ένα ρητό ΔΕ και ας κατασκευάσουμε στη ΔΕ παραλληλόγραμο ΔΖ ισεμβαδικό με το ΑΓ^2, με πλάτος ΔΗ (ΒΙ, Π45, σελ. 47). Επειδή $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2+2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ (Β2, Π4, σελ. 62), ας κατασκευαστεί στην ΔΕ παραλληλόγραμμο ΕΘ ισεμβαδικό με το $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$. Άρα το υπόλοιπο $|\text{ΘΖ}| = 2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$. Αφού ΑΒ, ΒΓ μέσα ευθύγραμμα τμήματα, μέσα είναι και τα εμβαδά ΑΒ^2 και ΒΓ^2. Μέσο είναι εξ' υποθέσεως και το $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$, άρα είναι μέσα τα ορθογώνια ΕΘ και ΘΖ (στμ: το ότι το ΕΘ είναι μέσο επειδή είναι μέσα τα ΑΒ^2 και ΒΓ^2 απαιτεί εξήγηση και εδώ μάλλον αφήνεται ως άσκηση. Ο λόγος είναι ότι το $|\text{ΕΘ}| = \text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$

είναι σύμμετρο με καθένα από τα ΑΒ^2, ΒΓ^2 (Π15, σελ. 238) και αφού αυτά είναι μέσα είναι και το $|\text{ΕΘ}|$ (Π23, σελ. 247)). Αλλά έχουν πλευρά τη ρητή ΔΕ, άρα καθένα από τα ΔΘ, ΘΗ είναι ρητό και κατά μήκος ασύμμετρο με το ΔΕ (Π22, σελ. 246). Επειδή λοιπόν το ΑΒ είναι κατά μήκος ασύμμετρο με το ΒΓ και ισχύει $\text{ΑΒ}/\text{ΒΓ} = \text{ΑΒ}^2/(\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ})$ (Λήμμα, Π21, σελ. 245), άρα το ΑΒ^2 είναι ασύμμετρο με το $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ (Π11, σελ. 236). Αλλά τα ΑΒ^2 και $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ είναι σύμμετρα (Π15, σελ. 238) και τα $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ και $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι σύμμετρα (Π6, σελ. 232). Άρα τα $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ και $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι ασύμμετρα (Π13, σελ. 237). Αλλά $|\text{ΕΘ}| = \text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ και $|\text{ΘΖ}| = 2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$. Άρα το ΕΘ είναι ασύμμετρο με το ΘΖ· οπότε και τα ΔΘ, ΘΗ είναι κατά μήκος ασύμμετρα (Β6, Π1, σελ. 142 και Π11, σελ. 236).

Άρα τα ρητά ΔΘ, ΘΗ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα (στμ: ως ρητά έχουν ήδη το τετράγωνό τους ρητό ως εμβαδόν), οπότε το ΔΗ είναι άλογο (Π36, σελ. 259). Αλλά η ΔΕ είναι ρητή· και το ορθογώνιο που σχηματίζεται με ρητή και άλογη είναι άλογο· οπότε το χωρίο ΔΖ είναι άλογο και η πλευρά τετραγώνου με ίσο εμβαδόν είναι άλογη (Ορ4, σελ. 226). Αλλά $\text{ΑΓ}^2 = |\text{ΔΖ}|$· άρα το ΑΓ είναι άλογο. Ας ονομάζεται αυτό δεύτερο εκ δυο μέσων· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 39 (669) *Αν δυο ευθύγραμμα τμήματα δυνάμει ασύμμετρα σχηματίζουν το μεν άθροισμα των τετραγώνων τους ρητό, το δεν περιεχόμενο ορθογώνιο μέσο, το άθροισμά τους είναι άλογο, ας ονομάζεται μείζον.*

(Στμ: η ύπαρξη μείζωνος αριθμού είναι η Π33, σελ. 257.)

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Αν τα α και β ικανοποιούν τις υποθέσεις, τότε επειδή $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$, αφού $\alpha^2+\beta^2 \in \mathbb{Q}$ και $\alpha\beta \notin \mathbb{Q}$ συμπεραίνουμε ότι $(\alpha+\beta)^2 \notin \mathbb{Q}$, συνεπώς $\alpha+\beta$ άλογο. Δ

«πρωτότυπη»: Ας υποθέσουμε ότι τα ΑΒ και ΒΓ ικανοποιούν τις υποθέσεις. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΓ είναι άλογο.

Διότι επειδή το ορθογώνιο $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι μέσο, άρα και το $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι μέσο (Πόρισμα, Β6, Π23, σελ. 159). Το δε άθροισμα $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ είναι ρητό· άρα τα $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ και $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ είναι ασύμμετρα (Ορ4, σελ. 226). Οπότε και το $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2+2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ το οποίο ισούται με ΑΓ^2 (Β2, Π4, σελ. 62) είναι με το $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ ασύμμετρο (Π16, σελ. 238). Είναι όμως ρητό το $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$, άρα το ΑΓ^2 είναι άλογο (Ορ4, σελ. 226). Ώστε και το ΑΓ είναι άλογα· ας ονομάζεται αυτή μείζον· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 40 (670) *Αν δυο ευθύγραμμα τμήματα δυνάμει ασύμμετρα έχουν το άθροισμα των τετραγώνων τους μέσο και το περιεχόμενο ορθογώνιό τους ρητό, το άθροισμά τους είναι άλογο· ας ονομάζεται πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού.*

(Στμ: η ύπαρξη πλευράς ρητού συν μέσου εμβαδού είναι η Π34, σελ. 258.)

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Αν τα α και β ικανοποιούν τις υποθέσεις, τότε επειδή $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$, αφού $\alpha^2+\beta^2 \notin \mathbb{Q}$ και $\alpha\beta \in \mathbb{Q}$ συμπεραίνουμε ότι $(\alpha+\beta)^2 \notin \mathbb{Q}$, συνεπώς $\alpha+\beta$ άλογο. ∎

«πρωτότυπη»: Ας είναι ΑΒ και ΒΓ δυο ευθύγραμμα τμήματα που ικανοποιούν τις υποθέσεις (Π24, σελ. 247). Ισχυρίζομαι ότι το άθροισμα ΑΓ είναι άλογο.

Διότι επειδή το άθροισμα $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ είναι μέσο, το δε ορθογώνιο $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ ρητό, συμπεραίνουμε ότι τα $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ και $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι ασύμμετρα, οπότε και το ΑΓ^2 είναι ασύμμετρο με το $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ (Π6, σελ. 232). Αλλά είναι ρητό το $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ άρα το ΑΓ^2 είναι άλογο.

Έτσι το ΑΓ είναι άλογο, ας ονομάζεται πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού· όπερ ἔδει δεῖξαι. ∆

Πρόταση 41 (670) *Αν δυο ευθύγραμμα τμήματα δυνάμει ασύμμετρα σχηματίζουν μέσο άθροισμα τετραγώνων και ορθογώνιο μέσο και ασύμμετρο με το άθροισμα των τετραγώνων τους το άθροισμά τους είναι άλογο και ονομάζεται πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού.*

(Στμ: η ύπαρξη πλευράς μέσου συν μέσου εμβαδού είναι η Π35, σελ. 259.)

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Αν τα α και β ικανοποιούν τις υποθέσεις, τότε επειδή

$$(\alpha+\beta)^4 = (\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2+\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2+2(\alpha^2+\beta^2)(2\alpha\beta)$$

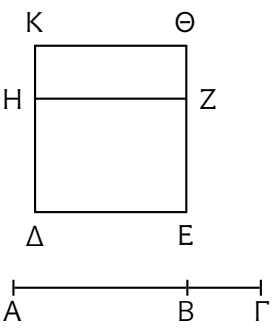
έχουμε:

(i) $(\alpha^2+\beta^2)^2 \in \mathbb{Q}$, αφού το $\alpha^2+\beta^2$ είναι μέσο εμβαδόν.

(ii) $(2\alpha\beta)^2 \in \mathbb{Q}$, αφού το $\alpha\beta$ είναι μέσο εμβαδόν.

(iii) $(\alpha^2+\beta^2)(2\alpha\beta) = 4(\alpha\beta)^2\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} \notin \mathbb{Q}$, αφού $(\alpha\beta)^2 \in \mathbb{Q}$ όπως και πριν και $(\alpha^2+\beta^2)/(\alpha\beta) \notin \mathbb{Q}$, αφού τα $\alpha^2+\beta^2$ και $\alpha\beta$ είναι ασύμμετρα.

Συνεπώς $(\alpha+\beta)^4 \notin \mathbb{Q}$, άρα $(\alpha+\beta)^2 \notin \mathbb{Q}$, συνεπώς $\alpha+\beta$ άλογο. ∎



«πρωτότυπη»: Ας υποθέσουμε ότι τα ΑΒ και ΒΓ ικανοποιούν τις υποθέσεις. Ισχυρίζομαι ότι το άθροισμα ΑΓ είναι άλογο.

Θεωρούμε ρητή ΔΕ και κατασκευάζουμε σε αυτή ορθογώνιο ΔΖ με εμβαδόν ίσο με $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$, και ορθογώνιο ΗΘ ισεμβαδικό με το ορθογώνιο $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$. Έτσι όλο το ΔΘ είναι ισεμβαδικό με το ΑΓ^2 (Β2, Π4, σελ. 62). Το άθροισμα

$\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 = \text{ΔΖ}$ είναι μέσο και έχει πλευρά το ρητό ΔΕ, άρα το ΔΗ είναι ρητό και κατά μήκος ασύμμετρο με το ΔΕ (Π22, σελ. 246). Για τους ίδιους λόγους το ΗΚ είναι ρητό και κατά μήκος ασύμμετρο με το ΗΖ, δηλαδή το ΔΕ. Και επειδή το άθροισμα $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$ είναι ασύμμετρο με το ορθογώνιο $2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$ είναι ασύμμετρο και το ΔΖ με το ΗΘ· οπότε και το ΔΗ είναι ασύμμετρο με το ΗΚ (Β6, Π1, σελ. 142 και Π11, σελ. 236). Αλλά αυτά είναι και ρητά, άρα τα ρητά ΔΗ, ΗΚ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα· οπότε το ΔΚ είναι άλογο, και συγκεκριμένα δυώνυμο (Π36, σελ. 259).

Είναι όμως ρητό το ΔΕ, άρα το ΔΘ είναι άλογο και το ευθύγραμμο τμήμα το τετράγωνο του οποίου είναι ισεμβαδικό είναι και αυτό άλογο (Ορ4, σελ. 226). Αλλά $\text{ΑΓ}^2 = |\text{ΘΔ}|$, οπότε το ΑΓ είναι άλογο· ας ονομάζεται πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Αλγεβρική περιγραφή των έξι ειδών αρρήτων

Όπως είδαμε έγινε μια προσπάθεια στις προηγούμενες προτάσεις να παρουσιαστούν οι αποδείξεις με σύγχρονο αλγεβρικό τρόπο ώστε να γίνουν «απλούστερες» στον σύγχρονο νου, ο οποίος έχει εκπαιδευτεί περισσότερο στην Άλγεβρα από ό,τι στη Γεωμετρία. Αν βέβαια διαβάσει κανείς προσεκτικά τις «σύγχρονες» και τις «πρωτότυπες» θα διαπιστώσει ότι η διαφορά τους δεν είναι ουσιώδης αλλά έχει να κάνει μόνο με τον τρόπο που χειριζόμαστε τα σύμβολα. Είναι δηλαδή οι ίδιες αποδείξεις.

Γεννάται όμως το ερώτημα ποιοι είναι αυτοί οι αριθμοί στη σύγχρονη γλώσσα; Ποιοι είναι οι δυώνυμοι, οι μείζονες κλπ. Η ενότητα αυτή που διακόπτει τη ροή του κειμένου του Ευκλείδη έχει σκοπό να απαντήσει σε αυτή την φυσιολογική απορία. Γιατί θα δούμε ότι οι αλγεβρικές εκφράσεις που προκύπτουν είναι μάλλον ασαφές αν βοηθούν σε κάποια κατανόηση. Οι γεωμετρικές περιγραφές των αριθμών αυτών, όπως τις έχει ο Ευκλείδης, είναι μακράν προτιμότερες. Κρίνουμε όμως ότι πρέπει να δοθεί και η αλγεβρική περιγραφή αλλιώς οι αναγνώστες θα μείνουν με την απορία αν θα μπορούσε να κατανοήσουν καλύτερα τους αριθμούς αυτούς μέσω της άλγεβρας. Και μια και η αλγεβρική περιγραφή δεν είναι καθόλου απλή (είναι χαρακτηριστικό το ότι παλαιότερες αποδόσεις των *Στοιχείων* δαπανούν δεκάδες σελίδων με ένα κυκεώνα περιπτώσεων που δεν είναι απαραίτητες), την παρουσιάζουμε στη συνέχεια όσο συνοπτικότερα μπορούμε.

Δυώνυμοι

Δυώνυμος είναι ο αριθμός της μορφής $\alpha + \beta$ όπου α, β ρητοί ασύμμετροι. Άρα

δυώνυμος είναι της μορφής

$$\alpha+\beta=\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}$$

με σ_1, $\sigma_2\in\mathbb{Q}$ και $\sqrt{\sigma_1/\sigma_2}\notin\mathbb{Q}$.

Για παράδειγμα οι $1+\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ είναι δυώνυμοι.

Πρώτος εκ δύο μέσων

Πρώτος εκ δύο μέσων είναι της μορφής $\alpha+\beta$ με α, β μέσοι, δυνάμει μόνο σύμμετροι με ρητό ορθογώνιο. Άρα είναι της μορφής $\sqrt[4]{\sigma_1}+\sqrt[4]{\sigma_2}$ με $\sqrt{\sigma_1}$, $\sqrt{\sigma_2}\notin\mathbb{Q}$ με $\alpha/\beta=\sqrt[4]{\sigma_1}/\sqrt[4]{\sigma_2}\notin\mathbb{Q}$, $\alpha^2/\beta^2=\sqrt{\sigma_1}/\sqrt{\sigma_2}\in\mathbb{Q}$ και $\alpha\beta=\sqrt[4]{\alpha\beta}\in\mathbb{Q}$.

Θέτοντας $\alpha\beta=\rho\in\mathbb{Q}$, και $\alpha=\sqrt[4]{\sigma}$ με $\sqrt{\sigma}\notin\mathbb{Q}$, προκύπτει ότι

πρώτος εκ δύο μέσων είναι ο αριθμός

$$\alpha+\beta=\sqrt[4]{\sigma}+\frac{\rho}{\sqrt[4]{\sigma}}$$

με $\sqrt{\sigma}\notin\mathbb{Q}$.

Παραδείγματος χάριν ο $\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}$ είναι πρώτος εκ δύο μέσων.

Δεύτερος εκ δύο μέσων

Δεύτερος εκ δύο μέσων είναι της μορφής $\alpha+\beta$ με α, β δυνάμει μόνο σύμμετροι και μέσοι με μέσο ορθογώνιο. Άρα αν θέσουμε $\alpha^2/\beta^2=\rho\in\mathbb{Q}$, ο ρ πρέπει να είναι τέτοιος που να ισχύει $\alpha/\beta=\sqrt{\rho}\notin\mathbb{Q}$. Θέτοντας $\alpha=\sqrt[4]{\sigma}$ προκύπτει $\beta=\sqrt[4]{\sigma}/\sqrt{\rho}$. Άρα

δεύτερος εκ δύο μέσων είναι της μορφής

$$\sqrt[4]{\sigma}+\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{\rho}},$$

με $\sqrt{\sigma}$, $\sqrt{\rho}$, $\sqrt{\sigma/\rho}\notin\mathbb{Q}$.

Για παράδειγμα για $\rho=1/3$ και $\sigma=2$ παίρνουμε τον δεύτερο εκ δύο μέσων $\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{18}$.

Μείζων

Μείζων είναι ο αριθμός της μορφής $\alpha+\beta$ με α, β δυνάμει ασύμμετρους, με ρητό άθροισμα τετραγώνων και μέσο ορθογώνιο. Έτσι αν σ, $\rho\in\mathbb{Q}$ με $\sqrt{\sigma}\notin\mathbb{Q}$, θέτοντας $\alpha\beta=\sqrt{\sigma}$ και $\alpha^2+\beta^2=\rho$, λύνοντας την πρώτη ως προς

β και αντικαθιστώντας στη δεύτερη προκύπτει η εξίσωση $\alpha^4 - \rho\alpha^2 + \sigma = 0$. Για να υπάρχει λύση πρέπει να ισχύει $\rho > 2\sqrt{\sigma}$ και τότε οι λύσεις ικανοποιούν την

$$\alpha^2 = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4\sigma}}{2} = \frac{\rho}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\sigma}{\rho^2}}\right),$$

Από την $\beta^2 = \sigma/\alpha^2$ προκύπτει μετά από πράξεις ότι

$$\beta^2 = \frac{\rho \mp \sqrt{\rho^2 - 4\sigma}}{2} = \frac{\rho}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\sigma}{\rho^2}}\right).$$

Τέλος ελέγχουμε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\rho^2}{4\sigma}\left(2 - \frac{4\sigma}{\rho^2} + 2\sqrt{1 - \frac{4\sigma}{\rho^2}}\right).$$

Άρα για να είναι δυνάμει ασύμμετροι πρέπει να απαιτήσουμε επιπλέον να ισχύει $\sqrt{1 - 4\sigma/\rho^2} \notin \mathbb{Q}$, ισοδύναμα $\sqrt{\rho^2 - 4\sigma} \notin \mathbb{Q}$. Έτσι,

μείζων είναι κάθε αριθμός της μορφής

$$\alpha + \beta = \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma}{\rho^2}}} + \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma}{\rho^2}}},$$

με τους περιορισμούς $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$, $\rho > 2\sqrt{\sigma}$ και $\sqrt{\rho^2 - 4\sigma} \notin \mathbb{Q}$.

Παρατηρούμε εδώ ότι η ποσότητα $\sqrt{\rho^2 - 4\sigma}$ θα μπορούσε να ανήκει στο $\mathbb{Q}$ και έτσι η τελευταία απαίτηση δεν μπορεί να διαγραφεί. Μάλιστα θα μπορούσε να είναι οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathbb{Q}$: αν $q \in \mathbb{Q}$ μπορούμε να θέσουμε $\rho = 3q$ και $\sigma = 2q^2$. Με αυτές τις επιλογές $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{\sigma} = \sqrt{2}q \notin \mathbb{Q}$, $\rho^2 - 4\sigma = 9q^2 - 8q^2 = q^2 > 0$ άρα $\rho > 2\sqrt{\sigma}$ αλλά $\sqrt{\rho^2 - 4\sigma} = q \in \mathbb{Q}$.

Πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού

Πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού είναι αριθμός της μορφής $\alpha + \beta$ με α, β δυνάμει ασύμμετρους, μέσο άθροισμα τετραγώνων και ρητό ορθογώνιο. Επιλέγοντας $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}$ με $\sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$, και θέτοντας $\alpha\beta = \rho$ και $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{\sigma}$, λύνοντας την πρώτη ως προς β και αντικαθιστώντας στη δεύτερη προκύπτει η εξίσωση $\alpha^4 - \sqrt{\sigma}\alpha^2 + \rho^2 = 0$. Για να έχει λύσεις πρέπει $\sigma > 4\rho^2$ και τότε

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{\sigma} \pm \sqrt{\sigma - 4\rho^2}}{2} = \frac{\sqrt{\sigma}}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho^2}{\sigma}}\right)$$

και άρα κάνοντας πράξεις με την $\beta^2 = \rho^2/\alpha^2$,

$$\beta^2 = \frac{\sqrt{\sigma} \mp \sqrt{\sigma - 4\rho^2}}{2} = \frac{\sqrt{\sigma}}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\rho^2}{\sigma}}\right).$$

Εύκολα ελέγχουμε όπως και με τους μείζονες ότι για να είναι τα α, β δυνάμει ασύμμετρα πρέπει να απαιτήσουμε και $\sqrt{1 - 4\rho^2/\sigma} \notin \mathbb{Q}$. Έτσι,

πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού είναι κάθε αριθμός της μορφής

$$\alpha + \beta = \frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{4\rho^2}{\sigma}}} + \frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{4\rho^2}{\sigma}}},$$

όπου $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}$, με $\sigma > 4\rho^2$ και $\sqrt{1 - 4\rho^2/\sigma} \notin \mathbb{Q}$.

Ο τελευταίος περιορισμός δεν μπορεί να διαγραφεί γιατί αν για παράδειγμα $\sigma = 18$ και $\rho = 2$ τότε $\sqrt{1 - 4\rho^2/\sigma} = 1/3 \in \mathbb{Q}$ ενώ όλες οι άλλες συνθήκες ικανοποιούνται.

Πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού

Πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού είναι αριθμός της μορφής $\alpha + \beta$ με α, β δυνάμει ασύμμετρους, μέσο άθροισμα τετραγώνων, μέσο ορθογώνιο, και ασύμμετρα το άθροισμα τετραγώνων τους με το ορθογώνιό τους.

Άρα πρέπει $\alpha^2/\beta^2 \notin \mathbb{Q}$, $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$, $\alpha\beta = \sqrt{\rho} \notin \mathbb{Q}$ και $(\alpha^2 + \beta^2)/\alpha\beta = \sqrt{\sigma/\rho} \notin \mathbb{Q}$, με $\sigma, \rho \in \mathbb{Q}$.

Λύνοντας ως προς β την $\alpha\beta = \sqrt{\rho}$ και αντικαθιστώντας στην $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{\sigma}$ προκύπτει η εξίσωση $\alpha^4 - \sqrt{\sigma}\alpha^2 + \rho = 0$ η οποία υπό τον όρο ότι $\sigma > 4\rho$ δίνει

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{\sigma} \pm \sqrt{\sigma - 4\rho}}{2} = \frac{\sqrt{\sigma}}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho}{\sigma}}\right)$$

και άρα κάνοντας πράξεις με την $\beta^2 = \rho/\alpha^2$,

$$\beta^2 = \frac{\sqrt{\sigma} \mp \sqrt{\sigma - 4\rho}}{2} = \frac{\sqrt{\sigma}}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\rho}{\sigma}}\right).$$

Ελέγχοντας ότι θα πρέπει $\alpha^2/\beta^2 \notin \mathbb{Q}$ προκύπτει ότι θα πρέπει να απαιτηθεί $\sqrt{1 - 4\rho/\sigma} \notin \mathbb{Q}$, ενώ έχουμε και τον περιορισμό $\sqrt{\sigma/\rho} \notin \mathbb{Q}$ από το ότι τα $\alpha^2 + \beta^2$ και $\alpha\beta$ πρέπει να είναι ασύμμετροι. Έτσι,

πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού είναι κάθε αριθμός της μορφής

$$\alpha+\beta=\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\rho}{\sigma}}}+\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\rho}{\sigma}}},$$

όπου $\rho,\sigma\in\mathbb{Q}$, με $\sqrt{\sigma}$, $\sqrt{\rho}\notin\mathbb{Q}$, $\sigma>4\rho$, $\sqrt{\sigma/\rho}\notin\mathbb{Q}$ και $\sqrt{1-4\rho/\sigma}\notin\mathbb{Q}$.

Για ένα παράδειγμα μπορούμε να θέσουμε $\sigma=10$ και $\rho=2$ παίρνοντας την πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού

$$\sqrt{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}}.$$

Ο περιορισμός $\sqrt{1-4\rho/\sigma}\notin\mathbb{Q}$ δεν μπορεί να διαγραφεί. Για παράδειγμα οι $\sigma=32$ και $\rho=6$ δίνουν $\sqrt{1-4\rho/\sigma}=1/2\in\mathbb{Q}$, ενώ ικανοποιούν όλες τις άλλες υποθέσεις.

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζουμε τις κατηγορίες των αρρήτων που περιγράφει το κείμενο μαζί με τις ιδιότητές τους και την αλγεβρική τους μορφή, ώστε να μπορεί εύκολα κανείς να ανατρέχει σε αυτούς.

$\alpha+\beta$	Αλγεβρική μορφή	ρητοί/μέσοι	σύμμετροι	δ. σύμμετροι	ορθογώνιο	άθρ. τετραγώνων	άθρ. τετ./ορθογ.
δυώνυμος	$\alpha=\sqrt{\sigma_1}$, $\beta=\sqrt{\sigma_2}$	ρητοί	όχι	ναι			
1ος εκ δύο μέσων	$\alpha=\sqrt[4]{\sigma}$, $\beta=\rho/\sqrt[4]{\sigma}$	μέσοι	όχι	ναι	ρητό, ίσο με $\rho\in\mathbb{Q}$		
2ος εκ δύο μέσων	$\alpha=\sqrt[4]{\sigma}$, $\beta=\sqrt[4]{\sigma}/\sqrt{\rho}$	μέσοι	όχι	ναι	μέσο, ίσο με $\sqrt{\sigma/\rho}\notin\mathbb{Q}$		
μείζων	$\alpha=\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\sigma}{\rho^2}}}$ $\beta=\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\sigma}{\rho^2}}}$ $\rho>2\sqrt{\sigma}$, $\sqrt{1-4\sigma/\rho^2}\notin\mathbb{Q}$	όχι ρητοί	όχι	όχι	μέσο, ίσο με $\sqrt{\sigma}\notin\mathbb{Q}$	ρητό, ίσο με $\rho\in\mathbb{Q}$	
πλευρά ρητού+μέσου εμβαδού	$\alpha=\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\rho^2}{\sigma}}}$ $\beta=\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\rho^2}{\sigma}}}$ $\sqrt{\sigma}>2\rho$, $\sqrt{1-4\rho^2/\sigma}\notin\mathbb{Q}$	όχι ρητοί	όχι	όχι	ρητό, ίσο με $\rho\in\mathbb{Q}$	μέσο, ίσο με $\sqrt{\sigma}\notin\mathbb{Q}$	
πλευρά μέσου+μέσου εμβαδού	$\alpha=\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\rho}{\sigma}}}$ $\beta=\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\rho}{\sigma}}}$ $\sigma>4\rho$, $\sqrt{1-4\rho/\sigma}\notin\mathbb{Q}$	όχι ρητοί	όχι	όχι	μέσο, ίσο με $\sqrt{\rho}\notin\mathbb{Q}$	μέσο, ίσο με $\sqrt{\sigma}\notin\mathbb{Q}$	ασύμμετρο, ίσο με $\sqrt{\sigma/\rho}\notin\mathbb{Q}$

Στον παραπάνω πίνακα οι αριθμοί ρ και σ είναι στοιχεία του $\mathbb{Q}$
με τις ιδιότητες που περιγράφονται σε όλες τις στήλες του πίνακα.

Οπτική περιγραφή των έξι κλάσεων αρρήτων

Όπως είναι φανερό από την παραπάνω αλγεβρική περιγραφή οι πληροφορίες που παρέχονται για αυτές τις έξι κλάσεις αρρήτων είναι αμφιβόλου αποτελεσματικότητας ως προς την ικανοποίηση της ανάγκης για κατανόηση. Για αυτό επανερχόμαστε στη γεωμετρική γλώσσα του Ευκλείδη και οπτικοποιούμε τους αριθμούς $\alpha+\beta$ με τα παρακάτω σχήματα. Οι κανόνες ανάγνωσής τους είναι οι εξής:

1. Πράσινη διαγράμμιση σημαίνει ρητό εμβαδό.

2. Γκρίζα διαγράμιση σημαίνει μη ρητό εμβαδό.

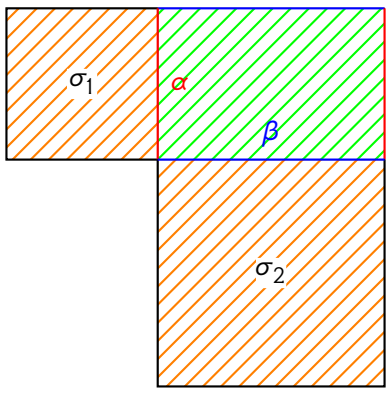
3. Ίδιο χρώμα (πορτοκαλί) σημαίνει σύμμετρα μήκη ή σύμμετρα εμβαδά

4. Διαφορετικό χρώμα (κόκκινο-μπλε) σημαίνει ασύμμετρα μήκη ή ασύμμετρα εμβαδά.

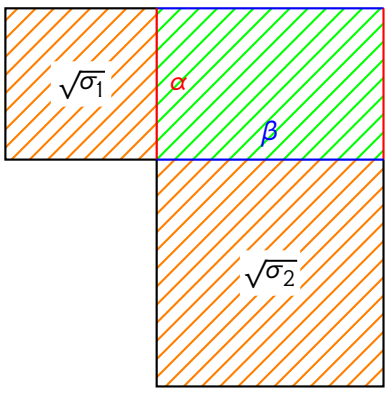
5. Διαγράμμιση εμβαδού ίδιας φοράς σημαίνει ρητό άθροισμα τετραγώνων.

6. Διαγράμμιση εμβαδού διαφορετικής φοράς σημαίνει μέσο άθροισμα τετραγώνων.

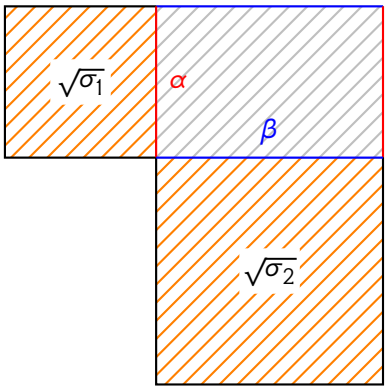
Επίσης στα παρακάτω σχήματα τα σ_1, σ_2 είναι στοιχεία του $\mathbb{Q}$ ενώ όπου εμφανίζεται ρίζα ισχύει $\sqrt{\sigma_1}$, $\sqrt{\sigma_2} \notin \mathbb{Q}$.



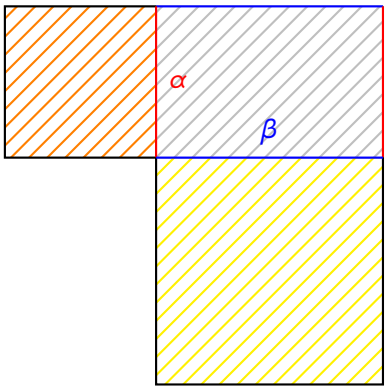
$\alpha+\beta$ διώνυμος



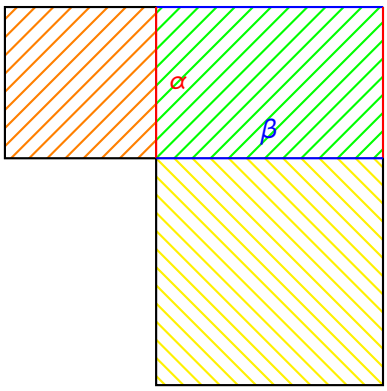
$\alpha+\beta$ πρώτος εκ δύο μέσων



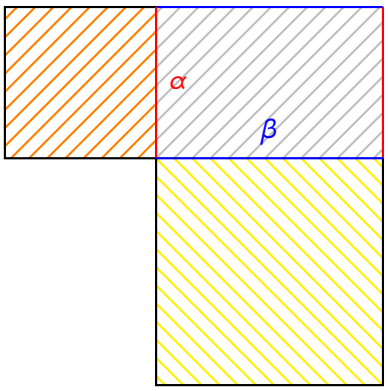
$\alpha + \beta$ δεύτερος εκ δύο μέσων



$\alpha + \beta$ μείζων



$\alpha+\beta$ πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού



$\alpha+\beta$ πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού

Από την επόμενη σελίδα επανερχόμαστε στην κανονική ροή του κειμένου των *Στοιχείων*.

Λήμμα 11 *Το ότι τα παραπάνω άλογα τμήματα διαιρούνται κατά μοναδικό τρόπο στα ευθύγραμμα τμήματα που τα σχημάτισαν, θα το αποδείξουμε παρακάτω με τη βοήθεια αυτού του λήμματος:*

Αν πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ *και το χωρίσουμε σε άνισα τμήματα με τα σημεία* Γ *και* Δ *ώστε* $\text{ΑΓ} > \text{ΔΒ}$, *ισχυρίζομαι ότι* $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 > \text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$.

Απόδειξη. Διότι ας τμηθεί στο μέσο το ΑΒ με το Ε. Επειδή $\text{ΑΓ} > \text{ΔΒ}$ ας αφαιρέσουμε και απο τα δύο μέλη το ΔΓ. Άρα το υπόλοιπο ΑΔ είναι μεγαλύτερο από το υπόλοιπο ΓΒ. Είναι όμως $\text{ΑΕ} = \text{ΕΒ}$, άρα $\text{ΔΕ} < \text{ΕΓ}$. Οπότε τα σημεία Γ, Δ δεν ισαπέχουν από το μέσο. Και επειδή $\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ} + \text{ΕΓ}^2 = \text{ΕΒ}^2$ (Β2, Π5, σελ. 63), αλλά $\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ} + \text{ΔΕ}^2 = \text{ΕΒ}^2$ (Β2, Π5, σελ. 63), συμπεραίνουμε ότι $\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ} + \text{ΕΦ}^2 = \text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ} + \text{ΔΕ}^2$ από όπου όμως $\text{ΔΕ}^2 < \text{ΕΓ}^2$. Άρα και το υπόλοιπο, $\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ} < \text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ}$. Έτσι $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ} < 2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ}$. Συνεπώς και το υπόλοιπο, δηλαδή το άθροισμα $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 > \text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 42 (671) *Ένα δυώνυμο ευθύγραμμο τμήμα χωρίζεται από ένα μόνο σημείο σε δύο μονώνυμα* (στμ: δηλαδή η ανάλυση του δυώνυμου στα μονώνυμά του είναι μοναδική).

Απόδειξη. Έστω το δυώνυμο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που διαιρείται από το Γ στα δύο μονώνυμα ΑΓ, ΓΒ που ειαι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΒ δεν διαιρείται από άλλο σημείο σε δυο ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα τμήματα.

Διότι έστω ότι είναι δυνατόν να διαιρεθεί έτσι από το Δ, οπότε τα ρητά ΑΔ και ΔΒ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα. Είναι φανερό ότι το ΑΓ δεν είναι ίσο με το ΔΒ. Διότι αν είναι τότε και $\text{ΑΔ} = \text{ΓΒ}$, και θα είναι $\text{ΑΓ}/\text{ΓΒ} = \text{ΒΔ}/\text{ΔΑ}$, το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση (στμ: ότι το Δ χωρίζει το ΑΒ σε δυο ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα τμήματα *άνισα* με τα τμήματα στα οποία το χωρίζει το Γ).

Έτσι $\text{ΑΓ} \neq \text{ΔΒ}$ οπότε οι αποστάσεις των Γ και Δ από το κέντρο του ΑΒ δεν είναι ίσες. Άρα όσο διαφέρει το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ από το $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ τόσο διαφέρει το $2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ}$ από το $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΔ}$, αφού

$$\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 + 2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ} = \text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2 + 2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ}$$

(Β2, Π4, σελ. 62). Αλλά η διαφορά του $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ από το $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ είναι ρητή αφού και τα δύο είναι ρητά εμβαδά. Άρα ρητή είναι και η διαφορά του $2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ}$ από το $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΔ}$, ενώ αυτά είναι μέσα (Π21, σελ. 245) το οποίο είναι άτοπο αφού μέσο εμβαδόν δεν υπερέχει μέσου κατά ρητό (Π26, σελ. 249).

Άρα το δυώνυμο ευθύγραμμο τμήμα διαιρείται κατά μόνο ένα τρόπο σε μονώνυμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

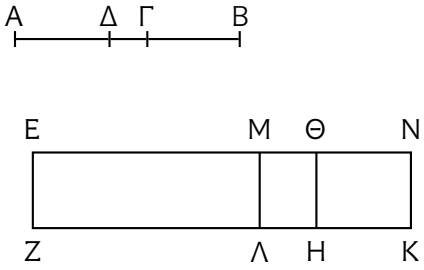
Πρόταση 43 (672) *Ο πρώτος εκ δύο μέσων διαιρείται με μοναδικό τρόπο στα δύο μονώνυμά του.*

Απόδειξη. Έστω ότι το ΑΒ είναι πρώτο εκ δύο μέσων και διαιρείται από το Γ στα μέσα ΑΓ και ΓΒ τα οποία είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα με το ΑΓ · ΓΒ ρητό. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΒ δεν διαιρείται έτσι από κανένα άλλο σημείο.

Διότι ας διαιρείται από το Δ ώστε τα ΑΔ, ΔΒ μέσα, δυνάμει μόνο σύμμετρα με ρητό ορθογώνιο. Όσο όμως διαφέρει το $2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ}$ από το $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ το ίδιο διαφέρει το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ από το $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ (Λήμμα, Π41, σελ. 263). Αλλά τα $2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ}$ και $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ είναι ρητά εμβαδά, άρα ρητή είναι και η διαφορά τους, άρα το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ διαφέρει από το $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ κατά ρητό· αλλά αυτά είναι μέσα, άτοπο (Π26, σελ. 249).

Δεν διαιρείται άρα το πρώτο εκ δύο μέσων με διαφορετικά σημεία στα μονώνυμά του· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 44 (672) *Ο δεύτερος εκ δύο μέσων διαιρείται με μοναδικό τρόπο στα δύο μονώνυμά του.*



Απόδειξη. Έστω ότι το Γ διαιρεί το δεύτερο εκ δύο μέσων ΑΒ στα ΑΓ, ΓΒ τα οποία είναι μέσα, δυνάμει μόνο σύμμετρα με μέσο ορθογώνιο. Φανερά το Γ δεν είναι το μέσο του ΑΒ, αφού τα ΑΓ, ΓΒ δεν είναι σύμμετρα. Ισχυρίζομαι ότι δεν διαιρείται από άλλο σημείο σε τμήματα με αυτές τις ιδιότητες.

Έστω ότι διαιρείται από το Δ ώστε η $\text{ΑΓ} > \text{ΔΒ}$. Είναι φανερό ότι

$$\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2 < \text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$$

(Λήμμα, Π41, σελ. 263), ενώ τα μέσα ΑΔ, ΔΒ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα με ορθογώνιο μέσο.

Θεωρούμε ΕΖ ρητό και με αυτή την πλευρά φτιάχνουμε ορθογώνιο, το ΕΚ, ισεμβαδικό με το ΑΒ^2 (ΒΙ, Π44, σελ. 46). Από αυτό δε, αφαιρούμε το ορθογώνιο ΕΗ ισεμβαδικό με το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$. Έτσι για το υπόλοιπο ισχύει $\text{ΘΚ} = 2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ (Β2, Π4, σελ. 62). Πάλι από το μεγαλύτερο $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 = \text{ΕΗ}$ ας αφαιρεθεί ορθογώνιο ίσο με το μικρότερο $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$, έστω το ΕΛ. Έτσι για το υπόλοιπο ΜΚ ισχύει $\text{ΜΚ} = 2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ}$.

Επειδή τώρα τα ΑΓ^2, ΓΒ^2 είναι μέσα, μέσο είναι και το ΕΗ, με πλευρά τη ρητή ΕΖ. Συνεπώς η ΕΘ είναι ρητή και κατά μήκος ασύμμετρη με την ΕΖ (Π22, σελ. 246). Για τους ίδιους λόγους και η πλευρά ΘΝ είναι ρητή και κατά μήκος ασύμμετρη με την ΕΖ. Η ΑΓ είναι κατά μήκος ασύμμετρη

με τη ΓΒ και ισχύει

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}}$$

(Λήμμα, Π21, σελ. 245). Άρα το ΑΓ^2 είναι ασύμμετρο με το ΑΓ · ΓΒ (ΠΙΙ, σελ. 236). Αλλά το ΑΓ^2 είναι σύμμετρο με το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$, αφού τα ΑΓ, ΓΒ είναι δυνάμει σύμμετρα και το ΑΓ · ΓΒ είναι σύμμετρο με το 2ΑΓ · ΓΒ (Π6, σελ. 232). Συμπεραίνουμε ότι το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 = \text{ΕΗ}$ είναι ασύμμετρο με το 2ΑΓ · ΓΒ = ΘΚ (ΠΙ3, σελ. 237). Άρα τα ΕΗ, ΘΚ είναι ασύμμετρα, και έτσι και η ΕΘ είναι ασύμμετρη με τη ΘΝ (Β6, ΠΙ, σελ. 142 και ΠΙΙ, σελ. 236). Είναι όμως και ρητά. Άρα τα ΕΘ, ΘΝ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα, άρα το άθροισμά τους είναι δυώνυμος (Π36, σελ. 259). Έτσι η δυώνυμος ΕΝ είναι διαιρεμένη με το Θ. Ομοίως όμως δείχνουμε ότι και τα ΕΜ, ΜΝ είναι ρητά και δυνάμει σύμμετρα. Οπότε η δυώνυμος ΕΝ είναι διαιρεμένη από δύο διαφορετικά σημεία σε μονώνυμα και δεν είναι ίση η ΕΘ με την ΜΝ διότι

$$\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 > \text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2 > 2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ}.$$

Κατά μείζονα λόγο

$$\text{ΕΗ} = \text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 > 2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ} = \text{ΜΚ},$$

οπότε ΕΘ > ΜΚ (Β6, ΠΙ, σελ. 142). Άρα ΕΘ ≠ ΜΝ· όπερ ἔδει δεῖξαι.

Δ

Πρόταση 45 (673) *Το μείζον διαιρείται με μοναδικό τρόπο στα δύο μονώνυμά του.*

Απόδειξη. Έστω ότι το ΑΒ είναι μείζον ευθύγραμμο τμήμα που διαιρείται από το Γ ώστε τα ΑΓ, ΓΒ είναι δυνάμει ασύμμετρα και σχηματίζουν ρητό άθροισμα τετραγώνων και ορθογώνιο μέσο. Ισχυρίζομαι ότι δεν διαιρείται με τέτοιο τρόπο η ΑΒ από άλλο σημείο.

Διότι αν διαιρείται από το Δ ώστε τα ΑΔ, ΔΒ να είναι δυνάμει ασύμμετρα με ρητό άθροισμα τετραγώνων και μέσο ορθογώνιο, όσο διαφέρει το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ από το $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ τόσο διαφέρει και το 2ΑΔ · ΔΒ από το 2ΑΓ · ΓΒ (Λήμμα, Π41, σελ. 263). Αλλά τα $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$, $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ είναι ρητά εμβαδά άρα και η διαφορά τους ρητή. Συνεπώς τα 2ΑΔ · ΔΒ, 2ΑΓ · ΓΒ διαφέρουν κατά ρητό εμβαδό ενώ και τα δύο είναι μέσα, πράγμα αδύνατο (Π26, σελ. 249).

Άρα ένα μείζον ευθύγραμμο τμήμα δεν διαιρείται από διαφορετικά σημεία· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

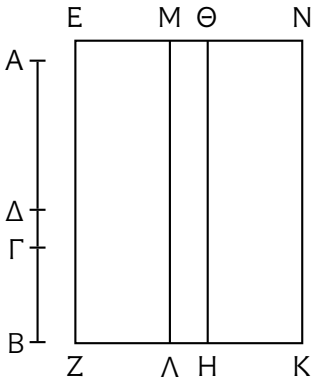
Πρόταση 46 (674) *Η πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού διαιρείται με μοναδικό τρόπο στα δύο μονώνυμά της.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ΑΒ είναι πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού διαιρεμένη με το Γ, ώστε τα ΑΓ, ΓΒ να είναι δυνάμει ασύμμετρα και να σχηματίζουν μέσο άθροισμα τετραγώνων και ορθογώνιο ρητό. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΒ δεν διαιρείται έτσι από κανένα άλλο σημείο.

Διότι αν αυτό γίνεται από το Δ ώστε τα ΑΔ, ΔΒ να είναι δυνάμει ασύμμετρα και να σχηματίζουν μέσο άθροισμα τετραγώνων και ορθογώνιο ρητό, όσο διαφέρει το $2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$ από το $2\text{ΑΔ}\cdot\text{ΔΒ}$ τόσο διαφέρει και το $\text{ΑΔ}^2+\text{ΔΒ}^2$ από το $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2$. Αλλά τα πρώτα διαφέρουν κατά ρητό εμβαδό γιατί είναι ρητά, άρα κατά ρητό διαφέρουν και τα δεύτερα. Όμως τα $\text{ΑΔ}^2+\text{ΔΒ}^2$, $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2$ είναι και τα δύο μέσα και άρα δεν γίνεται να διαφέρουν κατά ρητό (Π26, σελ. 249).

Συνεπώς η πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού διαιρείται με μοναδικό τρόπο στα δύο μονώνυμά της· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 47 (674) *Η πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού διαιρείται με μοναδικό τρόπο στα δύο μονώνυμά της.*



Απόδειξη. Έστω ότι το Γ χωρίζει το ΑΒ στα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ασύμμετρα με μέσο άθροισμα τετραγώνων και μέσο ορθογώνιο, και το $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2$ ασύμμετρο με το $\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΒ δεν διαιρείται με αυτο τον τρόπο από άλλο σημείο.

Διότι ας διαιρείται και από το Δ και ας υποθέσουμε ότι $\text{ΑΓ}>\text{ΔΒ}$. Θεωρούμε ρητή ΕΖ και σχηματίζουμε ορθογώνιο ΕΗ με πλευρά την ΕΖ και εμβαδόν ίσο με το $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2$, και ορθογώνιο ΘΚ ισεμβαδικό με το $2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$. Άρα όλο το ΕΚ είναι ισεμβαδικό με το ΑΒ^2 (Β2, Π4, σελ. 62).

Πάλι στην ΕΖ κατασκευάζουμε το ΕΛ ισεμβαδικό με το $\text{ΑΔ}^2+\text{ΔΒ}^2$, οπότε το υπόλοιπο, το ορθογώνιο $2\text{ΑΔ}\cdot\text{ΔΒ}$ είναι ισεμβαδικό με το υπόλοιπο ΜΚ. Αλλά το $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2$ είναι μέσο άρα και το ΕΗ. Αλλά έχει πλευρά του τη ρητή ΕΖ, συνεπώς η ΘΕ είναι ρητή και κατά μήκος ασύμμετρη με την ΕΖ.

Για τους ίδιους λόγους η πλευρά ΘΝ είναι ρητή και κατά μήκος ασύμμετρη με την ΕΖ. Και επειδή το $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2$ είναι ασύμμετρο με το ορθογώνιο $2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$, είναι και το ΕΗ ασύμμετρο με το ΗΝ, οπότε και η ΕΘ είναι ασύμμετρη με τη ΘΝ (Β6, ΠΙ, σελ. 142 και ΠΙΙ, σελ. 236). Αλλά αυτές είναι και ρητές. Άρα οι ρητές ΕΘ, ΘΝ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρες, οπότε η ΕΝ είναι δυώνυμος διαιρεμένη από το Θ (Π36, σελ. 259).

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι διαιρείται και από το Μ. Και η ΕΘ δεν είναι ίση με την ΜΝ. Άρα η δυώνυμος διαιρείται από δύο διαφορετικά σημεία, άτοπο.

Συνεπώς η πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού διαιρείται με μοναδικό τρόπο στα δύο μονώνυμά της. *Δ*

Στμ: Οι επόμενοι ορισμοί ξεκινούν λαμβάνοντας ένα ρητό μέγεθος, ισοδύναμα, καθορίζεται η ρητή μονάδα. Με δεδομένη λοιπόν τη ρητή μονάδα διαιρούνται οι δυώνυμοι σε 6 κλάσεις. Θέλουμε εδώ να τονίσουμε δηλαδή ότι δεν είναι σωστό να διαβαστούν οι παρακάτω ορισμοί σαν να λένε «για οποιοδήποτε ρητό και δυώνυμο...», αλλά πρώτα καθορίζεται η ρητή μονάδα και μετά ακολουθεί η κατηγοριοποίηση των διωνύμων. Στα παραδείγματά μας θα θεωρούμε ως ρητή μονάδα το 1. Όπως έχουμε δει, ένας δυώνυμος είναι της μορφής $\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}$. Η κατηγοριοποίηση γίνεται με βάση το αν ένα από τα σ_1 ή σ_2 είναι τετράγωνος και με βάση το αν η πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν $|\sigma_1 - \sigma_2|$, δηλαδή η ποσότητα $\sqrt{|\sigma_1 - \sigma_2|}$ είναι ή όχι σύμμετρη με το μεγαλύτερο από τα $\sqrt{\sigma_1}$, $\sqrt{\sigma_2}$.

Ας δούμε τους ορισμούς και θα επανέλθουμε στη συνέχεια με επεξηγήσεις.

Ορισμοί 2 (675)

(ορ. 1) Θεωρούμε ρητό, και δυώνυμο διαιρεμένο στα μονώνυμά του. Αν το τετράγωνο του μεγαλύτερου μονωνύμου υπερέχει του τετραγώνου του μικρότερου κατά τετράγωνο πλευράς σύμμετρης προς την πλευρά του μεγαλυτέρου και το μεγαλύτερο μονώνυμο είναι κατά μήκος σύμμετρο με το αρχικό ρητό, η δυώνυμος ονομάζεται *πρώτη δυώνυμος*.

(ορ. 2) Αν το μικρότερο μονώνυμο είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό, η δυώνυμος ονομάζεται *δεύτερη δυώνυμος*.

(ορ. 3) Αν κανένα από τα μονώνυμα δεν είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό, η δυώνυμος ονομάζεται *τρίτη δυώνυμος*.

(ορ. 4) Αν πάλι το τετράγωνο του μεγαλύτερου μονωνύμου υπερέχει του τετραγώνου του μικρότερου κατά τετράγωνο πλευράς ασύμμετρης προς την πλευρά του μεγαλυτέρου και το μεγαλύτερο μονώνυμο είναι κατά μήκος σύμμετρο με το αρχικό ρητό, η δυώνυμος ονομάζεται *τέταρτη δυώνυμος*.

(ορ. 5) Αν το μικρότερο μονώνυμο είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό, η δυώνυμος ονομάζεται *πέμπτη δυώνυμος*.

(ορ. 6) Αν κανένα από τα μονώνυμα δεν είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό, η δυώνυμος ονομάζεται *έκτη δυώνυμος*.

Στμ: Εφόσον θα έχει σημασία ότι το ένα από τα δύο μονώνυμα θα είναι μεγαλύτερο θα συμβολίσουμε τον γενικό δυώνυμο με $\sqrt{\rho}+\sqrt{\rho}\sqrt{1-\lambda}$ όπου ρ, $\lambda \in \mathbb{Q}$ και $0 < \lambda < 1$. Επιπλέον για να είναι δυώνυμος πρέπει να μονώνυμα να είναι μεταξύ τους ασύμμετρα άρα θα πρέπει να προσθέσουμε τη συνθήκη $\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$.

Επιλέγοντας ρητό το $\rho_0 = 1$ η συνθήκη $\sqrt{\rho}/\sqrt{\rho_0} \in \mathbb{Q}$ σημαίνει ότι ο ρ είναι τετράγωνο αριθμού του $\mathbb{Q}$.

Τέλος η πλευρά τετραγώνου με εμβαδό τη διαφορά του ρ και του $\rho(1-\lambda)$ είναι $\sqrt{\rho\lambda}$. Και ο λόγος της με τη μεγαλύτερη δυώνυμο είναι $\sqrt{\lambda}$.

Έτσι οι παραπάνω ορισμοί περιγράφουν τις εξής κατηγορίες (στα παρακάτω ρ, $\lambda \in \mathbb{Q}$ και $0 < \lambda < 1$):

πρώτη δυώνυμος $\boldsymbol{\rho + \rho\sqrt{1-\lambda}}$ με $\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Q}$.

Παράδειγμα: $\lambda = 4/9$, $\rho = 3$, δυώνυμος: $3 + \sqrt{5}$.

δεύτερη δυώνυμος $\boldsymbol{\rho + \rho/\sqrt{1-\lambda}}$ με $\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Q}$. Αυτή η μορφή προκύπτει επειδή τώρα στη μορφή $\sqrt{\rho}+\sqrt{\rho}\sqrt{1-\lambda}$ θα πρέπει το $\sqrt{\rho}\sqrt{1-\lambda}$ να είναι ρητός. Μετονομάζοντάς τον σε $\sigma \in \mathbb{Q}$ η αρχική μορφή γράφεται $\sigma/\sqrt{1-\lambda}+\sigma$ και μετονομάζοντας εκ νέου το σ σε ρ προκύπτει η γραφή $\rho + \rho/\sqrt{1-\lambda}$.

Παράδειγμα: $\lambda = 4/9$, $\rho = 5$, δυώνυμος: $5 + 3\sqrt{5}$.

τρίτη δυώνυμος $\boldsymbol{\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho}\sqrt{1-\lambda}}$ με $\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{\rho} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{\rho}\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$.

Παράδειγμα: $\lambda = 4/9$, $\rho = 18$, δυώνυμος: $3\sqrt{2} + \sqrt{10}$.

τέταρτη δυώνυμος $\boldsymbol{\rho + \rho\sqrt{1-\lambda}}$ με $\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{\lambda} \notin \mathbb{Q}$.

Παράδειγμα: $\lambda = 1/2$, $\rho = 2$, δυώνυμος: $2 + \sqrt{2}$.

πέμπτη δυώνυμος $\boldsymbol{\rho + \rho/\sqrt{1-\lambda}}$ με $\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{\lambda} \notin \mathbb{Q}$. Η αλλαγή της μορφής ομοίως με την δεύτερη δυώνυμο.

Παράδειγμα: $\lambda = 1/2$, $\rho = 1$, δυώνυμος: $1 + \sqrt{2}$.

έκτη δυώνυμος $\boldsymbol{\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho}\sqrt{1-\lambda}}$ με $\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{\lambda} \notin \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\rho} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{\rho}\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$.

Παράδειγμα: $\lambda = 1/2$, $\rho = 6$, δυώνυμος: $\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}$.

Προσοχή: οι παραπάνω τύποι ισχύουν εφόσον η ρητή μονάδα είναι $\rho_0 = 1$ ή οποιοδήποτε άλλο στοιχείο του $\mathbb{Q}$. Αν η ρητή μονάδα είναι της μορφής $\sqrt{\rho_0}$ με $\rho_0 \in \mathbb{Q}$ όλοι οι παραπάνω τύποι θα πολλαπλασιαστούν με $\sqrt{\rho_0}$. Για παράδειγμα, αν η ρητή μονάδα μας είναι ο $\sqrt{2}$ ο $3 + \sqrt{5}$ δεν είναι πρώτη δυώνυμος όπως γράψαμε παραπάνω, αλλά ο $3\sqrt{2} + \sqrt{5}\sqrt{2}$ είναι.

Αυτή η παρατήρηση είναι σημαντική για την κατανόηση της σύγχρονης απόδειξης των Προτάσεων 54 έως 65, σελ. 282 παρακάτω.

Στμ: Οι επόμενες έξι προτάσεις κατασκευάζουν *καθένα* από τα έξι είδη δυωνύμων, συνεπώς έτσι θα πρέπει να καταλάβουμε τις διατυπώσεις τους: ως κατασκευή της κλάσης καθεμιάς δυωνύμου και όχι μιας συγκεκριμένης. Σήμερα δηλαδή θα διατυπώναμε τις προτάσεις που ακολουθούν και λένε «να βρεθεί η X δυώνυμος» με τη φράση: «να κατασκευαστεί κάθε X δυώνυμος», όπου X «πρώτη», «δεύτερη», «τρίτη» «τέταρτη», «πέμπτη» ή «έκτη».

Πρόταση 48 (675) *Να βρεθεί η πρώτη δυώνυμος.*

Υλοποίηση: Στμ: Η κατασκευή που ακολουθεί κατασκευάζει τον πρώτο δυώνυμο $\rho + \rho\sqrt{1-\lambda}$ όπου ρ, $\lambda \in \mathbb{Q}$ με $0 < \lambda < 1$ και $\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$. Στην κατασκευή που ακολουθεί ρ είναι το ΕΖ, και $\lambda = \text{ΒΓ}/\text{ΑΒ}$.

Ας θεωρήσουμε δυο (φυσικούς) αριθμούς ΑΓ, ΓΒ ώστε το άθροισμά τους ΑΒ να έχει λόγο με το ΒΓ ίσο με λόγο τετράγωνου προς τετράγωνου (φυσικού) αριθμού αλλά όχι με το ΓΑ. Θεωρούμε δ τη ρητή μονάδα και έστω ΕΖ οποιοσδήποτε σύμμετρο με το δ ευθύγραμμο τμήμα. (Στμ: δηλαδή θεωρεί οποιονδήποτε $\text{ΕΖ} = \rho \in \mathbb{Q}$.) Θεωρούμε τμήμα ΖΗ ώστε να ισχύει $\text{ΒΑ}/\text{ΑΓ} = \text{ΕΖ}^2/\text{ΖΗ}^2$ (Πόρισμα, Π6, σελ. 232). Έτσι το ΕΖ^2 είναι σύμμετρο με το ΖΗ^2, αφού το $\text{ΒΑ}/\text{ΑΓ}$ είναι (φυσικός) αριθμός προς (φυσικό) αριθμό. Αφού ΕΖ ρητό είναι και το ΖΗ ρητό. Επειδή το $\text{ΒΑ}/\text{ΑΓ}$ δεν είναι τετράγωνος προς τετράγωνο τα ΕΖ και ΖΗ είναι ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Συνεπώς τα ΕΖ και ΖΗ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, άρα το ΕΗ είναι δυώνυμος (Π36, σελ. 259).

Ισχυρίζομαι ότι είναι πρώτη δυώνυμος. Πράγματι, αφού $\text{ΒΑ} > \text{ΑΓ}$ και $\text{ΒΑ}/\text{ΑΓ} = \text{ΕΖ}^2/\text{ΖΗ}^2$ θα είναι και $\text{ΕΖ}^2 > \text{ΖΗ}^2$ (Β5, Π14, σελ. 134). Θεωρούμε θ ώστε $\text{ΕΖ}^2 = \text{ΖΗ}^2 + \theta^2$. Από την ΒΑ?ΑΓ $= \text{ΕΖ}^2/\text{ΖΗ}^2$, κατ' αντιστροφή θα είναι $\text{ΑΒ}/\text{ΒΓ} = \text{ΕΖ}^2/\theta^2$ (Πόρισμά, Β5, Π19, σελ. 136). Ο ΑΒ προς τον ΒΓ όμως είναι τετράγωνος προς τετράγωνο, άρα και ο $\text{ΕΖ}^2/\theta^2$. Άρα τα ΕΖ, θ είναι κατά μήκος σύμμετρα (Π9, σελ. 233)· δηλαδή το ΕΖ^2 υπερέχει του ΖΗ^2 κατά τετράγωνο πλευράς σύμμετρης με την ΕΖ. Και είναι ρητά τα ΕΖ, ΖΗ και η ΕΖ σύμμετρη με την δ.

Άρα η δυώνυμος ΕΗ είναι πρώτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 49 (676) *Να βρεθεί η δεύτερη δυώνυμος.*

Υλοποίηση: Στμ: Η κατασκευή που ακολουθεί κατασκευάζει τη δεύτερη δυώνυμο $\rho + \rho(\sqrt{1-\lambda})^{-1}$ όπου ρ, $\lambda \in \mathbb{Q}$ με $0 < \lambda < 1$ και $\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$. Στην κατασκευή που ακολουθεί ρ είναι το ΕΖ και $\lambda = \text{ΒΓ}/\text{ΑΒ}$.

Ας πάρουμε δυο (φυσικούς) αριθμούς ΑΓ, ΓΒ ώστε το άθροισμά τους ΑΒ προς το ΒΓ να έχει λόγο όπως τετράγωνος (φυσικός) αριθμός προς τετράγωνο, αλλά προς το ΑΓ να μην έχει τέτοιο λόγο (Λήμμα, Π28, σελ. 250). Ας λάβουμε δ ρητή μονάδα και σύμμετρο με αυτή τμήμα ΕΖ, οπότε ΕΖ ρητό. Επιλέγουμε τώρα το Η ώστε $\text{ΓΑ}/\text{ΑΒ} = \text{ΕΖ}^2/\text{ΖΗ}^2$ (Πόρισμα, Π6, σελ. 232). Έτσι το ΕΖ^2 είναι σύμμετρο με το ΖΗ^2 (Π8, σελ. 233), οπότε και το ΖΗ είναι ρητό. Αλλά το ΓΑ προς το ΑΒ δεν έχει λόγο τετράγωνο προς τετράγωνο άρα ούτε και το ΕΖ^2 με το ΖΗ^2, δηλαδή τα ΕΖ, ΖΗ είναι κατά μήκος ασύμμετρα (Π9, σελ. 233)· άρα τα ΕΖ, ΖΗ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα. Οπότε το ΕΗ είναι δυώνυμος.

Θα δειχθεί ότι είναι και δεύτερη. Διότι επειδή ανάπαλιν είναι $\text{ΒΑ}/\text{ΑΓ} = \text{ΖΗ}^2/\text{ΖΕ}^2$ (Πόρισμα, Β5, Π7, σελ. 131) ισχύει ΒΑ > ΑΓ, άρα και $\text{ΗΖ}^2 > \text{ΖΕ}^2$ (Β5, Π14, σελ. 134). Έστω $\text{ΗΖ}^2 = \text{ΕΖ}^2 + \theta^2$ και με αντιστροφή (Πόρισμα, Β5, Π19, σελ. 136) ισχύει $\text{ΑΒ}/\text{ΒΓ} = \text{ΖΗ}^2/\theta^2$. Αλλά το ΑΒ προς το ΒΓ έχει λόγο τετραγώνων άρα και τα ΖΗ^2, θ^2, δηλαδή το ΖΗ είναι κατά μήκος σύμμετρο με το θ (Π9, σελ. 233)· οπότε το τετράγωνο του ΖΗ είναι μεγαλύτερο του θ^2 κατά τετράγωνο πλευράς σύμμετρης με αυτή (τη ΖΗ). Συνεπώς τα ρητά ΖΗ και ΖΕ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα και το μικρότερο μονώνυμο, το ΕΖ, είναι προς τη δ σύμμετρο.

Άρα το ΕΗ είναι δεύτερη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 50 (677) *Να βρεθεί η τρίτη δυώνυμος.*

Υλοποίηση: Στμ: Η κατασκευή που ακολουθεί κατασκευάζει την τρίτη δυώνυμο $\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho}\sqrt{1-\lambda}$ όπου ρ, $\lambda \in \mathbb{Q}$ με $0 < \lambda < 1$ και $\sqrt{\rho}$, $\sqrt{\rho(1-\lambda)}$, $\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$ αλλά $\sqrt{\rho - \rho(1-\lambda)} = \sqrt{\rho\lambda} \in \mathbb{Q}$. Στην κατασκευή που ακολουθεί ρ είναι το ΕΖ και $\lambda = \text{ΒΓ}/\text{ΑΒ}$.

Ας θεωρήσουμε δυο (φυσικούς) αριθμούς ΑΓ, ΓΒ ώστε το άθροισμά τους ΑΒ να έχει λόγο με το ΒΓ τετράγωνο (φυσικό) αριθμό προς τετράγωνο, αλλά αυτό να μη συμβαίνει με το ΑΓ. Ας θεωρήσουμε αριθμό δ που δεν είναι τετράγωνος. και που με τα ΒΑ, ΑΓ να μην έχει λόγο τετράγωνου προς τετράγωνο. Ας θεωρήσουμε επίσης ρητό ε και ΖΗ τμήμα ώστε $\delta/\text{ΑΒ} = \varepsilon^2/\text{ΖΗ}^2$ (Πόρισμα, Π6, σελ. 232). Άρα τα ε^2, ΖΗ^2 είναι σύμμετρα (Π6, σελ. 232) και αφού ε ρητό, ρητό είναι και το ΖΗ. Επειδή δε ο λόγος $\delta/\text{ΑΒ}$ δεν είναι λόγος τετράγωνων τα ε, ΖΗ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π9, σελ. 233).

Βρίσκουμε τώρα σημείο Θ ώστε να ισχύει $\text{ΒΑ}/\text{ΑΓ} = \text{ΖΗ}^2/\text{ΗΘ}^2$ (Πόρισμα, Π6, σελ. 232), τα ΖΗ^2, ΗΘ^2 είναι σύμμετρα (Π6, σελ. 232), το ΖΗ είναι ρητό, άρα ρητό είναι και το ΗΘ. Πάλι επειδή τα ΒΑ, ΑΓ δεν έχουν

λόγο τετραγώνων τα ΖΗ, ΗΘ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π9, σελ. 233). Συνεπώς το ΖΘ είναι δυώνυμος (Π36, σελ. 259).

Ισχυρίζομαι τώρα ότι είναι τρίτη δυώνυμος.

Διότι, επειδή $\delta/\text{ΑΒ} = \varepsilon^2/\text{ΖΗ}^2$ και $\text{ΒΑ}/\text{ΑΓ} = \text{ΖΗ}^2/\text{ΗΘ}^2$, δι' ίσου θα είναι $\delta/\text{ΑΓ} = \varepsilon^2/\text{ΗΘ}^2$ (Β5, Π22, σελ. 137). Το $\delta/\text{ΑΓ}$ δεν είναι λόγος τετράγωνων, άρα ούτε το $\varepsilon^2/\text{ΗΘ}^2$ δηλαδή τα ε, ΗΘ είναι κατά μήκος ασύμμετρα. Επειδή $\text{ΒΑ}/\text{ΑΓ} = \text{ΖΗ}^2/\text{ΗΘ}^2$ συμπεραίνουμε $\text{ΖΗ}^2 > \text{ΗΘ}^2$ (Β5, Π14, σελ. 134). Έστω λοιπόν $\text{ΖΗ}^2 = \text{ΗΘ}^2 + \kappa^2$. Με αντιστροφή (Πόρισμα, Β5, Π19, σελ. 136) της $\text{ΒΑ}/\text{ΑΓ} = \text{ΖΗ}^2/\text{ΗΘ}^2$ παίρνουμε $\text{ΑΒ}/\text{ΒΓ} = \text{ΖΗ}^2/\kappa^2$. Αλλά το $\text{ΑΒ}/\text{ΒΓ}$ είναι λόγος τετγώνων, άρα και το $\text{ΖΗ}^2/\kappa^2$, οπότε τα ΖΗ, κ είναι σύμμετρα. Έτσι το ΖΗ^2 υπερέχει του ΗΘ^2 κατά τετράγωνο πλευράς κ σύμμετρης με το ΖΗ. Και τα ΖΗ, ΗΘ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα και κανένα δεν είναι σύμμετρο με το ε.

Άρα η ΖΘ είναι τρίτη δυώνυμος· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 51 (678) *Να βρεθεί η τέταρτη δυώνυμος.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε δυο (φυσικούς) αριθμούς ΑΓ, ΓΒ ώστε το άθροισμα ΑΒ να μην έχει λόγο τετράγωνων ούτε με το ΒΓ ούτε με το ΑΓ. Και ας θεωρήσουμε ρητό δ και ως προς το δ κατά μήκος σύμμετρο ΕΖ· άρα ΕΖ ρητό. Θεωρούμε και Η ώστε $\text{ΒΑ}/\text{ΑΓ} = \text{ΕΖ}^2/\text{ΖΗ}^2$ (Πόρισμα, Π6, σελ. 232), άρα τα ΕΖ^2, ΑΗ^2 είναι σύμμετρα (Π6, σελ. 232). Έτσι και το ΖΗ είναι ρητό. Επειδή τώρα το $\text{ΒΑ}/\text{ΑΓ}$ δεν είναι λόγος τετράγωνων το ίδιο ισχύει για τα ΕΖ^2, ΖΗ^2, οπότε αυτά είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π9, σελ. 233). Συνεπώς το ΕΗ είναι δυώνυμος.

Ισχυρίζομαι ότι είναι και τέταρτη δυώνυμος.

Διότι επειδή $\text{ΒΑ}/\text{ΑΓ} = \text{ΕΖ}^2/\text{ΖΗ}^2$ θα είναι $\text{ΕΖ}^2 > \text{ΖΗ}^2$ (Β5, Π14, σελ. 134). Έστω τώρα θ ώστε $\text{ΕΖ}^2 = \text{ΖΗ}^2 + \theta^2$. Κατ' αντιστροφή τώρα $\text{ΑΒ}/\text{ΒΓ} = \text{ΕΖ}^2/\theta^2$. Αλλά ο λόγος $\text{ΑΒ}/\text{ΒΓ}$ δεν είναι λόγος τετράγωνων οπότε ούτε και ο $\text{ΕΖ}^2/\theta^2$. Έτσι τα ΕΖ, θ είναι ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Συνεπώς το ΕΖ^2 υπερέχει του ΗΖ^2 κατα τατράγωνο πλευράς θ ασύμμετρης με το ΕΖ. Και είναι τα ΕΖ, ΖΗ ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα και το ΕΖ είναι σύμμετρο με το δ.

Άρα η δυώνυμος ΕΗ είναι τέταρτη δυώνυμος· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 52 (678) *Να βρεθεί η πέμπτη δυώνυμος.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε δυο (φυσικούς) αριθμούς ΑΓ, ΓΒ ώστε το άθροισμά τους ΑΒ να μην έχει λόγο τετραγώνων με κανέναν από αυτούς (Λήμμα, Π28, σελ. 250), και ρητό ευθύγραμμο τμήμα δ και προς αυτό κατά μήκος σύμμετρο ΕΖ, οπότε ΕΖ ρητό. Και ας είναι $\text{ΓΑ}/\text{ΑΒ} = \text{ΕΖ}^2/\text{ΖΗ}^2$ (Πόρισμα, Π6, σελ. 232).

Έτσι, αφού ο λόγος ΓΑ/ΑΒ δεν είναι λόγος τετράγωνων ούτε και ο EZ^2/ZH^2 είναι, άρα τα EZ, ZH είναι δυνάμει μόνο σύμμετροι. Οπότε το EH είναι δυώνυμος (Π38, σελ. 260).

Ισχυρίζομαι ότι είναι πέμπτη δυώνυμος.

Διότι, αφού $ΓA/AB = EZ^2/ZH^2$, άρα και $BA/AΓ = ZH^2/ZE^2$ (Πόρισμα, Β5, Π7, σελ. 131), οπότε $HZ^2 > ZE^2$ (Β5, Π14, σελ. 134). Έστω λοιπόν οι $HZ^2 = EZ^2 + \theta^2$, και με αντιστροφή $AB/BΓ = HZ^2/\theta^2$ (Πόρισμα, Β5, Π19, σελ. 136). Αλλά ο λόγος AB/BΓ δεν είναι λόγος τετράγωνων, άρα ούτε και ο HZ^2/θ^2, οπότε το ZH είναι ασύμμετρο με το θ (Π9, σελ. 233). Συνεπώς το ZH^2 υπερέχει του ZE^2 κατά τετράγωνο πλευράς θ ασύμμετρης με την ZH. Και είναι ρητά τα HZ, ZE, δυνάμει μόνο σύμμετρα και το μικρότερο EZ είναι κατά μήκος σύμμετρο με το ρητό δ.

Άρα το EH είναι πέμπτη δυώνυμος· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 53 (679) *Να βρεθεί η έκτη δυώνυμος.*

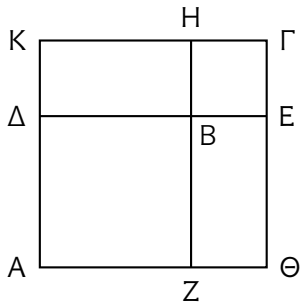
Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε δυο (φυσικούς) αριθμούς ΑΓ, ΓΒ ώστε το άθροισμά τους ΑΒ να μην έχει λόγο τετραγώνων με κανέναν από αυτούς (Λήμμα, Π28, σελ. 250), και αριθμό δ που δεν είναι τετράγωνος ούτε έχει λόγο με τα ΒΑ, ΑΓ ίσο με λόγο τετράγωνων. Ας θεωρήσουμε ρητό ε και ZH ώστε $\delta/AB = \varepsilon^2/ZH^2$ (Πόρισμα, Π6, σελ. 232). Άρα τα ε^2, ZH^2 είναι σύμμετρα (Π6, σελ. 232). Το ε είναι ρητό, άρα και το ZH. Και αφού ο λόγος δ/AB δεν είναι λόγος τετράγωνων ούτε και ο ε^2/ZH^2 είναι, άρα τα ε, ZH είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π9, σελ. 233). Βρίσκουμε Θ ώστε $BA/AΓ = ZH^2/HΘ^2$ (Πόρισμα, Π6, σελ. 232). Άρα τα ZH^2, $HΘ^2$ είναι σύμμετρα οπότε το $ΘH^2$ είναι ρητό εμβαδό, άρα και το ΘH είναι ρητό. Αλλά ο λόγος $BA/AΓ$ δεν είναι λόγος τετράγωνων οπότε ούτε και ο $ZH^2/HΘ^2$, και έτσι τα ZH, HΘ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π9, σελ. 233), και έτσι το ZΘ είναι δυώνυμος.

Πρέπει να αποδειχθεί ότι είναι έκτη δυώνυμος.

Διότι επειδή $\delta/AB = \varepsilon^2/ZH^2$ και $BA/AΓ = ZH^2/HΘ^2$, δι' ίσου θα είναι $\delta/AΓ = \varepsilon^2/HΘ^2$ (Π22, σελ. 137). Ο δε λόγος $\delta/AΓ$ δεν είναι λόγος τετράγωνων, άρα ούτε και ο $\varepsilon^2/HΘ^2$ οπότε το ε είναι ασύμμετρο με το HΘ (Π9, σελ. 233). Αλλά είναι ασύμμετρο και με το ZH. Δηλαδή καθένα από τα ZH, HΘ είναι κατά μήκος ασύμμετρο με το ε. Αφού τώρα $BA/AΓ = ZH^2/HΘ^2$ έχουμε ότι $ZH^2 > HΘ^2$ (Β5, Π14, σελ. 134). Ας είναι κ ώστε $ZH^2 = HΘ^2 + \kappa^2$ και κατ' αναστροφή από την $BA/AΓ = ZH^2/HΘ^2$ θα ισχύει $AB/BΓ = ZH^2/\kappa^2$ (Πόρισμα, Β5, Π19, σελ. 136). Πάλι, ο λόγος AB/BΓ δεν είναι λόγος τετράγωνων οπότε ούτε και ο λόγος ZH^2/κ^2, άρα τα ZH, κ είναι ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Έτσι το ZH^2 υπερέχει του $HΘ^2$ κατά τετράγωνο πλευράς κ που είναι ασύμμετρη με το ZH. Και τα ZH, HΘ είναι ρητά, δυνάμει μόνο σύμμετρα και κανένα από αυτά δεν είναι σύμμετρο με το ρητό ε.

Άρα το ZΘ είναι έκτη δυώνυμος· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Λήμμα 12 *Έστω δύο τετράγωνα, τα* ΑΒ, ΒΓ *και ας είναι στην ίδια ευθεία τα* ΔΒ, ΒΕ· *άρα είναι στην ίδια ευθεία τα* ΖΒ, ΒΗ. *Και ας συμπληρωθεί το παραλληλόγραμμο* ΑΓ. *Ισχυρίζομαι ότι το* ΑΓ *είναι τετράγωνο και ότι το* ΔΗ *είναι μέσο ανάλογο των* ΑΒ, ΒΓ, *και ακόμη ότι το* ΔΓ *είναι μέσο ανάλογο των* ΑΓ, ΓΒ.



Απόδειξη. Διότι, επειδή ΔΒ = ΒΖ και ΒΕ = ΒΗ, έπεται ΔΕ = ΖΗ. Αλλά η ΔΕ είναι ίση με καθεμιά εκ των ΑΘ, ΚΓ η δε ΖΗ είναι ίση με καθεμιά εκ των ΑΚ, ΘΓ (Β1, Π34, σελ. 41)· και καθεμιά των ΑΘ, ΚΓ είναι ίση προς καθεμιά εκ των ΑΚ, ΘΓ. Άρα το παραλληλόγραμμο ΑΓ είναι ισόπλευρο. Είναι δε και ορθογώνιο, άρα το ΑΓ είναι τετράγωνο.

Και επειδή ΖΒ/ΒΗ = ΔΒ/ΒΕ αλλά ΖΒ/ΒΗ = ΑΒ/ΔΗ, και ΔΒ/ΒΕ = ΔΗ/ΒΓ, άρα ΑΒ/ΔΗ = ΔΗ/ΒΓ (Β6, Π1, σελ. 142). Άρα το ΔΗ είναι μέσο ανάλογο των ΑΒ, ΒΓ.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι το ΔΓ είναι μέσο ανάλογο των ΑΓ, ΓΒ. Διότι επειδή ΑΔ/ΔΚ = ΚΗ/ΗΓ, διότι είναι ίση καθεμιά προς καθεμιά αντιστοίχως· και με σύνθεση (Β5, Π18, σελ. 135) ισχύει ΑΚ/ΚΔ = ΚΓ/ΓΗ, αλλά ΑΚ/ΚΔ = ΑΓ/ΓΔ και ΚΓ/ΓΗ = ΔΓ/ΓΒ. Συνεπώς ΑΓ/ΔΓ = ΔΓ/ΒΓ. Έτσι, το ΔΓ είναι μέσο ανάλογο των ΑΓ, ΓΒ όπως ήταν να δειχθεί. *Δ*

Πρόταση 54 (680) *Η πλευρά τετραγώνου ισεμβαδικού με ορθογώνιο με τη μία πλευρά ρητή και τη άλλη πρώτη δυωνύμη είναι η άλογη που ονομάσαμε δυώνυμη.*

Στμ: προσοχή στο ότι η ρητή πλευρά είναι η ρητή βάσει της οποίας ορίζεται η δυώνυμη. Άρα αν η δυώνυμη γραφτεί στη μορφή $\rho + \rho\sqrt{1-\lambda}$ με ρ, λ, $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$, τότε το ρ πρέπει να είναι σύμμετρο με τη ρητή πλευρά. Δεν είναι σωστό δηλαδή να θεωρήσουμε τη δυώνυμη ανεξάρτητα ορισμένη από τη ρητή πλευρά του ορθογωνίου. Αλλιώς αν η ρητή είναι ίση με 1 η δυώνυμη μπορεί να είναι η $1+\sqrt{1-1/4}$, ενώ αν η ρητή πλευρά είναι η $\sqrt{5}$ η δυώνυμη μπορεί να είναι η $2\sqrt{5}+2\sqrt{5}\sqrt{1-1/4}$. Πράγματι η τελευταία παράσταση είναι πρώτη δυώνυμη, αφού τώρα η ρητή που έχει καθοριστεί είναι η $\sqrt{5}$ και το $2\sqrt{5}$ είναι πράγματι σύμμετρο με το $\sqrt{5}$ όπως προβλέπει ο ορισμός της πρώτης δυωνύμου.

Αυτό μας επιτρέπει στη «σύγχρονη» απόδειξη να πάρουμε τη ρητή πλευρά ίση με 1. Το ίδιο σχόλιο ισχύει και στις επόμενες προτάσεις που ασχολούνται με παρόμοια θέματα.

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Επιλέγοντας ΑΒ = 1, η πρώτη δυώνυμη ΑΔ είναι της μορφής $\rho+\rho\sqrt{1-\lambda}$ όπου ρ_0, λ, $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Q}$ και $0 < \lambda < 1$ με $\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$. Άρα η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου με το ορθογώνιο ΑΒ × ΑΔ έχει

μήκος

$$\sqrt{\rho+\rho\sqrt{1-\lambda}}=\sqrt{\rho}\sqrt{1+\sqrt{1-\lambda}}.$$

Αυτή η τελευταία ποσότητα πρέπει να αποδειχθεί ότι είναι άλογη δυώνυμη. Αλλά αυτό προκύπτει εύκολα αφού ελέγξουμε ότι

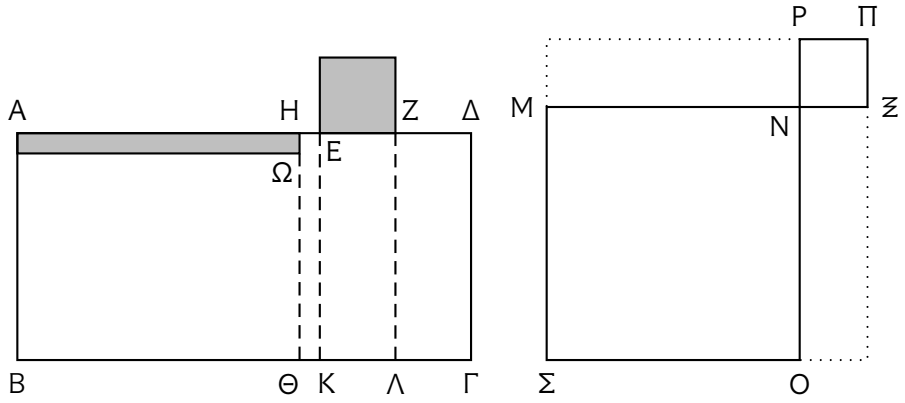
$$\sqrt{1+\sqrt{1-\lambda}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{\lambda}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{\lambda}},$$

και παρατηρήσουμε ότι από την υπόθεση προκύπτει $\rho+\rho\sqrt{\lambda}, \rho-\rho\sqrt{\lambda}\in\mathbb{Q}$ καθώς και ότι

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}}}=\sqrt{\frac{1-\lambda}{(1-\sqrt{\lambda})^2}}\notin\mathbb{Q},$$

αφού $\sqrt{\lambda}\in\mathbb{Q}$ και $\sqrt{1-\lambda}\notin\mathbb{Q}$. ∎

«πρωτότυπη»: Ας έχει το ορθογώνιο ΑΓ ρητή πλευρά την ΑΒ και πρώτη δυώνυμη την ΑΔ. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου είναι η άλογη που ονομάσαμε δυώνυμη.



Διότι, επειδή η ΑΔ είναι δυώνυμη ας διαιρεθεί στα μονώνυμά της από το σημείο Ε, και ας είναι $\mathrm{AE}>\mathrm{E\Delta}$. Φανερά τα ρητά ΑΕ, ΕΔ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα και το ΑΕ σύμμετρο με το $\sqrt{\mathrm{AE}^2-\mathrm{E\Delta}^2}$, και το ΑΕ σύμμετρο με το ρητό ΑΒ (Ορι, σελ. 276).

Χωρίζουμε την ΕΔ με το μέσο του Ζ. Επειδή το AE^2 υπερέχει του $\mathrm{E\Delta}^2$ κατά τετράγωνο πλευράς σύμμετρης προς αυτήν (δηλαδή τα ΑΕ, $\sqrt{\mathrm{AE}^2-\mathrm{E\Delta}^2}$ είναι σύμμετρα), άρα αν κατασκευαστεί στην μεγαλύτερη, την ΑΕ, παραλληλόγραμμο ισεμβαδικό με το ένα τέταρτο του τετραγώνου της μικρότερης, δηλαδή με εμβαδόν $\mathrm{E\Delta}^2/4=\mathrm{EZ}^2$, από το οποίο να λείπει σχήμα τετράγωνο, αυτό διαιρεί την ΑΕ σε μέρη σύμμετρα (ΠΙ7, σελ. 239). Ας κατασκευαστεί λοιπόν στην ΑΕ το ορθογώνιο με μία πλευρά το ΑΗ

και την άλλη πλευρά ίση με ΗΕ. Δηλαδή $\text{ΑΗ}\cdot\text{ΗΕ} = \text{ΕΖ}^2$ και η ΑΗ είναι σύμμετρη με την ΗΕ. Φέρνουμε από τα Η, Ε, Ζ παράλληλες προς τις ΑΒ, ΓΔ, τις ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ. Και ας κατασκευαστεί τετράγωνο ΣΝ ισεμβαδικό με το παραλληλόγραμμο ΑΘ και τετράγωνο ΝΠ ισεμβαδικό με το ΗΚ (Β2, Π14, σελ. 75), και ας είναι συνευθειακά τα ΜΝ, ΝΞ καθώς και τα ΡΝ, ΝΟ. Ας συμπληρωθεί και το παραλληλόγραμμο ΣΠ, οπότε το ΣΠ είναι τετράγωνο (Λήμμα, Π53, σελ. 281).

Αλλά $\text{ΑΗ}\cdot\text{ΗΕ} = \text{ΕΖ}^2$ και άρα ΑΗ/ΕΖ = ΖΕ/ΕΗ (Β6, Π7, σελ. 147), άρα και |ΑΘ|/|ΕΛ| = |ΕΛ|/|ΚΗ| (Β6, Π1, σελ. 142), άρα το |ΕΛ| είναι μέσο ανάλογο των |ΑΘ|, |ΗΚ|. Όμως |ΑΘ| = |ΣΝ| και |ΗΚ| = |ΝΠ|, οπότε το |ΕΛ| είναι μέσο ανάλογο των |ΣΝ|, |ΝΠ|. Αλλά είναι και το |ΜΡ| (Λήμμα, Π53, σελ. 281). Συνεπώς |ΕΛ| = |ΜΡ| οπότε και |ΕΛ| = |ΟΞ| (Β1, Π43, σελ. 45). Αλλά είναι και |ΑΘ| + |ΗΚ| = |ΣΝ| + |ΝΠ|. Δηλαδή |ΑΓ| = |ΣΠ| = ΜΞ^2. Άρα το τετράγωνο του ΜΞ είναι ισεμβαδικό με το ΑΓ.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι το ΜΞ είναι δυώνυμο.

Διότι επειδή η ΑΗ είναι σύμμετρη με την ΗΕ, είναι και η ΑΕ σύμμετρη με καθεμιά εκ των ΑΗ, ΗΕ (Π15, σελ. 238). Αλλά από την υπόθεση και τα ΑΕ, ΑΒ είναι σύμμετρα, άρα και τα ΑΗ, ΗΕ είναι σύμμετρα με το ΑΒ (Π12, σελ. 236). Το ΑΒ είναι ρητό άρα ρητά είναι και τα ΑΗ, ΗΕ, οπότε είναι ρητά και τα |ΑΘ|, |ΗΚ| (Π19, σελ. 242), και είναι σύμμετρο το |ΑΘ| με το |ΗΚ|. Αλλά |ΑΘ| = |ΣΝ| και |ΗΚ| = |ΝΠ|· άρα και τα |ΣΝ|, |ΝΠ|, δηλαδή τα ΜΝ^2, ΝΞ^2 είναι ρητά και σύμμετρα. Επειδή το ΑΕ είναι ασύμμετρο με το ΕΔ αλλά η ΑΕ είναι σύμμετρο με το ΑΗ και η ΔΕ είναι σύμμετρο με το ΕΖ, άρα και το ΑΗ είναι ασύμμετρο με το ΕΖ (Π13, σελ. 237). Οπότε και το |ΑΘ| είναι ασύμμετρο με το |ΕΛ| (Β6, Π1, σελ. 142 και Π11, σελ. 236). Αλλά |ΑΘ| = |ΣΝ| και |ΕΛ| = |ΜΡ|, άρα το |ΣΝ| είναι ασύμμετρο με το |ΜΡ|. Αλλά |ΣΝ|/|ΜΡ| = |ΟΝ|/|ΝΡ| (Β6, Π1, σελ. 142)· άρα το ΟΝ είναι ασύμμετρο με το ΝΡ. (Π11, σελ. 236). Είναι και ΟΝ = ΜΝ και ΝΡ = ΝΞ· άρα το ΜΝ είναι ασύμμετρο με το ΝΞ. Και το ΜΝ^2 είναι σύμμετρο με το ΝΞ^2 και είναι και ρητά. Έτσι τα ρητά ΜΝ, ΝΞ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα.

Το ΜΞ λοιπόν είναι δυώνυμο και το τετράγωνό του είναι ισεμβαδικό με το ΑΓ· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 55 (682) *Αν ένα ορθογώνιο έχει τη μια του πλευρά ρητή και την άλλη δεύτερη δυώνυμη τότε η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου είναι η άλογη που ονομάσαμε εκ δύο μέσων πρώτη.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Χωρίς βλάβη της γενικότητας (δείτε σημείωση πριν την Π54, σελ. 282) η ρητή πλευρά είναι 1 οπότε η 2η δυώνυμος είναι της μορφής $\rho_0 + \rho_0/\sqrt{1-\lambda}$ με ρ_0, λ, $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$. Πρέπει

έτσι να δείξουμε ότι ο αριθμός

$$\sqrt{\rho_0 + \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\lambda}}} = \sqrt{\rho_0}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}}$$

είναι εκ δύο μέσων πρώτη. Αυτό προκύπτει αμέσως αφού ελέγξουμε την ταυτότητα

$$\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}}} = \sqrt[4]{\sigma} + \frac{\rho}{\sqrt[4]{\sigma}},$$

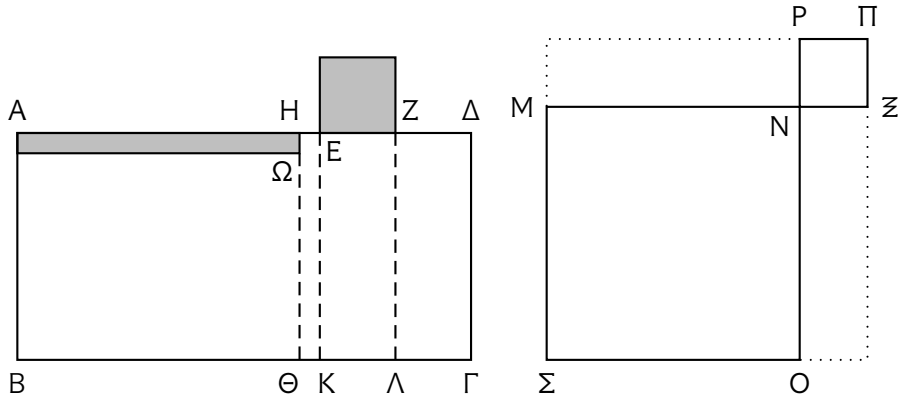
με $\rho = 1/2$ και

$$\sigma = \frac{1}{4}\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}} \in \mathbb{Q} \text{ (αφού } \sqrt{\lambda} \in \mathbb{Q})$$

και $\sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$ (δείτε Πίνακα σελίδα 269). ∎

«πρωτότυπη»: Διότι ας περιέχεται το χωρίο ΑΒΓΔ υπό της ρητής ΑΒ και της δεύτερης δυωνύμου ΑΔ. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά ισεμβαδικού με το ΑΓ τετραγώνου είναι πρώτη εκ των δύο μέσων.

Διότι, επειδή η ΑΔ είναι δεύτερη δυώνυμη, ας διαιρεθεί αυτή στα μονώνυμά της από το σημείο Ε, ώστε το μεγαλύτερο μονώνυμο να είναι το ΑΕ. Οπότε ρητά είναι τα ΑΕ και ΕΔ και δυνάμει μόνο σύμμετρα, ενώ η ΑΕ είναι σύμμετρη με την $\sqrt{\text{ΑΕ}^2 - \text{ΕΔ}^2}$, και το μικρότερο μονώνυμο ΕΔ είναι σύμμετρο με το ΑΒ. Έστω ότι το Ζ είναι το μέσο του ΕΔ και ας κατασκευαστεί στην ΑΕ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών τα ΑΗ και ΗΕ ώστε να είναι ισεμβαδικό με το ΕΖ^2 από το οποίο ορθογώνιο να λείπει τετράγωνο σχήμα (στμ: δηλαδή το ΑΩ είναι ισεμβαδικό με το ΕΖ^2 και ΗΕ = ΗΩ). Έτσι η ΑΗ είναι σύμμετρη με την ΗΕ (ΠΙ7, σελ. 239).



Από τα Η, Ε, Ζ φέρνουμε παράλληλες στην ΑΒ, τις ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ. Για το παραλληλόγραμμο ΑΘ κατασκευάζουμε ισεμβαδικό τετράγωνο, το ΣΝ και

για το παραλληλόγραμμο ΗΚ κατασκευάζουμε ισεμβαδικό τετράγωνο ΝΠ ώστε να είναι στην ίδια ευθεία τα ΜΝ και ΝΞ καθώς και τα ΡΝ και ΝΟ. Συμπληρώνουμε και το τετράγωνο ΣΠ. Φανερά από τα προηγούμενα (Λήμμα, Π53, σελ. 281) το μέσο ΜΡ είναι μέσο ανάλογο των ΣΝ, ΝΠ και ισεμβαδικό με το ΕΛ (Π54, σελ. 282), και ότι $\text{ΜΞ}^2 = \text{ΑΓ}$ (Π54, σελ. 282). Μένει να δειχθεί ότι η ΜΞ είναι πρώτη εκ δύο μέσων.

Επειδή η ΑΕ είναι ασύμμετρη με την ΕΔ και η ΕΔ είναι σύμμετρη με την ΑΒ έπεται ότι η ΑΕ είναι ασύμμετρη με την ΑΒ (Π13, σελ. 237). Και επειδή η ΑΗ είναι σύμμετρη με την ΗΕ είναι και η ΑΕ σύμμετρη με καθεμιά από της ΑΗ, ΗΕ (Π15, σελ. 238). Συνεπώς τα ΑΗ, ΕΗ είναι ασύμμετρα με την ΑΒ (Π13, σελ. 237). Έτσι τα ΑΒ, ΑΗ, ΗΕ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα, οπότε καθένα από τα ΑΘ, ΗΚ είναι μέσο (Π21, σελ. 245). Άρα καθένα από τα ΣΝ, ΝΠ είναι μέσο και έτσι τα ΜΝ, ΝΞ είναι μέσα. Επειδή η ΑΗ είναι ασύμμετρη με την ΗΕ είναι σύμμετρο και το ΑΘ με το ΗΚ δηλαδή το ΣΝ με το ΝΠ. Οπότε και το ΜΝ^2 με το ΝΞ^2 (δηλαδή τα ΜΝ, ΝΞ είναι δυνάμει σύμμετρα (Β6, ΠΙ, σελ. 142 και ΠΙΙ, σελ. 236)).

Τώρα, η ΑΕ είναι ασύμμετρη με την ΕΔ, η ΑΕ σύμμετρη με την ΑΗ και η ΕΔ σύμμετρη με την ΕΖ, άρα η ΑΗ είναι ασύμμετρη με την ΕΖ (Π13, σελ. 237). Άρα αι το ΑΘ είναι ασύμμετρο με το ΕΛ, δηλαδή το ΣΝ με το ΜΡ, δηλαδή η ΟΝ με την ΝΡ, και άρα ασύμμετρα είναι τα ΜΝ και ΝΞ (Β6, ΠΙ, σελ. 142 και ΠΙΙ, σελ. 236). Συμπεραίνουμε ότι τα ΜΝ, ΝΞ είναι μέσα, δυνάμει μόνο σύμμετρα.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι το ορθογώνιό τους είναι ρητό. Από την υπόθεση η ΔΕ είναι σύμμετρη με καθεμιά από τις ΑΒ, ΕΖ οπότε η ΕΖ είναι σύμμετρη με την ΕΚ. Και καθεμιά τους είναι ρητή, άρα είναι ρητό το ΕΑ, οπότε και το ΜΡ (Π14, σελ. 237). Αλλά $\text{ΜΡ} = \text{ΜΝ} \cdot \text{ΝΞ}$.

Αλλά αν δυο μέσα δυνάμει μόνο σύμμετρα τμήματα προστεθούν και περιέχουν ρητό ορθογώνιο το άθροισμά τους είναι η άλογη πρώτη εκ δύο μέσων.

Η ΜΞ λοιπόν είναι πρώτη εκ δύο μέσων· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 56 (682) *Αν ένα ορθογώνιο έχει τη μια του πλευρά ρητή και την άλλη τρίτη δυώνυμη τότε η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου είναι η άλογη που ονομάσαμε εκ δύο μέσων δεύτερη.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Χωρίς βλάβη της γενικότητας (δείτε σημείωση πριν την Π54, σελ. 282) η ρητή πλευρά είναι 1 οπότε η 3η δυώνυμος είναι της μορφής $\sqrt{\rho_0} + \sqrt{\rho_0}\sqrt{1-\lambda}$ με ρ_0, λ, $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\rho_0}$, $\sqrt{1-\lambda}$, $\sqrt{\rho_0}\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$. Πρέπει έτσι να δείξουμε ότι ο αριθμός

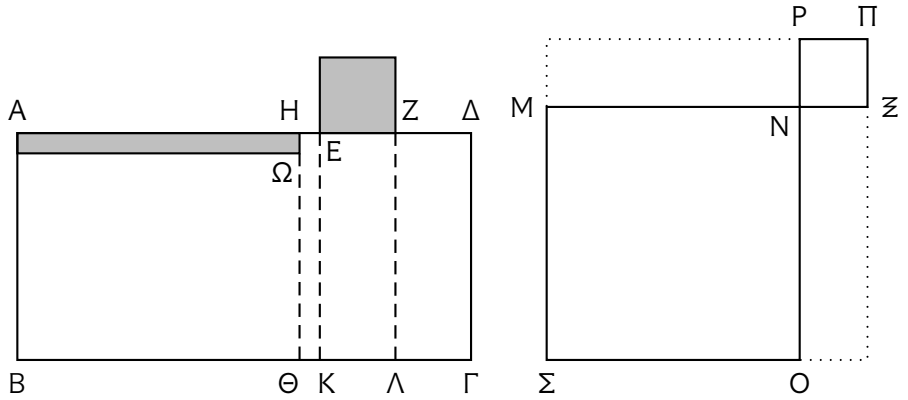
$$\sqrt{\sqrt{\rho_0} + \sqrt{\rho_0}\sqrt{1-\lambda}} = \sqrt[4]{\rho_0}\sqrt{1+\sqrt{1-\lambda}}$$

είναι εκ δύο μέσων δεύτερη. Αυτό προκύπτει αμέσως αφού ελέγξουμε την ταυτότητα

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\lambda}} = \sqrt[4]{(1+\sqrt{\lambda})^2/4} + \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{\lambda})^2/4}}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}}}} = \sqrt[4]{\sigma} + \frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{\rho}}$$

με $\rho = (1+\sqrt{\lambda})/(1-\sqrt{\lambda}) \in \mathbb{Q}$ και $\sigma = (1+\sqrt{\lambda})^2/4 \in \mathbb{Q}$, αφού $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Q}$) και $\sqrt{\sigma}$, $\sqrt{\rho}$, $\sqrt{\sigma/\rho} \notin \mathbb{Q}$ (δείτε Πίνακα σελίδα 269). ∆

«πρωτότυπη»: Ας είναι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ρητή την ΑΒ και τρίτη δυώνυμο την ΑΔ διαιρεμένη στα μονώνυμά της από το σημείο Ε με μεγαλύτερο το ΑΕ. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά τετραγώνου ισεμβαδικού με το ΑΓ είναι η άλογη που ονομάσαμε δεύτερη εκ δύο μέσων.



Διότι ας γίνει η ίδια κατασκευή με την προηγούμενη πρόταση. Επειδή η δυώνυμος ΑΔ είναι τρίτη δυώνυμος, τα ρητά ΑΕ, ΕΔ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα και η ΑΕ σύμμετρη με το $\sqrt{\text{ΑΕ}^2 - \text{ΕΔ}^2}$, και καμιά από τις ΑΕ, ΕΔ δεν είναι σύμμετρη με την ΑΒ. Με τον ίδιο τρόπο όπως στα προηγούμενα θεωρήματα δείχνουμε ότι $\text{ΜϺ}^2 = |\text{ΑΓ}|$ και ότι τα μέσα ΜΝ, ΝϺ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα. Οπότε το ΜϺ αποτελείται από δύο μέσα τμήματα.

Πρέπει να δειχθεί ότι είναι και δεύτερη εκ δύο μέσων.

Επειδή η ΔΕ είναι ασύμμετρη με την ΑΒ, και άρα με την ΕΚ, είναι και η ΔΕ σύμμετρη με την ΕΖ, άρα η ΕΖ είναι ασύμμετρη με την ΕΚ (ΠΙ3, σελ. 237). Και είναι και ρητές, άρα οι ΖΕ, ΕΚ είναι ρητές και δυνάμει μόνο σύμμετρες. Άρα το ΕΛ, δηλαδή τ ο ΜΡ είναι μέσο, και περιέχεται στις ΜΝ και ΝϺ, άρα το $\text{ΜΝ} \cdot \text{ΝϺ}$ είναι μέσο.

Η ΜϺ είναι δεύτερη εκ δύο μέσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ∆

Πρόταση 57 (683) *Αν ένα ορθογώνιο έχει τη μια του πλευρά ρητή και την άλλη τέταρτη δυώνυμη τότε η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου είναι η άλογη που ονομάσαμε μείζων.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Χωρίς βλάβη της γενικότητας (δείτε σημείωση πριν την Π54, σελ. 282) η ρητή πλευρά είναι 1 οπότε η 4η δυώνυμος είναι της μορφής $\sqrt{\rho_0}+\sqrt{\rho_0}\sqrt{1-\lambda}$ με ρ_0, $\lambda\in\mathbb{Q}$ με $0<\lambda<1$, και $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{1-\lambda}\notin\mathbb{Q}$. Πρέπει έτσι να δείξουμε ότι ο αριθμός

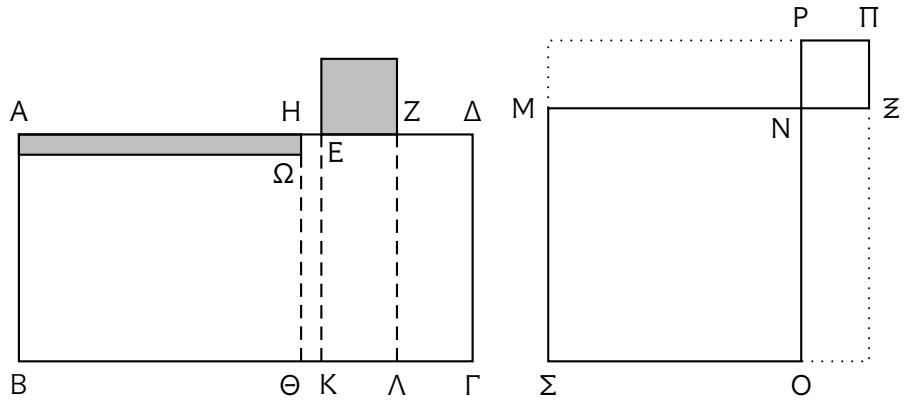
$$\sqrt{\sqrt{\rho_0}+\sqrt{\rho_0}\sqrt{1-\lambda}}$$

είναι μείζων. Αυτό προκύπτει αμέσως αφού (Π54, σελ. 282)

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\lambda}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{\lambda}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{\lambda}},$$

οπότε ο αριθμός που ελέγχουμε είναι μείζων με $\rho=\rho_0$ και $\lambda=1-4\sigma/\rho^2$ ισοδύναμα $\sigma=\rho^2(1-\lambda)/4$. Με αυτές τις επιλογές εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι απαραίτητες προϋποθέσεις (δείτε Πίνακα σελίδα 269). ∎

«πρωτότυπη»: Ας περιέχεται το ορθογώνιο ΑΓ στη ρητή πλευρά ΑΒ και στην τέταρτη δυώνυμη ΑΔ διαιρεμένη από τα Ε στα μονώνυμά της με μεγαλύτερο το ΑΕ. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά τετραγώνου ισεμβαδικού με το ΑΓ είναι η άλογη που ονομάσαμε μείζων.



Διότι επειδή η δυώνυμη ΑΔ είναι τέταρτη, οι ρητές ΑΕ και ΕΔ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρες και η ΑΕ είναι ασύμμετρη με το $\sqrt{\text{ΑΕ}^2-\text{ΕΔ}^2}$, και η ΑΕ είναι σύμμετρη με την ΑΒ. Χωρίζουμε σε δύο ίσα μέρη το ΔΕ με το σημείο Ζ και στην ΑΕ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΑΗ × ΗΕ ισεμβαδικό με το ΕΖ^2· άρα η ΑΗ είναι ασύμμετρη με την ΗΕ (Π18, σελ. 240). Φέρνουμε της ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ παράλληλες προς την ΑΒ και ας γίνει όπως και πριν η ίδια κατασκευή (Π55, σελ. 284). Φανερά $\text{ΜϺ}^2=|\text{ΑΓ}|$. Τώρα πρέπει να δειχθεί ότι η ΜϺ είναι η άλογη που ονομάσαμε μείζων.

Επειδή η ΑΗ είναι σύμμετρη με την ΕΗ και το ΑΘ ασύμμετρο με το ΗΚ, άρα και το ΣΝ με το ΝΠ (Β6, ΠΙ, σελ. 142 και ΠΙΙ, σελ. 236), άρα τα ΜΝ, ΝϺ

είναι δυνάμει ασύμμετρα. Και επειδή η ΑΕ είναι σύμμετρη με την ΑΒ, το ΑΚ είναι ρητό (Π19, σελ. 242), και ίσο με το $\mathrm{MN}^2 + \mathrm{N}\not{\Xi}^2$, οπότε το άθροισμα $\mathrm{MN}^2 + \mathrm{N}\not{\Xi}^2$ είναι ρητό. Αλλά η ΔΕ είναι σύμμετρη με την ΑΒ, οπότε και με την ΕΚ (Π13, σελ. 237), αλλά η ΔΕ είναι σύμμετρη με την ΕΖ, άρα η ΕΖ είναι ασύμμετρη με την ΕΚ (Π13, σελ. 237). Δηλαδή οι ρητές ΕΚ, ΕΖ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρες. Άρα το ΛΕ, δηλαδή το ΜΡ, είναι μέσο (Π21, σελ. 245). Και περιέχεται στις ΜΝ, Ν$\not{\Xi}$. Άρα το ΜΝ × Ν$\not{\Xi}$ είναι μέσο, το άθροισμα $\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}\not{\Xi}^2$ είναι ρητό και τα ΜΝ, Ν$\not{\Xi}$ είναι δυνάμει ασύμμετρα. Αν όμως προστεθούν δυο ευθύγραμμα τμήματα δυνάμει ασύμμετρα με άθροισμα τετραγώνων ρητό και ορθογώνιο μέσο το άθροισμα που προκύπτει είναι μείζων.

Η Μ$\not{\Xi}$ συνεπώς είναι η άλογη που ονομάσαμε μείζων και το τετράγωνό της είναι ισεμβαδικό με το ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 58 (684) *Αν ένα ορθογώνιο έχει τη μια του πλευρά ρητή και την άλλη πέμπτη δυώνυμη τότε η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου είναι η άλογη που ονομάσαμε πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Χωρίς βλάβη της γενικότητας (δείτε σημείωση πριν την Π54, σελ. 282) η ρητή πλευρά είναι 1 οπότε η 5η δυώνυμος είναι της μορφής $\rho_0 + \rho_0/\sqrt{1-\lambda}$ με ρ_0, $\lambda \in \mathbb{Q}$ με $0 < \lambda < 1$, και $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{1-\lambda} \notin \mathbb{Q}$. Πρέπει έτσι να δείξουμε ότι ο αριθμός

$$\sqrt{\rho_0 + \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\lambda}}}$$

είναι πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού. Αυτό προκύπτει, αφού (Π55, σελ. 284)

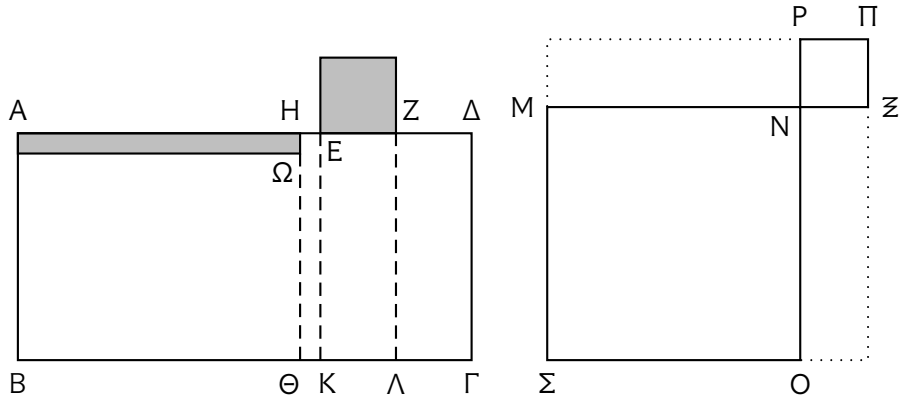
$$\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}}}.$$

Αναδιατάσσοντας τους παραπάνω όρους, ξαναγράφουμε

$$\sqrt{\rho_0 + \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\lambda}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{\rho_0^2}{1-\lambda}}\left(\sqrt{1+\sqrt{\lambda}} + \sqrt{1-\sqrt{\lambda}}\right),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την παρατήρηση ότι $1-\lambda = (1+\sqrt{\lambda})(1-\sqrt{\lambda})$. Αν τώρα θέσουμε $\sigma = \rho_0^2/(1-\lambda)$ και $\rho = \rho_0/2$, τότε η παραπάνω έκφραση είναι στη μορφή της πλευράς ρητού συν μέσου εμβαδού όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα της σελίδα 269. Δ

«πρωτότυπη»: Ας παριέχεται το ορθογώνιο ΑΓ στη ρητή ΑΒ και στην πέμπτη δυώνυμο ΑΔ διαιρεμένη από τα Ε στα μονώνυμά της με μεγαλύτερο το ΑΕ. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου με το ΑΓ είναι η άλογη που ονομάσαμε πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού.



Πράγματι, ας γίνει η ίδια κατασκευή με τις προηγούμενες προτάσεις. Φανερά $M\Xi^2 = |A\Gamma|$. Πρέπει να αποδειχθεί ότι η $M\Xi$ είναι πλευρά ρητού και μέσου εμβαδού.

Διότι επειδή η ΑΗ είναι ασύμμετρη με την ΗΕ (Π18, σελ. 240) άρα και το ΑΘ είναι ασύμμετρο με το ΘΕ, δηλαδή το MN^2 είναι ασύμμετρο με το $N\Xi^2$ (Β6, Π1, σελ. 142 και Π11, σελ. 236). Άρα τα ΜΝ και $N\Xi$ είναι δυνάμει ασύμμετρα. Και επειδή η ΑΔ είνα πέμπτη δυώνυμος και το ΕΔ είναι το μικρότερο από το δυο της μονώνυμα, η ΔΕ είναι σύμμετρη με την ΑΒ. Αλλά η ΑΕ είναι ασύμμετρη με την ΕΔ, άρα και η ΑΒ είναι ασύμμετρη με την ΑΕ (Π13, σελ. 237) (δηλαδή τα ΑΒ, ΑΕ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα). Έτσι το ΑΚ, δηλαδή το $MN^2 + N\Xi^2$ είναι μέσο (Π21, σελ. 245). Και επειδή η ΔΕ είναι σύμμετρη με την ΑΒ, άρα και με την ΕΚ, αλλά η ΔΕ είναι σύμμετρη με την ΕΖ συμπεραίνουμε ότι και η ΕΖ είναι σύμμετρη με την ΕΚ (Π12, σελ. 236). Και είναι ρητή η ΕΚ· άρα ρητό είναι και το ΕΛ, δηλαδή το ΜΡ, δηλαδή το ορθογώνιο $MN \times N\Xi$ (Π19, σελ. 242)· άρα τα ΜΝ, $N\Xi$ είναι δυνάμει ασύμμετρα, με μέσο άθροισμα τετραγώνων και ρητό ορθογώνιο.

Η $M\Xi$ λοιπόν είναι πλευρά ρητού και μέσου εμβαδού και το τετράγωνό της είναι ισεμβαδικό με το ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 59 (684) *Αν ένα ορθογώνιο έχει τη μια του πλευρά ρητή και την άλλη έκτη δυώνυμη τότε η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου είναι η άλογη που ονομάσαμε πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Χωρίς βλάβη της γενικότητας (δείτε σημείωση πριν την Π54, σελ. 282) η ρητή πλευρά είναι 1 οπότε η 6η δυώνυμος είναι της μορφής $\sqrt{\rho_0} + \sqrt{\rho_0}\sqrt{1-\lambda}$ με ρ_0, $\lambda \in \mathbb{Q}$ με $0 < \lambda < 1$, και $\sqrt{\rho_0}$, $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{1-\lambda}$, $\sqrt{\rho_0(1-\lambda)} \notin \mathbb{Q}$. Πρέπει έτσι να δείξουμε ότι ο αριθμός

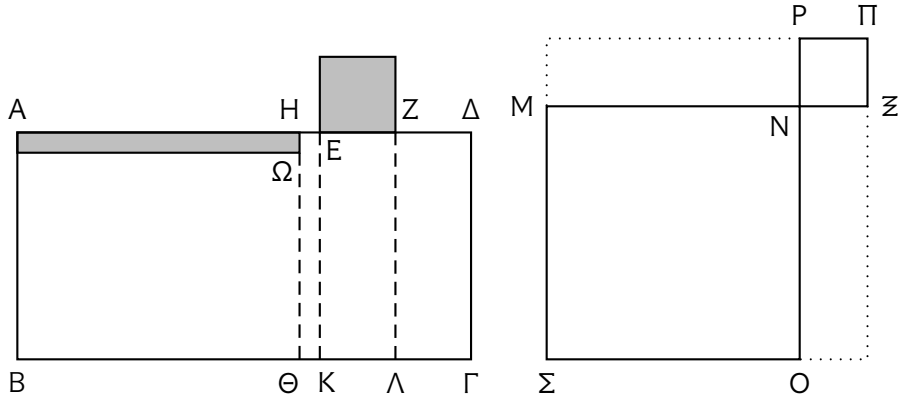
$$\sqrt{\sqrt{\rho_0} + \sqrt{\rho_0}\sqrt{1-\lambda}}$$

είναι πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού. Γνωρίζουμε ότι

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{\lambda}},$$

(Π57, σελ. 287) οπότε ο αριθμός που ελέγχουμε είναι πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού αν θέσουμε $\sigma = \rho_0$ και $\rho = \rho_0(1-\lambda)/4$. Με αυτές τις επιλογές εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι απαραίτητες προϋποθέσεις (δείτε Πίνακα σελίδα 269). ∎

«πρωτότυπη»: Ας περιέχεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ στη ρητή ΑΒ και στην έκτη δυώνυμο ΑΔ, διαιρεμένης από το Ε στα μονώνυμά της με μεγαλύτερο το ΑΕ. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου με το ΑΓ είναι πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού.



Ας γίνει η ίδια κατασκευή με τις προηγούμενες αποδείξεις. Φανερά $\text{MΞ}^2 = |\text{ΑΓ}|$ και η ΜΝ είναι με την ΝΞ δυνάμει ασύμμετρες (Π58, σελ. 289). Και επειδή η ΑΕ είναι ασύμμετρη με την ΑΒ, οι πλευρές ΑΕ, ΑΒ είναι ρητές και δυνάμει μόνο σύμμετρες. Άρα το ΑΚ, ισοδύναμα το $\text{MN}^2 + \text{NΞ}^2$ είναι μέσο (Π21, σελ. 245). Πάλι, επειδή η ΕΔ είναι ασύμμετρη με την ΑΒ, η ΖΕ είναι ασύμμετρη με την ΕΚ (Π13, σελ. 237). Άρα τα ΖΕ, ΕΚ είναι ρητά, δυνάμει μόνο σύμμετρα, οπότε το ΕΛ, ισοδύναμα το ΜΡ, ισοδύναμα το $\text{MN} \times \text{NΞ}$ είναι μέσο (Π21, σελ. 245). Και επειδή το ΑΕ είναι ασύμμετρο με το ΕΖ και το ΑΚ ασύμμετρο με το ΕΛ (Β6, Π1, σελ. 142 και Π11, σελ. 236). Αλλά $\text{AK} = \text{MN}^2 + \text{NΞ}^2$ και $\text{ΕΛ} = \text{MN} \cdot \text{NΞ}$, άρα το $\text{MN}^2 + \text{NΞ}^2$ είναι ασύμμετρο με το $\text{MN} \times \text{NΞ}$. Και καθένα από αυτά είναι μέσο και τα ΜΝ. ΝΞ είναι δυνάμει ασύμμετρα.

Η ΜΞ λοιπόν είναι πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού και το τετράγωνό της είναι ισεμβαδικό με το ΑΓ· όπερ ἔδει δεῖξαι. ∎

Λήμμα 13 *Αν ευθύγραμμο τμήμα τμηθεί σε δυο άνισα τμήματα τότε το άθροισμα των τετραγώνων αυτών των τμημάτων είναι μεγαλύτερο του διπλάσιου του ορθογωνίου που περιέχεται σε αυτά.*

Απόδειξη. Πράγματι, έστω ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ χωρίζεται σε δυο άνισα τμήματα από το Γ με μεγαλύτερο το ΑΓ. Ισχυρίζομαι ότι $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2 > 2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$.

Διότι, έστω Δ το μέσο της ΑΒ. Επειδή το Δ χωρίζει σε δυο ίσα τμήματα και το Γ σε δυο άνισα συμπεραίνουμε ότι $\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}+\text{ΓΔ}^2 = \text{ΑΔ}^2$ (Β2, Π5, σελ. 63). Οπότε $\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ} < \text{ΑΔ}^2$. Άρα $2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ} < 2\text{ΑΔ}^2$. Αλλά $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2 = 2(\text{ΑΔ}^2+\text{ΔΓ}^2)$ (Β2, Π9, σελ. 68). Έτσι, $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2 > 2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$· όπερ ἔδει δεῖξαι. ∆

Πρόταση 60 (αντίστροφη της Π54, σελ. 282) (685) *Αν ένα ορθογώνιο έχει τη μια πλευρά του ρητή και έχει εμβαδόν ίσο με το τετράγωνο δυωνύμου τότε η άλλη του πλευρά είναι πρώτη δυώνυμος.*

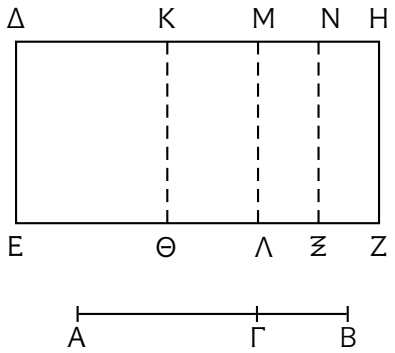
Απόδειξη. «σύγχρονη»: Ο γενικός τύπος της δυωνύμου είναι $\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}$ (δείτε Πίνακα σελίδα 269). Αφού το ορθογώνιο θα έχει μια πλευρά ρητή, αυτή θα είναι της μορφής $\sqrt{\rho_0}$ με $\rho_0 \in \mathbb{Q}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας όμως (δείτε σημείωση πριν την Π54, σελ. 282) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\rho_0 = 1$. Άρα αν συμβολίσουμε με x την άλλη πλευρά του ισεμβαδικού με το τετράγωνο της δυωνύμου θα πρέπει να ισχύει

$$x\cdot 1 = (\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2})^2 = (\sigma_1+\sigma_2)+2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}.$$

Οπότε

$$x = (\sigma_1+\sigma_2)+(\sigma_1+\sigma_2)\sqrt{\left(\frac{2\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}.$$

Αυτό είναι φανερά πρώτη δυώνυμος. ∟



«πρωτότυπη»: Έστω η δυώνυμη ΑΒ διαιρεμένη στα μονώνυμά της από το σημείο Γ, ώστε το μεγαλύτερο μονώνυμο να είναι το ΑΓ, και ας θεωρήσουμε ρητή ΔΕ στην οποία κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΔΕΖΗ ισεμβαδικό με το ΑΒ^2, το οποίο ορθογώνιο έχει πλάτος ΔΗ. Ισχυρίζομαι ότι η ΔΗ είναι πρώτη δυώνυμος.

Διότι ας κατασκευαστεί στη ΔΕ το ΔΘ ισεμβαδικό με το ΑΓ^2 και το ΚΛ ισεμβαδικό με το ΒΓ^2. Το υπόλοιπο ΜΖ ισούται με $2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$ (Β2, Π4, σελ. 62). Ας τμηθεί η ΜΗ στο μέσο της με το σημείο Ν και φέρνουμε και τη ΝΞ παράλληλη στις ΜΛ και ΗΖ. Άρα καθένα από τα ΜΞ, ΝΖ είναι ίσο με το $\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$. Αφού το δυώνυμο ΑΒ έχει διαιρεθεί στα μονώνυμα από το Γ, τα ρητά ΑΓ, ΓΒ είναι δυνάμει μόνο

σύμμετρα (Π36, σελ. 259)· άρα τα ΑΓ^2, ΓΒ^2 είναι ρητά και σύμμετρα (Π15, σελ. 238)· οπότε και το άθροισμα $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ είναι σύμμετρο με τα ΑΓ^2, ΓΒ^2· άρα το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ είναι ρητό. Και είναι και $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 = \Delta\Lambda$, άρα $\Delta\Lambda$ ρητό. Και αφού η ΔΕ είναι ρητή είναι ρητή και η ΔΜ, σύμμετρη με την ΔΕ (Π20, σελ. 242). Πάλι επειδή τα ρητά ΑΓ, ΓΒ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα είναι μέσο το $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ δηλαδή μέσο είναι το ΜΖ (Π21, σελ. 245). Αλλά έχει πλευρά ρητή, τη ΜΛ, άρα η ΜΗ είναι ρητή και ασύμμετρη με τη ΜΛ, ισοδύναμα με τη ΔΕ (Π22, σελ. 246). Είναι και η ΜΔ ρητή και σύμμετρη με τη ΔΕ άρα η ΔΜ είναι ασύμμετρη με τη ΜΗ (Π13, σελ. 237).

Είναι λοιπόν ρητά τα ΔΜ, ΜΗ και δυνάμει μόνο σύμμετρα, άρα η ΔΗ είναι δυώνυμος. (Π36, σελ. 259). Πρέπει να αποδειχθεί ότι είναι πρώτη δυώνυμος.

Επειδή το $\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ είναι μέσο ανάλογο των ΑΓ^2, ΓΒ^2 (Λήμμα, Π53, σελ. 281), άρα το ΜΞ είναι μέσο ανάλογο των ΔΘ, ΚΛ. Άρα $\Delta\Theta/\text{ΜΞ} = \text{ΜΞ}/\text{ΚΛ}$, δηλαδή $\Delta\text{Κ}/\text{ΜΝ} = \text{ΜΝ}/\text{ΜΚ}$ (Β6, Π1, σελ. 142)· άρα $\Delta\text{Κ} \cdot \text{ΚΜ} = \text{ΜΝ}^2$ (Β6, Π17, σελ. 154). Και επειδή το ΑΓ^2 είναι σύμμετρο ,ε το ΓΒ είναι και το ΔΘ σύμμετρο με το ΚΛ· οπότε και το ΔΚ είναι σύμμετρο με το ΚΜ (Β6, Π1, σελ. 142 και Π11, σελ. 236). Και επειδή $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 > 2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$, άρα είναι και $\Delta\text{Ζ} > \text{ΜΖ}$· οπότε $\Delta\text{Μ} > \text{ΜΗ}$ (Β6, Π1, σελ. 142, Β5, Π14, σελ. 134). Και ισχύει και $\Delta\text{Κ} \cdot \text{ΚΜ} = \text{ΜΝ}^2 = \text{ΜΗ}^2/4$, και το ΔΚ είναι σύμμετρο με το ΚΜ. Αν όμως δοθούν δυο άνισα ευθύγραμμα τμήματα και στο μεγαλύτερο κατασκευαστεί ορθογώνιο ισεμβαδικό με το ένα τέταρτο του τετραγώνου του μικρότερου ώστε να λείπει τετράγωνο, και διαιρεί τη μεγαλύτερη σε σύμμετρα τμήματα, τότε το τετράγωνο της μεγαλύτερης υπερέχει του τετραγώνου της μικρότερης κατά τετράγωνο με πλευρά σύμμετρη με αυτή. Δηλαδή τα ΔΜ και $\sqrt{\Delta\text{Μ}^2 - \text{ΜΗ}^2}$ είναι σύμμετρα. Και είναι και ρητά τα ΔΜ, ΜΗ, και η μεγαλύτερη που είναι η ΔΜ είναι σύμμετρη με τη ρητή ΔΕ.

Άρα η ΔΗ είναι πρώτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 61 (αντίστροφη της Π55, σελ. 284) (686) *Αν ένα ορθογώνιο έχει τη μια πλευρά του ρητή και έχει εμβαδόν ίσο με το τετράγωνο πλευράς πρώτης εκ δύο μέσων τότε η άλλη του πλευρά είναι δεύτερη δυώνυμος.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Χωρίς βλάβη της γενικότητας (δείτε σημείωση πριν την Π54, σελ. 282) μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ρητή πλευρά είναι η $\rho_0 = 1$. Ο γενικός τύπος της πρώτης εκ δύο μέσων είναι $\sqrt[4]{\sigma} + \rho / \sqrt[4]{\sigma}$ (δείτε Πίνακα σελίδα 269). Άρα η άλλη πλευρά του ισεμβαδικού ορθογωνίου ισούται με

$$(\sqrt[4]{\sigma} + \rho / \sqrt[4]{\sigma})^2 = \sqrt{\sigma} + \frac{\rho^2}{\sqrt{\sigma}} + 2\rho = 2\rho + 2\rho \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\rho} + \frac{\rho}{\sqrt{\sigma}}\right).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η τελευταία ποσότητα ισούται με $2\rho+\frac{2\rho}{\sqrt{1-\lambda}}$ όπου

$$\lambda = 1 - \frac{4}{\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\rho}+\frac{\rho}{\sqrt{\sigma}}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\rho}-\frac{\rho}{\sqrt{\sigma}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\rho}+\frac{\rho}{\sqrt{\sigma}}\right)^2}.$$

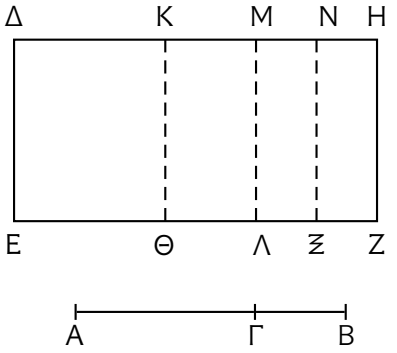
Επιπλέον

$$\sqrt{1-\lambda} = \frac{2\sqrt{\sigma}}{\frac{\sigma}{\rho}+\rho} \notin \mathbb{Q}$$

και

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\left|\frac{\sigma}{\rho}-\rho\right|}{\frac{\sigma}{\rho}+\rho} \in \mathbb{Q}$$

ολοκληρώνοντας τον έλεγχο ότι πρόκειται για δεύτερη δυώνυμο. ∎



«πρωτότυπη»: Έστω η εκ δύο μέσων πρώτη ΑΒ διαιρεμένη στα μέσα τμήματά της από το Γ με ΑΓ > ΓΒ, και ας θεωρήσουμε ρητή ΔΕ στην οποία κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΔΖ ισεμβαδικό με το AB^2 το οποίο ας έχει πλάτος ΔΗ. Ισχυρίζομαι ότι η δυώνυμη πλευρά ΔΗ είναι δεύτερη δυώνυμη.

Κάνουμε την κατασκευή όπως και πριν (Π60, σελ. 292). Επειδή το ΑΒ είναι εκ δύο μέσων πρώτη διαιρεμένη από το Γ στα μέσα τμήματά της, τα ΑΓ, ΓΒ είναι μέσα, δυνάμει μόνο σύμμετρα, και το ορθογώνιο ΑΓ · ΓΒ ρητό (Π37, σελ. 260)· οπότε και τα $AΓ^2$, $ΓB^2$ είναι μέσα (Π21, σελ. 245). Άρα και το ΔΛ είναι μέσο. Και έχει κατασκευαστεί με πλευρά τη ρητή ΔΕ· άρα η ΜΔ είναι ρητή και ασύμμετρη με την ΔΕ (Π22, σελ. 246). Επειδή το ορθογώνιο 2ΑΓ · ΓΒ είναι ρητό, είναι και το ΜΖ ρητό με πλευρά τη ρητή ΜΛ, άρα είναι ρητή η ΜΗ και σύμμετρη με το ΜΛ = ΔΕ (Π20, σελ. 242). Άρα η ΔΜ είναι ασύμμετρη με την ΜΗ (Π13, σελ. 237) και είναι και ρητές. Συνεπώς τα ΔΜ, ΜΗ είναι ρητά δυνάμει μόνο σύμμετρα και συνεπώς η ΔΗ είναι δυώνυμος.

Πρέπει να δειχθεί ότι είναι δεύτερη δυώνυμος. Πράγματι, επειδή $AΓ^2 + ΓB^2 > 2AΓ \cdot ΓB$ (Λήμμα, Π59, σελ. 290), ισχύει ΔΛ > ΜΖ, οπότε και ΔΜ > ΜΗ. Επειδή τα $AΓ^2$, $ΓB^2$ είναι σύμμετρα, θα είναι σύμμετρα και τα ΔΘ, ΚΛ, οπότε η ΔΚ είναι σύμμετρη με την ΚΜ (Β6, Π1, σελ. 142 και Π11, σελ. 236). Αλλά $ΔK \cdot KM = MN^2$ (στμ: και τα δύο είναι ίσα με $AΓ^2 \cdot ΓB^2 / ΔE^2$), άρα τα

ΔΜ, $\sqrt{\text{ΔΜ}^2 - \text{ΜΗ}^2}$ είναι σύμμετρα (Π17, σελ. 239), και η ΜΗ είναι σύμμετρη με τη ΔΕ.

Άρα η ΔΗ είναι δεύτερη δυώνυμος· όπερ ἔδει δεῖξαι. ∎

Πρόταση 62 (αντίστροφη της Π56, σελ. 286) (687) *Αν ένα ορθογώνιο έχει τη μια πλευρά του ρητή και έχει εμβαδόν ίσο με το τετράγωνο πλευράς δεύτερης εκ δύο μέσων τότε η άλλη του πλευρά είναι τρίτη δυώνυμος.*

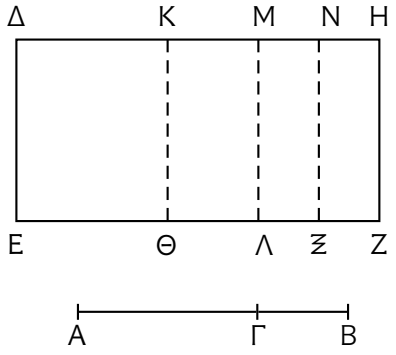
Απόδειξη. «σύγχρονη»: Χωρίς βλάβη της γενικότητας (δείτε σημείωση πριν την Π54, σελ. 282) μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ρητή πλευρά είναι η $\rho_0 = 1$. Ο γενικός τύπος της δεύτερης εκ δύο μέσων είναι $\sqrt[4]{\sigma} + \sqrt[4]{\sigma}/\sqrt{\rho_1}$ με $\sigma, \rho_1 \in \mathbb{Q}$ $\sqrt{\sigma/\rho_1} \notin \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\sigma}, \sqrt{\rho_1} \notin \mathbb{Q}$ (δείτε Πίνακα σελίδα 269). Άρα η άλλη πλευρά του ισεμβαδικού ορθογωνίου ισούται με

$$(\sqrt[4]{\sigma} + \sqrt[4]{\sigma}\sqrt{\rho_1})^2 = \sqrt{\sigma} + \frac{\sqrt{\sigma}}{\rho_1} + 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1}}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η τελευταία ποσότητα είναι ίση με $\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho}\sqrt{1-\lambda}$ όπου

$$\rho = \sigma\left(1 + \frac{1}{\rho_1}\right)^2 \qquad \text{και} \qquad \lambda = \frac{(\rho_1 - 1)^2}{(\rho_1 + 1)^2}.$$

Έτσι $\sqrt{\rho} = (1 + 1/\rho_1)\sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{\lambda} = |\rho_1 - 1|/(\rho_1 + 1) \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{1-\lambda} = 2\sqrt{\rho_1}/(\rho_1 + 1) \notin \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\rho}\sqrt{1-\lambda} = 2\sqrt{\sigma/\rho_1} \notin \mathbb{Q}$. Κατά συνέπεια η δεύτερη πλευρά του ορθογωνίου είναι τρίτη δυώνυμος. ∎



«πρωτότυπη»: Έστω ότι το Γ χωρίζει την δεύτερη εκ δύο μέσων ΑΒ στα μέσα της τμήματα και ΑΓ > ΓΒ. Έστω επίσης ρητή ΔΕ και ας κατασκευαστεί στη ΔΕ το παραλληλόγραμμο ΔΖ με πλάτος ΔΗ και ισεμβαδικό με το ΑΒ^2. Ισχυρίζομαι ότι η ΔΗ είναι τρίτη δυώνυμος.

Ας γίνει η ίδια κατασκευή με τις προηγούμενες αποδείξεις. Τα μέσα ΑΓ, ΓΒ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα και σχηματίζουν ρητό ορθογώνιο (Π38, σελ. 260). Οπότε το άθροισμα $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ είναι μέσο και ίσο με το ΔΛ, άρα και το ΔΛ είναι μέσο με πλευρά τη ρητή ΔΕ. Έτσι η ΜΔ είναι ρητή και ασύμμετρη με τη ΔΕ (Π22, σελ. 246). Για τους ίδιους λόγους και η ΜΗ είναι ρητή και ασύμμετρη με τη ΜΛ, άρα και με την ΔΕ. Συνεπώς καθεμιά από τις ΔΜ, ΜΗ είναι ρητή και ασύμμετρη με τη ΔΕ. Και αφού η ΑΓ είναι ασύμμετρη με τη ΓΒ και $\text{ΑΓ}/\text{ΓΒ} = \text{ΑΓ}^2/(\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ})$ (Λήμμα, Π21, σελ. 245), έπεται ότι το ΑΓ^2 είναι ασύμμετρο με το ΑΓ · ΓΒ (Π11, σελ. 236).

Άρα το άθροισμα $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2$ είναι ασύμμετρο με το $2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$, δηλαδή ασύμμετρα είναι τα ΔΛ, ΜΖ. Άρα και η ΔΜ είναι ασύμμετρη με την ΜΗ (Β6, ΠΙ, σελ. 142 και ΠΙΙ, σελ. 236). Είναι και ρητές, άτα η ΔΗ είναι δυώνυμος (Π36, σελ. 259).

Μένει να δειχθεί ότι η δυώνυμος ΔΗ είναι τρίτη δυώνυμος. Πράγματι, όπως και πριν συμπεραίνουμε ότι $\text{ΔΜ} > \text{ΜΗ}$ και ότι η ΔΚ είναι σύμμετρη με την ΚΜ. Επιπλέον ισχύει $\text{ΔΚ}\cdot\text{ΚΜ} = \text{ΜΝ}^2$, άρα τα ΔΜ, $\sqrt{\text{ΔΜ}^2 - \text{ΜΗ}^2}$ είναι σύμμετρα (ΠΙ7, σελ. 239). Και κανένα από τα ΔΜ, ΜΗ δεν είναι σύμμετρο με τη ΔΕ.

Άρα η ΔΗ είναι τρίτη δυώνυμος· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 63 (αντίστροφη της Π57, σελ. 287) (688) *Αν ένα ορθογώνιο έχει τη μια πλευρά του ρητή και έχει εμβαδόν ίσο με το τετράγωνο πλευράς η οποία είναι μείζων τότε η άλλη του πλευρά είναι τέταρτη δυώνυμος.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Χωρίς βλάβη της γενικότητας (δείτε σημείωση πριν την Π54, σελ. 282) μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ρητή πλευρά είναι η $\rho_0 = 1$. Ο γενικός τύπος πλευράς που είναι μείζων είναι

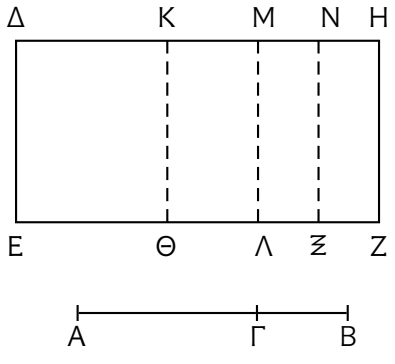
$$\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\sigma}{\rho_1^2}}}+\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\sigma}{\rho_1^2}}}$$

με $\rho_1 > 2\sqrt{\sigma}$, $\sqrt{1-4\sigma/\rho_1^2} \notin \mathbb{Q}$. (δείτε Πίνακα σελίδα 269).

Άρα η δεύτερη πλευρά ισούται με το τετράγωνο της μείζωνος, δηλαδή είναι ίση με

$$\frac{\rho_1}{2}\left(2+2\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\sigma}{\rho_1^2}}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\sigma}{\rho_1^2}}}\right)=\rho_1+2\sqrt{\sigma}.$$

Θέτοντας $\rho = \rho_1$ και $\lambda = 1-(4\sigma/\rho_1^2)$, ισχύει $0<\lambda<1$ (αφού $\rho_1 > 2\sqrt{\sigma}$), $\sqrt{1-\lambda} = 2\sqrt{\sigma}/\rho \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{\lambda} = \sqrt{1-4\sigma/\rho_1^2} \notin \mathbb{Q}$. Δηλαδή η δεύτερη πλευρά του ορθογωνίου είναι τέταρτη δυώνυμος.



«πρωτότυπη»: Έστω ότι το Γ χωρίζει τη μείζωνα ΑΒ στα μονώνυμά της με $\text{ΑΓ} > \text{ΓΒ}$ και ΔΕ ρητή. Κατασκευάζουμε με πλευρά τη ΔΕ παραλληλόγραμμο ΔΖ ισεμβαδικό με το ΑΒ^2, που έχει πλάτος ΔΗ. Ισχυρίζομαι ότι η δυώνυμος ΔΗ είναι τέταρτη δυώνυμος.

Κάνουμε την ίδια κατασκευή με τις προηγούμενες αποδείξεις. Τα ΑΓ, ΓΒ

είναι δυνάμει ασύμμετρα με ρητό το άθροισμα $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ και μέσο το ορθογώνιο ΑΓ · ΓΒ (Π39, σελ. 262). Άρα το ΔΛ είναι ρητό και άρα και η ΔΜ είναι ρητή και σύμμετρη με τη ΔΕ (Π20, σελ. 242). Το ορθογώνιο 2ΑΓ · ΓΒ είναι μέσο, άρα και το ΜΖ που έχει πλευρά τη ρητή ΜΛ, οπότε το ΜΗ είναι ρητό και ασύμμετρο με το ΔΕ (Π22, σελ. 246). Έτσι είναι ασύμμετρα τα ΔΜ, ΜΗ (Π13, σελ. 237). Δηλαδή τα ΔΜ, ΜΗ είναι ρητά δυνάμει μόνο σύμμετρα. Έτσι η ΔΗ είναι δυώνυμος.

Πρέπει να δειχθεί ότι είναι τέταρτη δυώνυμος.

Όπως και πριν $\Delta\text{Μ} > \text{ΜΗ}$ και $\Delta\text{Κ}\cdot\text{ΚΜ} = \text{ΜΝ}^2$. ΑΓ^2 ασύμμετρο με το ΓΒ^2 άρα το ΔΘ είναι ασύμμετρο με το ΚΛ, και άρα και το ΔΚ είναι ασύμμετρο με το ΚΜ (Β10, ΠΙ, σελ. 229 και ΠΙΙ, σελ. 236). Όμως όταν σε ευθύγραμμα τμήματα που είναι άνισα κατασκευαστεί στη μεγαλύτερη ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ισεμβαδικό με το ένα τέταρτο του τετραγώνου της μικρότερης πλευράς από το οποίο παραλληλόγραμμο λείπει τετράγωνο και το κατασκευασμένο παραλληλόγραμμο χωρίζει τη μεγαλύτερη σε ασύμμετρα τμήματα, τότε το τετράγωνο της μεγαλύτερης υπερέχει του τετραγώνου της μικρότερης κατά τετράγωνο πλευράς ασύμμετρης με τη μεγαλύτερη (Π18, σελ. 240). Άρα τα ΔΜ, $\sqrt{\Delta\text{Μ}^2 - \text{ΜΗ}^2}$ είναι ασύμμετρα.

Επίσης τα ΔΜ, ΜΗ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα και η ΔΜ είναι σύμμετρη με τη ρητή ΔΕ.

Άρα η ΔΗ είναι τέταρτη δυώνυμος· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 64 (αντίστροφη της Π58, σελ. 289) (688) *Αν ένα ορθογώνιο έχει τη μια πλευρά του ρητή και έχει εμβαδόν ίσο με το τετράγωνο πλευράς η οποία είναι πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού τότε η άλλη του πλευρά είναι πέμπτη δυώνυμος.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Χωρίς βλάβη της γενικότητας (δείτε σημείωση πριν την Π54, σελ. 282) μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ρητή πλευρά είναι η $\rho_0 = 1$. Ο γενικός τύπος πλευράς ρητού συν μέσου εμβαδού είναι

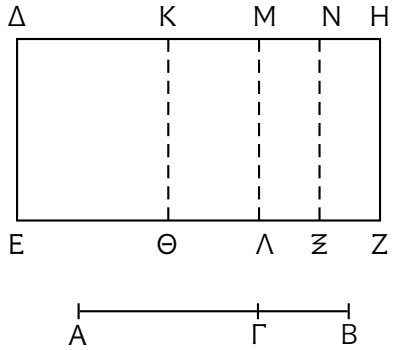
$$\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\rho^2}{\sigma}}} + \frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\rho^2}{\sigma}}}$$

με $\sqrt{\sigma} > 2\rho$, $\sqrt{1-4\rho^2/\sigma} \notin \mathbb{Q}$ (δείτε Πίνακα σελίδα 269).

Άρα η δεύτερη πλευρά ισούται με το τετράγωνο της πλευράς ρητού συν μέσου εμβαδού, δηλαδή είναι ίση με

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{2}\left(2 + 2\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\rho^2}{\sigma}}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\rho^2}{\sigma}}}\right) = \sqrt{\sigma} + 2\rho.$$

Η τελευταία ποσότητα γράφεται ως $2\rho + 2\rho/\sqrt{1-\lambda}$ όπου $0 < \lambda = 1 - (4\rho^2/\sigma) < 1$. Επειδή $\sqrt{1-\lambda} = 2\rho/\sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\lambda} = \sqrt{1 - 4\rho^2/\sigma} \notin \mathbb{Q}$ η δεύτερη πλευρά του ορθογωνίου είναι πέμπτη δυώνυμος. Δ



«πρωτότυπη»: Έστω ΑΒ πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού διαιρεμένη στα μονώνυμά της από το Γ ώστε $\text{ΑΓ} > \text{ΓΒ}$, και ας θεωρήσουμε ρητή ΔΕ στην οποία κατασκευάζουμε ορθογώνιο παραληλλόγραμμο ΔΖ με πλάτος ΔΗ ισεμβαδικό με το ΑΒ^2. Ισχυρίζομαι ότι η ΔΗ είναι πέμπτη δυώνυμος.

Ξεκινάμε με την ίδια κατασκευή όπως στα προηγούμενα. Τα μέσα ΑΓ, ΓΔ είναι δυνάμει ασύμμετρα με μέσο άθροισμα τετραγώνων και ρητό ορθογώνιο (Π40, σελ. 262). Επειδή λοιπόν το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ είναι μέσο άρα μέσο είναι και το ΔΛ, οπότε η ΔΜ είναι ρητή και ασύμμετρη με τη ΔΕ (Π22, σελ. 246). Πάλι επειδή το $2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$ είναι ρητό, άρα ρητό είναι το ΜΖ και άρα και το ΜΗ και σύμμετρη με τη ΔΕ (Π20, σελ. 242). Έτσι η ΔΜ είναι ασύμμετρη με τη ΜΗ (Π13, σελ. 237). Άρα τα ρητά ΔΜ, ΜΗ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, και η ΔΗ είναι δυώνυμος (Π36, σελ. 259).

Ισχυρίζομαι ότι είναι πέμπτη δυώνυμος. Πράγματι, ομοίως αποδεικνύεται ότι $\text{ΔΚ}\cdot\text{ΚΜ} = \text{ΜΝ}^2$ και η ΔΚ είναι ασύμμετρη με την ΚΜ. Άρα τα ΔΜ και $\sqrt{\text{ΔΜ}^2 - \text{ΜΗ}^2}$ είναι ασύμμετρα (Π18, σελ. 240). Και επιπλέον τα ΔΜ, ΜΗ είναι ρητά δυνάμει μόνο σύμμετρα και η μικρότερη ΜΗ είναι σύμμετρη με τη ΔΕ.

Η ΔΗ λοιπόν είναι πέμπτη δυώνυμος· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 65 (αντίστροφη της Π59, σελ. 290) (689) *Αν ένα ορθογώνιο έχει τη μια πλευρά του ρητή και έχει εμβαδόν ίσο με το τετράγωνο πλευράς η οποία είναι πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού τότε η άλλη του πλευρά είναι έκτη δυώνυμος.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Χωρίς βλάβη της γενικότητας (δείτε σημείωση πριν την Π54, σελ. 282) μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ρητή πλευρά είναι η $\rho_0 = 1$. Ο γενικός τύπος πλευράς μέσου συν μέσου εμβαδού είναι

$$\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\rho_1}{\sigma}}} + \frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\rho_1}{\sigma}}}$$

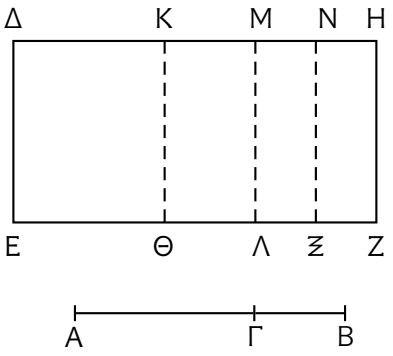
με $\sigma > 4\rho_1$, $\sqrt{\sigma/\rho_1}$, $\sqrt{1 - 4\rho_1/\sigma} \notin \mathbb{Q}$. (δείτε Πίνακα σελίδα 269).

Άρα η δεύτερη πλευρά ισούται με το τετράγωνο της πλευράς μέσου συν μέσου εμβαδού, δηλαδή είναι ίση με

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{2}\left(2+2\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\rho_1}{\sigma}}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\rho_1}{\sigma}}}\right)=\sqrt{\sigma}+2\sqrt{\rho_1}.$$

Η τελευταία ποσότητα γράφεται ως $\sqrt{\rho}+\sqrt{\rho}\sqrt{1-\lambda}$ όπου $\rho=\sigma$ και $0<\lambda=1-(4\rho_1/\sigma)<1$. Επειδή $\sqrt{1-\lambda}=2\sqrt{\rho_1/\sigma}\notin\mathbb{Q}$ και $\sqrt{\lambda}=\sqrt{1-4\rho_1/\sigma}\notin\mathbb{Q}$ η δεύτερη πλευρά του ορθογωνίου είναι έκτη δυώνυμος. ∎

«πρωτότυπη»: Έστω ΑΒ πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού διαιρεμένη στα μονώνυμά της από το Γ, και ας θεωρήσουμε ρητή ΔΕ στην οποία κατασκευάζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΔΖ με πλάτος ΔΗ ισεμβαδικό με το ΑΒ^2. Ισχυρίζομαι ότι η ΔΗ είναι έκτη δυώνυμος.



Ξεκινάμε με την ίδια κατασκευή όπως στα προηγούμενα. Τα μέσα ΑΓ, ΓΔ είναι δυνάμει ασύμμετρα με μέσο άθροισμα τετραγώνων και μέσο ορθογώνιο. Μέσο είναι λοιπόν και το $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2$ και ασύμμετρο με το ΑΓ·ΓΒ (Π41, σελ. 263). Όπως και πριν τα ΔΛ, ΜΖ είναι μέσα και έχουν πλευρά τη ρητή ΔΕ άρα καθεμιά των ΔΜ, ΜΗ είναι ρητή και ασύμμετρη με τη ΔΕ (Π22, σελ. 246). Και αφού τα $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2$, 2ΑΓ·ΓΒ είναι ασύμμετρα προκύπτει ότι και το ΔΛ είναι ασύμμετρο με το ΜΖ. Άρα το ΔΜ είναι ασύμμετρο με το ΜΗ (Β6, ΠΙ, σελ. 142 και ΠΙΙ, σελ. 236). Τα ΔΜ, ΜΗ είναι άρα ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα, άρα η ΔΗ είνα δυώνυμος (Π36, σελ. 259).

Ισχυρίζομαι ότι είναι και έκτη δυώνυμος. Πράγματι, ομοίως με πριν αποδεικνύουμε ότι $\text{ΔΚ}\cdot\text{ΚΜ}=\text{ΜΝ}^2$ και ότι η ΔΚ είναι ασύμμετρη με την ΚΜ. Και για τους ίδιους λόγους τα ΔΜ, $\sqrt{\text{ΔΜ}^2-\text{ΜΗ}^2}$ είναι ασύμμετρα (Π18, σελ. 240). Και καμιά από τις ΔΜ, ΜΗ δεν είναι σύμμετρη με τη ρητή ΔΕ.

Άρα η ΔΗ είναι έκτη δυώνυμος· όπερ ἔδει δεῖξαι. ∎

Πρόταση 66 (690) *Σύμμετρη με δυώνυμο είναι και αυτή δυώνυμος και μάλιστα ίδιας τάξης.*

Απόδειξη. Έστω ΑΒ δυώνυμος και ΓΔ σύμμετρη με την ΑΒ. Ισχυρίζομαι ότι και η ΓΔ είναι δυώνυμος και ίδιας τάξης με την ΑΒ.

Έστω Ε σημείο της ΑΒ που τη διαιρεί στα μονώνυμά της με ΑΕ το μεγαλύτερο από τα δύο. Άρα τα ΑΕ, ΕΒ είναι ρητά και δυνάμει μόνο

σύμμετρα (Π36, σελ. 259). Θεωρούμε σημείο Ζ στο ΓΔ ώστε ΑΒ/ΓΔ = ΑΕ/ΓΖ (Β6, Π12, σελ. 150). Άρα και ΕΒ/ΖΔ = ΑΒ/ΓΔ (Β6, Π16, σελ. 153 και Πόρισμα, Β5, Π19, σελ. 136). Αλλά τα ΑΒ, ΓΔ είναι σύμμετρα άρα τα ΑΕ, ΓΖ είναι σύμμετρα, καθώς και τα ΕΒ, ΖΔ (Π11, σελ. 236). Και είναι ρητά τα ΑΕ, ΕΒ, άρα ρητά είναι και τα ΓΖ, ΖΔ, και ισχύει ΑΕ/ΓΖ = ΕΒ/ΖΔ (Β5, Π11, σελ. 133). Εναλλάξ τώρα, θα ισχύει ΑΕ/ΕΒ = ΓΖ/ΖΔ (Β5, Π16, σελ. 134). Τα ΑΕ, ΕΒ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π11, σελ. 236) άρα και τα ΓΖ, ΖΔ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, και είναι και ρητά, άρα η ΓΔ είναι δυώνυμος (Π36, σελ. 259).

Ισχυρίζομαι τώρα ότι έχει και την ίδια τάξη με τη δυώνυμο ΑΒ. Πράγματι το $ΑΕ^2$ υπερέχει του $ΕΒ^2$ κατά τετράγωνο πλευράς σύμμετρης με την ΑΕ ή πλευράς ασύμμετρης με αυτήν. Αν μεν σύμμετρης, και το $ΓΖ^2$ υπερέχει του $ΖΔ^2$ τετράγωνο πλευράς σύμμετρης με τη ΓΖ (Π14, σελ. 237). Και αν η ΑΕ είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή θα είναι και η ΓΖ σύμμετρη με αυτή (Π12, σελ. 236), και για αυτό τον λόγο καθένα από τα ΑΒ, ΓΔ είναι πρώτη δυώνυμος.

Αν όμως η ΕΒ είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή θα είναι και η ΖΔ (Π12, σελ. 236), οπότε και καθένα από τα ΑΒ, ΓΔ είναι δεύτερη δυώνυμος.

Αν ούτε η ΑΕ ούτε η ΕΒ είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή τότε καμιά από τις ΓΖ, ΖΔ δεν είναι σύμμετρη με τ ην αρχική ρητή οπότε καθένα από τα ΑΒ, ΓΔ είναι τρίτη δυώνυμος.

Αν τα ΑΕ, $\sqrt{ΑΕ^2 - EB^2}$ είναι ασύμμετρα το ίδιο ισχύει για τα ΓΖ, $\sqrt{ΓΖ^2 - ΖΔ^2}$ (Π14, σελ. 237). Και αν μεν η ΑΕ είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή το ίδιο ισχύει και για την ΓΖ (Π12, σελ. 236) οπότε καθεμιά από τις ΑΒ, ΓΔ είναι τέταρτη δυώνυμος. Αν όμως η ΕΒ είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή το ίδιο ισχύει και για τη ΖΔ οπότε καθεμιά από τις ΑΒ, ΓΔ είναι πέμπτη δυώνυμος. Εν αν τίποτα από αυτά δεν ισχύουν για τα ΑΕ, ΕΒ καμιά από τις ΓΖ, ΖΔ δεν είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή και συνεπώς καθεμιά από τις ΑΒ, ΓΔ είναι έκτη δυώνυμος.

Άρα σύμμετρη προς δυώνυμο είναι και αυτή δυώνυμος και μάλιστα ίδιας τάξης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 67 (690) *Σύμμετρη με εκ δύο μέσων είναι και αυτή εκ δύο μέσων και μάλιστα ίδιας τάξης.*

Απόδειξη. Έστω ΑΒ εκ δύο μέσων και ΓΔ σύμμετρη με την ΑΒ. Ισχυρίζομαι ότι και η ΓΔ είναι εκ δύο μέσων και ίδιας τάξης με την ΑΒ.

Έστω Ε σημείο της ΑΒ που τη διαιρεί στα μονώνυμά της. Άρα τα ΑΕ, ΕΒ είναι μέσα και δυνάμει μόνο σύμμετρα. Θεωρούμε σημείο Ζ στο ΓΔ ώστε ΑΒ/ΓΔ = ΑΕ/ΓΖ (Β6, Π12, σελ. 150). Άρα και ΕΒ/ΖΔ = ΑΒ/ΓΔ (Β5, Π16, σελ. 134?????? και Πόρισμα, Β5, Π19, σελ. 136). Αλλά τα ΑΒ, ΓΔ είναι σύμμετρα άρα τα ΑΕ, ΓΖ είναι σύμμετρα, καθώς και τα ΕΒ, ΖΔ (Π11,

σελ. 236). Και είναι μέσα τα ΑΕ, ΕΒ, άρα μέσα είναι και τα ΓΖ, ΖΔ (Π23, σελ. 247). Και επειδή ΑΕ/ΕΒ = ΓΖ/ΖΔ και τα ΑΕ, ΕΒ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, είναι και τα ΓΖ, ΖΔ δυνάμει μόνο σύμμετρα (ΠΙΙ, σελ. 236). Είναι και μέσα, άρα ΓΖ είναι εκ δύο μέσων.

Ισχυρίζομαι τώρα είναι έχει και την ίδια τάξη με την ΑΒ. Πράγματι, επειδή ΑΕ/ΕΒ = ΓΖ/ΖΔ είναι και

$$\frac{\text{ΑΕ}^2}{\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΒ}} = \frac{\Gamma\text{Ζ}^2}{\Gamma\text{Ζ}\cdot\text{ΖΔ}}$$

(Λήμμα, Π21, σελ. 245). Εναλλάξ:

$$\frac{\text{ΑΕ}^2}{\Gamma\text{Ζ}^2} = \frac{\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΒ}}{\Gamma\text{Ζ}\cdot\text{ΖΔ}}$$

(Β5, ΠΙ6, σελ. 134). Είναι όμως σύμμετρα τα ΑΕ^2, $\Gamma\text{Ζ}^2$ άρα είναι σύμμετρα και τα ΑΕ·ΕΒ, ΓΖ·ΖΔ (ΠΙΙ, σελ. 236). Εάν λοιπόν το ΑΕ·ΕΒ είναι ρητό, τότε είναι ρητό και το ΓΖ · ΖΔ οπότε και τα δύο ΑΒ, ΓΖ πρώτα εκ δύο μέσων. Ενώ αν το ΑΕ · ΕΒ είναι μέσο τότε είναι μέσο και το ΓΖ · ΖΔ (Πόρισμα, Π23, σελ. 247) οπότε και τα δύο ΑΒ, ΓΖ δεύτερα εκ δύο μέσων (Π37, σελ. 260 και Π38, σελ. 260).

Και για αυτό το ΓΔ έχει την ίδια τάξη ως εκ μέσων όπως και το ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ∎

Πρόταση 68 (691) *Σύμμετρη με μείζων είναι και αυτή μείζων.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ΑΒ είναι μείζων και σύμμετρη με το ΓΔ. Ισχυρίζομαι ότι και το ΓΔ είναι μείζων.

Ας διαιρεθεί η ΑΒ με το Ε, και άρα τα ΑΕ, ΕΒ είναι δυνάμει ασύμμετρα με άθροισμα τετραγώνων ρητό και ορθογώνιο μέσο (Π39, σελ. 262). Και ας γίνει η ίδια κατασκευή με πριν.

Επειδή ΑΒ/ΓΔ = ΑΕ/ΓΖ = ΕΒ/ΖΔ (Π67, σελ. 300), και είναι και σύμμετρη η ΑΒ με τη ΓΔ, άρα καθεμιά από τις ΑΕ, ΕΒ είναι σύμμετρη αντιστοίχως με καθεμιά από τις ΓΖ, ΖΔ (ΠΙΙ, σελ. 236). Αφού ΑΕ/ΓΖ = ΕΒ/ΖΔ και εναλλάξ είναι ΑΕ/ΕΒ = ΓΖ/ΖΔ και συνθέτοντας ΑΒ/ΒΕ = ΓΔ/ΔΖ (Β5, ΠΙ8, σελ. 135). Άρα $\text{ΑΒ}^2/\text{ΒΕ}^2 = \Gamma\Delta^2/\Delta\text{Ζ}^2$ (Β6, Π20, σελ. 156). Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\text{ΑΒ}^2/\text{ΑΕ}^2 = \Gamma\Delta^2/\Gamma\text{Ζ}^2$. Οπότε

$$\frac{\text{ΑΒ}^2}{\text{ΑΕ}^2 + \text{ΕΒ}^2} = \frac{\Gamma\Delta^2}{\Gamma\text{Ζ}^2 + \text{ΖΔ}^2}$$

(Β5, Π24, σελ. 138). Εναλλάξ τώρα

$$\frac{\text{ΑΒ}^2}{\Gamma\Delta^2} = \frac{\text{ΑΕ}^2 + \text{ΕΒ}^2}{\Gamma\text{Ζ}^2 + \text{ΖΔ}^2}$$

(Β5, Π16, σελ. 134). Είναι όμως σύμμετρο το ΑΒ^2 με το $\Gamma\Delta^2$ άρα και τα $\text{ΑΕ}^2 + \text{ΕΒ}^2$, $\Gamma\text{Ζ}^2 + \text{Ζ}\Delta^2$ είναι σύμμετρα (Π11, σελ. 236). Αλλά το $\text{ΑΕ}^2 + \text{ΕΒ}^2$ είναι ρητό, άρα και το $\Gamma\text{Ζ}^2 + \text{Ζ}\Delta^2$ είναι ρητό.

Ομοίως επειδή το $2\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΒ}$ είναι σύμμετρο με το $2\Gamma\text{Ζ}\cdot\text{Ζ}\Delta$ και το $2\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΒ}$ είναι μέσο, άρα μέσο είναι και το $2\Gamma\text{Ζ}\cdot\text{Ζ}\Delta$ (Πόρισμα, Π23, σελ. 247). Άρα τα ΓΖ, ΖΔ είναι δυνάμει ασύμμετρα, σχηματίζουν άθροισμα τετραγώνων ρητό και ορθογώνιο μέσο, οπότε η ΓΖ είναι η άλογη που ονομάσαμε μείζων (Π39, σελ. 262).

Άρα η σύμμετρη με μείζων είναι και αυτή μείζων· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 69 (692) *Σύμμετρη με πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού είναι και αυτή πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού.*

Απόδειξη. Έστω η ΑΒ πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού και ΓΔ σύμμετρη με αυτή. Πρέπει να δειχθεί ότι και η ΓΔ είναι πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού.

Ας διαιρεθεί στα μονώνυμά της η ΑΒ από το Ε και άρα τα ΑΕ, ΕΒ είναι δυνάμει ασύμμετρα με άθροισμα τετραγώνων μέσο και ορθογώνιο ρητό (Π40, σελ. 262)· και ας γίνει η ίδια κατασκευή με τα προηγούμενα. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα ΓΖ, ΖΔ είναι δυνάμει ασύμμετρα και το μεν άθροισμα $\Gamma\text{Ζ}^2 + \text{Ζ}\Delta^2$ είναι σύμμετρο με το $\text{ΑΕ}^2 + \text{ΕΒ}^2$, άρα μέσο, το δε ορθογώνιο $\Gamma\text{Ζ}\cdot\text{Ζ}\Delta$ είναι σύμμετρο με το ορθογώνιο $\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΒ}$, άρα ρητό.

Συνεπώς η ΓΔ είναι πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

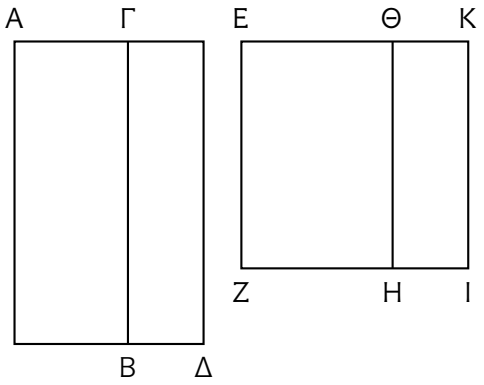
Πρόταση 70 (692) *Σύμμετρη πλευράς μέσου συν μέσου εμβαδού είναι και αυτή πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ΑΒ είναι πλευρά δυο μέσων εμβαδών και σύμμετρη με αυτή είναι η ΓΔ. Πρέπει να αποδειχθεί ότι και η ΓΔ είναι πλευρά δυο μέσων εμβαδών.

Έστω Ε το σημείο που διαιρεί την ΑΒ στα μονώνυμά της, οπότε τα ΑΕ, ΕΒ είναι δυνάμει ασύμμετρα με άθροισμα τετραγώνων μέσο, ορθογώνιο μέσο και άθροισμα τετραγώνων ασύμμετρο με το ορθογώνιό τους (Π41, σελ. 263)· και ας γίνει η ίδια κατασκευή με πριν. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα ΓΖ, ΖΔ είναι δυνάμει ασύμμετρα και το μεν άθροισμα $\Gamma\text{Ζ}^2 + \text{Ζ}\Delta^2$ είναι σύμμετρο με το $\text{ΑΕ}^2 + \text{ΕΒ}^2$, άρα μέσο, το δε ορθογώνιο $\Gamma\text{Ζ}\cdot\text{Ζ}\Delta$ είναι σύμμετρο με το ορθογώνιο $\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΒ}$, άρα και αυτό μέσο. Και επειδή τα $\text{ΑΕ}^2 + \text{ΕΒ}^2$, $\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΒ}$ είναι ασύμμετρα, αλλά είναι σύμμετρα αντιστοίχως με τα $\Gamma\text{Ζ}^2 + \text{Ζ}\Delta^2$, $\Gamma\text{Ζ}\cdot\text{Ζ}\Delta$, είναι και αυτά τα τελευταία ασύμμετρα μεταξύ τους.

Συνεπώς η ΓΔ είναι πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 71 (693) *Το άθροισμα ρητού και μέσου εμβαδού δίνει πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου τεσσάρων άλογων ειδών: δυώνυμη, πρώτη εκ δύο μέσων, μείζονα και πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού.*

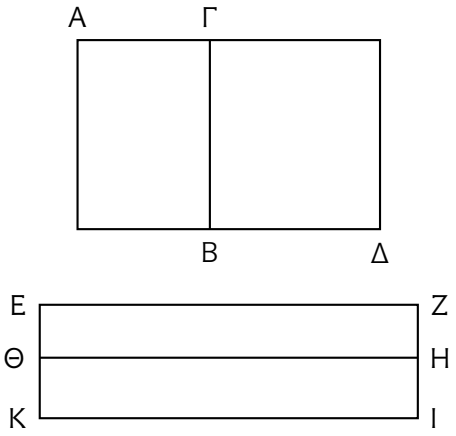


Απόδειξη. Θεωρούμε ρητό εμβαδό ΑΒ και μέσο εμβαδό ΓΔ. Ισχυρίζομαι ότι το ευθύγραμμο τμήμα το τετράγωνο του οποίου είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΔ ή είναι δυώνυμος ή πρώτο εκ δύο μέσων ή μείζων ή πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού.

Είτε το ΑΒ έχει μεγαλύτερο είτε μικρότερο εμβαδόν από το ΓΔ. Ξεκινάμε με την περίπτωση $|AB| > |ΓΔ|$. Θεωρούμε ρητό ΕΖ και κατασκευάζουμε με πλευρά την ΕΖ ορθογώνιο ΕΗ ισεμβαδικό με το ΑΒ με πλάτος ΕΘ. Και πάλι με πλευρά την ΕΖ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΘΙ ισεμβαδικό με το ΓΔ έχοντας πλάτος ΘΚ. Το ΑΒ είναι ρητό είναι ρητό και το ΕΗ· και έχει την ΕΖ ρητή άρα ρητή είναι και η ΕΘ και σύμμετρη με την ΕΖ (Π20, σελ. 242). Ομοίως το ΘΙ είναι μέσο με ρητή πλευρά την ΕΖ άρα η ΘΚ είναι ρητή και ασύμμετρη με την ΕΚ (Π22, σελ. 246). Τα ΑΒ, ΕΗ είναι ασύμμετρα αφού το ένα είναι ρητό και το άλλο μέσο, άρα και τα ΕΗ, ΘΙ είναι ασύμμετρα. Και ισχύει $ΕΗ/ΘΙ = ΕΘ/ΕΚ$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142). Άρα τα ΕΘ, ΕΚ είναι ασύμμετρα (ΠΙΙ, σελ. 236). Είναι και ρητά άρα είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, οπότε η ΕΚ είναι δυώνυμος διαιρεμένη από το Θ (Π36, σελ. 259). Επειδή $ΑΒ > ΓΔ$, $ΑΒ = ΕΗ$, $ΓΔ - ΘΙ$ θα είναι και $ΕΗ > ΘΙ$, συνεπώς $ΕΘ > ΘΚ$ (Β5, ΠΙ4, σελ. 134).

Ή λοιπόν το $ΕΘ^2$ υπερέχει του $ΘΚ^2$ κατά τετράγωνο πλευράς σύμμετρης με τη ΕΘ ή όχι. Αν η πλευρά αυτής της υπεροχής είναι σύμμετρη με την ΕΘ και η ΕΘ είναι μεγαλύτερη και σύμμετρη με τη ρητή ΕΖ τότε η ΕΚ είναι πρώτη δυώνυμος. Είναι δε ρητή η ΕΖ· εάν ορθογώνιο περιέχεται σε ρητή και πρώτη δυώνυμο, η πλευρά με τετράγωνο ισεμβαδικό με αυτό το ορθογώνιο είναι δυώνυμος (Π54, σελ. 282). Άρα και το ευθύγραμμο τμήμα το τετράγωνο του οποίου είναι ισεμβαδικό με το ΑΔ είναι δυώνυμος

Αν όμως η υπεροχή αυτή έχει πλευρά ασύμμετρης με την ΕΘ, και η ΕΘ σύμμετρη με την αρχική ρητή ΕΖ, τότε η ΕΚ είναι τέταρτη δυώνυμος. Είναι όμως ρητή η ΕΖ, και αν ορθογώνιο περιέχεται σε ρητή και τέταρτη δυώνυμο το ευθύγραμμο τμήμα του οποίου το τετράγωνο είναι ισεμβαδικό με αυτό το ορθογώνιο είναι η άλογη μείζων (Π57, σελ. 287). Το ευθύγραμμο τμήμα λοιπόν το τετράγωνο του οποίου είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΕΙ, και άρα με το ορθογώνιο ΑΔ, είναι μείζων.



Έστω τώρα ότι ΑΒ < ΓΔ, οπότε και ΕΗ < ΘΙ, άρα ΕΘ < ΘΚ (Β6, ΠΙ, σελ. 142 και Β5, ΠΙ4, σελ. 134). Το τετράγωνο του ΘΚ υπερέχει του τετραγώνου του ΕΘ κατά τετράγωνο πλευράς σύμμετρης ή ασύμμετρης με τη ΘΚ.

Αν είναι σύμμετρη με τη ΘΚ, είναι και μικρότερη η ΕΘ και σύμμετρη με την αρχική ρητή ΕΖ, άρα η ΕΚ είναι δεύτερη δυώνυμος. Ρητή λοιπόν η ΕΖ και αν ορθογώνιο περιέχεται σε ρητή και δεύτερης δυωνύμου το ευθύγραμμο τμήμα με τετράγωνο ισεμβαδικό με αυτό το ορθογώνιο είναι πρώτο εκ δύο μέσων (ΠΣ5, σελ. 284). Άρα η πλευρά ισοδύναμου τετραγώνου με το ΕΙ και άρα με το ΑΔ είναι πρώτο εκ δύο μέσων.

Αν τώρα είναι ασύμμετρη με τη ΘΚ, η μικρότερη ΕΘ είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή ΕΖ άρα η ΕΚ είναι πέμπτη δυώνυμος. Ρητή λοιπόν η ΕΖ και αν ορθογώνιο περιέχεται σε ρητή και πέμπτης δυωνύμου το ευθύγραμμο τμήμα με τετράγωνο ισεμβαδικό με αυτό το ορθογώνιο είναι πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού (ΠΣ8, σελ. 289). Άρα η πλευρά ισοδύναμου τετραγώνου με το ΕΙ και άρα με το ΑΔ είναι πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού.

Άρα το άθροισμα ρητού και μέσου εμβαδού δίνει πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου τεσσάρων άλογων ειδών: δυώνυμη, πρώτη εκ δύο μέσων, μείζονα και πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

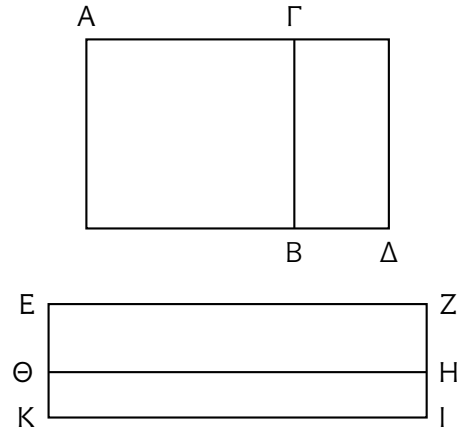
Πρόταση 72 (694) *Το άθροισμα δυο μέσων ασύμμετρων εμβαδών δίνει πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου δύο άλογων ειδών: δεύτερη εκ δύο μέσων ή πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού.*

Απόδειξη. Ας προσθέσουμε δυο ασύμμετρα μεταξύ τους ΑΒ, ΓΔ. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά τετραγώνου ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΔ είναι είτε δεύτερη εκ δύο μέσων είτε πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού.

Είτε ΑΒ < ΓΔ είτε ΑΒ > ΓΔ. Έστω ότι ΑΒ > ΓΔ και ας θεωρήσουμε ρητό ΕΖ στην οποία κατασκευάζουμε το ΕΗ ισεμβαδικό με το ΑΒ έχοντας πλάτος ΕΘ και το ΘΙ ισεμβαδικό με το ΓΔ έχοντας πλάτος ΘΚ.

Επειδή καθένα από τα ΑΒ, ΓΔ είναι μέσο, άρα είναι μέσα και τα ΕΗ, ΘΙ, και έχουν ρητή πλευρά, την ΕΖ. Άρα τα ΕΗ, ΘΚ είναι ρητά και ασύμμετρα με το ΕΖ (ΠΣ2, σελ. 246). Και επειδή τα ΑΒ, ΓΔ είναι ασύμμετρα είναι ασύμμετρα και τα ΕΗ, ΘΙ. Και ισχύει $|ΕΗ|/|ΘΙ| = ΕΘ/ΘΚ$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142)·

άρα τα ΕΘ, ΘΚ είναι ασύμμετρα (ΠΙΙ, σελ. 236). Συνεπώς τα ρητά ΕΘ, ΘΚ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα οπότε η ΕΚ είναι δυώνυμος (Π36, σελ. 259).



Το $ΕΘ^2$ τώρα, υπερέχει του $ΘΚ^2$ κατά τετράγωνο πλευράς σύμμετρης ή ασύμμετρης με την ΕΘ. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι υπερέχει κατά τετράγωνο πλευράς σύμμετρης με την ΕΘ, ενώ καμία από τις ΕΘ, ΘΚ δεν είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή ΕΖ. Κατά συνέπεια η δυώνυμος ΕΚ είναι τρίτη δυώνυμος. Είναι όμως ρητή η ΕΖ και αν ορθογώνιο περιέχεται σε ρητή και τρίτη δυώνυμο η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου είναι δεύτερη εκ δύο μέσων (Π56, σελ. 286). Άρα το ευθύγραμμο τμήμα το τετράγωνο του οποίου είναι ισεμβαδικό με το ΕΙ, άρα και με το ΑΔ είναι δεύτερη εκ δύο μέσων.

Έστω τώρα ότι το $ΕΘ^2$ υπερέχει του $ΘΚ^2$ κατά τετράγωνο πλευράς ασύμμετρης με την ΕΘ. Δεδομένου ότι τα ΕΘ, ΘΚ είναι ασύμμετρα με το ΕΖ, η ΕΚ είναι έκτη δυώνυμος. Εάν όμως ορθογώνιο περιέχεται σε ρητή και έκτη δυώνυμο είναι ισεμβαδικό με τετράγωνο πλευράς μέσου συν μέσου εμβαδού (Π59, σελ. 290). Άρα το ευθύγραμμο τμήμα το τετράγωνο του οποίου είναι ισεμβαδικό με το ΑΔ είναι πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού.

Ομοίως αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα αν $ΑΒ < ΓΔ$.

Άρα αν προστεθούν δυο μέσα ασύμμετρα μεταξύ τους εμβαδά η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου είναι είτε δεύτερη εκ δύο μέσων είτε πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού. *Δ*

Παρατήρηση 1 Στις προηγούμενες προτάσεις ξεκινώντας από τη δυώνυμο, αυτή και τα άλογα ευθύγραμμα τμήματα που ακολούθησαν δεν είναι ίσα με τη μέση ούτε το ένα με το άλλο, αλλά ανήκουν σε διακριτές κατηγορίες αλόγων.

- Διότι το μεν τετράγωνο της μέσης, ισεμβαδικό με ορθογώνιο μιας πλευράς ρητής, η άλλη του πλευρά είναι ρητή και ασύμμετρη με την πρώτη ρητή πλευρά (Π22, σελ. 246).
- Το δε τετράγωνο δυωνύμου, ισεμβαδικό με ορθογώνιο ρητής πλευράς έχει την άλλη του πλευρά πρώτη δυώνυμο (Π60, σελ. 292).
- Το δε τετράγωνο πρώτης εκ δύο μέσων, ισεμβαδικό με ορθογώνιο ρητής πλευράς έχει την άλλη του πλευρά δεύτερη δυώνυμο (Π61, σελ. 293).

- Το δε τετράγωνο δεύτερης εκ δύο μέσων, ισεμβαδικό με ορθογώνιο ρητής πλεράς έχει την άλλη του πλευρά τρίτη δυώνυμο (Π62, σελ. 295).
- Το δε τετράγωνο μείζονος, ισεμβαδικό με ορθογώνιο ρητής πλεράς έχει την άλλη του πλευρά τέταρτη δυώνυμο (Π63, σελ. 296).
- Το δε τετράγωνο πλευράς ρητού συν μέσου εμβαδού, ισεμβαδικό με ορθογώνιο ρητής πλευράς έχει την άλλη του πλευρά πέμπτη δυώνυμο (Π64, σελ. 297).
- Το δε τετράγωνο πλευράς μέσου συν μέσου εμβαδού, ισεμβαδικό με ορθογώνιο ρητής πλευράς έχει την άλλη του πλευρά έκτη δυώνυμο (Π65, σελ. 298).

Όλες λοιπόν οι δεύτερες πλευρές του ισεμβαδικού ορθογωνίου με την πρώτη πλευρά ρητή, διαφέρουν και με την πρώτη πλευρά, αφού η πρώτη πλευρά είναι ρητή, αλλά και μεταξύ τους, αφού έχουν διαφορετική τάξη και έτσι αυτά τα άλογα τμήματα διαφέρουν μεταξύ τους.

Στμ: στις Προτάσεις 73 έως 78 ορίζονται οι «συζυγείς» παραστάσεις

- της δυωνύμου που ονομάζεται αποτομή (Π73, σελ. 308),
  - Δυώνυμος: $\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}$
  - Αποτομή: $\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}$

  με $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{\sigma_1/\sigma_2} \notin \mathbb{Q}$.
- του 1ου εκ δύο μέσων που ονομάζεται 1η αποτομή μέσης (Π74, σελ. 308),
  - 1ος εκ δύο μέσων: $\sqrt[4]{\sigma} + \frac{\rho}{\sqrt[4]{\sigma}}$
  - 1η αποτομή μέσης: $\sqrt[4]{\sigma} - \frac{\rho}{\sqrt[4]{\sigma}}$

  με $\sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$.
- του 2ου εκ δύο μέσων που ονομάζεται 2η αποτομή μέσης (Π75, σελ. 308),
  - 2ος εκ δύο μέσων: $\sqrt[4]{\sigma} + \frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{\rho}}$
  - 2η αποτομή μέσης: $\sqrt[4]{\sigma} - \frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{\rho}}$

με $\sqrt{\sigma}$, $\sqrt{\rho}$, $\sqrt{\sigma/\rho} \notin \mathbb{Q}$.

- του μείζονα που ονομάζεται ελάσσων (Π76, σελ. 309),

  – μείζων:

$$\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\sigma}{\rho^2}}}+\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\sigma}{\rho^2}}}$$

  – ελάσσων:

$$\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\sigma}{\rho^2}}}-\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\sigma}{\rho^2}}}$$

  με τους περιορισμούς $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{\sigma} \notin \mathbb{Q}$, $\rho > 2\sqrt{\sigma}$ και $\sqrt{\rho^2 - 4\sigma} \notin \mathbb{Q}$.

- της πλευράς ρητού συν μέσου εμβαδού που ονομάζεται πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου εμβαδού (Π77, σελ. 310),

  – πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού:

$$\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\rho^2}{\sigma}}}+\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\rho^2}{\sigma}}}$$

  – πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου εμβαδού:

$$\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\rho^2}{\sigma}}}-\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\rho^2}{\sigma}}}$$

  όπου $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}$, με $\sigma > 4\rho^2$ και $\sqrt{1 - 4\rho^2/\sigma} \notin \mathbb{Q}$.

- της πλευράς μέσου συν μέσου εμβαδού που ονομάζεται πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου εμβαδού (Π78, σελ. 310).

  – πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού:

$$\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\rho}{\sigma}}}+\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\rho}{\sigma}}}$$

  – πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου εμβαδού:

$$\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4\rho}{\sigma}}}-\frac{\sqrt[4]{\sigma}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4\rho}{\sigma}}}$$

όπου $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}$, με $\sqrt{\sigma}, \sqrt{\rho} \notin \mathbb{Q}$, $\sigma > 4\rho$, $\sqrt{\sigma/\rho} \notin \mathbb{Q}$ και $\sqrt{1-4\rho/\sigma} \notin \mathbb{Q}$.

Πρόταση 73 (695) *Αν από ρητό ευθύγραμμο τμήμα αφαιρεθεί ρητό το οποίο είναι προς το αρχικό τμήμα δυνάμει μόνο σύμμετρο, η διαφορά είναι άλογη και την ονομάζουμε* «αποτομή».

Απόδειξη. Από τη ρητή ΑΒ ας αφαιρεθεί η ΒΓ η οποία είναι δυνάμει μόνο σύμμετρη με την ΑΒ. Ισχυρίζομαι ότι η ΑΓ είναι άλογη (και την ονομάζουμε αποτομή).

Αφου τα ΑΒ, ΒΓ είναι ασύμμετρα και $\text{ΑΒ}/\text{ΒΓ} = \text{ΑΒ}^2/(\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ})$ (Λήμμα, Π21, σελ. 245), άρα το ΑΒ^2 είναι ασύμμετρο με το $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ (Π11, σελ. 236). Αλλά με το ΑΒ^2 είναι σύμμετρο το $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ (Π15, σελ. 238) ενώ το $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι σύμμετρο με το $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ (Π6, σελ. 232). Επειδή ισχύει $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2 = 2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}+\text{ΑΓ}^2$ (Β2, Π7, σελ. 65), συμπεραίνουμε ότι το $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ είναι ασύμμετρο με το ΑΓ^2 (Π13, σελ. 237 και Π16, σελ. 238). Είναι όμως ρητό το $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ άρα το ΑΓ είναι άλογο και το ονομάζουμε στο εξής «αποτομή»· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 74 (696) *Αν από μέσο ευθύγραμμο τμήμα αφαιρεθεί μέσο το οποίο ως προς το αρχικό είναι δυνάμει μόνο σύμμετρο και να σχηματίζει μαζί της ρητό ορθογώνιο, η διαφορά είναι άλογη και την ονομάζουμε* «πρώτη αποτομή μέσης».

Απόδειξη. Ας αφαιρεθεί από το μέσο ΑΒ το μέσο ΒΓ το οποίο είναι δυνάμει μόνο σύμμετρο με το ΑΒ και το $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ ρητό (Π27, σελ. 250). Ισχυρίζομαι ότι η διαφορά ΑΓ είναι άλογη, και στο εξής θα ονομάζεται πρώτη αποτομή μέσης.

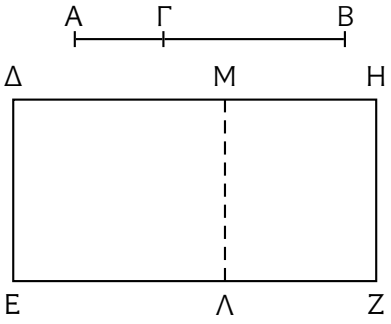
Αφού τα ΑΒ, ΒΓ είναι μέσα, μέσα είναι τα εμβαδά ΑΒ^2 και ΒΓ^2. Είναι και ρητό το $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ άρα το $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ είναι ασύμμετρο με το $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$. Άρα το $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι ασύμμετρο με το ΑΓ^2 (Β2, Π7, σελ. 65), αφού αν ολόκληρο είναι με ένα από αυτά ασύμμετρο και τα αρχικά είναι ασύμμετρα (Π16, σελ. 238). Είναι ρητό όμως το $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ άρα το ΑΓ^2 είναι άλογο, οπότε και το ΑΓ είναι άλογο και στο εξής ονομάζεται πρώτη αποτομή μέσης. Δ

Πρόταση 75 (696) *Αν από μέσο ευθύγραμμο τμήμα αφαιρεθεί μέσο το οποίο είναι δυνάμει μόνο σύμμετρο με το αρχικό και σχηματίζει μαζί του μέσο ορθογώνιο, η διαφορά τους είναι άλογη και την ονομάζουμε* «δεύτερη αποτομή μέσης».

Απόδειξη.

Ας αφαιρεθεί από το μέσο ΑΒ το μέσο και δυνάμει μόνο σύμμετρο ΒΓ με το $\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$ μέσο. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΓ είναι άλογο και στο εξής το ονομάζουμε δεύτερη αποτομή μέσης.

Ας θεωρήσουμε ρητή ΔΙ και ας κατασκευαστεί με αυτή την πλευρά ορθογώνιο ΔΕ εμβαδού ίσου με $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$ με πλάτος ΔΗ. Και πάλι με πλευρά την ΔΙ ας κατασκευαστεί ορθογώνιο ΔΘ πλάτους ΔΖ ισεμβαδικό με το $2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$. Ισχύει έτσι $\text{ΖΕ} = \text{ΑΓ}^2$ (Β2, Π7, σελ. 65).



Επειδή τα ΑΒ^2, ΒΓ^2 είναι μέσα και σύμμετρα, άρα και το ΔΕ είναι μέσο (Π15, σελ. 238, Πόρισμα, Π23, σελ. 247 και Π74, σελ. 308). Και έχει πλευρά ΔΙ ρητή με πλάτος ΔΗ, άρα η ΔΗ είναι ρητή και ασύμμετρη με τη ΔΙ (Π22, σελ. 246).

Πάλι επειδή το ορθογώνιο $\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$ είναι μέσο και άρα και το $2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$ (Πόρισμα, Π23, σελ. 247) και είναι ισεμβαδικό με το ΔΘ, άρα και το ΔΘ είναι μέσο με ρητή πλευρά την ΔΙ και πλάτος ΔΖ, οπότε το ΔΖ είναι ρητό και ασύμμετρο με το ΔΙ (Π22, σελ. 246). Επειδή τα ΑΒ, ΒΓ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, άρα μεταξύ τους είναι ασύμμετρα, οπότε το ΑΒ^2 είναι ασύμμετρο με το $\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$ (Π11, σελ. 236 και Λήμμα, Π21, σελ. 245). Αλλά τα ΑΒ^2, $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$ είναι σύμμετρα, τα $2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$, $\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$ σύμμετρα (Π6, σελ. 232) άρα το $2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$ είναι ασύμμετρο με το $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$ (Π13, σελ. 237). Έτσι τα ίσα τους ΔΕ, ΔΘ είναι ασύμμετρα και $|\Delta\text{Ε}|/|\Delta\Theta| = \text{ΗΔ}/\Delta\text{Ζ}$ (Β6, Π1, σελ. 142). Συνεπώς τα ΗΔ, ΔΖ είναι ασύμμετρα (Π11, σελ. 236). Και είναι και τα δύο ρητά άρα τα ρητά ΗΔ, ΔΖ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα. Συνεπώς το ΖΗ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308).

Είναι ρητό όμως το ΔΙ και το ορθογώνιο ρητής και αλόγου είναι άλογο (Π20, σελ. 242) και το ευθύγραμμο τμήμα με τετράγωνο ισεμβαδικό με αυτό είναι άλογο. Και ισχύει $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΖΕ}$, άρα το ΑΓ είναι άλογο, και στο εξής θα ονομάζεται δεύτερη αποτομή μέσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 76 (697) *Αν από ένα ευθύγραμμο τμήμα αφαιρεθεί ένα άλλο το οποίο είναι δυνάμει ασύμμετρο με το αρχικό και τα δύο αυτά τμήματα σχηματίζουν άθροισμα τετραγώνων ρητό και ορθογώνιο μέσο, η διαφορά τους είναι άλογη και θα την ονομάζουμε* «ελάσσονα».

Απόδειξη. Ας αφαιρεθεί από το ΑΒ το δυνάμει ασύμμετρο ΒΓ και ας είναι τέτοια που το $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$ να είναι ρητό και το $\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$ μέσο. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΓ είναι άλογο και θα το ονομάζουμε ελάσσων.

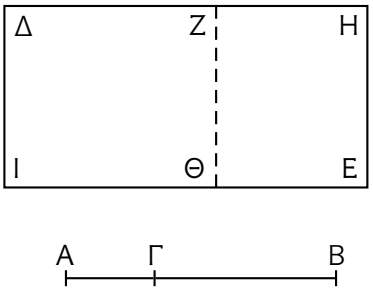
Πράγματι, επειδή το $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$ είναι ρητό και το $2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$ μέσο, άρα τα $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$, $2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$ είναι ασύμμετρα, και με αναστροφή τα $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$, είναι ασύμμετρο με το ΑΓ^2 (Π16, σελ. 238). Είναι και ρητό το $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$, άρα το ΑΓ^2 είναι άλογο, οπότε το ΑΓ είναι άλογο και θα ονομάζεται στο εξής ελάσσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 77 (697) *Αν από ένα ευθύγραμμο τμήμα αφαιρεθεί ένα άλλο το οποίο είναι δυνάμει ασύμμετρο με το αρχικό και τα δύο αυτά τμήματα σχηματίζουν άθροισμα τετραγώνων μέσο και το διπλάσιο ορθογώνιο ρητό, η διαφορά τους είναι άλογη και θα την ονομάζουμε* «πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου εμβαδού».

Απόδειξη. Ας αφαιρεθεί από το ΑΒ το ΒΓ δυνάμει ασύμμετρο με το ΑΒ ώστε να ικανοποιούνται οι υποθέσεις. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΓ είναι άλογο.

Πράγματι, επειδή το $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$ είναι μέσο και το $2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$ ρητό είναι μεταξύ τους ασύμμετρα και άρα και το υπόλοιπο (Β2, Π7, σελ. 65), το ΑΓ^2 είναι ασύμμετρο με το $2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$ (Π16, σελ. 238). Αλλά το $2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$ είναι ρητό άρα το ΑΓ^2 είναι άλογο, οπότε το ΑΓ είναι άλογο. Το ονομάζουμε πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου εμβαδού· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 78 (697) *Αν από ένα ευθύγραμμο τμήμα αφαιρεθεί ένα άλλο το οποίο είναι δυνάμει ασύμμετρο με το αρχικό και τα δύο αυτά τμήματα σχηματίζουν άθροισμα τετραγώνων μέσο και το διπλάσιο ορθογώνιο μέσο, και επιπλέον το άθροισμα των τετραγώνων είναι ασύμμετρο με το διπλάσιο ορθογώνιό τους, η διαφορά τους είναι άλογη και θα την ονομάζουμε* «πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου εμβαδού».



Απόδειξη. Αφαιρούμε από το ΑΒ το ΒΓ, τα οποία υποθέτουμε ότι είναι δυνάμει ασύμμετρα και ικανοποιούν τις υποθέσεις. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΓ είναι άλογο, το οποίο ονομάζουμε πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου εμβαδού.

Ας θεωρήσουμε ΔΙ ρητό και με αυτό για πλευρά κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΔΕ ισεμβαδικό με το $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$ που έχει πλάτος ΔΗ, και αφαιρούμε το ορθογώνιο ΔΘ πλάτους ΔΖ και ισεμβαδικό με το $2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$. Άρα το ΖΕ είναι ισεμβαδικό με το ΑΓ^2 (Β2, Π7, σελ. 65). Επειδή το $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$ είναι μέσο είναι και το ΔΕ μέσο, και έχει ρητή πλευρά τη ΔΙ. Άρα η άλλη του πλευρά, η ΔΗ είναι ρητή και ασύμμετρη με το ΔΙ (pref1022). Πάλι το $2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$ είναι μέσο, άρα είναι και το ΔΘ μέσο, με ρητή πλευρά τη ΔΙ, οπότε η άλλη του πλευρά, η ΔΖ, είναι ρητή και ασύμμετρη με τη ΔΙ (Π22,

σελ. 246). Αφού τα $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$, $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι ασύμμετρα, άρα είναι ασύμμετρα και τα ΔΕ, ΔΘ. Ισχύει και $|\Delta\text{Ε}|/|\Delta\Theta| = \Delta\text{Η}/\Delta\text{Ζ}$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142), άρα τα ΔΗ, ΔΖ είναι ασύμμετρα (ΠΙΙ, σελ. 236). Είναι όμως και ρητά άρα είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα.

Συνεπώς το ΖΗ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308), και επιπλέον το ΖΘ είναι ρητό. Το ορθογώνιο που περιέχεται σε ρητή και αποτομή είναι άλογο και το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τετράγωνο ισεμβαδικό με αυτό είναι άλογο. Και το τετράγωνο του ΑΓ είναι ισεμβαδικό με το ΖΕ. Άρα το ΑΓ είναι άλογο και στο εξής το ονομάζουμε πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου εμβαδού· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 79 (698) *Το ρητό ευθύγραμμο τμήμα το οποίο προστιθέμενο σε μια αποτομή είναι δυνάμει μόνο σύμμετρο με το άθροισμά τους είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω αποτομή ΑΒ στην οποία προστίθεται το ρητό ΒΓ ώστε τα ρητά ΑΓ, ΒΓ να είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π73, σελ. 308). Ισχυρίζομαι ότι δεν υπάρχει άλλο ευθύγραμμο τμήμα από το ΒΓ με αυτές τις ιδιότητες.

Διότι αν όχι, έστω ότι και για το ρητό ΒΔ ισχύει ότι τα ΑΔ, ΒΔ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π73, σελ. 308). Όσο υπερέχει το $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΒΔ}^2$ του $2\text{ΑΔ}\cdot\text{ΒΔ}$ τόσο υπερέχει το $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$ του $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$, αφού και οι δύο υπεροχές είναι ίσες με ΑΒ^2 (Β2, Π7, σελ. 65). Εναλλάξ τώρα όσο υπερέχει το $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΒΔ}^2$ του $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$ τόσο υπερέχει το $2\text{ΑΔ}\cdot\text{ΒΔ}$ του $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$. Αλλά η διαφορά των δύο πρώτων είναι ρητή αφού και το $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΒΔ}^2$ και το $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$ είναι ρητά. Άρα η διαφορά των $2\text{ΑΔ}\cdot\text{ΒΔ}$, $2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}$ είναι ρητή, το οποίο είναι άτοπο. Πράγματι, και τα δύο είναι μέσα (Π21, σελ. 245) και δεν γίνεται μέσο να υπερέχει μέσου κατά ρητό (Π26, σελ. 249). Άρα δεν μπορούμε να προσθέσουμε στην ΑΒ άλλη ρητή ώστε αυτή και το άθροισμα να είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα.

Συνεπώς, το ρητό ευθύγραμμο τμήμα το οποίο προστιθέμενο σε μια αποτομή είναι δυνάμει μόνο σύμμετρο με το άθροισμά τους είναι μοναδικό· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 80 (699) *Το μέσο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο προστιθέμενο σε πρώτη αποτομή μέσου είναι δυνάμει μόνο σύμμετρο με το άθροισμά τους και με το άθροισμα αυτό σχηματίζει ρητό ορθογώνιο είναι μοναδικό.*

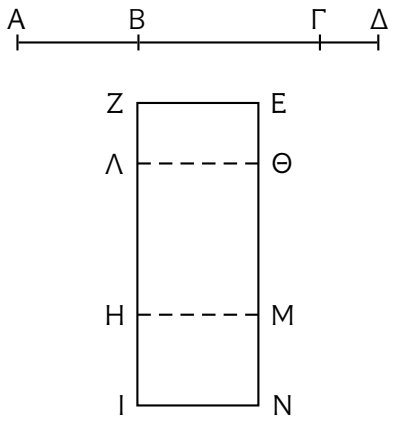
Απόδειξη. Έστω ΑΒ πρώτη αποτομή μέσης και της προσθέτουμε τη ΒΓ ώστε τα ΑΓ, ΓΒ να είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα σχηματίζοντας ρητό ορθογώνιο το $\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$ (Π74, σελ. 308). Ισχυρίζομαι ότι δεν υπάρχει άλλο από το ΒΓ μέσο ευθύγραμμο τμήμα που μπορεί να προστεθεί στο ΑΒ και να έχει τις ίδιες ιδιότητες.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει το ΔΒ με τις ίδιες ιδιότητες. Άρα τα μέσα ΑΔ, ΔΒ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα και σχηματίζουν ρητό ορθογώνιο, το $\text{ΑΔ}\cdot\Delta\text{Β}$ (Π74, σελ. 308). Όσο υπερέχει το $\text{ΑΔ}^2 + \Delta\text{Β}^2$ του $2\text{ΑΔ}\cdot\Delta\text{Β}$ τόσο

υπερέχει το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ του $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$, διότι και οι δύο υπεροχές είναι ίσες με ΑΒ^2 (Β2, Π7, σελ. 65). Εναλλάξ τώρα όσο υπερέχει το $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ του $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ τόσο υπερέχει το $2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ}$ του $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$. Η τελευταία αυτή υπεροχή είναι ρητή αφού τα $2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ}$, $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ είναι ρητά. Άρα ρητή είναι η υπεροχή του $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ από το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$. Αυτό όμως είναι αδύνατο διότι είναι και τα δύο μέσα (Π24, σελ. 247) και μέσο δεν υπερέχει μέσου κατά ρητό (Π26, σελ. 249).

Άρα το μέσο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο προστιθέμενο σε πρώτη αποτομή μέσου είναι δυνάμει μόνο σύμμετρο με το άθροισμά τους και με το άθροισμα αυτό σχηματίζει ρητό ορθογώνιο είναι μοναδικό· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 81 (699) *Το μέσο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο προστιθέμενο σε δεύτερη αποτομή μέσου είναι δυνάμει μόνο σύμμετρο με το άθροισμά τους και με το άθροισμα αυτό σχηματίζει μέσο ορθογώνιο είναι μοναδικό.*



Απόδειξη. Έστω ότι το ΑΒ είναι δεύτερη αποτομή μέσης και προσθέτουμε το ΒΓ με τις παραπάνω ιδιότητες. Ισχυρίζομαι ότι δεν υπάρχει άλλο ευθύγραμμο τμήμα με τις ίδιες με το ΒΓ ιδιότητες.

Αν όχι, έστω ότι το ΒΔ είναι ένα άλλο. Άρα τα ΑΔ, ΔΒ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα και σχηματίζουν μέσο ορθογώνιο το $\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ}$ (Π75, σελ. 308). Θεωρούμε ρητό ΕΖ στο οποίο κατασκευάζουμε το ορθογώνιο ΕΗ με πλευρά ΕΖ και ισεμβαδικό με το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ έχοντας πλάτος το ΕΜ. Και αφαιρούμε το ΘΗ ισεμβαδικό με το $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ και πλάτος το ΘΜ. Άρα το υπόλοιπο ΕΛ είναι ισεμβαδικό με το ΑΒ^2 (Β2, Π7, σελ. 65), οπότε το $\text{ΑΒ}^2 = |\text{ΕΛ}|$.

Πάλι τώρα ας κατασκευάσουμε με πλευρά την ΕΖ ισεμβαδικό ορθογώνιο ΕΙ με το $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ με πλευρά ΕΝ. Είναι και $|\text{ΕΛ}| = \text{ΑΒ}^2$, άρα το υπόλοιπο $|\text{ΘΙ}| = 2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ}$ (Π7, σελ. 65). Αλλά τα ΑΓ, ΓΒ είναι μέσα άρα και το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 = |\text{ΕΗ}|$ είναι μέσο, άρα το ΕΗ είναι μέσο. Έχει και ρητή πλευρά την ΕΖ, άρα η άλλη πλευρά του, η ΕΜ είναι ρητή και ασύμμετρη με την ΕΖ (Π22, σελ. 246).

Επιπλέον, επειδή το $\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ είναι μέσο, είναι και το $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ (Πόρισμα, Π23, σελ. 247), και είναι ίσο με το $|\text{ΘΗ}|$, άρα το ΘΗ είναι μέσο. Έχει και ρητή πλευρά την ΕΖ άρα η άλλη του πλευρά, η ΘΜ, είναι ρητή και ασύμμετρη με την ΕΖ (Π22, σελ. 246).

Επειδή τα ΑΓ, ΓΒ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, άρα είναι μεταξύ τους ασύμμετρα. Ισχύει και $\text{ΑΓ}/\text{ΓΒ} = \text{ΑΓ}^2/(\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ})$ (Πόρισμα, Π21, σελ. 245), οπότε τα ΑΓ^2, $\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$ είναι ασύμμετρα (Π11, σελ. 236). Αλλά τα ΑΓ^2, $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2$ είναι σύμμετρα, και τα $\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$, $2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$ ομοίως, συνεπώς τα $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2 = |\text{ΕΗ}|$, $2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ} = |\text{ΗΘ}|$ είναι σύμμετρα (Π13, σελ. 237). Ισχύει και $|\text{ΕΗ}|/|\text{ΗΘ}| = \text{ΕΜ}/\text{ΘΜ}$ (Β6, Π1, σελ. 142), άρα τα ΕΜ, ΜΘ είναι ασύμμετρα (Π11, σελ. 236) και είναι και ρητά. Έτσι τα ρητά ΕΜ, ΜΘ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, οπότε το ΕΘ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308) με πλευρά την ΘΜ.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και η ΘΝ προστίθεται στη ΕΘ με τις ίδιες ιδιότητες όπως και η ΘΜ το οποίο είναι αδύνατον (Π79, σελ. 311).

Άρα το μέσο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο προστιθέμενο σε δεύτερη αποτομή μέσου είναι δυνάμει μόνο σύμμετρο με το άθροισμά τους και με το άθροισμα αυτό σχηματίζει μέσο ορθογώνιο είναι μοναδικό· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 82 (700) *Το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο προστιθέμενο σε ελάσσωνα είναι δυνάμει ασύμμετρο με το άθροισμά τους και με το άθροισμα αυτό σχηματίζει ρητό άθροισμα τετραγώνων και το διπλάσιο ορθογώνιο μέσο είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω ΑΒ ελάσσων στην οποία προστίθεται η ΒΓ ώστε τα ΑΓ, ΓΒ να είναι δυνάμει ασύμμετρα με άθροισμα τετραγώνων ρητό και διπλάσιο ορθογώνιο μέσο (Π76, σελ. 309). Ισχυρίζομαι ότι ΒΓ με αυτές τις ιδιότητες είναι μοναδικό.

Ας είναι και το ΒΔ με τις ίδιες ιδιότητες. Άρα τα ΑΔ, ΔΒ είναι δυνάμει ασύμμετρα και ικανοποιούνται τα παραπάνω. Όσο υπερέχει το $\text{ΑΔ}^2+\text{ΔΒ}^2$ του $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2$ τόσο υπερέχει και το $2\text{ΑΔ}\cdot\text{ΔΒ}$ του $2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$ (Β2, Π7, σελ. 65 και Π79, σελ. 311). Η υπεροχή του $\text{ΑΔ}^2+\text{ΔΒ}^2$ από το $\text{ΑΓ}^2+\text{ΓΒ}^2$ είναι ρητή γιατί είναι ρητά και τα δύο. Άρα ρητή είναι και η υπεροχή του $2\text{ΑΔ}\cdot\text{ΔΒ}$ από το $2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}$. Αυτό είναι αδύνατο γιατί και τα δύο είναι μέσα.

Άρα το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο προστιθέμενο σε ελάσσονα είναι δυνάμει ασύμμετρο με το άθροισμά τους και με το άθροισμα αυτό σχηματίζει ρητό άθροισμα τετραγώνων και το διπλάσιο ορθογώνιο μέσο είναι μοναδικό· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

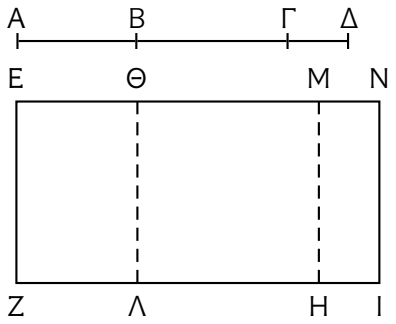
Πρόταση 83 (701) *Το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο προστιθέμενο σε πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου εμβαδού είναι δυνάμει ασύμμετρο με το άθροισμά τους και με το άθροισμα αυτό σχηματίζει μέσο άθροισμα τετραγώνων και το διπλάσιο ορθογώνιο ρητό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το ΑΒ είναι πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου εμβαδού στο οποίο προστίθεται το ΒΓ με τις παραπάνω ιδιότητες. Ισχυρίζομαι ότι δεν υπάρχει άλλο ευθύγραμμο τμήμα με αυτές τις ιδιότητες εκτός του ΒΓ.

Αν όχι τότε ας υποθέσουμε ότι και το ΒΔ προστιθέμενο στο ΑΒ έχει τις ίδιες ιδιότητες με το ΒΓ. Όσο υπερέχει το $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ του $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ τόσο υπερέχει και το $2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ}$ του $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$, αλλά αυτή η τελευταία υπεροχή είναι ρητή διότι και τα δύο αυτά ορθογώνια είναι ρητά. Άρα και η υπεροχή του $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$ από το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ είναι ρητή το οποίο είναι αδύνατο αφού αυτά είναι και τα δύο μέσα (Π26, σελ. 249).

Συνεπώς το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο προστιθέμενο σε πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου εμβαδού είναι δυνάμει ασύμμετρο με το άθροισμά τους και με το άθροισμα αυτό σχηματίζει μέσο άθροισμα τετραγώνων και το διπλάσιο ορθογώνιο ρητό είναι μοναδικό· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 84 (701) *Το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο προστιθέμενο σε πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου εμβαδού είναι δυνάμει ασύμμετρο με το άθροισμά τους και με το άθροισμα αυτό σχηματίζει μέσο άθροισμα τετραγώνων και το διπλάσιο ορθογώνιο μέσο και ασύμμετρο με το άθροισμα των τετραγώνων, είναι μοναδικό.*



Απόδειξη. Έστω ότι το ΑΒ είναι πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου εμβαδού στο οποίο προστίθεται το ΒΓ με τις παραπάνω ιδιότητες. Ισχυρίζομαι ότι δεν υπάρχει άλλο ευθύγραμμο τμήμα με αυτές τις ιδιότητες εκτός του ΒΓ.

Αν όχι τότε ας υποθέσουμε ότι και το ΒΔ προστιθέμενο στο ΑΒ έχει τις ίδιες ιδιότητες με το ΒΓ. Θεωρούμε ρητό ΕΖ και κατασκευάζουμε με αυτή για πλευρά ορθογώνιο ΕΗ ισεμβαδικό με το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ έχοντας πλάτος ΕΜ. Και ομοίως με πλευρά την ΕΖ ορθογώνιο ΘΗ πλάτους ΘΜ ισεμβαδικό με το $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$. Για το υπόλοιπο θα είναι $\text{ΑΒ}^2 = |\text{ΕΛ}|$ (Β2, Π7, σελ. 65).

Πάλι με πλευρά το ΕΖ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΕΙ πλάτους ΕΝ ισεμβαδικό με το $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΒ}^2$. Και επειη $\text{ΑΒ}^2 = |\text{ΕΛ}|$ θα ισχύει $2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΒ} = |\text{ΙΘ}|$ (Β2, Π7, σελ. 65). Το $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$ άρα και το ΕΗ με ρητή τη ΕΖ, άρα ρητή είναι και η ΕΜ και ασύμμετρη με την ΕΖ (Π22, σελ. 246). Πάλι επειδή το $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ είναι μέσο και ίσο με το $|\text{ΘΗ}|$ είναι και το ΘΗ μέσο. Έχει και ρητή την πλευρά του ΕΖ άρα και η ΘΜ είναι ρητή και ασύμμετρη με την ΕΖ (Π22, σελ. 246).

Αφού τα $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2$, $2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ είναι ασύμμετρα θα είναι ασύμμετρα και τα ΕΗ, ΘΗ, άρα και τα ΕΜ, ΜΘ είναι ασύμμετρα (Β6, Π1, σελ. 142 και Π11, σελ. 236). Και είναι και τα δύο ρητά. Οπότε τα ΕΜ, ΜΘ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα, άρα το ΕΘ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308) προσθέτοντας σε αυτή τη ΘΜ.

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι η ΕΘ είναι και πάλι αποτομή προσθέτοντας τη ΘΝ.

Προς την αποτομή λοιπόν προστίθεται και δεύτερο ρητό ευθύγραμμο τμήμα η οποία είναι δυνάμει μόνο σύμμετρο με το άθροισμα, το οποίο είναι αδύνατον (Π79, σελ. 311).

Συνεπώς, το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο προστιθέμενο σε πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου εμβαδού είναι δυνάμει ασύμμετρο με το άθροισμά τους και με το άθροισμα αυτό σχηματίζει μέσο άθροισμα τετραγώνων και το διπλάσιο ορθογώνιο μέσο και ασύμμετρο με το άθροισμα των τετραγώνων, είναι μοναδικό· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Στμ: Ακολουθεί η κατηγοριοποίηση των αποτομών σε έξι κατηγορίες, σε πλήρη αντιστοιχία με την κατηγοριοποίηση των δυωνύμων. Οι σύγχρονες μαθηματικές εκφράσεις για αυτές τις έξι αποτομές είναι οι αντίστοιχες των έξι δυωνύμων στη σελίδα 277 όπου αντί να προσθέτουμε τα δύο μονώνυμα αφαιρούμε από το μεγαλύτερο το μικρότερο.

Θα ονομάζουμε «προσαρμόζουσα» της αποτομής το ευθύγραμμο τμήμα που αφαιρείται από το «όλον» για τον σχηματισμό της αποτομής.

Ορισμοί 3 (702) Έστω ότι έχει καθοριστεί ρητό μήκος και έχει δοθεί αποτομή με το τετράγωνο του όλου ευθύγραμμου τμήματος να υπερέχει του τετραγώνου της προσαρμόζουσας κατά τετράγωνο πλευράς σύμμετρης με το όλο ευθύγραμμο τμήμα. Τότε

(ορ. 1) αν και το όλο ευθύγραμμο τμήμα είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό μήκος, η αποτομή ονομάζεται *πρώτη αποτομή*.

(ορ. 2) αν η προσαρμόζουσα είναι σύμμετρη με το αρχικό ρητό μήκος, η αποτομή ονομάζεται *δεύτερη αποτομή*.

(ορ. 3) αν ούτε το όλο ούτε η προσαρμόζουσα είναι σύμμετρα με το αρχικό ρητό μήκος, η αποτομή ονομάζεται *τρίτη αποτομή*.

Έστω και πάλι ότι έχει καθοριστεί ρητό μήκος και έχει δοθεί αποτομή με το τετράγωνο του όλου ευθύγραμμου τμήματος να υπερέχει του τετραγώνου της προσαρμόζουσας κατά τετράγωνο πλευράς, αυτή τη φορά, *ασύμμετρης* με το όλο ευθύγραμμο τμήμα. Τότε

(ορ. 4) αν και το όλο ευθύγραμμο τμήμα είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό μήκος, η αποτομή ονομάζεται *τέταρτη αποτομή*.

(ορ. 5) αν η προσαρμόζουσα είναι σύμμετρη με το αρχικό ρητό μήκος, η αποτομή ονομάζεται *πέμπτη αποτομή*.

(ορ. 6) αν ούτε το όλο ούτε η προσαρμόζουσα είναι σύμμετρα με το αρχικό ρητό μήκος, η αποτομή ονομάζεται *έκτη αποτομή*.

Στμ: Όπως και στα δυώνυμα ευθύγραμμα τμήματα, οι αποδείξεις των επόμενων έξι προτάσεων κατασκευάζουν *καθένα* από τα έξι είδη αποτομής, συνεπώς έτσι θα πρέπει να καταλάβουμε τις διατυπώσεις τους: ως κατασκευή της κλάσης καθεμιάς αποτομής και όχι μιας συγκεκριμένης. Σήμερα δηλαδή θα διατυπώναμε τις προτάσεις που ακολουθούν και λένε «να βρεθεί η X αποτομή» με τη φράση: «να κατασκευαστεί κάθε X αποτομή», όπου X «πρώτη», «δεύτερη», «τρίτη» «τέταρτη», «πέμπτη» ή «έκτη».

Πρόταση 85 (703) *Να βρεθεί η πρώτη αποτομή.*

Απόδειξη. Έστω ότι το α είναι ρητό ευθύγραμμο τμήμα και το ΒΗ σύμμετρο με αυτό, άρα και το ΒΗ είναι ρητό. Θεωρούμε δυο τετράγωνους (φυσικούς) αριθμούς ΔΕ, ΕΖ των οποίων η διαφορά να μην είναι τετράγωνος (Λήμμα Ι, Π28, σελ. 250)· οπότε το $\text{ΕΔ}/\text{ΔΖ}$ είναι λόγος τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό. Βρίσκουμε σημείο Γ ώστε $\text{ΕΔ}/\text{ΔΖ} = \text{ΒΗ}^2/\text{ΗΓ}^2$ (Πόρισμα, Π6, σελ. 232)· άρα τα ΒΗ^2, ΗΓ^2 είναι σύμμετρα (Π6, σελ. 232). Και αφού το ΒΗ^2 είναι ρητό, είναι ρητό και το ΗΓ^2, οπότε και το ΗΓ ρητό. Ο λόγος $\text{ΒΗ}^2/\text{ΗΓ}^2$ δεν είναι λόγος τετράγωνων αριθμών (αφού ο $\text{ΕΔ}/\text{ΔΖ}$ δεν είναι) άρα τα ΒΗ, ΗΓ είναι ασύμμετρα, είναι και ρητά, άρα το ΒΓ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308). Ισχυρίζομαι ότι είναι πρώτη αποτομή.

Έστω ότι η υπεροχή του ΒΗ^2 από το ΗΓ^2 είναι το θ^2 (Λήμμα, Π13, σελ. 237). Αναστρέφοντας την $\text{ΕΔ}/\text{ΔΖ} = \text{ΒΗ}^2/\text{ΗΓ}^2$ παίρνουμε $\text{ΔΕ}/\text{ΕΖ} = \text{ΗΒ}^2/\theta^2$ (Πόρισμα, Β5, Π19, σελ. 136). Ο λόγος $\text{ΔΕ}/\text{ΕΖ}$ είναι τετράγωνος προς τετράγωνο (φυσικός) αριθμός άρα και το $\text{ΗΒ}^2/\theta^2$ συνεπώς τα ΗΒ, θ είναι σύμμετρα (Π9, σελ. 233). Έτσι τα ΒΗ και $\sqrt{\text{ΒΗ}^2 - \text{ΗΓ}^2} = \theta$ είναι σύμμετρα, ενώ το όλο ΒΗ είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό α. Άρα το ΒΓ είναι πρώτη αποτομή.

Βρέθηκε λοιπόν η πρώτη αποτομή ΒΓ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν. *Δ*

Πρόταση 86 (703) *Να βρεθεί η δεύτερη αποτομή.*

Απόδειξη. Ας ληφθεί η ρητή α και με αυτή σύμμετρο το ΗΓ, άρα είναι και αυτό ρητό. Θεωρούμε δυο τετράγωνους (φυσικούς) αριθμούς ΔΕ, ΕΖ των οποίων η διαφορά να μην είναι τετράγωνος (Λήμμα Ι, Π28, σελ. 250). Βρίσκουμε σημείο Β ώστε να ισχύει $\text{ΖΔ}/\text{ΔΕ} = \text{ΓΗ}^2/\text{ΗΒ}^2$ (Πόρισμα, Π6,

σελ. 232). Άρα το ΓH^2 είναι σύμμετρο με το HB^2 (Π6, σελ. 232). Είναι και ρητό το ΓH^2 άρα ρητό είναι και το HB^2, οπότε και η HB. Αφού ο λόγος $H\Gamma^2/HB^2$ δεν είναι λόγος τετράγωνων αριθμών συμπεραίνουμε ότι τα ΓΗ, ΗΒ είναι ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Είναι και τα δύο ρητά, δυνάμει μόνο σύμμετρα, άρα το ΒΓ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308). Ισχυρίζομαι τώρα ότι είναι δεύτερη αποτομή.

Διότι ας είναι θ^2 η υπεροχή του BH^2 από το $H\Gamma^2$ (Λήμμα, Π13, σελ. 237). Επειδή λοιπόν $BH^2/H\Gamma^2 = E\Delta/\Delta Z$, με αναστροφή θα ισχύει $BH^2/\theta^2 = \Delta E/EZ$ (Πόρισμα, Β5, Π19, σελ. 136). Οι ΔΕ, ΕΖ είναι και οι δύο τετράγωνοι (φυσικοί) αριθμοί άρα το BH^2/θ^2 είναι λόγος τετραγώνων, οπότε τα ΒΗ, θ είναι σύμμετρα (Π29, σελ. 254), άρα είναι σύμμετρα τα ΒΗ, $\sqrt{BH^2 - H\Gamma^2} = \theta$. Και η προσαρμόζουσα ΓΗ είναι σύμμετρη με το αρχικό ρητό α. Συνεπώς το ΒΓ είναι δεύτερη αποτομή· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν. Δ

Πρόταση 87 (704) *Να βρεθεί η τρίτη αποτομή.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε ρητό α και τρεις αριθμούς ε, ΒΓ, ΓΔ που δεν έχουν μεταξύ τους λόγο τετράγωνο προς τετράγωνο (φυσικό) αριθμό, με τον ΒΓ/ΒΔ να είναι λόγος τετράγωνου προς τετράγωνο, και ας βρεθεί Ζ ώστε $\varepsilon/B\Gamma = \alpha^2/ZH^2$ (Λήμμα 1, Π28, σελ. 250) και σημείο Θ ώστε $B\Gamma/\Gamma\Delta = ZH^2/H\Theta^2$.

Επειδή λοιπόν $\varepsilon/B\Gamma = \alpha^2/ZH^2$ τα α^2, ZH^2 είναι σύμμετρα (Π6, σελ. 232). Είναι και ρητό το α^2 άρα ρητό είναι και το ZH^2, οπότε το ΖΗ είναι ρητό. Και αφού $\varepsilon/B\Gamma$ δεν είναι λόγος τετράγωνων το ίδιο ισχύει για το α^2/ZH^2, οπότε τα α, ΖΗ είναι ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Πάλι επειδή $B\Gamma/\Gamma\Delta = ZH^2/H\Theta^2$, το ZH^2 είναι σύμμετρο με το $H\Theta^2$ (Π6, σελ. 232). Είναι ρητό το ZH^2 άρα και το $H\Theta^2$ άρα και το ΗΘ είναι ρητό. Αλλά ο λόγος ΒΓ/ΓΔ δεν είναι λόγος τετράγωνων αριθμών, οπότε τα ΖΗ, ΗΘ είναι ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Και είναι και τα δύο ρητά, άρα τα ρητά ΖΗ, ΗΘ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, οπότε το ΖΘ είναι αποτομή. Ισχυρίζομαι ότι είναι τρίτη αποτομή.

Πράγματι, αφού $\varepsilon/B\Gamma = \alpha^2/ZH^2$ και $B\Gamma/\Gamma\Delta = ZH^2/H\Theta^2$, δ' ίσου άρα είναι $\varepsilon/\Gamma\Delta = \alpha^2/H\Theta^2$ (Β5, Π22, σελ. 137). Αλλά ο λόγος $\varepsilon/\Gamma\Delta$ δεν είναι λόγος τετράγωνων, άρα ούτε και ο λόγος $\alpha^2/H\Theta^2$, οπότε τα α, ΗΘ είναι ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Καμιά λοιπόν από τις ΖΗ, ΘΗ δεν είναι σύμμετρη με το αρχικό τμήμα α. Έστω λοιπόν $\kappa^2 = ZH^2 - H\Theta^2$ (Λήμμα, Π13, σελ. 237). Επειδή λοιπόν είναι $B\Gamma/\Gamma\Delta = ZH^2/H\Theta^2$, αναστρέφοντας παίρνουμε $B\Gamma/B\Delta = ZH^2/\kappa^2$ (Πόρισμα, Β5, Π19, σελ. 136). Αλλά ο λόγος ΒΓ/ΒΔ είναι λόγος τετράγωνων, άρα και ο ZH^2/κ^2, οπότε τα ΖΗ, κ είναι σύμμετρα (Π9, σελ. 233). δηλαδή τα ΖΗ, $\sqrt{ZH^2 - H\Theta^2} = \kappa$ είναι σύμμετρα. Και καμιά από τις ΖΗ, ΘΗ δεν είναι σύμμετρη με το αρχικό α, άρα το ΖΘ είναι τρίτη αποτομή.

Βρέθηκε λοιπόν η τρίτη αποτομή ΖΘ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν. Δ

Πρόταση 88 (705) *Να βρεθεί η τέταρτη αποτομή.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ρητό α και σύμμετρο με αυτό το ευθύγραμμο τμήμα ΒΗ, οπότε είναι και αυτό ρητό. Θεωρούμε επίσης δυο αριθμούς ΔΖ, ΖΕ ώστε το άθροισμά τους ΔΕ να μην έχει με κανένα από τα ΔΖ, ΖΕ λόγο τετράγωνου αριθμού προς τετράγωνο αριθμό. Θεωρούμε επίσης σημείο Γ ώστε $\Delta E/EZ = BH^2/H\Gamma^2$ (Πόρισμα, Π6, σελ. 232), άρα το BH^2 είναι σύμμετρο με το $H\Gamma^2$ (Π6, σελ. 232). Το BH^2 είναι ρητό, άρα ρητό είναι και το $H\Gamma^2$ άρα και το ΗΓ. Και επειδή ο λόγος ΔΕ/ΕΖ δεν είναι λόγος τετράγωνων, ούτε και ο $BH^2/H\Gamma^2$ είναι, συνεπώς τα ΒΗ, ΗΓ είναι ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Είναι και τα δύο ρητά και επιπλέον δυνάμει μόνο σύμμετρα, οπότε το ΒΓ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308). Ισχυρίζομαι ότι είναι τέταρτη αποτομή.

Πράγματι, θέτουμε $\theta^2 = NH^2 - H\Gamma^2$ (Λήμμα, Π13, σελ. 237). Επειδή $\Delta E/EZ = BH^2/H\Gamma^2$, με αναστροφή θα ισχύει $E\Delta^2/\Delta Z^2 = HB^2/\theta^2$ (Πόρισμα, Β5, Π19, σελ. 136). Ο λόγος ΕΔ/ΔΖ δεν είναι λόγος τετράγωνων, άρα ούτε ο HB^2/θ^2, και συνεπώς τα ΒΗ, θ είναι ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Άρα τα ΒΗ, $\sqrt{BH^2 - H\Gamma^2} = \theta$ είναι ασύμμετρα ενώ όλο το ΒΗ είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό α. Άρα το ΒΓ είναι τέταρτη αποτομή.

Βρέθηκε λοιπόν η τέταρτη αποτομή· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν. Δ

Πρόταση 89 (706) *Να βρεθεί η πέμπτη αποτομή.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ρητό α και προς αυτό σύμμετρο το ΗΓ, οπότε και αυτό είναι ρητό. Θεωρούμε επίσης αριθμούς ΔΖ, ΖΕ ώστε το άθροισμα ΔΕ να μην έχει λόγο τετράγωνων αριθμών ούτε με το ΔΖ ούτε με το ΖΕ. Επίσης βρίσκουμε σημείο Γ ώστε $ZE/E\Delta = \Gamma H^2/HB^2$. Άρα και το HB^2 είναι ρητό, άρα και το ΗΒ. Και επειδή $\Delta E/EZ = BH^2/H\Gamma^2$ και το ΔΕ/ΕΖ δεν είναι λόγος τετραγώνων, ούτε και το $BH^2/H\Gamma^2$ είναι λόγος τετραγώνων, άρα τα ΒΗ, ΗΓ είναι ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Είναι λοιπόν ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα, οπότε το ΒΓ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308). Ισχυρίζομαι ότι είναι πέμπτη αποτομή.

Πράγματι, θέτουμε $\theta = BH^2 - H\Gamma^2$. Επειδή είναι $BH^2/H\Gamma^2 = \Delta E/EZ$, με αναστροφή θα ειαι $E\Delta/\Delta Z = BH^2/\theta^2$ (Πόρισμα, Β5, Π19, σελ. 136). Αλλά ο λόγος ΕΔ/ΔΖ δεν είναι λόγος τετράγωνων άρα ούτε και ο BH^2/θ^2, συνεπώς υτα ΒΗ, θ είναι ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Άρα τα ΗΒ, $\sqrt{BH^2 - H\Gamma^2} = \theta$ είναι ασύμμετρα, ενώ η προσαρμόζουσα ΗΓ είναι σύμμετρη με το αρχικό ρητό α. Οπότε η ΒΓ είναι πέμπτη αποτομή.

Βρέθηκε λοιπόν η πέμπτη αποτομή ΒΓ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν. Δ

Πρόταση 90 (706) *Να βρεθεί η έκτη αποτομή.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ρητό α και τρεις (φυσικούς) αριθμούς ε, ΒΓ, ΓΔ ώστε κανένα ζευγάρι από αυτούς να μην έχει λόγο τετράγωνων αριθμών, ούτε ο λόγος ΓΒ/ΒΔ να μην είναι λόγος τετράγωνων, και θεωρούμε σημεία Ζ, Η και Θ ώστε $\varepsilon/\text{ΒΓ}^2 = \alpha^2/\text{ΖΗ}^2$ και $\text{ΒΓ}/\text{ΓΔ} = \text{ΖΗ}^2/\text{ΗΘ}^2$.

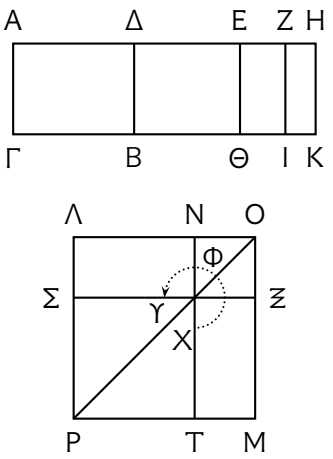
Επειδή λοιπόν είναι $\varepsilon/\text{ΒΓ} = \alpha^2/\text{ΖΗ}^2$ τα α^2, ΖΗ^2 είναι σύμμετρα (Π6, σελ. 232). Το α^2 είναι ρητό, άρα ρητό είναι και το ΖΗ^2, οπότε και το ΖΗ. Και αφού ο λόγος $\varepsilon/\text{ΒΓ}$ δεν είναι λόγος τετράγωνων, ούτε και ο $\alpha^2/\text{ΖΗ}^2$ είναι, συνεπώς τα α, ΖΗ είναι ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Επιπλέον, επειδή $\text{ΒΓ}/\text{ΓΔ} = \text{ΖΗ}^2/\text{ΗΘ}^2$ τα ΖΗ^2, ΗΘ^2 είναι σύμμετρα (Π6, σελ. 232). Το ΖΗ^2 είναι ρητό άρα ρητό είναι το ΗΘ^2 άρα και το ΗΘ. Αλλά ο λόγος ΒΓ/ΓΔ δεν είναι λόγος τετράγωνων άρα ούτε και ο λόγος $\text{ΖΗ}^2/\text{ΗΘ}^2$ είναι, και συνεπώς τα ΖΗ, ΗΘ είναι ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Αλλά είναι και τα δύο ρητά και είναι λοιπόν δυνάμει μόνο σύμμετρα, συνεπώς το ΖΘ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308). Ισχυρίζομαι τώρα ότι είναι έκτη αποτομή.

Πράγματι, επειδή $\varepsilon/\text{ΒΓ} = \alpha^2/\text{ΖΗ}^2$ και $\text{ΒΓ}/\text{ΓΔ} = \text{ΖΗ}^2/\text{ΗΘ}^2$, δι' ίσου θα πάρουμε $\varepsilon/\text{ΓΔ} = \alpha^2/\text{ΗΘ}^2$ (Β5, Π22, σελ. 137). Όμως ο λόγος $\varepsilon/\text{ΓΔ}$ δεν είναι λόγος τετράγωνων άρα ούτε και ο λόγος $\alpha^2/\text{ΗΘ}^2$ είναι, συνεπώς τα α, ΗΘ είναι ασύμμετρα (Π9, σελ. 233). Έτσι, κανένα από τα ΖΗ, ΗΘ δεν είναι σύμμετρο με το ρητό α. Θέτουμε τώρα $\kappa = \sqrt{\text{ΖΗ}^2 - \text{ΗΘ}^2}$. Επειδή $\text{ΒΓ}/\text{ΓΔ} = \text{ΖΗ}^2/\text{ΗΘ}^2$, αναστρέφοντας θα πάρουμε $\text{ΓΒ}/\text{ΒΔ} = \text{ΖΗ}^2/\kappa^2$ (Πόρισμα, Β5, Π19, σελ. 136). Αλλά ο λόγος ΓΒ/ΒΔ δεν είναι λόγος τετράγωνων άρα ούτε και ο $\text{ΖΗ}^2/\kappa^2$ είναι και συνεπώς τα ΖΗ, κ είναι ασύμμετρα. Συμπεραίνουμε ότι τα ΖΗ, $\sqrt{\text{ΖΗ}^2 - \text{ΗΘ}^2} = \kappa$ είναι ασύμμετρα και κανένα από τα ΖΗ, ΗΘ δεν είναι σύμμετρη με το αρχικό ρητό α. Συνεπώς το ΖΘ είναι έκτη αποτομή.

Βρέθηκε δηλαδή η έκτη αποτομή ΖΘ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν. Δ

Πρόταση 91 (707) *Ορθογώνιο με την μια πλευρά ρητή και την άλλη πλευρά πρώτη αποτομή είναι ισεμβαδικό με τετράγωνο με πλευρά αποτομή.*

Απόδειξη. Ας έχει το ορθογώνιο ΑΒ ρητή την ΑΓ και πρώτη αποτομή την ΑΔ. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου είναι αποτομή.



Αφού η ΑΔ είναι πρώτη αποτομή έστω ΔΗ η προσαρμόζουσα σε αυτή. Οι ρητές πλευρές ΑΗ, ΗΔ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρες (Π73, σελ. 308). Ολόκληρη δε η ΑΗ είναι σύμμετρη με τη ρητή ΑΓ και τα ΑΗ, $\sqrt{\text{ΑΗ}^2 - \text{ΗΔ}^2}$ είναι σύμμετρα. Άρα αν στην ΑΗ κατασκευαστεί ισεμβαδικό ορθογώνιο με το ένα τέταρτο του $\Delta\text{Η}^2$ από

το οποίο ορθογώνιο να λείπει τετράγωνο,
το κατασκευασμένο ορθογώνιο διαιρεί τη ΑΗ σε σύμμετρα τμήματα (ΠΙ7, σελ. 239). Έστω ότι Ε το μέσο του ΔΗ και στην ΑΗ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισεμβαδικό με το $ΕΗ^2$ από το οποίο να λείπει τετράγωνο σχήμα. Έστω ότι το ορθογώνιο είναι το $ΑΖ \cdot ΖΗ$. Άρα τα ΑΖ, ΖΗ είναι σύμμετρα. Και από τα σημεία Ε, Ζ, Η ας φέρουμε παράλληλες προς την ΑΓ, τις ΕΘ, ΖΙ και ΗΚ.

Η ΑΖ είναι σύμμετρη μετην ΖΗ και άρα η ΑΗ είναι σύμμετρη και με την ΑΖ και την ΖΗ (ΠΙ5, σελ. 238). Αλλά τα ΑΗ, ΑΓ είναι σύμμετρα και άρα καθεμιά από τα ΑΖ, ΖΗ είναι σύμμετρα με την ΑΓ (ΠΙ2, σελ. 236). Και είναι ρητό το ΑΓ, οπότε και τα ΑΖ, ΖΗ είναι ρητά οπότε και τα ΑΙ, ΖΚ είναι ρητά (Β6, ΠΙ, σελ. 142 και ΠΙ1, σελ. 236). Επειδή τώρα η ΔΕ είναι σύμμετρη με την ΕΗ συμπεραίνουμε ότι και η ΔΗ είναι σύμμετρη με καθεμιά από τις ΔΕ, ΕΗ (ΠΙ5, σελ. 238). Εϊναι δε ρητή η ΔΗ και ασύμμετρη με την ΑΓ, άρα καθεμιά από τις ΔΕ, ΕΗ είναι ρητή και ασύμμετρη με την ΑΓ (ΠΙ3, σελ. 237). Έτσι καθένα από τα ΔΘ, ΕΚ είναι μέσο (Π20, σελ. 242).

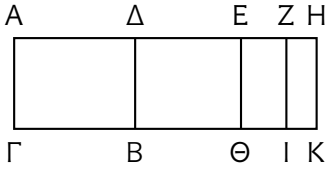
Θεωρούμε τώρα το τετράγωνο ΛΜ ισεμβαδικό με το ΑΙ από το οποίο αφαιρούμε τετράγωνο ΝΞ ισεμβαδικό με το ΖΚ με κοινή με αυτό γωνία την $\widehat{ΛΟΜ}$. Άρα τα τετράγωνα ΛΜ, ΝΞ είναι στην ίδια διαγώνιο (Β6, Π26, σελ. 161). Έστω αυτή η διαγώνιος να είναι η ΟΡ.

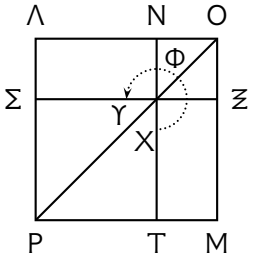
Αφού το ορθογώνιο $ΑΖ \cdot ΖΗ$ είναι ισεμβαδικό με το $ΕΗ^2$ ισχύει ΑΖ/ΕΗ = ΕΗ/ΖΗ (Β6, ΠΙ7, σελ. 154). Αλλά ΑΖ/ΕΗ = ΑΘ/ΕΚ και ΕΗ/ΖΗ = ΕΚ/ΚΖ (Β6, ΠΙ, σελ. 142). Συνεπώς το ΕΚ είναι μέσο ανάλογο των ΑΙ, ΚΖ. Και δείχθηκε ότι και το ΜΝ είναι μέσο ανάλογο των ΛΜ, ΝΞ (Λήμμα, Π53, σελ. 281). Επιπλέον ισχύει ΑΙ = ΛΜ, ΚΖ = ΝΞ, οπότε Μ = ΕΚ. Αλλά ΕΚ = ΔΘ και ΜΝ = ΛΞ (ΒΙ, Π43, σελ. 45). Άρα το ΔΚ είναι ισεμβαδικό με τον γνώμωνα ΥΦΧ συν το ΝΞ. Ισχύει όμως και ΑΚ = ΛΜ + ΝΞ, άρα $ΑΒ = ΣΤ = ΛΝ^2$. Συνεπώς το τετράγωνο της ΛΝ είναι ισεμβαδικό με το ΑΒ.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι η ΛΝ είναι αποτομή. Πράγματι, καθένα από τα ΑΙ, ΖΚ είναι ρητό και ΑΙ = ΛΜ, ΖΚ = ΝΞ, καθένα από τα ΛΜ, ΝΞ είναι ρητό και άρα τα $ΛΟ^2$, $ΟΝ^2$ είναι ρητά συνεπώς και τα ΛΟ, ΟΝ είναι ρητά. Πάλι επειδή το ΔΘ είναι μέσο και ισεμβαδικό με το ΛΞ είναι και το ΛΞ μέσο. ΛΞ λοιπόν μέσο, ΝΞ ρητό άρα αυτά τα δύο είναι ασύμμετρα. Ισχύει και ΛΞ/ΝΞ = ΛΟ/ΟΝ (Β6, ΠΙ, σελ. 142). Άρα το ΛΟ είναι ασύμμετρο με το ΟΝ (ΠΙ1, σελ. 236). Είναι και τα δυο ρητά, οπότε τα ρητά ΛΟ, ΟΝ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, οπότε το ΛΝ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308). Και το τετράγωνό του είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ. Συνεπώς το ευθύγραμμο τμήμα του οποίου το τετράγωνο είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ είναι αποτομή.

Άρα, αν ένα ορθογώνιο με την μια πλευρά ρητή...κλπ. *Δ*

Πρόταση 92 (708) *Ορθογώνιο με την μια πλευρά ρητή και την άλλη πλευρά δεύτερη αποτομή είναι ισεμβαδικό με τετράγωνο με πλευρά πρώτη αποτομή μέσης.*





Απόδειξη. Ας περιέχεται το ορθογώνιο ΑΒ στη ρητή ΑΓ και δεύτερης αποτομής ΑΔ. Ισχυρίζομαι ότι το ευθύγραμμο τμήμα με τετράγωνο ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ είναι πρώτη αποτομή μέσης.

Θεωρούμε την προσαρμόζουσα ΔΗ στην ΑΔ. Τα ρητά ΑΗ, ΗΔ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π73, σελ. 308) και η προσαρμόζουσα ΔΗ είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή ΑΓ και τα ΗΔ, $\sqrt{\text{ΑΗ}^2 - \text{ΗΔ}^2}$ είναι σύμμετρα. Άρα αν στην ΑΗ κατασκευαστεί ορθογώνιο ισοδύναμο με το ένα τέταρτο του ΗΔ^2 από το οποίο ορθογώνιο λείπει τετράγωνο, το ορθογώνιο τη διαιρεί σε σύμμετρα (Π17, σελ. 239). Θεωρούμε το μέσο Ε του ΔΗ και κατασκευάζουμε στην ΑΗ ορθογώνιο ισεμβαδικό με το ΕΗ^2 από το οποίο να λείπει τετράγωνο με πλευρές τις ΑΖ, ΖΗ οι οποίες είναι μεταξύ τους σύμμετρες αλλά σύμμετρες και με την ΑΗ (Π15, σελ. 238). Είναι και ρητή η ΑΗ και ασύμμετρη με την ΑΓ, άρα καθεμιά από τις ΑΖ, ΖΗ είναι ασύμμετρες με την ΑΓ (Π13, σελ. 237). Έτσι και το ΑΙ και το ΖΚ είναι μέσα (Π20, σελ. 242). Επειδή η ΔΕ είναι σύμμετρη με την ΕΗ είναι και η ΔΗ σύμμετρη με καθεμιά από τις ΔΕ, ΕΗ (Π15, σελ. 238). Η ΔΗ όμως είναι σύμμετρη με την ΑΓ, άρα καθεμιά από τις ΔΕ, ΕΗ είναι ρητή και σύμμετρη με την ΑΓ. Έτσι τα ΔΘ, ΕΚ είναι ρητά.

Κατασκευάζουμε τετράγωνο ΛΜ ισεμβαδικό με το ΑΙ και από αυτό ας αφαιρεθεί το τετράγωνο ΝΞ ισεμβαδικό με το ΖΚ ώστε να έχει κοινή γωνία με το ΛΜ, την $\widehat{\text{ΛΟΜ}}$. Τα τετράγωνα ΛΜ και ΝΞ έχουν κοινή διαγώνιο (Β6, Π26, σελ. 161), έστω την ΟΡ. Επειδή λοιπόν τα ΑΙ, ΖΚ είναι μέσα, και ισχύει $|\text{ΑΙ}| = \text{ΛΟ}^2$, $|\text{ΖΚ}| = \text{ΟΝ}^2$ συμπεραίνουμε ότι τα ΛΟ^2, ΟΝ^2 είναι μέσα, και άρα μέσες είναι οι ΛΟ και ΟΝ και επιπλέον είναι δυνάμει μόνο σύμμετρες. Επειδή το ορθογώνιο $\text{ΑΖ} \cdot \text{ΖΗ} = \text{ΕΗ}^2$ θα ισχύει ΑΖ/ΕΗ = ΕΗ/ΖΗ (Β6, Π17, σελ. 154). Αλλά ΑΖ/ΕΗ = |ΑΙ|/|ΕΚ| (Β6, Π1, σελ. 142) και ΕΗ/ΖΗ = |ΕΚ|/|ΖΚ|. Οπότε

$$|\text{ΑΙ}|/|\text{ΕΚ}| = \text{ΑΖ}/\text{ΕΗ} = \text{ΕΗ}/\text{ΖΗ} = |\text{ΕΚ}|/|\text{ΖΚ}|.$$

Άρα το |ΕΚ| είναι μέσο ανάλογο των |ΑΙ|, |ΖΚ|. Είναι και το ΜΝ μέσο ανάλογο των ΛΜ, ΝΞ (Λήμμα, Π53, σελ. 281), και ΑΙ = ΛΜ και ΖΚ = ΝΞ. Άρα ΜΝ = ΕΚ. Όμως ΕΚ = ΔΘ και ΜΝ = ΛΞ (Β1, Π43, σελ. 45). Έτσι, όλο το ΔΚ είναι ισεμβαδικό με τον γνώμωνα ΥΦΧ + ΝΞ. Επειδή ΑΚ = ΛΜ + ΝΞ

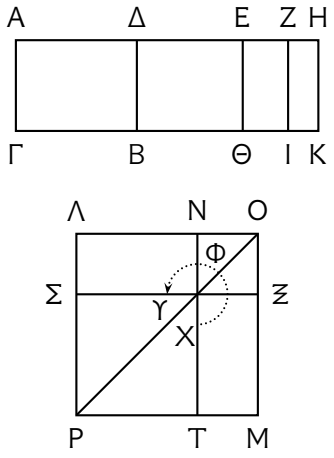
είναι και τα υπόλοιπα ισεμβαδικά δηλαδή $|AB| = |T\Sigma|$. Τώρα $|T\Sigma| = \Lambda N^2$, άρα $\Lambda N^2 = |AB|$.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι η ΛΝ είναι πρώτη αποτομή μέσης.

Πράγματι, επειδή το ΕΚ είναι ρητό και ίσο με το ΛΖ́ άρα και το ΛΖ́ είναι ρητό, οπότε ρητό και το $\Lambda O \cdot ON$. Είναι και μέσο το ΝΖ́ άρα το ΛΖ́ είναι ασύμμετρο με το ΝΖ́, και $\Lambda Ź/NŹ = \Lambda O/ON$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142). Άρα τα ΛΟ, ΟΝ είναι σύμμετρα (ΠΙ1, σελ. 236). Έτσι, τα μέσα ΛΟ, ΟΝ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα και περιέχουν ρητό ορθογώνιο. Συνεπώς η ΛΝ είναι πρώτη αποτομή μέσης (Π74, σελ. 308), και το τετράγωνό της είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ.

Άρα το ευθύγραμμο τμήμα το τετράγωνο του οποίου είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ είναι πρώτη αποτομή μέσης· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 93 (710) *Ορθογώνιο με την μια πλευρά ρητή και την άλλη πλευρά τρίτη αποτομή είναι ισεμβαδικό με τετράγωνο με πλευρά δεύτερη αποτομή μέσης.*



Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το ορθογώνιο ΑΒ περιέχεται στη ρητή ΑΓ και της τρίτης αποτομής ΑΔ. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου είναι δεύτερη αποτομή μέσης.

Έστω ότι η ΔΗ είναι η προσαρμόζουσα στην ΑΔ. Άρα είναι ρητά τα ΑΗ, ΗΔ και δυνάμει μόνο σύμμετρα, και καμιά από τις ΑΗ, ΗΔ δεν είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή ΑΓ. Επίσης τα ΑΗ, $\sqrt{AH^2 - \Delta H^2}$ είναι σύμμετρα. Έτσι αν κατασκευαστεί στην ΑΗ ορθογώνιο ισεμβαδικό με το ένα τέταρτο του ΔH^2 από το οποίο να λείπει τετράγωνο σχήμα θα τη διαιρεί σε σύμμετρα (ΠΙ7, σελ. 239). Έστω Ε το μέσο του ΔΗ και ας κατασκευαστεί στην ΑΗ ορθογώνιο $AZ \cdot ZH$ ισεμβαδικό με το EH^2 από το οποίο να λείπει τετράγωνο. Φέρνουμε και από τα Ε, Ζ, Η παράλληλες προς την ΑΓ τις ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Έτσι τα AZ, ZH είναι σύμμετρα και συνεπώς το ΑΙ είναι σύμμετρο με το ΖΚ (Β6, ΠΙ, σελ. 142 και ΠΙ1, σελ. 236).

Επειδή τα AZ, ZH είναι σύμμετρα θα είναι και το ΑΗ (ως άθροισμά τους) σύμμετρο με αυτά (ΠΙ5, σελ. 238). Η ΑΗ είναι ρητή και ασύμμετρη με την ΑΓ, οπότε και τα AZ, ZH ομοίως (ΠΙ3, σελ. 237). Καθένα λοιπόν από τα ΑΙ, ΖΚ είναι μέσο (Π20, σελ. 242). Πάλι, επειδή η ΔΕ είναι σύμμετρη με την ΕΗ είναι και η ΔΗ με καθεμιά από τις ΔΕ, ΕΗ σύμμετρη (ΠΙ5, σελ. 238). Είναι επίσης ρητή η ΗΔ και ασύμμετρη με την ΑΓ, άρα καθεμιά από τις ΔΕ, ΕΗ είναι ρητή και ασύμμετρη με την ΑΓ (ΠΙ3, σελ. 237), άρα καθένα

από τα ΔΘ, ΕΚ είναι μέσο (Π20, σελ. 242). Αφού όμως τα ΑΗ, ΗΔ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, και η ΑΗ είναι ασύμμετρη με την ΗΔ. Αλλά η ΑΗ είναι σύμμετρη με την ΑΖ, η δε ΔΗ με την ΕΗ, άρα η ΑΖ είναι ασύμμετρη με την ΕΗ (Π13, σελ. 237). Αλλά $AZ/EH = |AI|/|EK|$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142) άρα το ΑΙ είναι ασύμμετρο με το ΕΚ (ΠΙΙ, σελ. 236).

Ας κατασκευάσουμε λοιπόν το τετράγωνο ΛΜ ισεμβαδικό με το ΑΙ και ας αφαιρεθεί το τετράγωνο ΝΞ ισεμβαδικό με το ΖΚ με την ίδια γωνία με το ΛΜ. Άρα τα ΛΜ, ΝΞ έχουν κοινή διαγώνιο, την ΡΟ (Β6, Π26, σελ. 161). Επειδή $AZ \cdot ZH = EH^2$ είναι και $AZ/EH = EH/ZH$ (Β6, Π17, σελ. 154). Αλλά $AZ/EH = |AI|/|EK|$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142) και $EH/ZH = |EK|/|ZK|$, συνεπώς $|AI|/|EK| = |EK|/|ZK|$, δηλαδή το $|EK|$ είναι μέσο ανάλογο των $|AI|$, $|ZK|$. Αλλά και το $|MN|$ είναι μέσο ανάλογο των $|ΛM|$, $|NΞ|$ (Λήμμα, Π53, σελ. 281), και $|AI| = |ΛM|$, $|ZK| = |NΞ|$ και άρα $|EK| = |MN|$. Αλλά $|MK| = |ΛΞ|$ (ΒΙ, Π43, σελ. 45) και $|EK| = |ΔΘ|$, και άρα όλο το ΔΚ είναι ισεμβαδικό με τον γνώμονα ΥΦΧ συν το ΝΞ. Ισχύει και $AK = ΛM + NΞ$ οπότε για τα υπόλοιπα είναι $|AB| = |ΣT| = ΛN^2$. Άρα το τετράγωνο της ΛΝ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι το ΛΝ είναι δεύτερη αποτομή μέσης.

Πράγματι, επειδή τα ΑΙ, ΖΚ δείχθηκαν μέσα και ισεμβαδικά με τα $ΛO^2$, ON^2 αντίστοιχα, άρα και καθένα από τα ΛΟ, ΟΝ είναι μέσα (Β6, ΠΙ, σελ. 142 και ΠΙΙ, σελ. 236). Επειδή δε το ΑΙ είναι σύμμετρο με το ΖΚ άρα και το $ΛO^2$ είναι σύμμετρο με το OK^2. Αλλά το ΑΙ δείχθηκε ασύμμετρο με το ΕΚ άρα και το ΛΜ ασύμμετρο με το ΜΝ, δηλαδή το $ΛO^2$ ασύμμετρο με το $ΛO \cdot ON$. Έτσι τα ΛΟ, ΟΝ είναι ασύμμετρα (Β6, ΠΙ, σελ. 142 και ΠΙΙ, σελ. 236). Κατά συνέπεια τα μέσα ΛΟ, ΟΝ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι περιέχουν μέσο ορθογώνιο.

Πράγματι, επειδή το ΕΚ δείχθηκε μέσο και ισεμβαδικό με το $ΛO \cdot ON$ άρα και το τελευταίο είναι μέσο, οπότε τα μέσα ΛΟ, ΟΝ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα που περιέχουν μέσο. Άρα η ΛΝ είναι δεύτερη αποτομή μέσης (Π75, σελ. 308). Και το τετράγωνό της είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ.

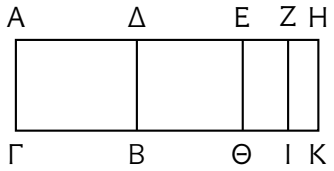
Άρα το ευθύγραμμο τμήμα το τετράγωνο του οποίου είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ είναι δεύτερη αποτομή μέσης· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

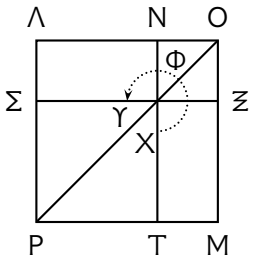
Πρόταση 94 (ΠΙΙ) *Ορθογώνιο με την μια πλευρά ρητή και την άλλη πλευρά τέταρτη αποτομή είναι ισεμβαδικό με τετράγωνο με πλευρά ελάσσονα.*

Απόδειξη. Έστω ότι το ορθογώνιο ΑΒ έχει ρητή την ΑΓ και τέταρτη αποτομή την ΑΔ. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά ισεμβαδικού τετραγώνου είναι ελάσσων.

Έστω ότι η ΔΗ είναι η προσαρμόζουσα στην ΑΔ. Οι ρητές λοιπόν ΑΗ, ΗΔ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρες και η ΑΗ σύμμετρη με τη ρητή ΑΓ, και τα ΑΗ, $\sqrt{AH^2 - ΔH^2}$ είναι ασύμμετρα. Έτσι αν Ε το μέσον του ΔΗ και

κατασκευαστεί στην ΑΗ ορθογώνιο ΑΖ · ΖΗ ισεμβαδικό με το ΕΗ^2 ώστε να λείπει τετράγωνο σχήμα, τα ΑΖ, ΖΗ είναι ασύμμετρα.





Φέρνουμε από τα Ε, Ζ, Η παράλληλες προς τις ΑΓ, ΒΔ έστω τις ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Επειδή η ΑΗ είναι ρητή και σύμμετρη με την ΑΓ συμπεραίνουμε ότι το ΑΚ είναι ρητό. Επειδή το ΑΖ είναι ασύμμετρο με το ΑΓ και είναι και τα δύο ρητά συμπεραίνουμε ότι το ΔΚ είναι μέσο (Π21, σελ. 245).

Επειδή το ΑΖ είναι ασύμμετρο με το ΖΗ, άρα και το |ΑΙ| είναι ασύμμετρο με το |ΖΚ| (Β6, Π1, σελ. 142 και Π11, σελ. 236).

Κατασκευάζουμε τετράγωνο ΛΜ ισεμβαδικό με το ΑΙ και αφαιρούμε από αυτό τετράγωνο ΝΖ ισεμβαδικό με το ΖΚ με κοινή γωνία την $\widehat{\Lambda O M}$. Άρα τα τετράγωνα ΛΜ, ΝΖ έχουν κοινή διαγώνιο (Β6, Π26, σελ. 161), έστω την ΟΡ.

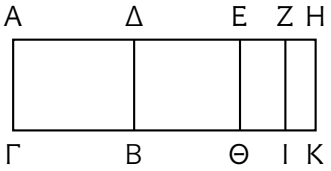
Επειδή ΑΖ · ΖΗ = ΕΗ^2 άρα ΑΖ/ΕΗ = ΕΗ/ΖΗ (Β6, Π17, σελ. 154). Αλλά ΑΖ/ΕΗ = |ΑΙ|/|ΕΚ| και ΕΗ/ΖΗ = |ΕΚ|/|ΖΚ| (Β6, Π1, σελ. 142). Άρα το |ΕΚ| είναι μέσο ανάλογο των |ΑΙ|, |ΖΚ|. Είναι όμως και το |ΜΝ| μέσο ανάλογο των |ΛΜ|, |ΝΖ| (Λήμμα, Π53, σελ. 281) και |ΑΙ| = |ΛΜ|, |ΖΚ| = |ΝΖ| άρα |ΕΚ| = |ΜΝ|.

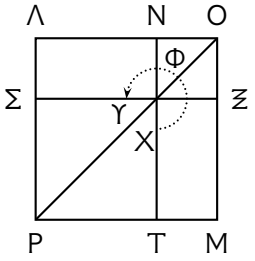
Αλλά |ΕΚ| = |ΔΘ|, |ΜΝ| = |ΛΖ| (Β1, Π43, σελ. 45). Συνεπώς το ΔΚ είναι ισεμβαδικό με τον γνώμονα ΥΦΧ συν το ΝΖ. Επειδή λοιπόν το ΑΚ είναι ισεμβαδικό με το άθροισμα των τετραγώνων ΛΜ και ΝΖ θα είναι ίσα τα υπόλοιπα, δηλαδή |ΑΒ| = |ΣΤ| = ΛΝ^2. Άρα το τετράγωνο της ΛΝ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι το ΛΝ είναι ελάσσων. Πράγματι, αφού το ΑΚ είναι ρητό και ισεμβαδικό με το ΛΟ^2 + ΟΝ^2 άρα το ΛΟ^2 + ΟΝ^2 είναι ρητό. Επειδή το ΔΚ είναι μέσο και ισχύει |ΔΚ| = 2ΛΟ · ΟΝ, άρα το 2ΛΟ · ΟΝ είναι μέσο. και αφού το |ΑΙ| δείχθηκε ασύμμετρο με το ΖΚ άρα το ΛΟ^2 είναι ασύμμετρο με το ΟΝ^2. Οπότε τα ΛΟ, ΟΝ είναι δυνάμει ασύμμετρα με άθροισμα τετραγώνων ρητό και το διπλάσιο ορθογώνιο μέσο. Συνεπώς η ΛΝ είναι η άλογη που ονομάσαμε ελάσσων. Και το τετράγωνό της είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ.

Άρα το ευθύγραμμο τμήμα με τετράγωνο ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ είναι ελάσσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 95 (712) *Ορθογώνιο με την μια πλευρά ρητή και την άλλη πλευρά πέμπτη αποτομή είναι ισεμβαδικό με τετράγωνο με πλευρά διαφορά ρητού και μέσου.*





Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το ορθογώνιο ΑΒ έχει ρητή την ΑΓ και πέμπτη αποτομή την ΑΔ. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά τετραγώνου ισεμβαδικού με το ΑΒ είναι η πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου.

Υποθέτουμε ότι η ΔΗ είναι η προσαρμόζουσα στην ΑΔ, οπότε τα ρητά ΑΗ, ΗΔ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, και η προσαρμόζουσα ΗΔ είναι σύμμετρη με τη ρητή ΑΓ, και τα ΑΗ, $\sqrt{\text{ΑΗ}^2 - \text{ΔΗ}^2}$ είναι ασύμμετρα. Έτσι αν Ε το μέσο της ΔΗ και στην ΑΗ κατασκευαστεί ορθογώνιο $\text{ΑΖ} \cdot \text{ΖΗ}$ ισεμβαδικό με το ΕΗ^2 από το οποίο να λείπει τετράγωνο, τα ΑΖ, ΖΗ είναι ασύμμετρα. Και επειδή τα ΑΗ, ΑΓ είναι ασύμμετρα και είναι και τα δύο ρητά συμπεραίνουμε ότι το ΑΚ είναι μέσο (Π21, σελ. 245). Πάλι επειδή το ΔΗ είναι ρητό και σύμμετρο με το ΑΓ είναι και το ΔΚ ρητό (Π19, σελ. 242). Κατασκευάζουμε τώρα τετράγωνο ΛΜ ισεμβαδικό με το ΑΙ και από αυτό αφαιρούμε το τετράγωνο ΝϞ ισεμβαδικό με το ΖΚ με κοινή γωνία την $\widehat{\text{ΛΟΜ}}$. Άρα τα τετράγωνα ΛΜ, ΝϞ έχουν κοινή διαγώνιο (Β6, Π26, σελ. 161), έστω την ΟΡ.

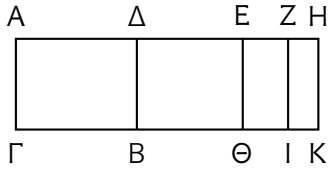
Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι το τετράγωνο της ΛΝ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ.

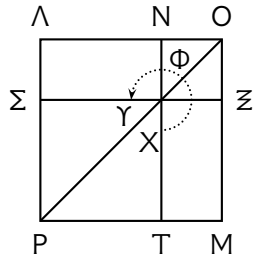
Ισχυρίζομαι τώρα ότι η ΛΝ είναι πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου. Πράγματι, επειδή το ΑΚ δείχθηκε μέσο και ισεμβαδικό με το $\text{ΛΟ}^2 + \text{ΟΝ}^2$, το $\text{ΛΟ}^2 + \text{ΟΝ}^2$ είναι μέσο. Και επειδή το ΔΚ είναι ρητό και ισεμβαδικό με το $2\text{ΛΟ} \cdot \text{ΟΝ}$ είναι και το τελευταίο ρητό. Και το |ΑΙ| είναι ασύμμετρο με το ΖΚ, άρα το ΛΟ^2 είναι ασύμμετρο με το ΟΝ^2, οπότε τα ΛΟ, ΟΝ είναι δυνάμει ασύμμετρα τα οποία σχηματίζουν το μεν άθροισμα των τετραγώνων τους μέσο το δε διπλάσιο ορθογώνιο ρητό. Άρα το υπόλοιπο ΛΝ είναι η άλογη που ονομάσαμε πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου (Π77, σελ. 310), και το τετράγωνό της είναι ισεμβαδικό με το ΑΒ.

Άρα το ευθύγραμμο τμήμα με τετράγωνο ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ είναι πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 96 (713) *Ορθογώνιο με την μια πλευρά ρητή και την άλλη πλευρά πέμπτη αποτομή είναι ισεμβαδικό με τετράγωνο με πλευρά διαφορά μέσου και μέσου.*

Απόδειξη. Έστω ότι το ορθογώνιο ΑΒ έχει ρητή την ΑΓ και έκτη αποτομή την ΑΔ. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά τετραγώνου ισεμβαδικού με το ΑΒ είναι πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου.





Υποθέτουμε ότι η ΔΗ είναι η προσαρμόζουσα στην ΑΔ, οπότε τα ρητά ΑΗ, ΗΔ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, καμιά από αυτές δεν είναι σύμμετρη με τη ρητή ΑΓ και τα ΑΗ, $\sqrt{\text{ΑΗ}^2 - \text{ΔΗ}^2}$ είναι ασύμμετρα. Έτσι αν Ε το μέσο της ΔΗ και στην ΑΗ κατασκευαστεί ορθογώνιο $\text{ΑΖ} \cdot \text{ΖΗ}$ ισεμβαδικό με το ΕΗ^2 από το οποίο να λείπει τετράγωνο, τα ΑΖ, ΖΗ είναι ασύμμετρα. Ισχύει και $\text{ΑΖ}/\text{ΖΗ} = |\text{ΑΙ}|/|\text{ΖΚ}|$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142) άρα τα |ΑΙ|, |ΖΚ| είναι ασύμμετρα (ΠΙΙ, σελ. 236). Και επειδή τα ρητά ΑΗ, ΑΓ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, το ΑΚ είναι μέσο (Π21, σελ. 245). Πάλι επειδή τα ΑΓ, ΔΗ είναι ρητά και ασύμμετρα το ΔΚ είναι μέσο (Π21, σελ. 245). Αφού τα ΑΗ, ΗΔ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα τα ΑΗ, ΗΔ είναι ασύμμετρα. Ισχύει και $\text{ΑΗ}/\text{ΗΔ} = |\text{ΑΚ}|/|\text{ΚΔ}|$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142). Συνεπώς τα |ΑΚ|, |ΚΔ| είναι ασύμμετρα (ΠΙΙ, σελ. 236).

Κατασκευάζουμε τώρα τετράγωνο ΛΜ ισεμβαδικό με το ΑΙ και από αυτό αφαιρούμε το τετράγωνο ΝΖ ισεμβαδικό με το ΖΚ με κοινή γωνία. Άρα τα τετράγωνα ΛΜ, ΝΖ έχουν κοινή διαγώνιο (Β6, Π26, σελ. 161), έστω την ΟΡ.

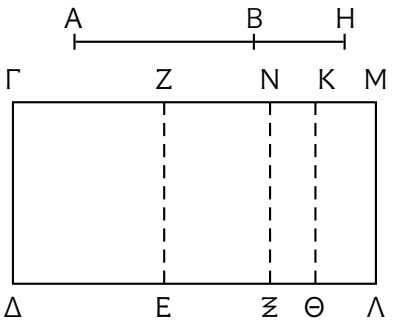
Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι το τετράγωνο της ΛΝ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι η ΛΝ είναι πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου. Πράγματι, επειδή το ΑΚ δείχθηκε μέσο και ισεμβαδικό με το $\text{ΛΟ}^2 + \text{ΟΝ}^2$, το $\text{ΛΟ}^2 + \text{ΟΝ}^2$ είναι μέσο. Και επειδή το ΔΚ είναι μέσο και ισεμβαδικό με το $2\text{ΛΟ}\cdot\text{ΟΝ}$ είναι και το τελευταίο μέσο. Και το |ΑΚ| είναι ασύμμετρο με το ΔΚ, άρα το $\text{ΛΟ}^2 + \text{ΟΝ}^2$ είναι ασύμμετρο με το $2\text{ΛΟ}\cdot\text{ΟΝ}$. Και επειη το |ΑΙ| είναι ασύμμετρο με το |ΖΚ| άρα το ΛΟ^2 είναι ασύμμετρο με το ΟΝ^2. Έτσι τα ΛΟ, ΟΝ είναι δυνάμει ασύμμετρα και σχηματίζουν άθροισμα τετραγώνων μέσο και διπλάσιο ορθογώνιο μέσο και το άθροισμα των τετραγώνων τους ασύμμετρο με το διπλάσιο ορθογώνιό τους. Άρα η ΛΝ είναι η άλογη που ονομάσαμε πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου (Π78, σελ. 310), και το τετράγωνό της είναι ισεμβαδικό με το ΑΒ.

Άρα το ευθύγραμμο τμήμα με τετράγωνο ισεμβαδικό με το ορθογώνιο ΑΒ είναι πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 97 (714) *Το ορθογώνιο με μια πλευρά ρητή και ισεμβαδικό με τετράγωνο αποτομής έχει την άλλη του πλευρά πρώτη αποτομή.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ΑΒ είναι αποτομή, η ΓΔ ρητή και με πλευρά τη ΓΔ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισεμβαδικό με το ΑΒ^2 το οποίο σχηματίζει πλάτος ΓΖ. Ισχυρίζομαι ότι το ΓΖ είναι πρώτη αποτομή.



Διότι έστω ότι η προσαρμόζουσα στην ΑΒ είναι η ΒΗ. Έτσι είναι ρητά τα ΑΗ, ΒΗ και δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π73, σελ. 308). Και ας κατασκευαστεί με πλευρά τη ΓΔ ορθογώνιο ΓΘ ισεμβαδικό με το ΑΗ^2 και το ΚΛ ισεμβαδικό με το ΒΗ^2. Άρα $|\Gamma\Lambda| = \text{ΑΗ}^2 + \text{ΗΒ}^2$ και $|\Gamma\text{Ε}| = \text{ΑΒ}^2$ άρα για το υπόλοιπο ισχύει $|\text{ΖΛ}| = 2\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ}$ (Β2, Π7, σελ. 65). Έστω τώρα ότι το Ν είναι το μέσο του ΖΜ και από το Ν φέρνουμε παράλληλη προς την ΓΔ την ΝΞ. Άρα καθένα από τα ΖΞ, ΛΝ είναι ίσο με το $\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ}$. Το $|\Delta\text{Μ}| = \text{ΑΗ}^2 + \text{ΗΒ}^2$ όμως είναι ρητό και έχει κατασκευαστεί με πλευρά τη ΓΔ σχηματίζοντας πλάτος ΓΜ. Άρα η ΓΜ είναι ρητή και σύμμετρη με τη ΓΔ (Π20, σελ. 242).

Το $|\text{ΖΛ}| = 2\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ}$ είναι μέσο και έχει πλευρά τη ρητή ΓΔ άρα το πλάτος του ΖΜ είναι ρητή και ασύμμετρη με τη ΓΔ (Π22, σελ. 246). Αφού λοιπόν το άθροισμα $\text{ΑΗ}^2 + \text{ΗΒ}^2$ είναι ρητό ενώ το $2\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ}$ είναι μέσο, άρα το $\text{ΑΗ}^2 + \text{ΗΒ}^2$ είναι ασύμμετρο με το $2\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ}$. Άρα τα $|\Delta\text{Μ}|$, $|\text{ΖΛ}|$ είναι ασύμμετρα. Ισχύει επίσης $|\Delta\text{Μ}|/|\text{ΖΛ}| = \Gamma\text{Μ}/\text{ΖΜ}$ (Β6, Π1, σελ. 142). Άρα τα ΓΜ, ΖΜ είναι ασύμμετρα (Π11, σελ. 236). Και είναι και τα δύο ρητά. Συνεπώς, αφού τα ρητά ΓΜ, ΖΜ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, το ΓΖ είναι αποτομή.

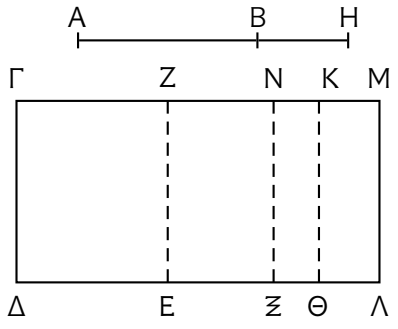
Ισχυρίζομαι τώρα ότι είναι πρώτη αποτομή. Διότι επειδή το $\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ}$ είναι μέσο ανάλογο των ΑΗ^2, ΗΒ^2 (Λήμμα, Π53, σελ. 281) και ισχύει $\text{ΑΗ}^2 = |\Gamma\Theta|$, $\text{ΒΗ}^2 = |\text{ΚΛ}|$, $\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ} = |\text{ΝΛ}|$ άρα και το $|\text{ΝΛ}|$ είναι μέσο ανάλογο των $|\Gamma\Theta|$, $|\text{ΚΛ}|$. Δηλαδή ισχύει $|\Gamma\Theta|/|\text{ΝΛ}| = |\text{ΝΛ}|/|\text{ΚΛ}|$. Όμως $|\Gamma\Theta|/|\text{ΝΛ}| = \Gamma\text{Κ}/\text{ΝΜ}$ και $|\text{ΝΛ}|/|\text{ΚΛ}| = \text{ΝΜ}/\text{ΚΜ}$ (Β6, Π1, σελ. 142). Άρα το $\Gamma\text{Κ} \cdot \text{ΚΜ} = \text{ΝΜ}^2$ είναι ίσο με το ένα τέταρτο του ΖΜ^2. Και επειδή το ΑΗ^2 είναι σύμμετρο με το ΗΒ^2 είναι και το $|\Gamma\Theta|$ με το $|\text{ΚΛ}|$. Ισχύει όμως $|\Gamma\Theta|/|\text{ΚΛ}| = \Gamma\text{Κ}/\text{ΚΜ}$ (Β6, Π1, σελ. 142). Συνεπώς τα ΓΚ, ΚΜ είναι σύμμετρα (Π11, σελ. 236). Άρα έχουμε τα άνισα ευθύγραμμα τμήματα ΓΜ, ΜΖ, στη ΓΜ έχει κατασκευαστεί ορθογώνιο $\Gamma\text{Κ} \cdot \text{ΚΜ}$ ισεμβαδικό με το ένα τέταρτο του ΖΜ^2 από το οποίο ορθογώνιο λείπει τετράγωνο, και τα ΓΚ, ΚΜ είναι σύμμετρα. Οπότε τα ΓΜ, $\sqrt{\Gamma\text{Μ}^2 - \text{ΜΖ}^2}$ είναι σύμμετρα (Π17, σελ. 239). Επιπλέον η ΓΜ είναι σύμμετρη με την ρητή ΓΔ, άρα η ΓΖ είναι πρώτη αποτομή.

Άρα το ορθογώνιο με μια πλευρά ρητή και ισεμβαδικό με τετράγωνο αποτομής έχει την άλλη του πλευρά πρώτη αποτομή· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 98 (715) *Το ορθογώνιο με μια πλευρά ρητή και ισεμβαδικό με τετράγωνο πρώτης αποτομής μέσης έχει την άλλη του πλευρά δεύτερη αποτομή.*

Απόδειξη. Ας είναι ΑΒ πρώτη αποτομή μέσης, ΓΔ ρητή και ορθογώνιο ΓΕ με πλευρά τη ΓΔ ισεμβαδικό με το ΑΒ^2 έχοντας πλάτος το ΓΖ. Ισχυρίζομαι ότι το ΓΖ είναι δεύτερη αποτομή.

Έστω ότι η ΗΒ είναι η προσαρμόζουσα στην ΑΒ, οπότε τα ΑΗ, ΗΒ είναι μέσα και δυνάμει μόνο σύμμετρα που περιέχουν ρητό ορθογώνιο (Π74, σελ. 308). Ας κατασκευάσουμε με πλευρά τη ΓΔ ορθογώνιο ΓΘ ισεμβαδικό με το ΑΗ^2 που να έχει πλάτος τη ΓΚ και ορθογώνιο ΚΛ ισεμβαδικό με το ΗΒ^2 και πλάτος ΚΜ. Ισχύει $|\Gamma\Lambda| = \text{ΑΗ}^2 + \text{ΗΒ}^2$ άρα το ΓΛ είναι μέσο. Έχει και ρητή την ΓΔ άρα το πλάτος ΓΜ είναι ρητό και ασύμμετρο με το ΓΔ (Π22, σελ. 246). Επειδή $|\Gamma\Lambda| = \text{ΑΗ}^2 + \text{ΗΒ}^2$ και $\text{ΑΒ}^2 = |\Gamma\text{Ε}|$ άρα $2\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ} = |\text{ΖΛ}|$. Είναι όμως ρητό το $2\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ}$ άρα ρητό είναι και το $|\text{ΖΛ}|$, και έχει πλευρά τη ρητή ΖΕ άρα το πλάτος του ΖΜ είναι ρητό και σύμμετρο με το ΓΔ (Π20, σελ. 242). Αφού λοιπόν το $\text{ΑΗ}^2 + \text{ΗΒ}^2 = |\Gamma\Lambda|$ είναι μέσο και το $2\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ} = |\text{ΖΛ}|$ είναι ρητό συμπεραίνουμε ότι τα $|\Gamma\Lambda|$, $|\text{ΖΛ}|$ είναι ασύμμετρα. Ισχύει όμως $|\Gamma\Lambda|/|\text{ΖΛ}| = \Gamma\text{Ν}/\text{ΖΜ}$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142), άρα τα ΓΜ, ΖΜ είναι ασύμμετρα (ΠΙΙ, σελ. 236), και είναι και ρητά. Άρα η ΓΖ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308).



Ισχυρίζομαι τώρα ότι είναι δεύτερη αποτομή. Πράγματι, αν Ν το μέσο της ΖΜ, φέρνουμε από το Ν παράλληλη ΝΞ προς τη ΓΔ. Έτσι καθένα από τα ΖΞ, ΝΛ είναι ίσο με $\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ}$. Αλλά το $\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ}$ είναι μέσο ανάλογο για τα ΑΗ^2 ΗΒ^2 (Λήμμα, Π53, σελ. 281), και $\text{ΑΗ}^2 = |\Gamma\Theta|$, $\text{ΗΒ}^2 = |\text{ΚΛ}|$ και $\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ} = |\text{ΝΛ}|$ συμπεραίνουμε ότι το $|\text{ΝΛ}|$ είναι μέσο ανάλογο των $|\Gamma\Theta|$, $|\text{ΚΛ}|$. Δηλαδή $|\Gamma\Theta|/|\text{ΝΛ}| = |\text{ΝΛ}|/|\text{ΚΛ}|$. Αλλά $|\Gamma\Theta|/|\text{ΝΛ}| = \Gamma\text{Κ}/\text{ΝΜ}$ και $|\text{ΝΛ}|/|\text{ΚΛ}| = \text{ΝΜ} = \text{ΜΚ}$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142), οπότε παίρνουμε $\Gamma\text{Κ}/\text{ΝΜ} = \text{ΝΜ}/\text{ΚΜ}$. Συνεπώς $\Gamma\text{Κ} \cdot \text{ΚΜ} = \text{ΝΜ}^2 = \text{ΖΜ}^2/4$ (και επειδή το ΑΗ^2 είναι σύμμετρο με το ΗΒ^2 είναι και το $|\Gamma\Theta|$ σύμμετρο με το $|\text{ΚΛ}|$, δηλαδή το ΓΚ με το ΚΜ).

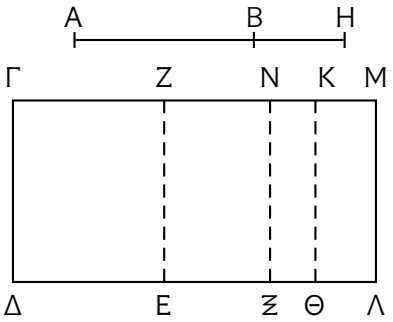
Άρα έχουμε δυο άνισα ευθύγραμμα τμήματα, τα ΓΜ, ΜΖ και στο μεγαλύτερπ, το ΓΜ, έχει κατασκευαστεί ορθογώνιο, το $\Gamma\text{Κ} \cdot \text{ΚΜ} = \text{ΜΖ}^2/4$ από το οποίο λείπει σχήμα τετράγωνο και το διαιρεί σε δυο σύμμετρα τμήματα. Άρα τα ΓΜ, $\sqrt{\Gamma\text{Μ}^2 - \text{ΜΖ}^2}$ είναι σύμμετρα (ΠΙ7, σελ. 239). Και είναι η προσαρμόζουσα ΖΜ σύμμετρη με την αρχική ρητή ΓΔ. Οπότε η ΓΖ είναι δεύτερη αποτομή.

Έτσι, το ορθογώνιο με μια πλευρά ρητή και ισεμβαδικό με τετράγωνο πρώτης αποτομής μέσης έχει την άλλη του πλευρά δεύτερη αποτομή· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 99 (716) *Το ορθογώνιο με μια πλευρά ρητή και ισεμβαδικό με τετράγωνο δεύτερης αποτομής μέσης έχει την άλλη του πλευρά τρίτη αποτομή.*

Απόδειξη. Έστω η ΑΒ δεύτερη αποτομή μέσης, ΓΔ ρητή και ορθογώνιο ΓΕ με πλευρά τη ΓΔ, ισεμβαδικό με το AB^2 και πλάτος ΓΖ. Ισχυρίζομαι ότι το ΓΖ είναι τρίτη αποτομή.

Έστω ΗΒ η προσαρμόζουσα στην ΑΒ. Άρα είναι μέσα τα ΑΗ, ΗΒ και δυνάμει μόνο σύμμετρα σχηματίζοντας μέσο ορθογώνιο (Π75, σελ. 308). Και ας κατασκευαστεί με πλευρά το ΓΔ ορθογώνιο ΓΘ ισεμβαδικό με το AH^2 και πλάτος ΓΚ και ορθογώνιο ΚΛ με πλευρά ΚΘ ισεμβαδικό με το HB^2 και πλάτος ΚΜ. Άρα $|\Gamma\Lambda| = AH^2 + HB^2$ μέσο και έχει πλευρά τη ΓΔ, άρα η ΓΜ είναι ρητή και ασύμμετρη με τη ΓΔ (Π22, σελ. 246). Επειδή $|\Gamma\Lambda| = AH^2 + HB^2$ και $|\Gamma E| = AB^2$ για το υπόλοιπο ισχύει $|\Lambda Z| = 2AH \cdot HB$ (Β2, Π7, σελ. 65).



Έστω Ν το μέσο του ΖΜ και φέρνουε τη ΝΞ παράλληλη με τη ΓΔ. Οπότε καθένα από τα ΖΞ, ΝΛ είναι ίσο με το $AH \cdot HB$. Το τελευταίο όμως είναι μέσο, άρα μέσο είναι και το $|Z\Lambda|$. Και έχει ρητή πλευρά την ΕΖ οπότε το πλάτος ΖΜ είναι ρητό και ασύμμετρο με τη ΓΔ (Π22, σελ. 246). Επειδή τα ΑΗ, ΗΒ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, είναι ασύμμετρα μεταξύ τους, οπότε και τα AH^2, $AH \cdot HB$ είναι ασύμμετρα (Λήμμα Π21, σελ. 245 και Π11, σελ. 236). Αλλά τα $AH^2 + HB^2$, AH^2 είναι σύμμετρα, όπως σύμμετρα είναι και τα $AH \cdot HB$, $2AH \cdot HB$. Έτσι, τα $AH^2 + HB^2 = |\Gamma\Lambda|$, $2AH \cdot HB = |Z\Lambda|$ είναι ασύμμετρα (Π13, σελ. 237). Ισχύει και $|\Gamma\Lambda|/|Z\Lambda| = HM/ZM$ (Β6, Π1, σελ. 142). Άρα τα ΓΜ, ΖΜ είναι ασύμμετρα (Π11, σελ. 236). Συνεπώς τα ρητά ΓΜ, ΜΖ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα και έτσι το ΓΖ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308).

Ισχυρίζομαι ότι είναι τρίτη αποτομή. Πράγματι τα AH^2, HB^2 είναι σύμμετρα, άρα και τα $|\Gamma\Theta|$, $|K\Lambda|$ είναι σύμμετρα, και άρα και τα ΓΚ, ΚΜ είναι σύμμετρα (Β6, Π1, σελ. 142 και Π11, σελ. 236). Τώρα, το $AH \cdot HB$ είναι μέσο ανάλογο των AH^2, HB^2 και επιπλέον $AH^2 = |\Gamma\Theta|$, $HB^2 = |K\Lambda|$, $AH \cdot HB = |N\Lambda|$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το $|N\Lambda|$ είναι μέσο ανάλογο των $|\Gamma\Theta|$, $|K\Lambda|$. Συνεπώς $|\Gamma\Theta|/|N\Lambda| = |N\Lambda|/|K\Lambda|$. Αλλά έχουμε ότι $|\Gamma\Theta|/|N\Lambda| = \Gamma K/NM$ και $|N\Lambda|/|KM| = NM/KM$ (Β6, Π1, σελ. 142). Άρα $\Gamma K/M = MN/KM$ οπότε $\Gamma K \cdot KM = MN^2 = ZM^2/4$.

Έχουμε λοιπόν τα άνισα ευθύγραμμα τμήματα ΓΜ, ΜΖ, και στο ΓΜ έχει κατασκευαστεί ορθογώνιο ισεμβαδικό με το ένα τέταρτο του ZM^2 από το οποίο λείπει τετράγωνο, και τη διαιρεί σε σύμμετρα τμήματα, άρα

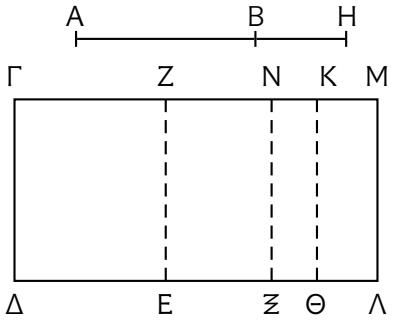
τα ΓΜ, $\sqrt{\Gamma M^2 - MZ^2}$ είναι σύμμετρα. Και κανένα από τα ΓΜ, ΜΖ δεν είναι σύμμετρο με το αρχικά ρητό ΓΔ, οπότε το ΓΖ είναι τρίτη αποτομή.

Άρα το ορθογώνιο με μια πλευρά ρητή και ισεμβαδικό με τετράγωνο δεύτερης αποτομής μέσης έχει την άλλη του πλευρά τρίτη αποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 100 (717) *Το ορθογώνιο με μια πλευρά ρητή και ισεμβαδικό με τετράγωνο ελάσσονος έχει την άλλη του πλευρά τέταρτη αποτομή.*

Απόδειξη. Έστω ότι το ΑΒ είναι ελάσσων και το ΓΔ ρητό. Ας κατασκευαστεί στο ρητό ΓΔ το ορθογώνιο ΓΕ ισεμβαδικό με το AB^2 έχοντας πλάτος ΓΖ. Ισχυρίζομαι ότι το ΓΖ είναι τέταρτη αποτομή.

Έστω ότι η προσαρμόζουσα στην ΑΒ είναι η ΗΒ, και άρα τα ΑΗ, ΗΒ είναι δυνάμει ασύμμετρα και σχηματίζουν άθροισμα τετραγώνων ρητό και διπλάσιο ορθογώνιο μέσο (Π76, σελ. 309). Ας κατασκευαστεί με πλευρά ΓΔ ορθογώνιο ΓΘ ισεμβαδικό με το AH^2 έχοντας πλάτος ΓΚ, και ορθογώνιο ΚΛ ισεμβαδικό με το HB^2 και πλάτος ΚΜ. Άρα $|\Gamma\Lambda| = AH^2 + HB^2$ το οποίο είναι ρητό. Αλλά έχει πλευρά τη ρητή ΓΔ και πλάτος το ΓΜ. Άρα το ΓΜ είναι ρητό και σύμμετρο με το ΓΔ (Π20, σελ. 242). Επειδή $|\Gamma\Lambda| = AH^2 + HB^2$ και $|\Gamma E| = AB^2$ για το υπόλοιπο ισχύει $|Z\Lambda| = 2AH \cdot HB$ (Β2, Π7, σελ. 65). Έστω ότι Ν το μέσο του ΖΜ και από το Ν φέρνουμε η $N\bar{Z}$ παράλληλη στα ΓΔ, ΜΛ. Έτσι καθένα από τα $|Z\bar{Z}|$, $|N\Lambda|$ είναι ίσο με $AH \cdot HB$. Και αφού το $|Z\Lambda| = 2AH \cdot HB$ είναι μέσο και έχει πλευρά τη ρητή ΖΕ με πλάτος ΖΜ, συμπεραίνουμε ότι το ΖΜ είναι ρητό και ασύμμετρο με το ΓΔ (Π22, σελ. 246). Αφού τώρα τα $AH^2 + HB^2$ είναι ρητό ενώ το $2AH \cdot HB$ μέσο άρα αυτά είναι μεταξύ τους ασύμμετρα. Οπότε τα ίσα με αυτά $|\Gamma\Lambda|$, $|Z\Lambda|$ είναι ασύμμετρα. Όμως $|\Gamma\Lambda|/|Z\Lambda| = \Gamma M/MZ$ (Β6, Π1, σελ. 142). Οπότε το ΓΜ είναι ασύμμετρο με το ΜΖ (Π11, σελ. 236). Και είναι και τα δύο ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα, άρα το ΓΖ είναι αποτομή.



Ισχυρίζομαι ότι είναι τέταρτη αποτομή. Πράγματι, τα ΑΗ, ΗΒ είναι δυνάμει ασύμμετρα οπότε το τα AH^2, HB^2 είναι ασύμμετρα. Επιπλέον $|\Gamma\Theta| = AH^2$ και $|K\Lambda| = HB^2$ άρα τα $|\Gamma\Theta|$, $|K\Lambda|$ είναι ασύμμετρα. Όμως $|\Gamma\Theta|/|K\Lambda| = \Gamma K/KM$ (Β6, Π1, σελ. 142) οπότε τα ΓΚ, ΚΜ είναι ασύμμετρα (Π11, σελ. 236).

Τώρα, το $AH \cdot HB$ είναι μέσο ανάλογο των AH^2, HB^2 (Λήμμα, Π53, σελ. 281) οπότε το $N\Lambda = AH \cdot HB$ είναι μέσο ανάλογο των $|\Gamma\Theta|$, $|K\Lambda|$. Δηλαδή $|\Gamma\Theta|/|K\Lambda| = |N\Lambda|/|K\Lambda|$. Όμως ισχύει $|\Gamma\Theta|/|N\Lambda| = \Gamma K/NM$ και $|N\Lambda|/|K\Lambda| = NM/KM$ (Β6, Π1, σελ. 142), συνεπώς $\Gamma K/MN = M/KM$ και άρα $\Gamma K \cdot KM = MN^2 = ZM^2/4$.

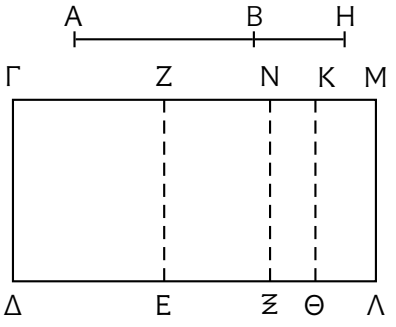
Έχουμε λοιπόν δυο άνισα ευθύγραμμα τμήματα, τα ΓΜ, ΜΖ και στο ΓΜ έχει κατασκευαστεί το ορθογώνιο ΓΚ · ΚΜ ισεμβαδικό με το ένα τέταρτο του $ΖΜ^2$ από το οποίο λείπει τετράγωνο σχήμα, και το διαιρεί (το ΓΜ) σε ασύμμετρα. Άρα τα ΓΜ, $\sqrt{ΓΜ^2 - ΜΖ^2}$ είναι ασύμμετρα (Π18, σελ. 240). Και όλη η ΓΜ είναι σύμμετρη με τη ρητή ΓΔ, άρα η ΓΖ είναι τέταρτη αποτομή.

Άρα το ορθογώνιο με μια πλευρά ρητή, κλπ. Δ

Πρόταση 101 (718) *Το ορθογώνιο με μια πλευρά ρητή και ισεμβαδικό με τετράγωνο πλευράς διαφοράς ρητού και μέσου έχει την άλλη του πλευρά πέμπτη αποτομή.*

Απόδειξη. Έστω ότι το ΑΒ είναι πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου, και ρητή η ΓΔ. Ας κατασκευαστεί στη ΓΔ το ΓΕ ισεμβαδικό με το $ΑΒ^2$ και πλάτος ΓΖ. Ισχυρίζομαι ότι το ΓΖ είναι πέμπτη αποτομή.

Έστω ΗΒ η προσαρμόζουσα στην ΑΒ, οπότε τα ΑΗ, ΗΒ είναι δυνάμει ασύμμετρα με άθροισμα τετραγώνων μέσο και διπλάσιο ορθογώνιο ρητό (Π77, σελ. 310). Και ας κατασκευαστεί στη ΓΔ το ΓΘ ισεμβαδικό με το $ΑΗ^2$ και το ΚΛ ισεμβαδικό με το $ΗΒ^2$, οπότε $|ΓΛ| = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ δηλαδή το ΓΛ είναι μέσο και έχει ρητή την πλευρά ΓΔ, άρα τα ΓΜ, ΓΔ είναι ρητά και ασύμμετρα (Π22, σελ. 246). Αφού λοιπόν $|ΓΛ| = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ και $|ΓΕ| = ΑΒ^2$ για το υπόλοιπο ισχύει $|ΖΛ| = 2ΑΗ \cdot ΗΒ$ που είναι ρητό, και έχει ρητή πλευρά, την ΕΖ, άρα τα ΖΜ, ΓΔ είναι ρητά και σύμμετρα (Π20, σελ. 242).



Έστω ότι το Ν είναι το μέσο της ΖΜ. Από το Ν φέρνουμε την ΝΞ παράλληλη στις ΓΔ, ΜΛ. Άρα καθένα από τα ΖΞ, ΝΛ είναι ισεμβαδικό με το ΑΗ · ΗΒ.

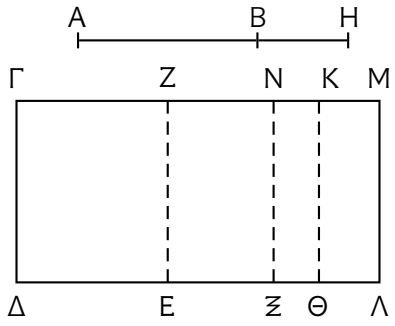
Το ΓΛ όπως δείξαμε είναι μέσο και το ΖΛ ρητό οπότε μεταξύ τους είναι ασύμμετρα. Επιπλέον ισχύει $|ΓΛ|/|ΖΛ| = ΓΜ/ΜΖ$ οπότε τα ΓΜ, ΜΖ είναι ασύμμετρα (Π11, σελ. 236). Και είναι και τα δύο ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα, άρα το ΓΖ είναι αποτομή.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι είναι πέμπτη αποτομή. Πράγματι, με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι το ΓΚ · ΚΜ είναι ισεμβαδικό με το $ΝΜ^2 = ΖΜ^2/4$, και επειδή τα $|ΓΘ| = ΑΗ^2$, $|ΚΛ| = ΗΒ^2$ είναι ασύμμετρα και $|ΓΘ|/|ΚΛ| = ΓΚ/ΚΜ$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142), συμπεραίνουμε ότι τα ΓΚ, ΚΜ είναι ασύμμετρα (Π11, σελ. 236).

Έχουμε λοιπόν δυο άνισα ευθύγραμμα τμήματα, τα ΓΜ, ΜΖ, και στο ΓΜ έχει κατασκευαστεί ορθογώνιο ισεμβαδικό με το $ΖΜ^2/4$ από το οποίο λείπει τετράγωνο και το διαιρεί (το ΓΜ) σε ασύμμετρα. Άρα τα ΓΜ, $\sqrt{ΓΜ^2 - ΜΖ^2}$ είναι ασύμμετρα (Π18, σελ. 240). Αλλά η προσαρμόζουσα ΖΜ είναι σύμμε-

τρη με την αρχική ρητή ΓΔ άρα το ΓΖ είναι πέμπτη αποτομή· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 102 (719) *Το ορθογώνιο με μια πλευρά ρητή και ισεμβαδικό με τετράγωνο πλευράς διαφοράς μέσου και μέσου έχει την άλλη του πλευρά έκτη αποτομή.*



Απόδειξη. Έστω ότι το ΑΒ είναι πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου, και ρητή η ΓΔ. Ας κατασκευαστε στη ΓΔ το ΓΕ ισεμβαδικό με το ΑΒ^2 και πλάτος ΓΖ. Ισχυρίζομαι ότι το ΓΖ είναι έκτη αποτομή.

Έστω ΗΒ η προσαρμόζουσα στην ΑΒ, οπότε τα ΑΗ, ΗΒ είναι δυνάμει ασύμμετρα με άθροισμα τετραγώνων μέσο και διπλάσιο ορθογώνιο μέσο (Π78, σελ. 310). Και ας κατασκευαστεί στη ΓΔ το ΓΘ ισεμβαδικό με το ΑΗ^2 με πλάτος το ΓΚ, και το ΚΛ ισεμβαδικό με το ΗΒ^2, οπότε $|\Gamma\Lambda| = \text{ΑΗ}^2 + \text{ΗΒ}^2$ δηλαδή το ΓΛ είναι μέσο και έχει ρητή την πλευρά ΓΔ, άρα τα ΓΜ, ΓΔ είναι ρητά και ασύμμετρα (Π22, σελ. 246). Αφού λοιπόν $|\Gamma\Lambda| = \text{ΑΗ}^2 + \text{ΗΒ}^2$ και $|\Gamma\text{Ε}| = \text{ΑΒ}^2$ για το υπόλοιπο ισχύει $|\text{ΖΛ}| = 2\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ}$ (Β2, Π7, σελ. 65) που είναι μέσο, και έχει ρητή πλευρά, την ΕΖ, άρα τα ΖΜ, ΓΔ είναι ρητά και ασύμμετρα (Π22, σελ. 246).

Επειδή $|\Gamma\Lambda| = \text{ΑΗ}^2 + \text{ΗΒ}^2$ το οποίο είναι ασύμμετρο με το $2\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ} = |\text{ΖΛ}|$ συμπεραίνουμε ότι τα μέσα $|\Gamma\Lambda|$, $|\text{ΖΛ}|$ είναι ασύμμετρα. Επιπλέον ισχύει $|\Gamma\Lambda|/|\text{ΖΛ}| = \Gamma\text{Μ}/\text{ΜΖ}$ οπότε τα ΓΜ, ΜΖ είναι ασύμμετρα (Π11, σελ. 236). Και είναι και τα δύο ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα, άρα το ΓΖ είναι αποτομή.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι είναι έκτη αποτομή. Πράγματι, έστω ότι το Ν είναι το μέσο της ΖΜ. Από το Ν φέρνουμε την ΝΞ παράλληλη στη ΓΔ. Άρα καθένα από τα ΖΞ, ΝΛ είναι ισεμβαδικό με το $\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ}$. Επειδή τα ΑΗ, ΗΒ είναι δυνάμει ασύμμετρα άρα είναι ασύμμετρα τα $\text{ΑΗ}^2 = |\Gamma\Theta|$, $\text{ΗΒ}^2 = |\text{ΚΛ}|$ Αλλά $|\Gamma\Theta|/|\text{ΚΛ}| = \Gamma\text{Κ}/\text{ΚΜ}$ (Β6, Π1, σελ. 142), οποτε τα ΓΚ, ΚΜ είναι ασύμμετρα (Π11, σελ. 236).

Τώρα, το $\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ}$ είναι μέσο ανάλογο των AH^2, HB^2. Αλλά $\text{ΑΗ} \cdot \text{ΗΒ} = |\text{ΝΛ}|$, $\text{ΑΗ}^2 = |\Gamma\Theta|$, $\text{ΗΒ}^2 = |\text{ΚΛ}|$ οπότε το $|\text{ΝΛ}|$ είναι μέσο ανάλογο των ΓΘ, ΚΛ. Δηλαδή $|\Gamma\Theta|/|\text{ΝΛ}| = |\text{ΝΛ}|/|\text{ΚΛ}|$. Και για τους ίδιους λόγους τα ΓΜ, $\sqrt{\Gamma\text{Μ}^2 - \text{ΜΖ}^2}$ είναι ασύμμετρα (Π18, σελ. 240). Και κανένα από αυτά δεν είναι σύμμετρο με την αρχική ρητή ΓΔ, άρα το ΓΖ είναι έκτη αποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 103 (720) *Σύμμετρο με αποτομή ευθύγραμμο τμήμα είναι και αυτό αποτομή και μάλιστα της ίδιας τάξης.*

Απόδειξη. Έστω η αποτομή ΑΒ και το ΓΔ σύμμετρο με αυτό. Ισχυρίζομαι ότι και το ΓΔ είναι αποτομή και μάλιστα ίδιας τάξης με το ΑΒ.

Έστω ότι η ΒΕ είναι η προσαρμόζουσα στην ΑΒ, οπότε τα ΑΕ, ΕΒ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π73, σελ. 308). Βρίσκουμε Ζ ώστε να ισχύει ΒΕ/ΔΖ = ΑΒ/ΓΔ (Β6, Π12, σελ. 150). και άρα το άθροισμα των όρων έχει τον ίδιο λόγο (Β5, Π12, σελ. 133), δηλαδή ΑΕ/ΓΖ = ΑΒ/ΓΔ. Άρα, αφού τα ΑΒ, ΓΔ είναι σύμμετρα είναι σύμμετρα και τα ΑΕ, ΓΖ καθώς και τα ΒΕ, ΔΖ (ως υπόλοιπα) (Π11, σελ. 236). Τα ΑΕ, ΕΒ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα άρα και τα ΓΖ, ΖΔ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π13, σελ. 237), άρα το ΓΔ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308).

Ισχυρίζομαι τώρα ότι έχει και την ίδια τάξη με την αποτομή ΑΒ.

Επειδή ΑΕ/ΓΖ = ΒΕ/ΔΖ, εναλλάξ θα είναι ΑΕ/ΕΒ = ΓΖ/ΖΔ (Β5, Π16, σελ. 134). Τώρα τα ΑΕ, $\sqrt{\text{ΑΕ}^2 - \text{ΕΒ}^2}$ είτε είναι σύμμετρα είτε ασύμμετρα. Αν μεν είναι σύμμετρα θα είναι σύμμετρα και τα ΓΖ, $\sqrt{\text{ΓΖ}^2 - \text{ΖΔ}^2}$ (Π14, σελ. 237). Και αν το ΑΕ είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό θα είναι σύμμετρο και το ΓΖ (Π12, σελ. 236). Εάν το ΒΕ είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό θα είναι και το ΔΖ, και αν κανένα από τα ΑΕ, ΕΒ δεν είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό το ίδιο θα ισχύει και για τα ΓΖ, ΖΔ (Π13, σελ. 237).

Αν τώρα τα ΑΕ, $\sqrt{\text{ΑΕ}^2 - \text{ΕΒ}^2}$ είναι ασύμμετρα, και τα ΓΖ, $\sqrt{\text{ΓΖ}^2 - \text{ΖΔ}^2}$ θα είναι ασύμμετρα (Π14, σελ. 237). Και αν το ΑΕ είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό ια είναι και το ΓΖ, ενώ αν είναι το ΒΕ, θα είναι και το ΔΖ και αν ούτε το ΑΕ ούτε το ΕΒ είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό ούτε και τα ΓΖ, ΖΔ θα είναι.

Άρα το ΓΔ είναι αποτομή με την ίδια τάξη με το ΑΒ· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 104 (721) *Σύμμετρο με αποτομή μέσης ευθύγραμμο τμήμα είναι και αυτό αποτομή μέσης και μάλιστα της ίδιας τάξης.*

Απόδειξη. Έστω η αποτομή μέσης ΑΒ και το ΓΔ σύμμετρο με αυτό. Ισχυρίζομαι ότι και το ΓΔ είναι αποτομή μέσης και μάλιστα ίδιας τάξης με το ΑΒ.

Έστω ότι η ΒΕ είναι η προσαρμόζουσα στην ΑΒ, οπότε τα ΑΕ, ΕΒ είναι μέσα και δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π74, σελ. 308–Π75, σελ. 308). Βρίσκουμε Ζ ώστε να ισχύει ΒΕ/ΔΖ = ΑΒ/ΓΔ (Β6, Π12, σελ. 150). και άρα το άθροισμα των όρων έχει τον ίδιο λόγο (Β5, Π12, σελ. 133), δηλαδή ΑΕ/ΓΖ = ΑΒ/ΓΔ. Άρα, αφού τα ΑΒ, ΓΔ είναι σύμμετρα είναι σύμμετρα και τα ΑΕ, ΓΖ καθώς και τα ΒΕ, ΔΖ (ως υπόλοιπα) (Β6, Π12, σελ. 150 και Π11, σελ. 236). Τα ΑΕ, ΕΒ είναι μέσα και δυνάμει μόνο σύμμετρα άρα και τα ΓΖ, ΖΔ είναι μέσα (Π23, σελ. 247) και δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π13, σελ. 237), άρα το ΓΔ είναι αποτομή μέσης (Π74, σελ. 308–Π75, σελ. 308).

Ισχυρίζομαι τώρα ότι έχει και την ίδια τάξη με την αποτομή μέσης ΑΒ.

Επειδή $AE/\Gamma Z = BE/\Delta Z$, εναλλάξ θα είναι $AE/EB = \Gamma Z/Z\Delta$ (Β5, Π16, σελ. 134). Αλλά

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AE^2}{AE \cdot EB} \qquad \text{και} \qquad \frac{\Gamma Z}{Z\Delta} = \frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z \cdot Z\Delta}.$$

Συνεπώς

$$\frac{AE^2}{AE \cdot EB} = \frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z \cdot Z\Delta}$$

και εναλλάξ

$$\frac{AE^2}{\Gamma Z^2} = \frac{AE \cdot EB}{\Gamma Z \cdot Z\Delta}.$$

Είναι όμως σύμμετρα τα AE^2, ΓZ^2 άρα και τα $AE \cdot EB$, $\Gamma Z \cdot Z\Delta$ είναι σύμμετρα (Β5, Π16, σελ. 134 και Π11, σελ. 236). Αν λοιπόν το $AE \cdot EB$ είναι ρητό είναι και το $\Gamma Z \cdot Z\Delta$, ενώ αν το $AE \cdot EB$ είναι μέσο είναι μέσο και το $\Gamma Z \cdot Z\Delta$ (Πόρισμα, Π23, σελ. 247).

Άρα το ΓΔ είναι αποτομή μέσης και με την ίδια τάξη όπως και το ΑΒ· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 105 (722) *Το σύμμετρο με την ελάσσονα είναι ελάσσων.*

Απόδειξη. Έστω το έλασσων ΑΒ και το ΓΔ σύμμετρο με αυτό. Ισχυρίζομαι ότι και το ΓΔ είναι ελάσσων.

Ας γίνει η ίδια κατασκευή με την προηγούμενη Πρόταση. Επειδή τα ΑΕ, ΕΒ είναι δυνάμει ασύμμετρα (Π76, σελ. 309) είναι και τα ΓΖ, ΖΔ δυνάμει ασύμμετρα (Π13, σελ. 237). Επειδή $AE/EB = \Gamma Z/Z\Delta$ (Β5, Π12, σελ. 133 και Π16, σελ. 238) θα είναι και $AE^2/EB^2 = \Gamma Z^2/Z\Delta^2$ (Πόρισμα, Β6, Π20, σελ. 156). Συνθέτοντας τώρα παίρνουμε

$$\frac{AE^2 + EB^2}{EB^2} = \frac{\Gamma Z^2 + Z\Delta^2}{Z\Delta^2},$$

και εναλλάξ

$$\frac{AE^2 + EB^2}{\Gamma Z^2 + Z\Delta^2} = \frac{EB^2}{Z\Delta^2}.$$

Είναι όμως σύμμετρα τα BE^2, ΔZ^2 άρα είναι σύμμετρα και τα $AE^2 + EB^2$, $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ (Β5, Π16, σελ. 134 και Π11, σελ. 236). Είναι ρητό το $AE^2 + EB^2$ (Π76, σελ. 309) και άρα είναι ρητό και το $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$.

Επιπλέον

$$\frac{AE^2}{AE \cdot EB} = \frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z \cdot Z\Delta},$$

ενώ το AE^2 είναι σύμμετρο με το ΓZ^2. Οπότε και τα $AE \cdot EB$, $\Gamma Z \cdot Z\Delta$ είναι σύμμετρα. Όμως το $AE \cdot EB$ είναι μέσο, άρα μέσο είναι και το $\Gamma Z \cdot Z\Delta$ (Πόρισμα, Π23, σελ. 247). Έτσι καταλήξαμε στο ότι τα ΓΖ, ΖΔ είναι δυνάμει ασύμμετρα με άθροισμα τετραγώνων ρητό και ορθογώνιο μέσο.

Άρα το ΓΔ είναι ελάσσων (Π76, σελ. 309)· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 106 (722) *Το σύμμετρο με πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου είναι πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου.*

Απόδειξη. Έστω ότι το ΑΒ είναι πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου και το ΓΔ σύμμετρο με αυτό. Ισχυρίζομαι ότι και το ΓΔ είναι πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου.

Έστω η ΕΒ προσαρμόζουσα στην ΑΒ, οπότε τα ΑΒ, ΕΒ είναι δυνάμει ασύμμετρα με άθροισμα τετραγώνων μέσο και ορθογώνιο ρητό (Π75, σελ. 308). Ας γίνει η ίδια κατασκευή όπως πριν (Π103, σελ. 332). Με όμοιο τρόπο με την προηγούμενη πρόταση δείχνουμε ότι $\Gamma Z/Z\Delta = AE/EB$ και ότι τα $AE^2 + EB^2$, $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ είναι σύμμετρα, καθώς και τα $AE \cdot EB$, $\Gamma Z \cdot Z\Delta$. Έτσι, το άθροισμα $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ είναι μέσο και το ορθογώνιο $\Gamma Z \cdot Z\Delta$ ρητό.

Άρα η ΓΔ είναι πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 107 (723) *Το σύμμετρο με πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου είναι πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου.*

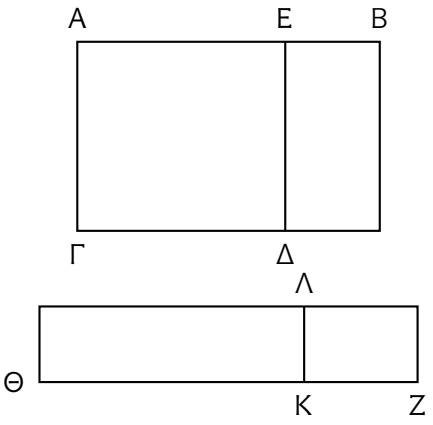
Απόδειξη. Έστω ότι το ΑΒ είναι πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου και το ΓΔ σύμμετρο με αυτό. Ισχυρίζομαι ότι και το ΓΔ είναι πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου.

Έστω η ΕΒ προσαρμόζουσα στην ΑΒ, και ας γίνει η ίδια κατασκευή όπως πριν (Π103, σελ. 332). Οπότε τα ΑΒ, ΕΒ είναι δυνάμει ασύμμετρα με άθροισμα τετραγώνων μέσο και ορθογώνιο μέσο, και το άθροισμα των τετραγώνων ασύμμετρο με το ορθογώνιό τους (Π78, σελ. 310).

Όπως δείχθηκε νωρίτερα (Π104, σελ. 333) τα ΑΕ, ΕΒ είναι σύμμετρα με τα ΓΔ, ΖΔ και ότι τα $AE^2 + EB^2$, $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ είναι σύμμετρα, καθώς και τα $AE \cdot EB$, $\Gamma Z \cdot Z\Delta$. Έτσι, τα ΓΖ, ΖΔ είναι δυνάμει ασύμμετρα, το άθροισμα $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ είναι μέσο και το ορθογώνιο $\Gamma Z \cdot Z\Delta$ μέσο, ενώ τα $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$, $\Gamma Z \cdot Z\Delta$ είναι ασύμμετρα.

Άρα η ΓΔ είναι πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 108 (723) *Αν από ρητό ορθογώνιο αφαιρεθεί μέσο, το ευθύγραμμο τμήμα που έχει ισεμβαδικό τετράγωνο με τη διαφορά τους είναι είτε αποτομή είτε ελάσσων.*



Απόδειξη. Ας αφαιρεθεί από το ρητό ΒΓ το μέσο ΒΔ. Ισχυρίζομαι ότι το ευθύγραμμο τμήμα με τετράγωνο ισεμβαδικό με το ΕΓ είτε είναι αποτομή είτε ελάσσων.

Ας θεωρήσουμε το ρητό ΖΗ και ας κατασκευαστεί σε αυτή ορθογώνιο ΗΘ ισεμβαδικό με το ΒΓ, και ας αφαιρεθεί το ΗΚ ισεμβαδικό με το ΔΒ. Άρα $|E\Gamma| = |\Lambda\Theta|$.

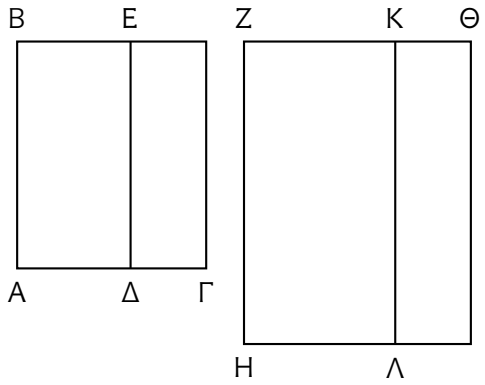
Επειδή το ΒΓ είναι ρητό και το ΒΔ μέσο είναι και το ΗΘ ρητό και το ΗΚ μέσο και έχουν πλευρά τη ρητή ΖΗ. Συνεπώς η ΖΘ είναι ρητή και σύμμετρη με την ΖΗ (Π20, σελ. 242) ενώ η ΖΘ είναι ασύμμετρη με τη ΖΚ (Π13, σελ. 237). Άρα τα ρητά ΖΘ, ΖΚ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, οπότε το ΚΘ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308) και η ΚΖ προσαρμόζουσα.

Τα ΘΖ, $\sqrt{\Theta Z^2 - ZK^2}$ είτε είναι σύμμετρα είτε ασύμμετρα.

Αν είναι σύμμετρα, η ΘΖ είναι και σύμμετρη με την αρχική ρητή ΖΗ, οπότε η ΚΘ είναι πρώτη αποτομή. Το ευθύγραμμο τμήμα όμως που το τετράγωνό του είναι ισεμβαδικό με ορθογώνιο μιας πλευράς ρητής και της άλλης πλευράς πρώτης αποτομής είναι αποτομή (Π91, σελ. 319). Το ευθύγραμμο τμήμα λοιπόν που το τετράγωνό του είναι ισεμβαδικό με το ΛΘ, δηλαδή το ΕΓ, είναι αποτομή.

Αν είναι ασύμμετρα τώρα, είναι και η ΘΖ σύμμετρη με την αρχική ρητή ΖΗ, οπότε η ΚΘ είναι τέταρτη αποτομή. Το ευθύγραμμο τμήμα με τετράγωνο ισεμβαδικό με ορθογώνιο πλευράς ρητής και δεύτερης πλευράς τέταρτης αποτομής είναι ελάσσων (Π94, σελ. 323)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 109 (724) *Αν από μέσο ορθογώνιο αφαιρεθεί ρητό, το ευθύγραμμο τμήμα που έχει ισεμβαδικό τετράγωνο με τη διαφορά τους είναι είτε πρώτη αποτομή μέσης είτε πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου.*



Απόδειξη. Ας αφαιρεθεί από το μέσο ΒΓ το ρητό ΒΔ. Ισχυρίζομαι ότι το ευθύγραμμο τμήμα με τετράγωνο ισεμβαδικό με το ΕΓ είτε είναι πρώτη αποτομή μέσης είτε πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου.

Ας θεωρήσουμε ρητή ΖΗ και ας κατασκευαστούν τα ορθογώνια όπως και στην προηγούμενη πρόταση (Π108, σελ. 335). Η ΖΘ είναι ρητή και ασύμμετρη με τη ΖΗ, ενώ η ΚΖ είναι ρητή και σύμμετρη με τη ΖΗ. Άρα τα ΖΘ, ΚΖ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π13, σελ. 237). Συνεπώς το ΚΘ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308) με προσαρμόζουσα την ΖΚ. Τώρα, τα ΘΖ, $\sqrt{\Theta Z^2 - ZK^2}$ είτε είναι σύμμετρα είτε ασύμμετρα.

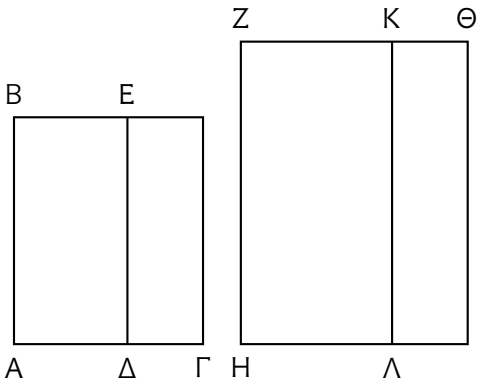
Αν είναι σύμμετρα, είναι και η προσαρμόζουσα ΖΚ σύμμετρη με την αρχική ρητήΖΗ, οπότε η ΚΘ είναι δεύτερη αποτομή. Έτσι το ευθύγραμμο τμήμα με τετράγωνο ισεμβαδικό με το ΛΘ, δηλαδή το ΕΓ, είναι πρώτη αποτομή μέσης (Π92, σελ. 320).

Αν τώρα είναι ασύμμετρα, αφού η ΖΚ είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή ΖΗ, η ΚΘ είναι πέμπτη αποτομή. Οπότε το ευθύγραμμο τμήμα με

τετράγωνο ισεμβαδικό με το ΕΓ είναι πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου (Π95, σελ. 324)· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 110 (724) *Αν από μέσο ορθογώνιο αφαιρεθεί μέσο και ασύμμετρο προς το όλο, το ευθύγραμμο τμήμα που έχει ισεμβαδικό τετράγωνο με τη διαφορά τους είναι είτε δεύτερη αποτομή μέσης είτε πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου.*

Απόδειξη. Ας αφαιρεθεί όπως και στην κατασκευή της προηγούμενης πρότασης από το μέσο ΒΓ το μέσο ΒΔ ασύμμετρο με το ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι το ευθύγραμμο τμήμα που το τετράγωνό του είναι ισεμβαδικό με το ΓΕ είναι είτε δεύτερη αποτομή μέσης είναι πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου.

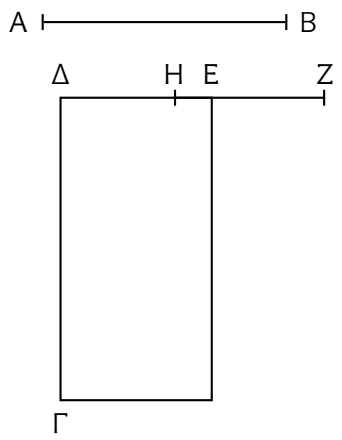


Τα ΒΓ, ΒΔ είναι μέσα και ασύμμετρα, οπότε τα ΖΘ, ΖΚ είναι ρητά και ασύμμετρα με το ΖΗ (Π22, σελ. 246). Επειδή τα ΒΓ, ΒΔ είναι ασύμμετρα, δηλαδή τα ΗΘ, ΗΚ, άρα θα είναι και τα ΘΖ, ΖΚ ασύμμετρα (Β6, ΠΙ, σελ. 142 και ΠΙΙ, σελ. 236). Δηλαδή τα ΖΘ, ΖΚ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα, οπότε το ΚΘ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308) με προσαρμόζουσα τη ΖΚ. Τώρα, τα ΖΘ, $\sqrt{ZΘ^2 - ZK^2}$ είναι είτε σύμμετρα είτε ασύμμετρα.

Αν μεν είναι σύμμετρα, επειδή καμιά από τις ΖΘ, ΖΚ δεν είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή ΖΗ, το ΚΘ είναι τρίτη αποτομή. Είναι και ρητή η ΚΛ και το ορθογώνιο με πλευρές τη μία ρητή και την άλλη τρίτη αποτομή είναι άλογο, και το ευθύγραμμο τμήμα με ισεμβαδικό τετράγωνο είναι η άλογος που ονομάσαμε δεύτερη αποτομή μέσης (Π93, σελ. 322). Οπότε το ευθύγραμμο τμήμα με τετράγωνο ισεμβαδικό με το ΛΘ, δηλαδή το ΕΓ, είναι δεύτερη αποτομή μέσης.

Έστω τώρα ότι είναι ασύμμετρα, οπότε αφού κανένα από τα ΖΘ, ΖΚ δεν είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή ΖΗ, το ΚΘ είναι έκτη αποτομή. Το ευθύγραμμο τμήμα όμως με τετράγωνο ισεμβαδικό με ορθογώνιο με μια πλευρά ρητή και την άλλη έκτη αποτομή είναι πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου (Π96, σελ. 325). Το ευθύγραμμο τμήμα λοιπόν με τετράγωνο ισεμβαδικό με το ΛΘ, δηλαδή το ΕΓ, είναι πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 111 (725) *Δεν υπάρχουν αποτομές που να είναι και δυώνυμες.*



Απόδειξη. Έστω ότι η αποτομή ΑΒ είναι και δυώνυμος. Θεωρούμε τη ρητή ΓΔ, και ας κατασκευάσουμε με πλευρά τη ΓΔ ορθογώνιο ΓΕ ισεμβαδικό με το AB^2 έχοντας πλάτος το ΔΕ. Επειδή το ΑΒ είναι αποτομή το ΔΕ είναι πρώτη αποτομή (Π97, σελ. 326). Ας είναι το ΕΖ η προσαρμόζουσα. Έτσι τα ΔΖ, ΖΕ είναι ρητά δυνάμει μόνο σύμμετρα και τα ΔΖ, $\sqrt{\Delta Z^2 - ZE^2}$ είναι σύμμετρα, ενώ το ΔΖ είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό ΓΔ.

Πάλι επειδή το ΑΒ είναι δυώνυμος η ΔΕ είναι πρώτη δυώνυμος (Π60, σελ. 292). Ας διαιρεθεί αυτή στα μονώνυμά της από το σημείο Η και ας υποθέσουμε ότι το ΔΗ είναι το μεγαλύτερο. Άρα τα ΔΗ, ΗΕ είναι ρητά δυνάμει μόνο σύμμετρα και τα ΔΗ, $\sqrt{\Delta H^2 - HE^2}$ είναι σύμμετρα, ενώ το μεγαλύτερο μονώνυμο ΔΗ είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή ΓΔ. Άρα το ΔΖ είναι σύμμετρο με το ΔΗ (Π12, σελ. 236), και άρα και το υπόλοιπο ΗΖ είναι σύμμετρο με το ΔΖ (Π15, σελ. 238). Επειδή τα ΔΖ, ΗΖ είναι σύμμετρα (Π15, σελ. 238 και το ΔΖ είναι ρητό, είναι και το ΗΖ ρητό. Αφού λοιπόν το ΔΖ είναι σύμμετρο με το ΗΖ, τα ΔΖ, ΕΖ είναι ασύμμετρα. Συνεπώς τα ΖΗ, ΕΖ είναι ασύμμετρα (Π13, σελ. 237). Έτσι τα ΗΖ, ΖΕ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα, οπότε το ΕΗ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308). Αλλά το ΕΗ είναι ρητό, οπότε έχουμε άτοπο.

Άρα καμιά αποτομή δεν μπορεί να είναι και δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πόρισμα 21 *Η αποτομή και τα άλλα είδη αλόγων που ακολούθησαν είναι κλάσεις ξένες με την κλάση των μέσων αλλά και μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ήδη τα παρακάτω:

- Το τετράγωνο μέσης αν κατασκευαστεί ως ορθογώνιο με πλευρά ρητή σχηματίζει πλάτος ρητή και ασύμμετρη με την πρώτη (ρητή) πλευρά του (Π22, σελ. 246).

- Το τετράγωνο αποτομής αν κατασκευαστεί ως ορθογώνιο με πλευρά ρητή σχηματίζει πλάτος πρώτη αποτομή (Π97, σελ. 326).

- Το τετράγωνο πρώτης αποτομής αν κατασκευαστεί ως ορθογώνιο με πλευρά ρητή σχηματίζει πλάτος δεύτερη αποτομή (Π98, σελ. 327).

- Το τετράγωνο δεύτερης αποτομής αν κατασκευαστεί ως ορθογώνιο με πλευρά ρητή σχηματίζει πλάτος τρίτη αποτομή (Π99, σελ. 328).

- Το τετράγωνο ελάσσονος αν κατασκευαστεί ως ορθογώνιο με πλευρά ρητή σχηματίζει πλάτος τέταρτη αποτομή (Π100, σελ. 330).
- Το τετράγωνο πλευράς διαφοράς ρητού και μέσου αν κατασκευαστεί ως ορθογώνιο με πλευρά ρητή σχηματίζει πλάτος πέμπτη αποτομή (Π101, σελ. 331).
- Το τετράγωνο πλευράς διαφοράς μέσου και μέσου αν κατασκευαστεί ως ορθογώνιο με πλευρά ρητή σχηματίζει πλάτος πέμπτη αποτομή (Π102, σελ. 332).

Επειδή λοιπόν τα πλάτη αυτά διαφέρουν και από την πρώτη πλευρά και μεταξύ τους, από την πρώτη γιατί είναι ρητή και μεταξύ τους γιατί είναι διαφορετικής τάξης είναι φανερό ότι και αυτά ως ευθύγραμμα τμήματα διαφέρουν μεταξύ τους.

Και αφού δείχθηκε ότι η αποτομή δεν μπορεί να είναι και δυώνυμος (Π111, σελ. 337), αλλά αν σχηματίζει ορθογώνιο με ρητή, τα άλογα ευθύγραμμα τμήματα που παρουσιάστηκαν μετά την αποτομή παράγουν, ως πλάτη, καθένα με τη δική του τάξη αποτομές ενώ εκείνα που παρουσιάστηκαν μετά τη δυώνυμο παράγουν, ως πλάτη, καθένα με τη δική του τάξη δυώνυμες συμπεραίνουμε ότι εκείνα που παρουσιάστηκαν μετά την αποτομή είναι διαφορετικά από εκείνα που παρουσιάστηκαν μετά τη δυώνυμο. Συνεπώς έχουμε δεκατρία διαφορετικά είδη κατά την τάξη τους ευθύγραμμα τμήματα. Αυτά είναι τα

Μέσο,
Δυώνυμος,
Πρώτη δυώνυμος,
Δεύτερη δυώνυμος,
Μείζων,
Πλευρά ρητού συν μέσου εμβαδού,
Πλευρά μέσου συν μέσου εμβαδού,
Αποτομή,
Πρώτη αποτομή μέσης,
Δεύτερη αποτομή μέσης,
Ελάσσων,
Πλευρά διαφοράς ρητού και μέσου,
Πλευρά διαφοράς μέσου και μέσου.

Δ

Πρόταση 112 (726) *Τετράγωνο ρητής κατασκευασμένο ως ισεμβαδικό ορθογώνιο με μια πλευρά δυώνυμο σχηματίζει πλάτος αποτομή της οποίας τα*

μονώνυμα είναι σύμμετρα με τα μονώνυμα της διωνύμου και με τον ίδιο λόγο με αυτά· και επιπλέον η αποτομή αυτή έχει την ίδια τάξη με τη δυώνυμο.

Απόδειξη. Έστω ότι το α είναι ρητή και η ΒΓ δυώνυμος με μεγαλύτερο μονώνυμο το ΓΔ. Υποθέτουμε επίσης ότι $\alpha^2 = \text{ΒΓ} \cdot \text{ΕΖ}$. Ισχυρίζομαι ότι το ΕΖ είναι αποτομή της οποίας τα μονώνυμα είναι σύμμετρα με τα ΓΔ, ΔΒ και με τον ίδιο λόγο και ακόμα ότι το ΕΖ έχει την ίδια τάξη αποτομής με την τάξη δυωνύμου που έχει το ΒΓ.

Έστω ευθύγραμμο τμήμα η ώστε $\alpha^2 = \text{ΒΔ} \cdot \eta$. Επειδή $\text{ΒΓ} \cdot \text{ΕΖ} = \text{ΒΔ} \cdot \eta$ είναι και $\text{ΒΓ}/\text{ΒΔ} = \eta/\text{ΕΖ}$ (Β6, Π16, σελ. 153). Είναι και $\text{ΒΓ} > \text{ΒΔ}$ άρα η $\eta >$ ΕΖ (Β6, Π16, σελ. 153 και Π14, σελ. 151). Έστω τώρα ότι $\eta =$ ΕΘ και άρα ισχύει $\text{ΒΓ}/\text{ΒΔ} = \text{ΕΘ}/\text{ΕΖ}$ και δια διαιρέσεως του λόγου (Β5, Ορ15, σελ. 127) θα ισχύει $\text{ΓΔ}/\text{ΒΔ} = \text{ΘΖ}/\text{ΕΖ}$ (Β5, Π17, σελ. 135). Θεωρούμε σημείο Κ ώστε να ισχύει $\text{ΘΖ}/\text{ΕΖ} = \text{ΖΚ}/\text{ΚΕ}$, και άρα $\text{ΘΚ}/\text{ΚΖ} = \text{ΖΚ}/\text{ΚΕ}$ προσθέτοντας αριθμητές και παρονομαστές (Β5, Π12, σελ. 133). Ισχύει και $\text{ΖΚ}/\text{ΚΕ} = \text{ΓΔ}/\text{ΒΔ}$, άρα και $\text{ΘΚ}/\text{ΚΖ} = \text{ΓΔ}/\text{ΒΔ}$. Είναι όμως τα ΓΔ^2, ΒΔ^2 σύμμετρα (Π36, σελ. 259), άρα και τα ΘΚ^2, ΚΖ^2 είναι σύμμετρα (Πόρισμα, Β6, Π20, σελ. 156 και Π11, σελ. 236). Επιπλέον $\text{ΘΚ}^2/\text{ΚΖ}^2 = \text{ΘΚ}/\text{ΚΕ}$ επειδή τα τρία ευθύγραμμα τμήματα ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ είναι ανάλογα (Β5, Ορ9, σελ. 126). Άρα τα ΘΚ, ΚΕ είναι σύμμετρα (Π11, σελ. 236), οπότε και τα ΘΕ, ΕΚ είναι σύμμετρα (Π15, σελ. 238). Και επειδή $\alpha^2 = \text{ΕΘ} \cdot \text{ΒΔ}$, και το α^2 είναι ρητό άρα είναι ρητό το ορθογώνιο $\text{ΕΘ} \cdot \text{ΒΔ}$ με ρητή πλευρά την ΒΔ, οπότε το ΕΘ είναι ρητό και σύμμετρο με το ΒΔ (Π20, σελ. 242). Έτσι και η σύμμετρη με αυτή, η ΕΚ είναι ρητή και σύμμετρη με τη ΒΔ (Π12, σελ. 236). Επειδή $\text{ΓΔ}/\text{ΔΒ} = \text{ΖΚ}/\text{ΚΕ}$, ενώ τα ΓΔ, ΔΒ είναι δυνάμει μόνο συμμετρα και τα ΖΚ, ΚΕ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π11, σελ. 236). Είναι και ρητή η ΚΕ άρα και η ΖΚ ρητή. Έτσι τα ρητά ΖΚ, ΚΕ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, και συνεπώς το ΕΖ είναι αποτομή (Π73, σελ. 308).

Τώρα, τα ΓΔ, $\sqrt{\text{ΓΔ}^2 - \text{ΒΔ}^2}$ είναι είτε σύμμετρα είτε ασύμμετρα.

Αν είναι σύμμετρα και τα ΖΚ, $\sqrt{\text{ΖΚ}^2 - \text{ΚΕ}^2}$ θα είναι σύμμετρα (Π14, σελ. 237). Και αν μεν το ΓΔ είναι σύμμετρο με το αρχική ρητό θα είναι και το ΖΚ (Π11, σελ. 236 και Π12, σελ. 236)· ενώ αν το ΒΔ είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό θα είναι και η ΚΕ (Π12, σελ. 236)· ενώ αν κανένα από τα ΓΔ, ΒΔ δεν είναι σύμμετρα με το αρχικό ρητό, τότε και κανένα από τα ΖΚ, ΚΕ δεν θα είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό.

Έστω τώρα ότι τα ΓΔ, $\sqrt{\text{ΓΔ}^2 - \text{ΒΔ}^2}$ είναι ασύμμετρα. Τότε το ίδιο θα ισχύει και για τα ΖΚ, $\sqrt{\text{ΖΚ}^2 - \text{ΚΕ}^2}$ (Π14, σελ. 237). Και αν μεν το ΓΔ είναι σύμμετρο με το αρχική ρητό θα είναι και το ΖΚ (Π11, σελ. 236 και Π12, σελ. 236)· ενώ αν το ΒΔ είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό θα είναι και η ΚΕ (Π12, σελ. 236)· ενώ αν κανένα από τα ΓΔ, ΒΔ δεν είναι σύμμετρα με το αρχικό ρητό, τότε και κανένα από τα ΖΚ, ΚΕ δεν θα είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό.

Έτσι το ΖΕ είναι αποτομή της οποίας τα μονώνυμα ΖΚ, ΚΕ είναι σύμμετρα με τα μονώνυμα της δυωνύμου, τα ΓΔ, ΒΔ και με τον ίδιο λόγο, και επιπλέον έχει και την ίδια τάξη με το ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 113 (728) *Τετράγωνο ρητής κατασκευασμένο ως ισεμβαδικό ορθογώνιο με μια πλευρά αποτομή σχηματίζει πλάτος δυώνυμη της οποίας τα μονώνυμα είναι σύμμετρα με τα μονώνυμα της αποτομής και με τον ίδιο λόγο με αυτά· και επιπλέον η δυώνυμος αυτή έχει την ίδια τάξη με τη αποτομή.*

Απόδειξη. Έστω ρητό το α, αποτομή το ΒΔ και ισεμβαδικό με το α^2 το $\text{ΒΔ} \cdot \text{ΚΘ}$. Ισχυρίζομαι ότι το ΚΘ είναι δυώνυμος της και τα μονώνυμά του σύμμετρα με τα μονώνυμα του ΒΔ με τον ίδιο λόγο και ακόμα ότι το ΚΘ έχει την ίδια τάξη με το ΒΔ.

Πράγματι, έστω ότι η ΓΔ είναι η προσαρμόζουσα στη ΒΔ. Άρα τα ΒΓ, ΓΔ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π73, σελ. 308). Και έστω η ώστε $\alpha^2 = \text{ΒΓ} \cdot \eta$. Επειδή το α^2 είναι ρητό είναι και το $\text{ΒΓ} \cdot \eta$, και αφού το ΒΓ ρητό, ρητό είναι και το η και σύμμετρο με το ΒΓ (Π20, σελ. 242). Επειδή $\text{ΒΓ} \cdot \eta = \text{ΒΔ} \cdot \text{ΚΘ}$, άρα $\text{ΒΓ}/\text{ΒΔ} = \text{ΚΘ}/\eta$ (Β6, Π16, σελ. 153). Αλλά $\text{ΒΓ} > \text{ΒΔ}$, άρα $\text{ΚΘ} > \eta$ (Β5, Π16, σελ. 134 και Π14, σελ. 134). Θεωρούμε Ε ώστε $\text{ΚΕ} = \eta$, οπότε τα ΚΕ, ΒΓ είναι σύμμετρα. Και αφού $\text{ΒΓ}/\text{ΒΔ} = \text{ΘΚ}/\text{ΚΕ}$ με αναστροφή παίρνουμε $\text{ΒΓ}/\text{ΓΔ} = \text{ΚΘ}/\text{ΘΕ}$ (Πόρισμα, Β5, Π19, σελ. 136). Θεωρούμε επιπλέον σημείο Ζ ώστε $\text{ΚΘ}/\text{ΘΕ} = \text{ΘΖ}/\text{ΖΕ}$, οπότε και για τα υπόλοιπα θα είναι

$$\text{ΚΖ}/\text{ΖΘ} = \text{ΚΘ}/\text{ΘΕ} = \text{ΒΓ}/\text{ΓΔ}$$

(Β5, Π19, σελ. 136).

Τα ΒΓ, ΓΔ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα, άρα και τα ΚΖ, ΖΘ είναι δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π11, σελ. 236). Και επειδή $\text{ΚΘ}/\text{ΘΕ} = \text{ΚΖ}/\text{ΖΘ}$ αλλά $\text{ΚΘ}/\text{ΘΕ} = \text{ΘΖ}/\text{ΖΕ}$ θα ισχύει $\text{ΚΖ}/\text{ΖΘ} = \text{ΘΖ}/\text{ΖΕ}$, συνεπώς $\text{ΚΖ}/\text{ΖΕ} = \text{ΚΖ}^2/\text{ΖΘ}^2$ (Β5, Ορ9, σελ. 126). Είναι και τα ΚΖ^2, ΖΘ^2 σύμμετρα (αφού τα ΚΖ, ΖΘ είναι δυνάμει σύμμετρα), άρα τα ΚΖ, ΖΕ είναι σύμμετρα (Π11, σελ. 236), οπότε και τα ΚΖ, ΚΕ είναι σύμμετρα (Π15, σελ. 238). Είναι και ρητό το ΚΕ και σύμμετρο με το ΒΓ, άρα και το ΚΖ είναι ρητό και σύμμετρο με το ΒΓ (Π12, σελ. 236).

Επειδή $\text{ΒΓ}/\text{ΓΔ} = \text{ΚΖ}/\text{ΖΘ}$, εναλλάξ $\text{ΒΓ}/\text{ΚΖ} = \text{ΓΔ}/\text{ΖΘ}$ (Β5, Π16, σελ. 134). Είναι και τα ΒΓ, ΚΖ σύμμετρα άρα και τα ΖΘ, ΓΔ είναι σύμμετρα (Π11, σελ. 236). Τα ΒΓ, ΓΔ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα άρα και τα ΚΖ, ΖΘ είναι ρητά και δυνάμει μόνο σύμμετρα (Π13, σελ. 237), οπότε το ΚΘ είναι δυώνυμος (Π36, σελ. 259).

Αν τα ΒΓ, $\sqrt{\text{ΒΓ}^2 - \text{ΓΔ}^2}$ είναι σύμμετρα και τα ΚΖ, $\sqrt{\text{ΚΖ}^2 - \text{ΖΘ}^2}$ είναι σύμμετρα (Π14, σελ. 237). Και αν το ΒΓ είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό θα είναι και το ΚΖ (Π12, σελ. 236), εάν το ΓΔ είναι σύμμετρο με το αρχικό

ρητό θα είναι και το ΖΘ, και αν κανένα από τα ΒΓ, ΓΔ κανένα και από τα ΚΖ, ΖΘ (ΠΙ3, σελ. 237).

Αν τα ΒΓ, $\sqrt{\text{ΒΓ}^2 - \text{ΓΔ}^2}$ είναι ασύμμετρα και τα ΚΖ, $\sqrt{\text{ΚΖ}^2 - \text{ΖΘ}^2}$ είναι ασύμμετρα (ΠΙ4, σελ. 237). Και αν το ΒΓ είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό θα είναι και το ΚΖ (ΠΙ2, σελ. 236), εάν το ΓΔ είναι σύμμετρο με το αρχικό ρητό θα είναι και το ΖΘ, και αν κανένα από τα ΒΓ, ΓΔ κανένα και από τα ΚΖ, ΖΘ (ΠΙ3, σελ. 237).

Άρα το ΚΘ είναι δυώνυμος του οποίου τα μονώνυμα ΚΖ, ΖΘ είναι σύμμετρα με τα μονώνυμα της αποτομής, τα ΒΓ, ΓΔ, και με τον ίδιο λόγο, και ακόμα το ΚΘ θα έχει την ίδια τάξη με το ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 114 (729) *Εάν ορθογώνιο έχει μια πλευρά αποτομή και την άλλη δυώνυμο της οποίας τα μονώνυμα είναι σύμμετρα και με τον ίδιο λόγο με τα μονώνυμα της αποτομής, το ευθύγραμμο τμήμα του οποίου το τετράγωνο είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο είναι ρητό.*

Απόδειξη. Ας περιέχεται το ορθπγώνιο $\text{ΑΒ} \cdot \text{ΓΔ}$ από την αποτομή ΑΒ και τη δυώνυμη ΓΔ και έστω ότι $\text{ΓΕ} > \text{ΕΔ}$ τα μονώνυμά της σύμμετρα και με τον ίδιο λόγο με τα μονώνυμα της αποτομής ΑΖ, ΖΒ. Υποθέτουμε επίσης ότι $\eta^2 = \text{ΑΒ} \cdot \text{ΓΔ}$. Ισχυρίζομαι ότι το η είναι ρητό.

θεωρούμε ρητό ευθύγραμμο τμήμα θ και ορθογώνιο ισεμβαδικό με το θ^2 και πλευρά ΓΔ με πλάτος ΚΛ· άρα το ΚΛ είναι αποτομή με μονώνυμα ΚΜ, ΜΛ σύμμετρα με τα μονώνυμα της δυωνύμου ΓΕ, ΕΔ και με τον ίδιο λόγο (ΠΙΙ2, σελ. 339). Αλλά τα ΓΕ, ΕΔ είναι σύμμετρα με τα ΑΖ, ΖΒ με τον ίδιο λόγο, συνεπώς $\text{ΑΖ}/\text{ΖΒ} = \text{ΚΜ}/\text{ΜΛ}$, και εναλλάξ $\text{ΑΖ}/\text{ΚΜ} = \text{ΒΖ}/\text{ΛΜ}$ (Β5, ΠΙ6, σελ. 134), οπότε και για τα υπόλοιπα $\text{ΑΒ}/\text{ΚΛ} = \text{ΑΖ}/\text{ΜΚ}$ (Β5, ΠΙ9, σελ. 136). Τα ΑΖ, ΜΚ είναι σύμμετρα (ΠΙ2, σελ. 236) άρα και τα ΑΒ, ΚΛ είναι σύμμετρα (ΠΙΙ, σελ. 236). Και ισχύει $\text{ΑΒ}/\text{ΚΛ} = (\text{ΓΔ} \cdot \text{ΑΒ})/(\text{ΓΔ} \cdot \text{ΚΛ})$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142). Συνεπώς τα $\text{ΓΔ} \cdot \text{ΑΒ} = \eta^2$, $\text{ΓΔ} \cdot \text{ΚΛ} = \theta^2$ είναι σύμμετρα (Π9, σελ. 233). Αλλά είναι ρητό το θ^2 άρα και το η^2, δηλαδή το η είναι ρητό.

Άρα αν ορθογώνιο έχει μια πλευρά αποτομή και την άλλη δυώνυμο της οποίας τα μονώνυμα είναι σύμμετρα και με τον ίδιο λόγο με τα μονώνυμα της αποτομής, το ευθύγραμμο τμήμα του οποίου το τετράγωνο είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο είναι ρητό.

Πόρισμα 22 *Από αυτή την Πρόταση είναι φανερό ότι γίνεται ρητό ορθογώνιο να έχει άλογες πλευρές· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.* *Δ*

Πρόταση 115 (729) *Από ένα μέσο ευθύγραμμο τμήμα μπορούν να προκύψουν άπειροι άλογοι ώστε κανένας τους να μην ταυτίζεται με κανέναν από τους προηγούμενούς του.*

Απόδειξη. Έστω α μέσο ευθύγραμμο τμήμα. Ισχυρίζομαι ότι από το α μπορούν να προκύψει άπειρο πλήθος άλογων χωρίς κανένα από αυτά να είναι ίδιο με τα προηγούμενα.

Ας θεωρήσουμε ρητό β και έστω $\gamma^2 = \alpha \cdot \beta$, οπότε το γ είναι άλογο, αφού ορθογώνιο ρητού και άλογου είναι άλογο (Π20, σελ. 242). Και αυτό το άλογο τμήμα δεν είναι ίσο με κανένα από τα προηγούμενα, διότι το τετράγωνο κανενός από τα προηγούμενα άλογα τμήματα δεν σχηματίζει μέσο πλάτος όταν είναι ισεμβαδικό με ορθογώνιο ρητού μήκους.

Πάλι έστω $\delta^2 = \beta \cdot \gamma$, οπότε το δ^2 είναι άλογο (Π20, σελ. 242). Άρα το δ είναι άλογο τμήμα και άνισο με τα προηγούμενα άλογα, διότι κανενός από τα προηγούμενα το τετράγωνο δεν είναι ισεμβαδικό με ορθογώνιο μήκους ρητού και πλάτους γ. Με όμοιο τρόπο συνεχίζουμε επ᾽ άπειρο αυτόν τον συλλογισμό, και έτσι είναι φανερό ότι από μέσο ευθύγραμμο τμήμα παράγονται άπειρα άλογα τμήματα που τα επόμενα δεν είναι ίσα με τα προηγούμενα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Βιβλίο 11ο

Στμ: θα λέμε «ισοδύναμα» δυο στερεά με ίσο όγκο.

Ορισμοί

Ορισμοί 1 (731)

(ορ. 1) «Στερεό» είναι αυτό (στμ: το σχήμα) που έχει μήκος, πλάτος και βάθος (στμ: ύψος).

(ορ. 2) «Επιφάνεια» είναι το πέρας ενός στερεού.

(ορ. 3) Μια ευθεία λέμε ότι είναι «κάθετη» σε ένα επίπεδο όταν τέμνει το επίπεδο σε ένα σημείο και είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο τομής της με το επίπεδο.

(ορ. 4) Ένα επίπεδο λέμε ότι είναι «κάθετο» σε ένα άλλο επίπεδο όταν οι ευθείες που ανήκουν σε κάθε ένα από τα δυο επίπεδα και είναι κάθετες στην κοινή τομή των δύο επιπέδων[18] είναι κάθετες στα επίπεδα αυτά.

(ορ. 5) Όταν από ένα σημείο μιας ευθείας που τέμνει ένα επίπεδο αχθεί κάθετη προς το επίπεδο και στη συνέχεια αχθεί το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία τομής της καθέτου με το επίπεδο και της ευθείας με το επίπεδο τότε η γωνία που περιέχεται στην αρχική ευθεία και το παραπάνω ευθύγραμμο τμήμα λέγεται «κλίση ευθείας» (στμ: της αρχικής ευθείας) προς το επίπεδο.

(ορ. 6) «Κλίση επιπέδου» προς επίπεδο λέγεται η οξεία γωνία που περιέχεται στις κάθετες που άγονται στο ίδιο σημείο της κοινής τομής δυο επιπέδων.

18. Στμ: Η τομή των δύο επιπέδων είναι ευθεία όπως αποδεικνύει ο Ευκλείδης στην Π3, σελ. 350.

(ορ. 7) Ένα επίπεδο προς ένα άλλο λέγεται «ομοίως κεκλιμένο» με ένα τρίτο επίπεδο προς ένα τέταρτο όταν οι γωνίες κλίσης του πρώτου και του τρίτου σε σχέση με το δεύτερο και το τέταρτο είναι ίσες.

(ορ. 8) «Παράλληλα» λέγονται τα επίπεδα που είναι ασύμπτωτα.

(ορ. 9) «Όμοια» στερεά σχήματα λέγονται αυτά που περιέχονται στο ίδιο πλήθος όμοιων επιπέδων.

Ήρων ο Αλεξανδρεύς, 10–70 μαχ.

Στμ: Πολλή συζήτηση έχει γίνει στο παρελθόν για αυτόν τον ορισμό ερμηνεύοντας το «ομοίων επιπέδων» σαν «ομοίων επίπεδων σχημάτων», ερμηνεία η οποία μας αναγκάζει να πούμε ότι ο ορισμός αυτός είναι λάθος (σε μια πυραμίδα πάρτε μέσα της μια μικρότερη πυραμίδα με την ίδια βάση και τη συμμετρική της ως προς τη βάση έξω από την αρχική πυραμίδα. Το στερεό που προκύπτει αν από την αρχική πυραμίδα αφαιρέσουμε την εσωτερική με αυτόν τον ορισμό θα έπρεπε να είναι όμοιο με το στερεό που προκύπτει αν από στην αρχική προσθέσουμε την εξωτερική πυραμίδα, αλλά προφανώς δεν είναι). Ο ορισμός όμως είναι σωστός. «Όμοια επίπεδα» δεν έχουν οριστεί. Φαίνεται ότι έχει παραληφθεί κατά την αντιγραφή η λέξη «κεκλιμένα». Ο ορισμός είναι σωστός για τις ανάγκες των Στοιχείων αν προστεθεί αυτή η λέξη: «Όμοια στερεά σχήματα λέγονται αυτά που περιέχονται στο ίδιο πλήθος όμοια κεκλιμένων επιπέδων».

Αυτή τη «διόρθωση» προτείνει και ο Ήρωνας στον πάπυρο που έφτασε στα χέρια του 400 και πλέον χρόνια μετά τον Ευκλείδη.

(ορ. 10) «Ίσα και όμοια» στερεά σχήματα λέγονται αυτά που περιέχονται στο ίδιο πλήθος όμοιων επιπέδων ίσου μεγέθους.

Στμ: Και αυτός ο ορισμός χρειάζεται ίδιου τύπου διόρθωση όπως και ο Ορ9, σελ. 346. Η διόρθωση του παπύρου από τον Ήρωνα είναι επαρκής για τις ανάγκες των Στοιχείων: «Ίσα και όμοια» στερεά λέγονται τα στερεά που είναι όμοια και επιπλέον οι έδρες τους είναι μία προς μία ίσες.

Επίσης έχει συζητηθεί μήπως θα έπρεπε να μην είναι ορισμός αλλά θεώρημα· μήπως δηλαδή πρέπει να αποδειχθεί ότι υπό τις δοθείσες προϋποθέσεις είναι τα ίδια σύνολα. Δεν θα μας απασχολήσει αυτό το θέμα, τον δεχόμαστε ως ορισμό.

(ορ. 11) «Στερεά γωνία» είναι η κλίση προς περισσότερες από δύο ευθείες που τέμνονται σε ένα σημείο. Μια στερεά γωνία περιέχεται σε περισσότερες από δύο επίπεδες γωνίες με κοινή κορυφή και που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

(ορ. 12) «Πυραμίδα» είναι το στερεό σχήμα που περιέχεται σε επίπεδα σχήματα που ξεκινούν από ένα επίπεδο και με ενωμένα τα σύνορά τους καταλήγουν σε μια κοινή κορυφή.

Στμ: σε άλλες αποδώσεις του ορισμού αυτού απουσιάζει η προσπάθεια να αποδοθεί με κάποιο τρόπο το «συνεστώς» του αρχαίου κειμένου. Εδώ το αποδίδουμε με τη φράση «με ενωμένα τα σύνορά τους». (συνεστώς εκ του σύνειμι, δηλαδή όλα μαζί).

(ορ. 13) «Πρίσμα» είναι το στερεό σχήμα που περιέχεται σε επίπεδα σχήματα από τα οποία τα δύο βρίσκονται απέναντι και είναι ίσα, όμοια και παράλληλα ενώ τα υπόλοιπα είναι παραλληλόγραμμα.

(ορ. 14) «Σφαίρα» είναι το σχήμα που προκύπτει όταν ένα ημικύκλιο περιστραφεί γύρω από την διάμετρό του και επανέλθει στην αρχική του θέση.

(ορ. 15) «Άξονας σφαίρας» είναι η ακίνητη ευθεία περί την οποία περιστρέφεται το ημικύκλιο (στμ: του οποίου η περιστροφή δημιουργεί την σφαίρα).

(ορ. 16) «Κέντρο σφαίρας» είναι το κέντρο του ημικυκλίου (στμ: του οποίου η περιστροφή δημιουργεί την σφαίρα).

(ορ. 17) «Διάμετρος σφαίρας» είναι κάθε ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο της και του οποίου τα άκρα βρίσκονται στην επιφάνειά της.

(ορ. 18) «Κώνος» είναι το σχήμα που προκύπτει όταν ένα ορθογώνιο τρίγωνο περιστραφεί περί την μια κάθετη πλευρά του που μένει ακίνητη και επανέλθει στην αρχική του θέση. Αν η ακίνητη πλευρά του τριγώνου είναι ίση με την πλευρά που περιστρέφεται ο κώνος λέγεται «ορθογώνιος», αν είναι μικρότερη ο κώνος λέγεται «αμβλυγώνιος» ενώ αν είναι μεγαλύτερη ο κώνος λέγεται «οξυγώνιος».

(ορ. 19) «Άξονας κώνου» είναι η πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου που μένει ακίνητη και περί την οποία περιστρέφεται αυτό.

(ορ. 20) «Βάση κώνου» είναι ο κύκλος που γράφεται κατά την περιστροφή της μιας κάθετης πλευράς του τριγώνου (στμ: και του οποίου η περιστροφή δημιουργεί τον κώνο).

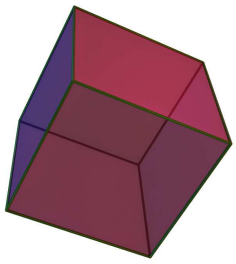
(ορ. 21) «Κύλινδρος» είναι το σχήμα που προκύπτει όταν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο περιστραφεί περί την μια κάθετη πλευρά του και επανέλθει στην αρχική του θέση.

(ορ. 22) «Άξονας κυλίνδρου» είναι η ευθεία που μένει ακίνητη και περί την οποία περιστρέφεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (στμ: του οποίου η περιστροφή δημιουργεί τον κύλινδρο).

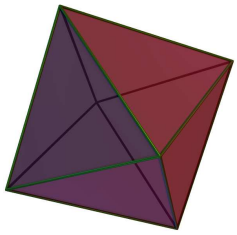
(ορ. 23) «Βάσεις κυλίνδρου» είναι οι κύκλοι που γράφονται κατά την περιστροφή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου από τις δυο απέναντι πλευρές του.

(ορ. 24) Δύο κώνοι ή δύο κύλινδροι λέγονται «όμοιοι» όταν οι άξονές τους είναι ανάλογοι των διαμέτρων των βάσεών τους.

(ορ. 25) «Κύβος» είναι το στερεό σχήμα που περιέχεται σε έξι ίσα τετράγωνα.



Κύβος

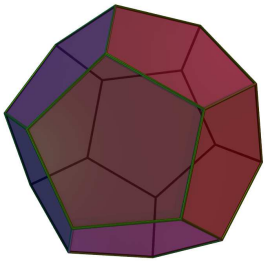


Οκτάεδρο

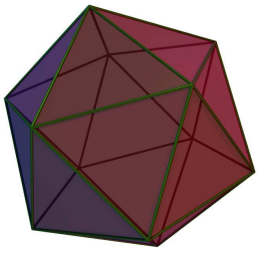
(ορ. 26) «Οκτάεδρο» είναι το στερεό σχήμα που περιέχεται σε οχτώ ίσα και ισόπλευρα τρίγωνα.

(ορ. 27) «Εικοσάεδρο» είναι το στερεό σχήμα που περιέχεται σε είκοσι ίσα και ισόπλευρα τρίγωνα.

(ορ. 28) «Δωδεκάεδρο» είναι το στερεό σχήμα που περιέχεται σε δώδεκα ίσα, ισόπλευρα και ισογώνια πεντάγωνα.



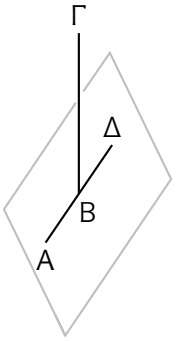
Δωδεκάεδρο



Εικοσάεδρο

Προτάσεις και Θεωρήματα

Πρόταση 1 (733) *Δεν είναι δυνατόν ένα τμήμα μιας ευθείας να βρίσκεται επί ενός επιπέδου και ένα άλλο τμήμα της να βρίσκεται εκτός του επιπέδου αυτού.*



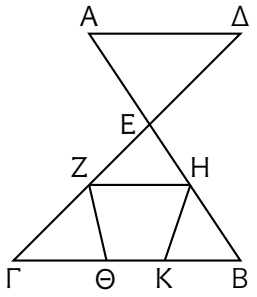
Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το τμήμα ΑΒ της ευθείας ΑΒΓ (στμ: που διέρχεται από τα Α, Β και Γ) βρίσκεται επί δοθέντος επιπέδου ενώ το τμήμα της ΒΓ βρίσκεται εκτός του επιπέδου αυτού.

Τότε, προεκτείνοντας το ΑΒ προκύπτει το τμήμα ΒΔ που βρίσκεται επί του δοθέντος επιπέδου και είναι μέρος της ευθείας ΑΒΔ.

Άρα οι ευθείες ΑΒΓ και ΑΒΔ έχουν κοινό τμήμα το ΑΒ. Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς αν με κέντρο το Β και ακτίνα ΑΒ γράψουμε κύκλο (στμ: στο επίπεδο των ΑΔ, ΒΓ) τότε στις διαμέτρους του κύκλου αυτού (στμ: που είναι τμήματα των ευθειών ΑΒΓ και ΑΒΔ) αντιστοιχούν άνισα τόξα.

Συνεπώς, δεν είναι δυνατόν ένα τμήμα μιας ευθείας να βρίσκεται σε ένα επίπεδο και ένα άλλο τμήμα της να βρίσκεται εκτός του επιπέδου αυτού· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ∎

Πρόταση 2 (733) *Αν δύο ευθείες τέμνονται τότε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και κάθε τρίγωνο* (στμ: με κορυφές το σημείο τομής των δύο ευθειών και δυο άλλα σημεία που το καθένα ανήκει σε καθεμία από τις ευθείες αυτές) *βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο.*



Απόδειξη. Έστω οι ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται στο Ε. Ισχυρίζομαι ότι οι ΑΒ και ΓΔ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και κάθε τρίγωνο με κορυφές το Ε και δύο άλλα σημεία των ΑΒ και ΓΔ (ένα σε καθεμιά) βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τις ΑΒ και ΓΔ.

Λαμβάνουμε τα τυχόντα σημεία Ζ και Η στις ΕΓ και ΕΒ αντίστοιχα και φέρνουμε τις ΓΒ, ΖΗ, ΖΘ και ΗΚ.

Ισχυρίζομαι ότι το τρίγωνο ΕΓΒ βρίσκεται σε ένα επίπεδο.

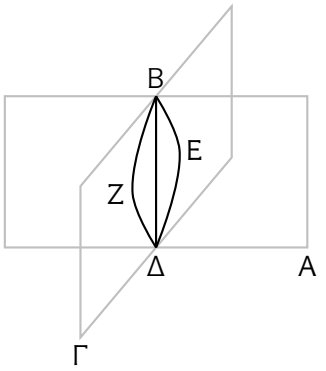
Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι ένα μέρος του τριγώνου ΕΓΒ, έστω το ΖΘΓ ή το ΗΒΚ βρίσκεται σε ένα επίπεδο ενώ το υπόλοιπο σε κάποιο άλλο επίπεδο (στμ: το σημείο αυτό είναι προβληματικό. Το κείμενο φαίνεται να θέλει να δείξει ότι η γωνία στο Γ είναι συνεπίπεδη με όλο το τρίγωνο ΕΓΒ και ομοίως και η γωνία στο Β).

Τότε το ένα μέρος της ΕΓ ή της ΕΒ βρίσκεται σε ένα επίπεδο ενώ ένα άλλο μέρος της βρίσκεται στο άλλο επίπεδο. Αυτό όμως είναι αδύνατον σύμφωνα με την (ΠΙ, σελ. 349).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το τρίγωνο ΕΓΒ βρίσκεται στο επίπεδο των ΕΓ και ΕΒ που είναι το επίπεδο των ΑΒ και ΓΔ (ΠΙ, σελ. 349).

Συνεπώς, οι ΑΒ και ΓΔ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και κάθε τρίγωνο με κορυφές το Ε και δύο άλλα σημεία (ένα σε καθεμία) βρίσκεται στο επίπεδο αυτό· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 3 (734) *Η κοινή τομή δύο επιπέδων είναι ευθεία.*



Απόδειξη. Έστω τα τεμνόμενα επίπεδα ΑΒ και ΒΓ με κοινή τομή την γραμμή ΒΔ. Ισχυρίζομαι ότι η ΔΒ είναι ευθεία.

Υποθέτουμε ότι η ΔΒ δεν είναι ευθεία και φέρνουμε στο επίπεδο ΑΒ την ευθεία ΔΕΒ που διέρχεται από τα Β και Δ ενώ στο επίπεδο ΒΓ την ευθεία ΔΖΒ (ΒΙ, Αίτημα Ι, σελ. 21).

Τότε όμως μεταξύ των τμημάτων ΔΕΒ και ΔΖΒ που έχουν κοινά άκρα τα Δ και Β περιέχεται επιφάνεια. Αυτό όμως είναι άτοπο (ΒΙ, Κοινή Έννοια 9, σελ. 22).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ΔΒ είναι ευθεία ενώ οι ΔΕΖ και ΔΖΒ δεν είναι ευθείες.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει άλλη ευθεία που να διέρχεται από τα Δ και Β πλην της ΔΒ που είναι η κοινή τομή των επιπέδων ΑΒ και ΒΓ.

Άρα αν δύο επίπεδα τέμνονται τότε η κοινή τομή τους είναι ευθεία· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

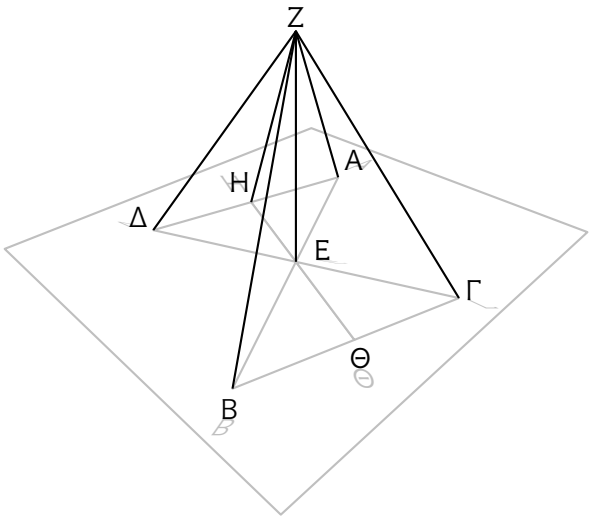
Πρόταση 4 (734) *Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε δύο άλλες τεμνόμενες ευθείες στο σημείο τομής τους τότε είναι κάθετη και στο επίπεδο των δύο αυτών ευθειών.*

Απόδειξη. Έστω η ΕΖ ⊥ ΑΒ και ΕΖ ⊥ ΓΔ στο κοινό τους σημείο Ε. Ισχυρίζομαι ότι η ΕΖ είναι κάθετη και στο επίπεδο των ΑΒ και ΓΔ.

Θεωρούμε ακόμα ότι τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έχουν ληφθεί στις δύο ευθείες έτσι ώστε να ισχύει ΑΕ = ΕΒ = ΓΕ = ΕΔ. Φέρνουμε την τυχούσα ευθεία ΗΕΘ και από το Ζ φέρνουμε τις ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ και ΖΒ.

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΕΒ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΑΕ = ΕΔ, ΓΕ = ΕΒ και $\widehat{\text{ΑΕΔ}} = \widehat{\text{ΓΕΒ}}$ οπότε είναι ίσα (ΒΙ, Π4, σελ. 23). Άρα ΑΔ = ΒΓ και $\widehat{\text{ΔΑΕ}} = \widehat{\text{ΕΒΓ}}$.

Στην συνέχεια συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΒΕΘ που έχουν δύο γωνίες ίσες και μια πλευρά, εκείνη στην οποία βαίνουν οι ίσες γωνίες ΑΕ = ΕΒ και άρα είναι ίσα (ΒΙ, Π26, σελ. 36). Έτσι ισχύουν ΗΕ = ΕΘ και ΑΗ = ΒΘ



Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΕΖ είναι επίσης ίσα καθώς έχουν ΑΕ = ΕΒ, και την ΖΕ κοινή και κάθετη. Οπότε είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23) και άρα ΖΑ = ΖΒ. Ομοίως είναι ΖΓ = ΖΔ.

Έτσι, τα τρίγωνα ΖΑΔ και ΖΒΓ έχουν ΖΑ = ΖΒ, ΑΔ = ΒΓ και ΖΔ = ΖΓ οπότε είναι ίσα (Β1, Π8, σελ. 25) και άρα $\widehat{ZA\Delta} = \widehat{ZB\Gamma}$.

Ακολούθως συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΖΑΗ και ΖΒΘ που έχουν ΖΑ = ΖΒ, ΑΗ = ΒΘ και $\widehat{ZAH} = \widehat{ZB\Theta}$ οπότε είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23). Έτσι ΖΗ = ΖΘ.

Τα τρίγωνα ΗΕΖ και ΘΕΖ έχουν ΗΕ = ΕΘ, την ΕΖ κοινή και ΖΗ = ΖΘ οπότε είναι ίσα (Β1, Π8, σελ. 25). Έτσι $\widehat{HEZ} = \widehat{\Theta EZ} = 1$ορθή και άρα ΖΕ ⊥ ΗΘ.

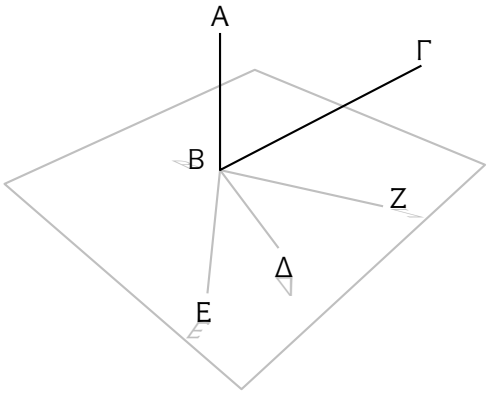
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι η ΖΕ είναι κάθετη σε κάθε άλλη ευθεία που κείται επί του επιπέδου των ΑΒ και ΓΔ και διέρχεται από το Ε.

Μια ευθεία όμως είναι κάθετη σε ένα επίπεδο όταν τέμνει το επίπεδο και σχηματίζει ορθές γωνίες με όλες τις ευθείες που βρίσκονται στο επίπεδο και διέρχονται από το σημείο της ευθείας με το επίπεδο.

Συνεπώς η ΖΕ είναι κάθετη στο επίπεδο των ΑΒ και ΓΔ.

Άρα η κάθετη στο σημείο τομής δύο ευθειών είναι κάθετη και στο επίπεδο που ορίζεται από τις ευθείες αυτές· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 5 (735) *Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε τρεις ευθείες που τέμνονται σε κοινό σημείο τότε οι τρεις αυτές ευθείες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.*



Απόδειξη. Έστω ότι η ΑΒ είναι κάθετη σε καθεμιά από τις ΒΓ, ΒΔ και ΒΕ στο κοινό σημείο τομής τους Β. Ισχυρίζομαι ότι οι ΒΔ, ΒΓ και ΒΕ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Ας υποθέσουμε ότι αυτές δεν βρίσκονται όλες στο ίδιο επίπεδο και ότι η ΒΓ κείται εκτός του επιπέδου των ΒΔ και ΒΕ.

Τότε το επίπεδο που ορίζεται από τις ΑΒ και ΒΓ τέμνει το επίπεδο των ΒΔ και ΒΕ κατά μια ευθεία έστω την ΒΖ (Π3, σελ. 350).

Άρα οι ΑΒ, ΒΓ και ΒΖ βρίσκονται στο επίπεδο των ΑΒ και ΒΓ.

Όμως, η ΑΒ είναι κάθετη σε καθεμιά από τις ΒΔ και ΒΕ οπότε είναι κάθετη και στο επίπεδο που ορίζεται από αυτές (Π4, σελ. 350).

Το επίπεδο όμως ΒΔ και ΒΕ είναι το δοθέν επίπεδο και έτσι η ΑΒ είναι κάθετη επί του δοθέντος επιπέδου.

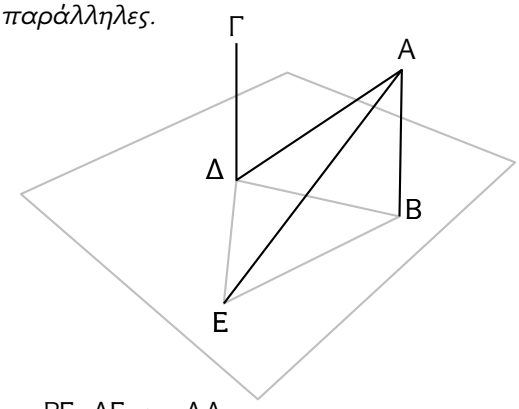
Τότε όμως η ΑΒ είναι κάθετη και σε κάθε ευθεία που κείται στο δοθέν επίπεδο και την τέμνει (ΒΙΙ, Ορ3, σελ. 345). Έτσι, είναι κάθετη στην ΒΖ και επομένως $\widehat{ABZ} = 1$ ορθή.

Από την υπόθεση είναι και $\widehat{AB\Gamma} = 1$ ορθή οπότε $\widehat{ABZ} = \widehat{AB\Gamma} = 1$ ορθή που όμως είναι αδύνατον καθώς αυτές βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ΒΓ κείται επί του επιπέδου των ΒΔ και ΒΕ.

Συνεπώς, αν μια ευθεία είναι κάθετη σε τρεις άλλες ευθείες που τέμνονται, στο σημείο τομής τους, τότε οι τρεις ευθείες κείνται επί του ίδιου επιπέδου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 6 (736) *Αν δύο ευθείες είναι κάθετες στο ίδιο επίπεδο τότε είναι παράλληλες.*



Απόδειξη. Έστω οι ΑΒ και ΓΔ που είναι κάθετες στο δοθέν επίπεδο στα σημεία του Β και Δ. Ισχυρίζομαι ότι ΑΒ // ΓΔ.

Φέρνουμε την ΒΔ και την ΔΕ που κείται επί του δοθέντος επιπέδου και είναι κάθετη στην ΒΔ με Ε τέτοιο ώστε ΑΒ = ΔΕ. Φέρνουμε και τις ΒΕ, ΑΕ και ΑΔ.

Καθώς οι ΒΔ και ΒΕ τέμνουν την ΑΒ και κείνται επί του δοθέντος επιπέδου έπεται ότι $\widehat{AB\Delta} = \widehat{ABE} = 1$ ορθή (ΒΙΙ, Ορ3, σελ. 345).

Ομοίως προκύπτει και ότι $\widehat{\Gamma\Delta B} = \widehat{\Gamma\Delta E} = 1$ ορθή.

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΕΒ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΑΒ = ΔΕ, την ΒΔ κοινή και $\widehat{AB\Delta} = \widehat{E\Delta B}(= 1$ ορθή και άρα είναι ίσα (ΒΙ, Π4, σελ. 23). Έτσι, ΑΔ = ΒΕ. Και επειδή ΑΒ = ΕΔ και η ΑΕ κοινή στα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΕΑ, αυτά είναι ίσα (ΒΙ, Π8, σελ. 25) και επομένως ισχύει $\widehat{E\Delta A} = \widehat{ABE} = 1$ ορθή.

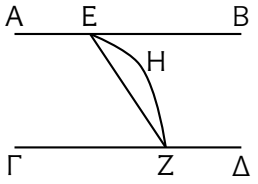
Έτσι η ΕΔ είναι κάθετη στην ΔΑ. Είναι όμως κάθετη και σε καθεμιά από τις ΒΔ και ΔΓ. Συνεπώς, καθώς η ΕΔ είναι κάθετη στις ΒΔ, ΔΑ και ΔΓ στο σημείο τομής τους Δ από την (Π5, σελ. 351) συμπεραίνουμε ότι οι ΒΔ, ΔΑ και ΔΓ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Στο επίπεδο όμως των ΔΒ και ΔΑ βρίσκεται και η ΑΒ (Π2, σελ. 349) και άρα οι ΑΒ, ΒΔ και ΔΓ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Επιπλέον, καθώς $\widehat{AB\Delta} = \widehat{B\Delta\Gamma} = 1$ορθή έπεται ότι ΑΒ // ΓΔ.

Συνεπώς, αν δύο ευθείες είναι κάθετες στο ίδιο επίπεδο είναι μεταξύ τους παράλληλες· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 7 (736) *Η ευθεία που διέρχεται από δύο τυχόντα σημεία δύο παράλληλων ευθειών (ένα σε καθεμιά) κείται επί του επιπέδου των δύο παραλλήλων.*



Απόδειξη. Έστω ΑΒ// ΓΔ. Λαμβάνουμε τα τυχόντα σημεία Ε και Ζ στις ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Ισχυρίζομαι ότι η ΕΖ κείται επί του επιπέδου των ΑΒ και ΓΔ.

Ας υποθέσουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία Ε και Ζ είναι το ΕΗΖ που δεν κείται επί του επιπέδου των ΑΒ και ΓΔ.

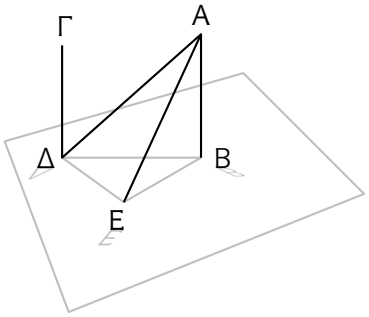
Θεωρούμε οποιοδήποτε επίπεδο που περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα ΕΗΖ (στμ: το οποίο δεν είναι το αρχικό αφού το αρχικό δεν περιέχει το ΕΗΖ) οπότε αυτό θα τέμνει το επίπεδο των ΑΒ και ΓΔ κατά μια ευθεία που διέρχεται από τα Ε και Ζ, έστω την ΕΖ του σχήματος (Π3, σελ. 350).

Συνεπώς, οι ευθείες ΕΗΖ και ΕΖ περιέχουν επιφάνεια κάτι που είναι αδύνατον (Β1, Κοινή Έννοια 9, σελ. 22).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ΕΖ κείται επί του επιπέδου των ΑΒ και ΓΔ.

Συνεπώς, αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και ληφθούν δύο τυχόντα σημεία τους (ένα στην καθεμιά) η ευθεία που διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία κείται επί του ίδιου επιπέδου με τις δύο παράλληλες· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 8 (737) *Αν η μια από δύο παράλληλες ευθείες είναι κάθετη σε ένα επίπεδο τότε και η άλλη είναι κάθετη στο επίπεδο αυτό.*



Απόδειξη. Έστω ΑΒ // ΓΔ και έστω ότι η ΑΒ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο. Ισχυρίζομαι ότι και η ΓΔ είναι κάθετη στο επίπεδο αυτό.

Έστω ότι οι ΑΒ και ΓΔ τέμνουν το δοθέν επίπεδο στα Β και Δ αντίστοιχα. Φέρνουμε την ΒΔ.

Τότε οι ΑΒ, ΓΔ και ΒΔ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (Π7, σελ. 353).

Στην συνέχεια φέρνουμε και την ΔΕ που κείται επί του δοθέντος επιπέδου και είναι κάθετη στην ΒΔ ενώ το Ε έχει ληφθεί ώστε ΑΒ = ΔΕ. Φέρνουμε και τις ΒΕ, ΑΕ και ΑΔ.

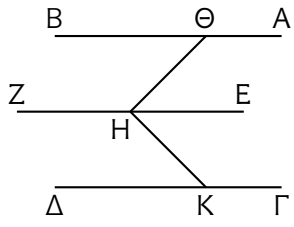
Επειδή η ΑΒ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο είναι κάθετη και σε κάθε ευθεία που την τέμνει και κείται επί του δοθέντος επιπέδου (ΒΙΙ, Ορ3, σελ. 345). Συνεπώς, $\widehat{ABΔ} = \widehat{ABE} = 1$ ορθή. Καθώς όμως ΑΒ // ΓΔ ισχύει $\widehat{ABΔ} + \widehat{ΓΔB} = 2$ ορθές (ΒΙ, Π29, σελ. 38) και άρα $\widehat{ΓΔB} = 1,$ ορθή διότι $\widehat{ABΔ} = 1$ ορθή. Έτσι, η ΓΔ είναι κάθετη στην ΒΔ.

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΕ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΑΒ = ΔΕ, την ΒΔ κοινή και $\widehat{ABΔ} = \widehat{EΔB}$ και άρα είναι ίσα (ΒΙ, Π4, σελ. 23). Άρα ΑΔ = ΒΕ.

Στην συνέχεια συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΕΔΑ που έχουν ΑΒ = ΔΕ, ΒΕ = ΔΑ και την ΕΑ κοινή, οπότε είναι ίσα, και άρα ισχύει $\widehat{ABE} = \widehat{EΔA}$ (ΒΙ, Π8, σελ. 25). Συνεπώς $\widehat{EΔA} = \widehat{ABE} = 1$ ορθή και επομένως η ΕΔ είναι κάθετη στην ΑΔ. Επειδή όμως η ΕΔ είναι κάθετη και στην ΔΒ έπεται ότι είναι κάθετη και στο επίπεδο των ΒΔ και ΔΑ (Π4, σελ. 350). Συνεπώς, η ΕΔ είναι κάθετη και σε κάθε ευθεία που την τέμνει και κείται επί του επιπέδου ΒΔΑ (ΒΙΙ, Ορ3, σελ. 345). Άρα καθώς η ΔΓ κείται επί του επιπέδου των ΑΒ και ΒΔ συμπεραίνουμε ότι η ΔΕ είναι κάθετη στην ΔΓ. Αλλά η ΔΓ είναι κάθετη στην ΒΔ και άρα η ΔΓ είναι κάθετη στο επίπεδο των ΔΕ και ΕΒ (Π4, σελ. 350) που είναι το δοθέν επίπεδο.

Συνεπώς, αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και η μια από αυτές είναι κάθετη σε ένα επίπεδο τότε και η άλλη είναι κάθετη στο επίπεδο αυτό· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 9 (738) *Οι ευθείες που είναι παράλληλες προς μια άλλη ευθεία χωρίς να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτήν είναι μεταξύ τους παράλληλες.*



Απόδειξη. Έστω ΑΒ // ΕΖ και ΓΔ // ΕΖ με τις ΑΒ και ΓΔ να μην βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με την ΕΖ. Ισχυρίζομαι ότι ΑΒ // ΓΔ.

Λαμβάνουμε στην ΕΖ τυχόν σημείο Η και φέρνουμε από το Η την ΗΘ που κείται επί του επιπέδου των ΕΖ και ΑΒ και είναι κάθετη στην ΕΖ. Ομοίως και για την ΗΚ.

Επειδή τώρα η ΕΖ είναι κάθετη σε καθεμιά από τις ΗΘ και ΗΚ είναι κάθετη και στο επίπεδο των ΗΘ και ΗΚ (Π4, σελ. 350).

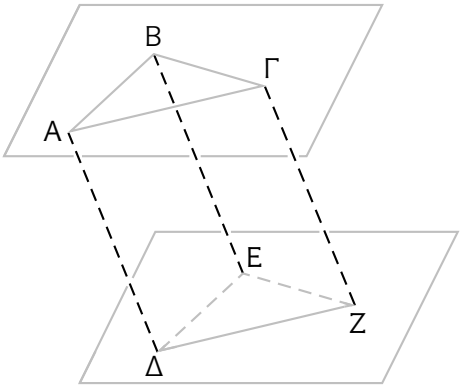
Καθώς ΕΖ // ΑΒ έπεται ότι η ΑΒ είναι κάθετη στο επίπεδο των ΗΘ και ΗΚ (Π8, σελ. 353).

Ομοίως αποδεικνύεται ότι η ΓΔ είναι κάθετη στο επίπεδο των ΗΘ και ΗΚ.

Τότε όμως έπεται ότι ΑΒ // ΓΔ καθώς είναι κάθετες στο ίδιο επίπεδο (Π6, σελ. 352)· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 10 (738) *Αν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι παράλληλες προς δύο άλλες τεμνόμενες ευθείες και δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτές τότε οι*

αντίστοιχες γωνίες που περιέχονται σε κάθε ένα από τα ζεύγη των τεμνόμενων ευθειών είναι ίσες.



Απόδειξη. Έστω οι ΑΒ και ΒΓ που είναι παράλληλες στις ΔΕ και ΕΖ αντίστοιχα και δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτές ενώ τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ έχουν ληφθεί ώστε ΒΑ = ΒΓ = ΕΔ = ΕΖ. Ισχυρίζομαι ότι $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$.

Επειδή οι ΑΒ και ΔΕ είναι ίσες και παράλληλες έπεται ότι και οι ΑΔ και ΒΕ είναι ίσες και παράλληλες (ΒΙ, Π33, σελ. 40). Ενώ ομοίως προκύπτει και ότι οι ΓΖ και ΒΕ είναι ίσες και παράλληλες.

Τότε όμως ΑΔ // ΓΖ καθώς ΑΔ // ΒΕ και δεν κείται επί του ίδιου επιπέδου με αυτήν (Π9, σελ. 354).

Άρα οι ΑΔ και ΓΖ είναι ίσες και παράλληλες οπότε και οι ΑΓ και ΔΖ είναι ίσες και παράλληλες.(ΒΙ, Π33, σελ. 40).

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΑΒ = ΔΕ, ΒΓ = ΕΖ και ΑΓ = ΔΖ. Άρα είναι ίσα και επομένως ισχύει $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ (ΒΙ, Π8, σελ. 25).

Συνεπώς, αν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι παράλληλες προς δύο άλλες χωρίς να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτές τότε οι αντίστοιχες γωνίες που περιέχονται σε κάθε ένα από τα ζεύγη των τεμνόμενων είναι ίσες· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ

Το Θεώρημα των τριών καθέτων δεν είναι κάτι απλοϊκό χωρίς σημαντικότατες συνέπειες. Το θεώρημα αυτό, μεταξύ πολλών χρήσεων, είναι, για παράδειγμα, αναπόσπαστο συστατικό της σύγχρονης Φασματικής Θεωρίας στη Συναρτησιακή Ανάλυση, αφού πρόκειται για βασική ιδιότητα των ορθογώνιων προβολών σε ένα χώρο Hilbert και σχετίζεται με τη μονοτονία τους.

Αν H είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και F, G κλειστοί υπόχωροι του H με $F \hookrightarrow G \hookrightarrow H$ τότε οι ορθογώνιες προβολές P_F και P_G ικανοποιούν την

$$P_F P_G = P_F,$$

που είναι ακριβώς το θεώρημα των τριών καθέτων.

Αντιστρόφως, αν $P_F P_G = P_F$ τότε $F \hookrightarrow G$ και $P_F \leq P_G$. Η διάταξη εδώ σημαίνει ότι ο τελεστής $P_G - P_F$ είναι θετικά ημιορισμένος. Η απόδειξη βασίζεται στο ότι $P_G - P_F = (P_G - P_F)^2$, γεγονός που προκύπτει από το Θεώρημα των τριών καθέτων. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο *Functional Analysis, An Introduction* των Y. Eidelman, V. Milman, and A. Tsolomitis, AMS, GSM 66.

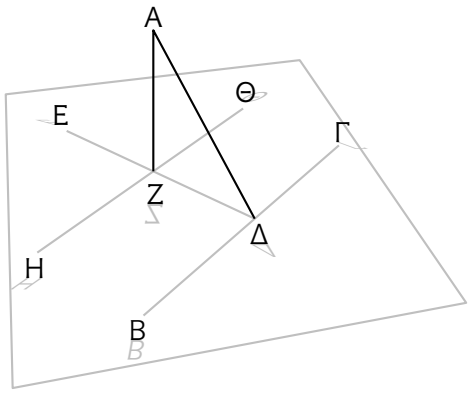
Πρόταση 11 (Κατασκευή) (739) *Από δοθέντος σημείου που βρίσκεται εκτός δοθέντος επιπέδου να αχθεί ευθεία γραμμή κάθετη προς το δοθέν επίπεδο.*

Υλοποίηση: Έστω το δοθέν σημείο Α που βρίσκεται εκτός του δοθέντος επιπέδου. Πρέπει από το Α να αχθεί ευθεία γραμμή κάθετη προς το δοθέν επίπεδο.

Αν ΒΓ είναι μια τυχούσα ευθεία του επιπέδου, φέρνουμε από το Α την ΑΔ κάθετη στην ΒΓ (Β1, Π12, σελ. 27).

Αν η ΑΔ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο τότε η κατασκευή έχει ολοκληρωθεί.

Αν η ΑΔ δεν είναι κάθετη επί του δοθέντος επιπέδου φέρνουμε από το Δ την ΔΕ που βρίσκεται στο δοθέν επίπεδο και είναι κάθετη στην ΒΓ (Β1, Π11, σελ. 27). Στην συνέχεια φέρνουμε από το Α την ΑΖ κάθετη στην ΔΕ ενώ από το Ζ φέρνουμε την ΗΘ παράλληλη προς την ΒΓ (Β1, Π31, σελ. 39).



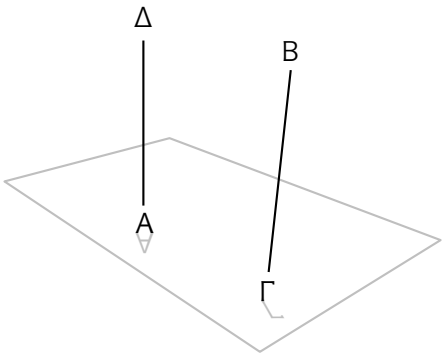
Επειδή η ΒΓ είναι κάθετη σε καθεμιά από τις ΔΑ και ΔΕ έπεται ότι είναι κάθετη στο επίπεδο των ΕΔ και ΔΑ (Π4, σελ. 350). Καθώς ΒΓ // ΗΘ από την Π8, σελ. 353 έπεται ότι η ΗΘ είναι κάθετη στο επίπεδο των ΕΔ και ΔΑ. Όμως η ΗΘ τέμνει την ΑΖ που κείται επί του επιπέδου των ΕΔ και ΔΑ, οπότε η ΗΘ είναι κάθετη στην ΖΑ.

Αλλά η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ και άρα η ΑΖ είναι κάθετη στο επίπεδο των ΗΘ και ΔΕ (Π4, σελ. 350), που είναι το δοθέν επίπεδο.

Συνεπώς, από δοθέντος σημείου που βρίσκεται εκτός δοθέντος επιπέδου έχει αχθεί ευθεία γραμμή κάθετη προς το δοθέν επίπεδο· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Δ

Πρόταση 12 (Κατασκευή) (739) *Από ένα σημείο ενός δοθέντος επιπέδου να υψωθεί κάθετη στο δοθέν επίπεδο.*



Υλοποίηση: Έστω το δοθέν επίπεδο και το σημείο του Α. Από το Α πρέπει να υψωθεί ευθεία γραμμή που να είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο.

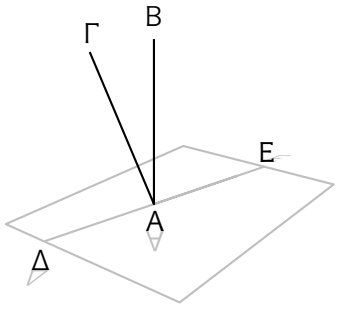
Θεωρούμε το σημείο Β εκτός του δοθέντος επιπέδου και από το Β φέρνουμε την ΒΓ κάθετη προς το δοθέν επίπεδο (Π11, σελ. 357).

Στην συνέχεια φέρνουμε από το Α την ΑΔ παράλληλη στην ΒΓ (Β1, Π31, σελ. 39).

Τότε η ΑΔ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο καθώς ΑΔ // ΒΓ και η ΒΓ είναι κάθετη προς το δοθέν επίπεδο (Π8, σελ. 353).

Συνεπώς, από το σημείο Α του επιπέδου έχει υψωθεί η ΑΔ κάθετη προς αυτό· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 13 (740) *Από ένα σημείο ενός επιπέδου δεν είναι δυνατόν να υψωθούν δύο κάθετοι στο επίπεδο προς το ίδιο μέρος του.*



Απόδειξη. Έστω το δοθέν επίπεδο και το σημείο του Α.

Ας υποθέσουμε ότι είναι δυνατόν από το Α να υψωθούν δύο κάθετες στο δοθέν επίπεδο προς το ίδιο μέρος του, έστω οι ΑΒ και ΑΓ.

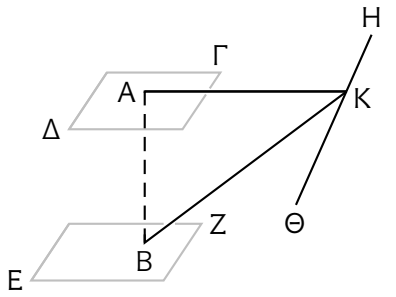
Τότε το επίπεδο των ΑΒ και ΑΓ τέμνει το δοθέν επίπεδο κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής που διέρχεται από το Α (Π3, σελ. 350) έστω την ΔΑΕ. Άρα οι ΑΒ, ΑΓ και ΔΑΕ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και καθώς η ΑΓ είναι κάθετη προς το δοθέν επίπεδο έπεται ότι είναι κάθετη και σε κάθε ευθεία του δοθέντος επιπέδου που την τέμνει (Β11, Ορ3, σελ. 345). Άρα $\widehat{\Gamma AE} = 1$ ορθή.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{BAE} = 1$ ορθή.

Συνεπώς, $\widehat{\Gamma AE} = \widehat{BAE}$. Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς οι $\widehat{\Gamma AE}$ και $\widehat{BAE}$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Άρα, από σημείο ενός επιπέδου δεν είναι δυνατόν να υψωθούν δύο κάθετοι στο επίπεδο προς την ίδια μεριά του· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 14 (740) *Τα επίπεδα επί των οποίων η ίδια ευθεία είναι κάθετη είναι μεταξύ τους παράλληλα.*



Απόδειξη. Έστω η ευθεία ΑΒ που είναι κάθετη σε καθένα από τα επίπεδα ΓΔ και ΕΖ. Ισχυρίζομαι ότι αυτά είναι παράλληλα.

Αν υποθέσουμε ότι δεν είναι παράλληλα τότε προεκτεινόμενα θα έχουν κοινή τομή μια ευθεία γραμμή (Π3, σελ. 350), έστω την ΗΘ.

Λαμβάνουμε σε αυτήν τυχόν σημείο Κ και φέρνουμε τις ΑΚ και ΒΚ.

Επειδή η ΑΒ είναι κάθετη στο επίπεδο ΕΖ είναι κάθετη και στην ΒΚ που κείται επί του επιπέδου ΕΖ. Συνεπώς $\widehat{ABK} = 1$ ορθή.

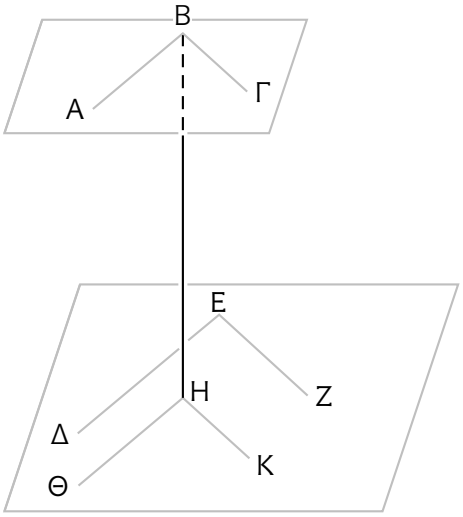
Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{BAK} = 1$ ορθή.

Έτσι, στο τρίγωνο ΑΒΚ ισχύει $\widehat{ABK}+\widehat{BAK} = 2$ ορθές που είναι αδύνατον (Β1, Π17, σελ. 30).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα επίπεδα ΓΔ και ΕΖ δεν τέμνονται όσο και αν προεκταθούν οπότε είναι παράλληλα.

Συνεπώς, τα επίπεδα στα οποία η ίδια ευθεία είναι κάθετη, είναι μεταξύ τους παράλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ∎

Πρόταση 15 (741) *Αν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι παράλληλες προς δύο άλλες τεμνόμενες ευθείες χωρίς να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτές τότε τα επίπεδα στα οποία βρίσκονται τα δύο ζεύγη των τεμνόμενων ευθειών είναι παράλληλα*.



Απόδειξη. Έστω οι τεμνόμενες ευθείες ΑΒ και ΒΓ που είναι παράλληλες στις τεμνόμενες ευθείες ΔΕ και ΕΖ που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με τις ΑΒ και ΒΓ.

Ισχυρίζομαι ότι τα επίπεδα ΑΒ, ΒΓ και ΔΕ, ΔΖ προεκτεινόμενα δεν τέμνονται.

Φέρνουμε από το Β την ΒΗ κάθετη στο επίπεδο των ΔΕ, ΔΖ που τέμνει το επίπεδο αυτό στο Η. Από το Η φέρνουμε τις ΗΘ, ΗΚ παράλληλες προς τις ΕΔ και ΕΖ αντίστοιχα.

Επειδή τώρα η ΒΗ είναι κάθετη στο επίπεδο των ΔΕ, ΔΖ έπεται ότι είναι κάθετη και σε κάθε άλλη ευθεία που κείται επί του επιπέδου αυτού και την τέμνει (Β11, Ορ3, σελ. 345).

Έτσι, ΒΗ ⊥ ΗΘ και ΒΗ ⊥ ΗΚ οπότε $\widehat{BH\Theta} = \widehat{BHK} = 1$ ορθή.

Επειδή όμως ΒΑ // ΗΘ έπεται ότι $\widehat{HBA} + \widehat{BH\Theta} = 2$ ορθές (ΒΙ, Π29, σελ. 38) και καθώς $\widehat{BH\Theta} = 1$ ορθή είναι και $\widehat{HBA} = 1$ ορθή. Άρα ΗΒ ⊥ ΒΑ ενώ όμοια αποδεικνύεται και ότι ΗΒ ⊥ ΒΓ.

Έτσι λοιπόν η ΗΒ είναι κάθετη στις δύο τεμνόμενες ευθείες ΒΑ και ΒΓ, οπότε είναι κάθετη και στο επίπεδο των ΒΑ και ΒΓ (Π4, σελ. 350). επιπλέον η ΒΗ είναι κάθετη και στο επίπεδο των ΗΘ, ΘΚ, αφού αυτό είναι το επίπεδο των ΔΕ, ΕΖ.

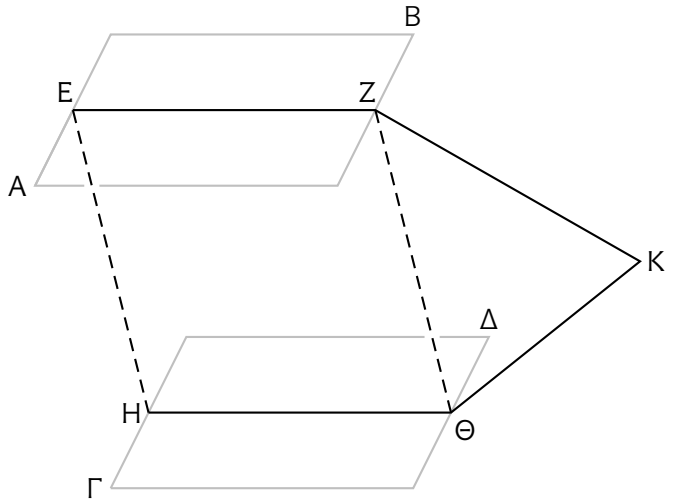
Καθώς λοιπόν, η ΒΗ είναι κάθετη στα επίπεδα των ΒΑ, ΒΓ και ΔΕ, ΕΖ, έπεται ότι τα επίπεδα αυτά είναι παράλληλα (Π14, σελ. 358).

Συνεπώς, αν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι παράλληλες προς δύο άλλες τεμνόμενες ευθείες χωρίς να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτές τότε τα επίπεδα στα οποία βρίσκονται τα ζεύγη των τεμνόμενων ευθειών είναι παράλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 16 (741) *Αν δύο παράλληλα επίπεδα τέμνονται από ένα άλλο επίπεδο τότε οι τομές αυτές είναι παράλληλες ευθείες.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα παράλληλα επίπεδα ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από το ΕΖΗΘ και έστω ΕΖ και ΗΘ οι τομές τους. Ισχυρίζομαι ότι ΕΖ // ΗΘ.

Αν υποθέσουμε ότι οι ΕΖ και ΗΘ δεν είναι παράλληλες τότε προεκτεινόμενες τέμνονται (στμ: αφού είναι συνεπίπεδες) είτε προς το μέρος των Ζ και Θ είτε προς το μέρος των Ε και Η.



Έστω ότι τέμνονται προς το μέρος των Ζ και Θ στο σημείο Κ.

Τότε καθώς η ΕΖΚ κείται επί του επιπέδου ΑΒ όλα τα σημεία της ευθείας αυτής βρίσκονται στο επίπεδο ΑΒ (ΠΙ, σελ. 349). Άρα το Κ, που είναι σημείο της ΕΖΚ, κείται επί του επιπέδου ΑΒ.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι το Κ κείται και επί του επιπέδου ΓΔ, οπότε τα επίπεδα ΑΒ και ΓΔ προεκτεινόμενα τέμνονται.

Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς τα επίπεδα αυτά είναι παράλληλα σύμφωνα με την υπόθεση.

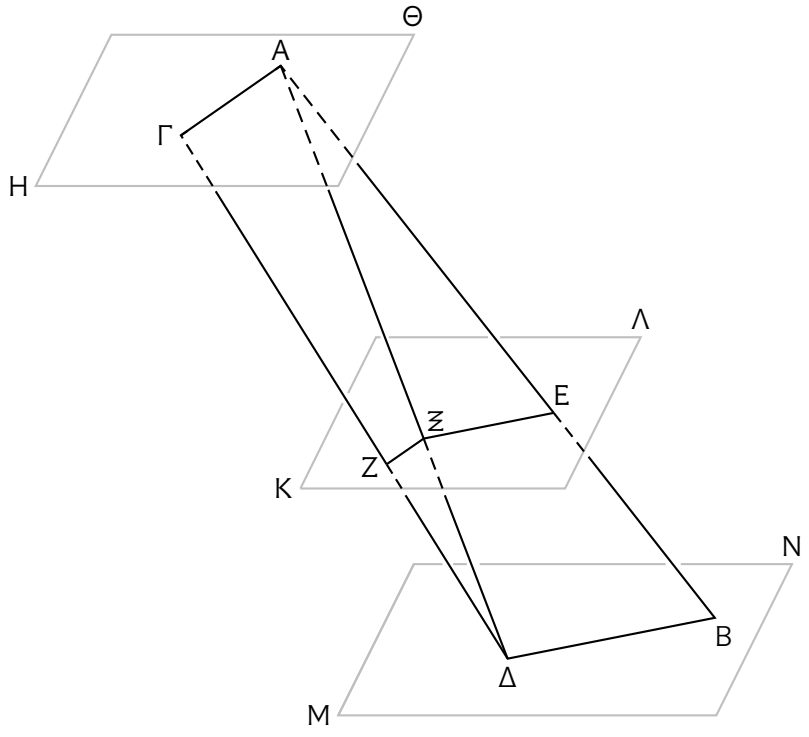
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι ΕΖ και ΗΘ δεν τέμνονται προεκτεινόμενες προς το μέρος των Ζ και Θ, ενώ με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι προεκτεινόμενες δεν τέμνονται ούτε προς το μέρος των Ε και Η. Άρα, ΕΖ // ΗΘ.

Συνεπώς, αν δύο παράλληλα επίπεδα τέμνονται από ένα άλλο επίπεδο τότε οι κοινές τομές τους είναι ευθείες παράλληλες· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 17 (Θεώρημα του Θαλή) (742) *Αν δύο ευθείες τέμνονται από παράλληλα επίπεδα τότε τα τμήματα που ορίζονται σε αυτές είναι ανάλογα.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι ΑΒ και ΓΔ τέμνονται από τα παράλληλα επίπεδα ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ στα σημεία τους Α, Ε, Β, Γ, Ζ και Δ. Ισχυρίζομαι ότι ισχύει ΑΕ/ΕΒ = ΓΖ/ΖΔ.

Φέρνουμε τις ΑΒ, ΒΔ και ΑΔ και έστω Ƶ το σημείο τομής της ΑΔ με το επίπεδο ΚΛ.



Επειδή τα παράλληλα επίπεδα ΚΛ και ΜΝ τέμνονται από το επίπεδο ΕΒΔƵ οι τομές τους είναι παράλληλες ευθείες δηλαδή ΕƵ // ΒΔ (Π16, σελ. 360).

Ομοίως, καθώς τα παράλληλα επίπεδα ΗΘ και ΚΛ τέμνονται από το επίπεδο ΑΞΖΓ για τομές τους ισχύει ΑΓ // ΞΖ.

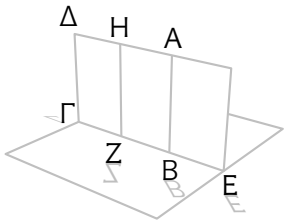
Τώρα επειδή στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι ΕΞ//ΒΔ έπεται ότι ισχύει ΑΕ/ΕΒ = ΑΞ/ΞΔ (Β6, Π2, σελ. 142).

Ενώ ομοίως αποδεικνύεται, καθώς στο τρίγωνο ΑΔΓ είναι ΞΖ // ΑΓ, ότι ΑΞ/ΞΔ = ΓΖ/ΖΔ.

Από τις δύο παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι ΑΕ/ΕΒ = ΓΖ/ΖΔ.

Συνεπώς, αν δύο ευθείες τέμνονται από παράλληλα επίπεδα τότε τα τμήματα που ορίζονται σε αυτές είναι ανάλογα· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 18 (742) *Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο τότε και όλα τα επίπεδα επί των οποίων κείται είναι κάθετα προς το επίπεδο αυτό.*



Απόδειξη. Έστω η ΑΒ που είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο. Ισχυρίζομαι ότι όλα τα επίπεδα επί των οποίων κείται η ΑΒ είναι κάθετα στο δοθέν επίπεδο.

Έστω το επίπεδο ΔΕ, επί του οποίου κείται η ΑΒ, και έστω ότι αυτό τέμνει το δοθέν επίπεδο κατά την ΓΕ.

Λαμβάνουμε τυχόν σημείο Ζ της ΓΕ και φέρνουμε την ΖΗ που κείται επί του ΔΕ και είναι κάθετη στην ΓΕ.

Επειδή η ΑΒ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο είναι κάθετη σε όλες τις ευθείες που βρίσκονται στο επίπεδο αυτό και την τέμνουν (Β11, Ορ3, σελ. 345). Έτσι ΑΒ ⊥ ΓΕ και $\widehat{ABZ}$ = 1 ορθή. Όμως είναι και $\widehat{HZB}$ = 1 ορθή οπότε ΑΒ // ΖΗ (Β1, Π28, σελ. 37). Η ΑΒ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο και άρα η ΖΗ είναι επίσης κάθετη σε αυτό (Π8, σελ. 353).

Καθώς η ΖΗ κείται επί του επιπέδου ΔΕ και ΖΗ ⊥ ΓΕ ενώ η ΓΕ είναι η τομή του δοθέντος επιπέδου με το ΔΕ έπεται ότι το επίπεδο ΔΕ είναι κάθετο στο δοθέν επίπεδο (Β11, Ορ 4, σελ. 345).

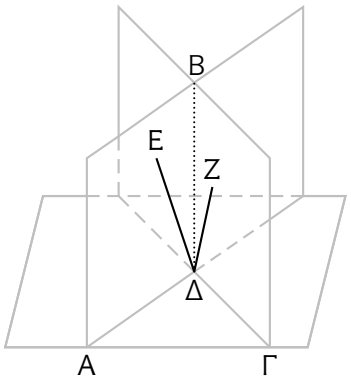
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και κάθε άλλο επίπεδο επί του οποίου κείται η ΑΒ είναι κάθετο στο δοθέν επίπεδο.

Συνεπώς, αν μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο τότε όλα τα επίπεδα επί των οποίων κείται η ευθεία είναι κάθετα στο επίπεδο αυτό· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 19 (743) *Αν δύο τεμνόμενα επίπεδα είναι κάθετα σε ένα άλλο επίπεδο τότε η τομή τους είναι κάθετη στο επίπεδο αυτό.*

Απόδειξη. Έστω τα τεμνόμενα επίπεδα ΑΒ και ΒΓ που είναι κάθετα στο δοθέν επίπεδο και έστω ΒΔ η κοινή τομή τους. Ισχυρίζομαι ότι η ΒΔ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο.

Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι. Φέρνουμε από το Δ στο επίπεδο ΑΒ την ΕΔ ⊥ ΑΔ και στο επίπεδο ΒΓ την ΔΖ ⊥ ΓΔ.



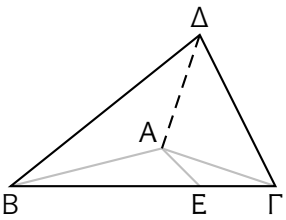
Επειδή το επίπεδο ΑΒ είναι κάθετο στο δοθέν και επί της κοινής τομής τους ΑΔ έχει αχθεί η ΔΕ που κείται επί του επιπέδου ΑΒ έπεται ότι η ΔΕ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο (Β11, Ορ4, σελ. 345).

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι η ΔΖ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο οπότε από το Δ έχουν υψωθεί δύο κάθετες στο δοθέν επίπεδο προς το ίδιο μέρος του. Αυτό όμως είναι αδύνατον (Π13, σελ. 358).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι από το Δ δεν μπορεί να αχθεί καμιά άλλη κάθετη προς το επίπεδο εκτός από την ΔΒ που είναι η κοινή τομή των επιπέδων ΑΒ και ΒΓ.

Άρα αν δύο τεμνόμενα επίπεδα είναι κάθετα σε ένα άλλο επίπεδο τότε και η κοινή τομή τους είναι ευθεία κάθετη στο επίπεδο αυτό· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 20 (743) *Αν μια στερεά γωνία περιέχεται σε τρεις επίπεδες γωνίες τότε το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτές είναι μεγαλύτερο από την τρίτη γωνία.*



Απόδειξη. Έστω η στερεά γωνία με κορυφή το Α που περιέχεται στις τρεις επίπεδες γωνίες $\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A\Delta}$ και $\widehat{\Delta AB}$. Ισχυρίζομαι ότι το άθροισμα των δύο από τις γωνίες αυτές (όπως και αν αυτές ληφθούν) είναι μεγαλύτερο από την τρίτη γωνία.

Αν $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Gamma A\Delta} = \widehat{\Delta AB}$ τότε προφανώς το άθροισμα των δύο από αυτές τις γωνίες είναι μεγαλύτερο από την τρίτη γωνία.

Αν οι γωνίες δεν είναι ίσες, έστω ότι η μεγαλύτερη είναι η $\widehat{BA\Gamma}$.

Με κορυφή το Α και πλευρά ΑΒ κατασκευάζουμε στο επίπεδο ΒΑΓ την $\widehat{BAE} = \widehat{\Delta AB}$ (Β1, Π23, σελ. 34) με Ε τέτοιο ώστε ΑΕ = ΑΔ. Φέρνουμε την ΒΕΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Β και Γ αντίστοιχα. Στην συνέχεια φέρνουμε και τις ΔΒ, ΔΓ.

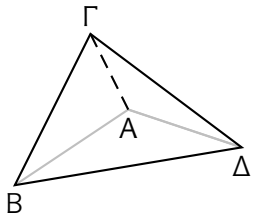
Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΒΑΕ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΑΔ = ΑΕ, την ΑΒ κοινή και $\widehat{\Delta AB} = \widehat{BAE}$. Άρα είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23) και επομένως ΔΒ = ΒΕ. Από την Τριγωνική Ανισότητα (Β1, Π20, σελ. 32) όμως, είναι ΒΔ + ΔΓ > ΒΓ και άρα ΒΕ + ΔΓ > ΒΓ ή ΔΓ > ΒΓ − ΒΕ = ΕΓ.

Τα τρίγωνα ΔΑΓ και ΕΑΓ έχουν ΑΔ = ΑΕ, την ΑΓ κοινή και ΔΓ > ΕΓ οπότε $\widehat{\Delta A\Gamma} > \widehat{EA\Gamma}$ (Β1, Π25, σελ. 35). Καθώς $\widehat{\Delta AB} = \widehat{BAE}$ έπεται ότι $\widehat{\Delta AB} + \widehat{\Delta A\Gamma} > \widehat{BAE} + \widehat{EA\Gamma} = \widehat{BA\Gamma}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε άλλων τυχουσών γωνιών είναι μεγαλύτερο από την τρίτη γωνία.

Συνεπώς, αν μια στερεά γωνία περιέχεται σε τρεις επίπεδες γωνίες τότε το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτές είναι μεγαλύτερο από την τρίτη γωνία· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 21 (744) *Κάθε στερεά γωνία περιέχεται σε επίπεδες γωνίες το άθροισμα των οποίων είναι μικρότερο από τέσσαρες ορθές.*



Απόδειξη. Έστω η στερεά γωνία με κορυφή το Α που περιέχεται στις επίπεδες γωνίες $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$, $\widehat{\text{ΓΑΔ}}$ και $\widehat{\text{ΔΑΒ}}$. Ισχυρίζομαι ότι $\widehat{\text{ΒΑΓ}} + \widehat{\text{ΓΑΔ}} + \widehat{\text{ΔΑΒ}} <$ 4 ορθές.

Λαμβάνουμε τα τυχόντα σημεία Β, Γ και Δ στις ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα και φέρνουμε τις ΒΓ, ΓΔ και ΔΒ.

Επειδή τώρα η στερεά γωνία με κορυφή το Β περιέχεται στις επίπεδες γωνίες $\widehat{\text{ΓΒΑ}}$, $\widehat{\text{ΑΒΔ}}$ και $\widehat{\text{ΓΒΔ}}$ έχουμε ότι $\widehat{\text{ΓΒΑ}} + \widehat{\text{ΑΒΔ}} > \widehat{\text{ΓΒΔ}}$, $\widehat{\text{ΒΓΑ}} + \widehat{\text{ΑΓΔ}} > \widehat{\text{ΒΓΔ}}$ και $\widehat{\text{ΓΔΑ}} + \widehat{\text{ΑΔΒ}} > \widehat{\text{ΓΔΒ}}$ (Π20, σελ. 363).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες παίρνουμε

$$\widehat{\text{ΓΒΑ}} + \widehat{\text{ΑΒΔ}} + \widehat{\text{ΒΓΑ}} + \widehat{\text{ΑΓΔ}} + \widehat{\text{ΓΔΑ}} + \widehat{\text{ΑΔΒ}} > \widehat{\text{ΓΒΔ}} + \widehat{\text{ΒΓΔ}} + \widehat{\text{ΓΔΒ}}.$$

Αλλά στο τρίγωνο ΓΔΒ ισχύει $\widehat{\text{ΓΒΔ}} + \widehat{\text{ΒΓΔ}} + \widehat{\text{ΓΔΒ}} =$ 2 ορθές (Β1, Π32, σελ. 40) και άρα από την παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\widehat{\text{ΓΒΑ}} + \widehat{\text{ΑΒΔ}} + \widehat{\text{ΒΓΑ}} + \widehat{\text{ΑΓΔ}} + \widehat{\text{ΓΔΑ}} + \widehat{\text{ΑΔΒ}} > 2 \text{ ορθές} \qquad (10)$$

Το άθροισμα των γωνιών καθενός από τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ και ΑΔΒ είναι ίσο με 2 ορθές και άρα ισχύει:

$$\widehat{\text{ΓΒΑ}}+\widehat{\text{ΑΓΒ}}+\widehat{\text{ΒΑΓ}}+\widehat{\text{ΑΓΔ}}+\widehat{\text{ΓΔΑ}}+\widehat{\text{ΓΑΔ}}+\widehat{\text{ΑΔΒ}}+\widehat{\text{ΔΒΑ}}+\widehat{\text{ΒΑΔ}} = 6 \text{ ορθές} \quad (11)$$

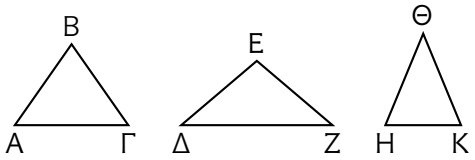
Από τις (10) και (11) προκύπτει ότι $\widehat{\text{ΒΑΓ}} + \widehat{\text{ΓΑΔ}} + \widehat{\text{ΔΑΒ}} <$ 4 ορθές ενώ οι $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$, $\widehat{\text{ΓΑΔ}}$ και $\widehat{\text{ΔΑΒ}}$ περιέχουν την στερεά γωνία με κορυφή το Α.

Συνεπώς, κάθε στερεά γωνία περιέχεται σε επίπεδες γωνίες των οποίων το άθροισμα είναι μικρότερο από τέσσαρες ορθές· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 22 (745) *Αν δοθούν τρεις επίπεδες γωνίες με την ιδιότητα το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτές να είναι μεγαλύτερο από την τρίτη γωνία όπως και αν λαμβάνονται και περιέχονται σε ίσες πλευρές, τότε με πλευρές ίσες με τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα άκρα των ίσων πλευρών των τριών γωνιών, κατασκευάζεται τρίγωνο.*

Απόδειξη. Έστω οι τρεις επίπεδες γωνίες $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$, $\widehat{\text{ΔΕΖ}}$ και $\widehat{\text{ΗΘΚ}}$ τέτοιες ώστε το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτές να είναι μεγαλύτερο από την τρίτη γωνία.

Δηλαδή ισχύουν $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{\Delta EZ} > \widehat{H\Theta K}$, $\widehat{\Theta HK} + \widehat{\Delta EZ} > \widehat{AB\Gamma}$ και $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{H\Theta K} > \widehat{\Delta EZ}$.



Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι παραπάνω γωνίες περιέχονται σε ίσες πλευρές δηλαδή $AB = B\Gamma = \Delta E = EZ = H\Theta = \Theta K$.

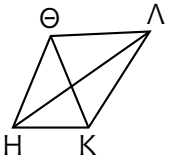
Φέρνουμε τις $A\Gamma$, ΔZ και HK. Ισχυρίζομαι ότι κατασκευάζεται τρίγωνο που έχει τις πλευρές του ίσες με τις $A\Gamma$, ΔZ και HK. Δηλαδή ότι το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτές είναι μεγαλύτερο από την τρίτη πλευρά (ΒΙ, Π22, σελ. 34).

Αν $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ} = \widehat{H\Theta K}$ τότε είναι προφανές ότι κατασκευάζεται τρίγωνο (στμ: ισόπλευρο) καθώς $A\Gamma = \Delta Z = HK$.

Αν τώρα οι $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{\Delta EZ}$ και $\widehat{H\Theta K}$ δεν είναι ίσες, με πλευρά την ΘK και κορυφή το Θ κατασκευάζουμε την $\widehat{K\Theta\Lambda} = \widehat{AB\Gamma}$ με $\Theta\Lambda = AB(= B\Gamma = \Delta E = EZ = H\Theta = \Theta K)$ (ΒΙ, Π23, σελ. 34) ενώ φέρνουμε και τις $K\Lambda$ και $H\Lambda$.

Στην συνέχεια συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Theta K\Lambda$ που έχουν $AB = K\Theta$, $B\Gamma = \Theta\Lambda$ και $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{K\Theta\Lambda}$. Οπότε είναι ίσα (ΒΙ, Π4, σελ. 23) και άρα $A\Gamma = K\Lambda$.

Επειδή $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{H\Theta K} > \widehat{\Delta EZ}$ και $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{K\Theta\Lambda}$ είναι $\widehat{K\Theta\Lambda} + \widehat{H\Theta K} > \widehat{\Delta EZ}$ ή $\widehat{H\Theta\Lambda} > \widehat{\Delta EZ}$.



Έτσι, τα τρίγωνα $H\Theta\Lambda$ και ΔEZ έχουν $H\Theta = \Delta E$, $\Theta\Lambda = EZ$ και $\widehat{H\Theta\Lambda} > \widehat{\Delta EZ}$ οπότε ισχύει $H\Lambda > \Delta Z$ (ΒΙ, Π24, σελ. 35).

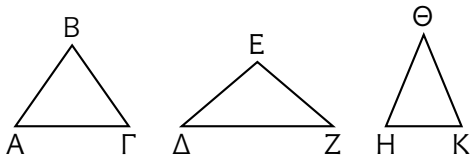
Από την Τριγωνική Ανισότητα (ΒΙ, Π20, σελ. 32) ισχύει όμως ότι $HK + K\Lambda > H\Lambda$ οπότε λόγω της παραπάνω ανισότητας προκύπτει ότι $HK + A\Gamma > \Delta Z$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι $A\Gamma + \Delta Z > HK$ και $\Delta Z + HK > A\Gamma$.

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι κατασκευάζεται τρίγωνο που έχει τις πλευρές του ίσες με τις $A\Gamma$, ΔZ και HK· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 23 (Κατασκευή) (745) *Να κατασκευαστεί στερεά γωνία από τρεις επίπεδες γωνίες αν είναι γνωστό ότι το άθροισμά τους είναι μικρότερο από τέσσαρες ορθές και ότι το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτές είναι μεγαλύτερο από την τρίτη γωνία όπως και αν λαμβάνονται.*

Υλοποίηση: Έστω οι δοθείσες επίπεδες γωνίες $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{\Delta EZ}$ και $\widehat{H\Theta K}$ τέτοιες ώστε $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{\Delta EZ} + \widehat{H\Theta K} < 4$ ορθές και το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτές να είναι μεγαλύτερο από την τρίτη γωνία. Πρέπει να κατασκευαστεί στερεά γωνία από τις $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{\Delta EZ}$ και $\widehat{H\Theta K}$.



Λαμβάνουμε $AB = B\Gamma = \Delta E = EZ = H\Theta = \Theta K$ και φέρνουμε τις $A\Gamma$, ΔZ και HK. Στην συνέχεια κατασκευάζουμε το τρίγωνο ΛMN με πλευρές ίσες με τις $A\Gamma$, ΔZ και HK (Π22, σελ. 364), δηλαδή $\Lambda M = A\Gamma$, $MN = \Delta Z$ και $N\Lambda = HK$.

Ακολούθως γράφουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο ΛMN (Β4, Π5, σελ. 114) του τριγώνου ΛMN και λαμβάνουμε το κέντρο του $Ξ$. Φέρνουμε και τις $\Lambda Ξ$, $MΞ$ και $NΞ$.

Ισχυρίζομαι ότι $AB > \Lambda Ξ$. Αν αυτό δεν ισχύει τότε θα είναι $AB \leq \Lambda Ξ$.

Αν $AB = \Lambda Ξ$, καθώς $AB = B\Gamma$ και $ΞΛ = ΞM$, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Lambda ΞM$ είναι ίσα (Β1, Π8, σελ. 25) και άρα $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Lambda ΞM}$.

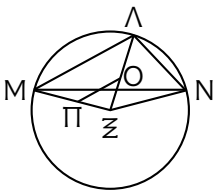
Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{\Delta EZ} = \widehat{MΞN}$ και $\widehat{H\Theta K} = \widehat{NΞ\Lambda}$.

Καθώς $\widehat{\Lambda ΞM} + \widehat{MΞN} + \widehat{NΞ\Lambda} = 4$ ορθές είναι και $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{\Delta EZ} + \widehat{H\Theta K} = 4$ ορθές. Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς από την υπόθεση έχουμε ότι $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{\Delta EZ} + \widehat{H\Theta K} < 4$ ορθές. Άρα $AB \neq \Lambda Ξ$.

Ισχυρίζομαι ότι δεν μπορεί να ισχύει $AB < \Lambda Ξ$. Αν αυτό ισχύει τότε λαμβάνουμε τα Ο και Π ώστε $AB = ΞO$ και $B\Gamma = ΞΠ$. Φέρνουμε και την $OΠ$.

Επειδή $AB = B\Gamma$ είναι και $ΞO = ΞΠ$ ώστε $\Lambda O = \Pi M$. Τότε $\Lambda M \,/\!/\, OΠ$ (Β6, Π2, σελ. 142) ενώ τα τρίγωνα $\Lambda ΞM$ και $OΠΞ$ είναι ισογώνια (Β1, Π29, σελ. 38).

Τότε όμως ισχύει $ΞΛ/\Lambda M = ΞO/OΠ$ (Β6, Π4, σελ. 144) οπότε $\frac{ΞΛ}{ΞO} = \frac{\Lambda M}{OΠ}$ (Β6, Π16, σελ. 153). Καθώς όμως $\Lambda Ξ > ΞO$ είναι και $\Lambda M > OΠ$ (Β5, Π14, σελ. 134). Έτσι, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $OΞΠ$ έχουν $AB = OΞ$, $B\Gamma = ΞΠ$ και $A\Gamma > OΠ$ οπότε είναι και $\widehat{AB\Gamma} > \widehat{OΞΠ}$ (Β1, Π25, σελ. 35).



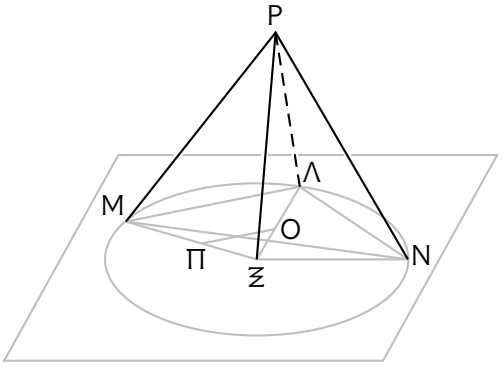
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\widehat{\Delta EZ} > \widehat{MΞN}$ και $\widehat{H\Theta K} > \widehat{NΞ\Lambda}$.

Συνεπώς, $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{\Delta EZ} + \widehat{H\Theta K} > \widehat{\Lambda ΞM} + \widehat{MΞN} + \widehat{NΞ\Lambda}$. Οπότε, καθώς $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{\Delta EZ} + \widehat{H\Theta K} < 4$ ορθές, είναι $\widehat{\Lambda ΞM} + \widehat{MΞN} + \widehat{NΞ\Lambda} < 4$ ορθές.

Αυτό όμως είναι αδύνατον διότι $\widehat{\Lambda ΞM} + \widehat{MΞN} + \widehat{NΞ\Lambda} = 4$ ορθές. Έτσι, η AB δεν είναι μικρότερη από την $\Lambda Ξ$, και καθώς δεν είναι και ίση, συμπεραίνουμε ότι $AB > \Lambda Ξ$.

Στην συνέχεια, υψώνουμε από το σημείο $Ξ$ την $ΞP$ κάθετη στο επίπεδο του κύκλου ΛMN (Π12, σελ. 358) ώστε να ισχύει $ΞP^2 = AB^2 - \Lambda Ξ^2$ ενώ φέρνουμε και τις $P\Lambda$, PM και PN.

Επειδή η ΡΞ είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου ΛΜΝ και οι ΛΞ, ΜΞ και ΝΞ βρίσκονται στο επίπεδο αυτό, έπεται ότι ΡΞ ⊥ ΛΞ, ΡΞ ⊥ ΜΞ και ΡΞ ⊥ ΝΞ (Ορ3, σελ. 345).



Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΞΡΛ και ΞΡΜ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΛΞ = ΞΜ, την ΞΡ κοινή και ΡΛ = ΡΜ οπότε είναι ίσα (Β1, Π8, σελ. 25).

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι ΡΝ = ΡΛ και ΡΝ = ΡΜ οπότε ισχύει ΡΛ = ΡΜ = ΡΝ.

Επειδή $ΑΒ^2 - ΛΞ^2 = ΞΡ^2$ είναι και $ΑΒ^2 = ΛΞ^2 + ΞΡ^2$, ενώ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51) είναι $ΛΞ^2 + ΞΡ^2 = ΛΡ^2$, αφού $\widehat{ΛΞΡ}$ = 1 ορθή. Έτσι, $ΑΒ^2 = ΡΛ^2$ και άρα ΑΒ = ΡΛ.

Καθεμιά από τις ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ είναι ίση με την ΑΒ. Οπότε ΒΓ = ΔΕ = ΕΖ = ΗΘ = ΘΚ = ΑΒ = ΡΜ = ΡΝ = ΡΛ.

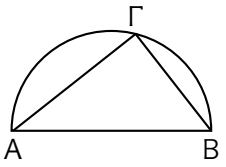
Τότε τα τρίγωνα ΛΡΜ και ΑΒΓ έχουν ΛΡ = ΑΒ, ΡΜ = ΒΓ και ΛΜ = ΑΓ οπότε είναι ίσα (Β1, Π8, σελ. 25) και άρα $\widehat{ΛΡΜ} = \widehat{ΑΒΓ}$.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{ΜΡΝ} = \widehat{ΔΕΖ}$ και $\widehat{ΛΡΝ} = \widehat{ΗΘΚ}$.

Συνεπώς, από τις επίπεδες γωνίες $\widehat{ΛΡΜ}$, $\widehat{ΜΡΝ}$ και $\widehat{ΛΡΝ}$ που είναι αντίστοιχα ίσες με τις δοθείσες $\widehat{ΑΒΓ}$, $\widehat{ΔΕΖ}$ και $\widehat{ΗΘΚ}$ έχει κατασκευαστεί στερεά γωνία με κορυφή το Ρ που περιέχεται στις $\widehat{ΛΡΜ}$, $\widehat{ΜΡΝ}$ και $\widehat{ΛΡΝ}$· όπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λήμμα 14 *Η ΞΡ τέτοια ώστε* $ΞΡ^2 = ΑΒ^2 - ΛΞ^2$ *λαμβάνεται ως εξής:*

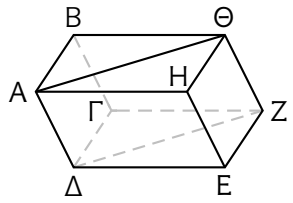
Υλοποίηση: αφού ΑΒ > ΛΞ και γράφουμε επί της ΑΓ (στμ: με διάμετρο την ΑΓ) το ημικύκλιο $\widehat{ΑΒΓ}$.



Στην συνέχεια εναρμόζουμε σε αυτό τμήμα (στμ: δηλαδή χορδή) ΑΓ = ΛΞ που να είναι μικρότερο της διαμέτρου (Β4, Π1, σελ. 111) ενώ φέρνουμε και την ΓΒ.

Τότε $\widehat{ΑΓΒ}$ = 1 ορθή καθώς είναι εγγεγραμμένη στο ημικύκλιο $\widehat{ΑΓΒ}$ (Β3, Π31, σελ. 102) και άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51) έπεται ότι $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2$. Έτσι, $ΑΒ^2 - ΑΓ^2 = ΒΓ^2$ και καθώς ΑΓ = ΛΞ προκύπτει $ΑΒ^2 - ΛΞ^2 = ΓΒ^2$. Λαμβάνοντας λοιπόν, ΞΡ = ΒΓ είναι $ΑΒ^2 - ΛΞ^2 = ΞΡ^2$· όπερ προέκειτο ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 24 (747) *Αν ένα στερεό περιέχεται σε παράλληλα επίπεδα σχήματα* (στμ: οι έδρες) *τότε τα απέναντι επίπεδα είναι ίσα και παραλληλόγραμμα* (στμ: σε ένα στερεό παραλληλεπίπεδο οι απέναντι έδρες είναι ίσα παραλληλόγραμμα).



Απόδειξη. Έστω το στερεό παραλληλεπίπεδο με έδρες τα ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ και ΑΕ. Ισχυρίζομαι ότι οι απέναντι έδρες είναι ίσα παραλληλόγραμμα.

Πράγματι τα παράλληλα επίπεδα ΒΗ και ΓΕ τέμνονται από το επίπεδο ΑΓ οπότε οι τομές τους είναι παράλληλες (Π16, σελ. 360), δηλαδή ΑΒ // ΔΓ.

Ομοίως είναι ΒΓ // ΑΔ καθώς τα παράλληλα επίπεδα ΒΖ και ΑΕ τέμνονται από το επίπεδο ΑΓ.

Άρα το ΑΓ είναι παραλληλόγραμμο, ενώ με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και κάθε ένα από τα ΔΖ, ΖΗ, ΗΒ, ΒΖ και ΑΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Στην συνέχεια φέρνουμε τις ΑΘ και ΔΖ. Επειδή ΑΒ // ΔΓ και ΒΘ // ΓΖ παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο τεμνόμενες ευθείες που είναι παράλληλες με δύο άλλες χωρίς να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτές. Άρα οι αντίστοιχες γωνίες που περιέχονται σε αυτά τα δύο ζεύγη των τεμνόμενων ευθειών είναι ίσες (Π15, σελ. 359), δηλαδή $\widehat{ΑΒΘ} = \widehat{ΔΓΖ}$.

Επειδή πάλι τα ΑΓ και ΒΖ είναι παραλληλόγραμμα έπεται ότι ΑΒ = ΔΓ και ΒΘ = ΓΖ (Β1, Π34, σελ. 41).

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΔΓΖ παρατηρούμε ότι έχουν ΑΒ = ΔΓ, ΒΘ = ΓΖ και $\widehat{ΑΒΘ} = \widehat{ΔΓΖ}$, οπότε είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23) και άρα ΑΘ = ΔΖ.

Το ΒΗ είναι διπλάσιο από το τρίγωνο ΑΒΘ ενώ το ΓΕ είναι διπλάσιο από το τρίγωνο ΔΓΖ. Καθώς τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, έπεται ότι ΒΗ = ΓΕ. Ενώ ομοίως αποδεικνύεται και ότι ΑΓ = ΗΖ και ΑΕ = ΒΖ.

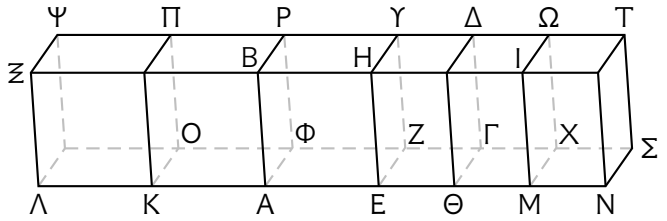
Συνεπώς, αν ένα στερεό περιέχεται σε παράλληλα επίπεδα τότε τα απέναντι επίπεδα σχήματα είναι ίσα και παραλληλόγραμμα· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 25 (748) *Αν ένα επίπεδο τέμνει ένα στερεό παραλληλεπίπεδο παράλληλα με δύο από τις απέναντι παράλληλες έδρες του τότε ο λόγος των εμβαδών των βάσεων των δύο στερεών παραλληλεπιπέδων στα οποία διαιρείται το αρχικό στερεό παραλληλεπίπεδο, είναι ίσος με τον λόγο των όγκων των δύο αυτών στερεών παραλληλεπιπέδων.*

Απόδειξη. Έστω το στερεό παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔ που τέμνεται από το επίπεδο ΖΗ το οποίο είναι παράλληλο στα επίπεδα ΡΑ και ΔΘ.

Ισχυρίζομαι ότι |ΑΕΖΦ|/|ΕΖΓΘ| = |ΑΥ|/|ΕΔ|.

Προεκτείνουμε την ΑΘ και προς τα δύο της άκρα λαμβάνοντας *μ* τμήματα ίσα με το ΑΕ στην προέκταση προς το Α και *ν* τμήματα ίσα με ΕΘ στην προέκταση προς το Θ.



Χάριν απλότητας, για την κατασκευή του σχήματος θέτουμε $\mu = \nu = 2$.

Στην συνέχεια κατασκευάζουμε τα παραλληλόγραμμα ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ και ΜΣ και ακολούθως τα στερεά παραλληλεπίπεδα ΛΠ, ΚΡ και ΔΜ, ΜΤ.

Οι απέναντι έδρες όμως σε ένα στερεό παραλληλεπίπεδο είναι ίσα παραλληλόγραμμα (Π24, σελ. 367) και καθώς $\Lambda K = KA = AE$ είναι και $\Lambda O = K\Phi = AZ$, $KB = K\Ƶ = AH$ και $\Lambda\Psi = \Pi K = AP$.

Ομοίως καθώς $E\Theta = \Theta M = MN$ είναι $E\Gamma = \Theta X = M\Sigma$ και $\Theta H = \Theta I = IN$ και $\Delta\Theta = \Omega M = NT$.

Τότε όμως τα στερεά παραλληλεπίπεδα με έδρες τα παραπάνω επίπεδα, επειδή αυτά είναι και ομοίως κεκλιμένα λόγω της παραλληλίας τους με τα AZ, AH, AP αντίστοιχα, είναι ανά τρία ίσα, δηλαδή $\Pi\Lambda = KP = A\Upsilon$ και $E\Delta = \Delta M = MT$ (Β11, Ορ10, σελ. 346).

Συνεπώς, για τα εμβαδά των βάσεων ισχύουν $|\Lambda Z| = 3\cdot|AZ|$ και $|NZ| = 3\cdot|Z\Theta|$ ενώ αντίστοιχα για τους όγκους των στερεών παραλληλεπιπέδων ισχύουν $|\Lambda\Upsilon| = 3\cdot|A\Upsilon|$ και $|N\Upsilon| = 3\cdot|\Theta\Upsilon|$.

Επειδή κατασκευάστηκαν μ στερεά παραλληλεπίπεδα προς την μεριά του Α και ν στερεά παραλληλεπίπεδα προς τη μεριά του Θ ισχύουν $|\Lambda Z| = \mu\cdot|AZ|$ και $|NZ| = \nu\cdot|Z\Theta|$ ενώ αντίστοιχα για τους όγκους των στερεών παραλληλεπιπέδων ισχύουν $|\Lambda\Upsilon| = \mu\cdot|A\Upsilon|$ και $|N\Upsilon| = \nu\cdot|\Theta\Upsilon|$.

Τότε, προφανώς ισχύουν τα εξής:

- αν $|\Lambda Z| > |NZ|$ είναι και $|\Lambda\Upsilon| > |N\Upsilon|$,
- αν $|\Lambda Z| = |NZ|$ είναι και $|\Lambda\Upsilon| = |N\Upsilon|$,
- αν $|\Lambda Z| < |NZ|$ είναι και $|\Lambda\Upsilon| < |N\Upsilon|$,

και άρα

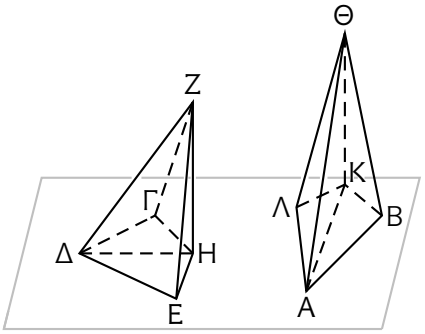
$$\left\{\begin{array}{l} \text{είτε ισχύει } \mu\cdot|AZ| > \nu\cdot|Z\Theta| \text{ και } \mu\cdot|A\Upsilon| > \nu\cdot|\Theta\Upsilon| \\ \text{είτε ισχύει } \mu\cdot|AZ| = \nu\cdot|Z\Theta| \text{ και } \mu\cdot|A\Upsilon| = \nu\cdot|\Theta\Upsilon| \\ \text{είτε ισχύει } \mu\cdot|AZ| < \nu\cdot|Z\Theta| \text{ και } \mu\cdot|A\Upsilon| < \nu\cdot|\Theta\Upsilon| \end{array}\right\}.$$

Σύμφωνα λοιπόν με τον Ορισμό της ισότητας δύο λόγων (Β5, Ορ5, σελ. 126) έχουμε:

$$\frac{|AZ|}{|Z\Theta|} = \frac{|A\Upsilon|}{|\Theta\Upsilon|},$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 26 (Κατασκευή) (749) *Επί δοθείσας ευθείας και με κορυφή δοθέν σημείο της να κατασκευαστεί στερεά γωνία ίση με δοθείσα στερεά γωνία.*



Υλοποίηση: Έστω η δοθείσα ευθεία ΑΒ και το σημείο της Α καθώς και η δοθείσα στερεά γωνία με κορυφή το Δ που περιέχεται στις επίπεδες γωνίες $\widehat{ΕΔΓ}$, $\widehat{ΕΔΖ}$ και $\widehat{ΖΔΓ}$.

Πρέπει επί της ΑΒ και με κορυφή το Α να κατασκευαστεί στερεά γωνία ίση με τη δοθείσα στερεά γωνία που έχει κορυφή το Δ.

Λαμβάνουμε επί της ΔΖ το τυχόν σημείο Ζ και φέρνουμε από το Ζ την ΖΗ κάθετη στο επίπεδο των ΕΔ και ΔΓ που το τέμνει στο Η. Φέρνουμε και την ΔΗ και με πλευρά ΑΒ και κορυφή το Α κατασκευάζουμε τις $\widehat{ΒΑΛ} = \widehat{ΕΔΓ}$ και $\widehat{ΒΑΚ} = \widehat{ΕΔΗ}$ (ΒΙ, Π23, σελ. 34).

Στην συνέχεια λαμβάνουμε το Κ ώστε ΑΚ = ΔΗ και από το Κ υψώνουμε την κάθετη στο επίπεδο ΒΑΛ (ΠΙ2, σελ. 358).

Ακολούθως λαμβάνουμε το σημείο Θ ώστε ΚΘ = ΗΖ και φέρνουμε την ΘΑ.

Ισχυρίζομαι ότι η στερεά γωνία $\hat{Α}$ που περιέχεται στις επίπεδες γωνίες $\widehat{ΒΑΛ}$, $\widehat{ΒΑΘ}$ και $\widehat{ΘΑΛ}$ είναι ίση με την στερεά γωνία $\hat{Δ}$ που περιέχεται στις επίπεδες γωνίες $\widehat{ΕΔΓ}$, $\widehat{ΕΔΖ}$ και $\widehat{ΖΔΓ}$.

Το σημείο Β έχει ληφθεί ώστε ΑΒ = ΔΕ. Φέρνουμε τις ΘΒ, ΚΒ, ΖΕ και ΗΕ.

Τότε καθώς η ΖΗ είναι κάθετη στο δοθέν επίπεδο, είναι κάθετη και σε όλες τις ευθείες που βρίσκονται στο επίπεδο και την τέμνουν (ΒΙΙ, Ορ3, σελ. 345) δηλαδή $\widehat{ΖΗΔ} = \widehat{ΖΗΕ} = 1$ ορθή.

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΚΑΒ και ΗΔΕ παρατηρούμε ότι έχουν ΚΑ = ΗΔ, ΑΒ = ΔΕ και $\widehat{ΒΑΚ} = \widehat{ΕΔΗ}$. Οπότε είναι ίσα (ΒΙ, Π4, σελ. 23) και άρα ΚΒ = ΗΕ.

Ομοίως, καθώς ΚΘ = ΗΖ, ΚΒ = ΗΕ και $\widehat{ΖΗΕ} = \widehat{ΘΚΒ} = 1$ ορθή έπεται ότι και τα τρίγωνα ΚΘΒ και ΖΗΕ είναι ίσα. Έτσι, ΘΒ = ΖΕ.

Ακόμα τα τρίγωνα ΑΚΘ και ΔΗΖ είναι ίσα διότι ΑΚ = ΔΗ, ΚΘ = ΗΖ και $\widehat{ΑΚΘ} = \widehat{ΔΗΖ} = 1$ ορθή και άρα είναι ΑΘ = ΖΔ.

Τότε όμως, καθώς ΑΒ = ΔΕ, ΘΑ = ΔΖ και ΘΒ = ΖΕ, έπεται ότι τα τρίγωνα ΒΑΘ και ΔΕΖ είναι ίσα (ΒΙ, Π8, σελ. 25). Έτσι, $\widehat{ΒΑΘ} = \widehat{ΕΔΖ}$.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{ΘΑΛ} = \widehat{ΖΔΓ}$. Πράγματι, λαμβάνουμε το Λ ώστε ΑΛ = ΔΓ και φέρνουμε τις ΚΛ, ΘΛ, ΗΓ και ΖΓ.

Αφαιρώντας τώρα κατά μέλη τις $\widehat{ΒΑΛ} = \widehat{ΕΔΓ}$ και $\widehat{ΒΑΚ} = \widehat{ΕΔΗ}$ παίρνουμε $\widehat{ΚΑΛ} = \widehat{ΗΔΓ}$.

Τότε όμως τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΗΔΓ είναι ίσα καθώς ΚΑ = ΗΔ, ΑΛ = ΔΓ και $\widehat{\text{ΚΑΛ}} = \widehat{\text{ΗΔΓ}}$ (Β1, Π4, σελ. 23). Συνεπώς, ΚΛ = ΗΓ.

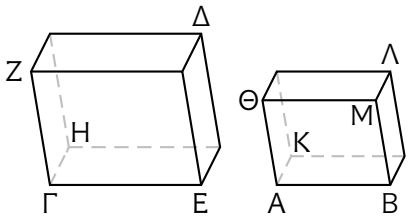
Επειδή πάλι ΛΚ = ΓΗ, ΚΘ = ΗΖ και $\widehat{\text{ΛΚΘ}} = \widehat{\text{ΖΓΗ}} = 1$ ορθή είναι και τα τρίγωνα ΛΚΘ και ΓΗΖ, οπότε ΘΛ = ΖΓ.

Τότε όμως είναι ίσα και τα τρίγωνα ΘΑΛ και ΖΓΔ καθώς έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία: ΘΑ = ΖΔ, ΑΛ = ΔΓ και ΘΛ = ΖΓ (Β1, Π8, σελ. 25). Άρα $\widehat{\text{ΘΑΛ}} = \widehat{\text{ΕΔΓ}}$.

(Στμ: η ισότητα δύο στερεών γωνιών δεν έχει οριστεί. Σιωπηρά ο Ευκλείδης τις θεωρεί ίσες όταν οι πλευρικές γωνίες είναι μία προς μία ίσες.)

Συνεπώς, επί της δοθείσας ευθείας ΑΒ και με κορυφή το σημείο της Α, έχει κατασκευαστεί στερεά γωνία ίση με την δοθείσα στερεά γωνία με κορυφή το Δ· όπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρόταση 27 (Κατασκευή) (750) *Από δοθείσα ευθεία να κατασκευαστεί στερεό παραλληλεπίπεδο όμοιο και ομοίως κείμενο προς δοθέν στερεό παραλληλεπίπεδο.*



Υλοποίηση: Έστω ότι δίνονται η ευθεία ΑΒ και το στερεό παραλληλεπίπεδο ΓΔ. Πρέπει από την ΑΒ να κατασκευαστεί στερεό παραλληλεπίπεδο που να είναι όμοιο και ομοίως κείμενο προς το δοθέν στερεό παραλληλεπίπεδο ΓΔ.

Με πλευρά ΑΒ και κορυφή το Α κατασκευάζουμε την στερεά γωνία που περιέχεται στις $\widehat{\text{ΒΑΘ}}$, $\widehat{\text{ΘΑΚ}}$ και $\widehat{\text{ΚΑΒ}}$ και είναι ίση με την στερεά γωνία Γ̂ ώστε $\widehat{\text{ΒΑΘ}} = \widehat{\text{ΕΓΖ}}$, $\widehat{\text{ΒΑΚ}} = \widehat{\text{ΕΓΗ}}$ και $\widehat{\text{ΚΑΘ}} = \widehat{\text{ΗΓΖ}}$ (Π26, σελ. 370) και ΕΓ/ΓΗ = ΒΑ/ΑΚ, ΗΓ/ΓΖ = ΚΑ/ΑΘ.

Τότε όμως ισχύει ΕΓ/ΓΖ = ΒΑ/ΑΘ (Β5, Π22, σελ. 137).

Επειδή ΕΓ/ΓΗ = ΒΑ/ΑΚ οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες $\widehat{\text{ΕΓΗ}} = \widehat{\text{ΒΑΚ}}$ είναι ανάλογες και άρα το παραλληλόγραμμο ΗΕ είναι όμοιο προς το παραλληλόγραμμο ΚΒ (Β6, Ορ1, σελ. 141).

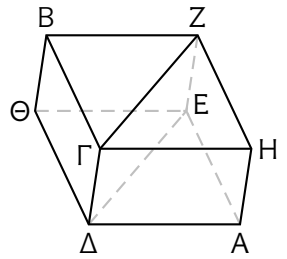
Ομοίως και το παραλληλόγραμμο ΚΘ είναι όμοιο προς το παραλληλόγραμμο ΗΖ, όπως και το ΖΕ προς το ΘΒ.

Έτσι τρία παραλληλόγραμμα (στμ: έδρες) του στερεού ΓΔ είναι όμοια προς τρία παραλληλόγραμμα του στερεού ΑΛ και ομοίως κεκλιμένα, αφού όλες οι αντίστοιχες γωνίες κατασκευάστηκαν ίσες.

Καθώς όμως τα τρία παραλληλόγραμμα ενός στερεού είναι ίσα προς τα τρία παραλληλόγραμμα που βρίσκονται απέναντί τους έπεται ότι το στερεό ΓΔ είναι όμοιο προς το στερεό ΑΛ.

Συνεπώς, από την δοθείσα ευθεία ΑΒ έχει κατασκευαστεί το στερεό ΑΛ που είναι όμοιο και όμοια κείμενο προς το δοθέν στερεό παραλληλεπίπεδο ΓΔ· όπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρόταση 28 (751) *Το επίπεδο που τέμνει ένα στερεό παραλληλεπίπεδο κατά μήκος των διαγωνίων δύο απέναντι επιπέδων σχημάτων* (στμ: εδρών) *του διχοτομεί το στερεό παραλληλεπίπεδο αυτό.*



Απόδειξη. Έστω ότι το στερεό παραλληλεπίπεδο ΑΒ τέμνεται από το επίπεδο ΓΔΕΖ κατά μήκος των διαγωνίων των απέναντι επιπέδων του ΓΖ και ΔΕ. Ισχυρίζομαι ότι το επίπεδο ΓΔΕΖ διχοτομεί το στερεό παραλληλεπίπεδο ΑΒ.

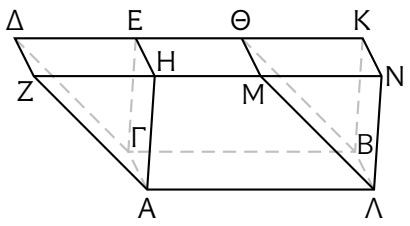
Πράγματι, καθώς τα τρίγωνα ΓΗΖ και ΓΒΖ είναι ίσα, όπως και τα ΑΔΕ και ΔΕΘ (Β1, Π34, σελ. 41) έπεται ότι το παραλληλόγραμμο ΓΑ είναι ίσο με το ΕΒ.

Είναι και ΗΕ = ΓΘ διότι είναι απέναντι έδρες ενός στερεού παραλληλεπιπέδου (Π24, σελ. 367).

Τότε όμως το πρίσμα που περιέχεται στα τρίγωνα ΓΗΖ, ΑΔΕ και τα παραλληλόγραμμα ΗΕ, ΑΓ και ΓΕ είναι ίσο με το πρίσμα που περιέχεται αντίστοιχα στα τρίγωνα ΓΖΒ και ΔΕΘ και τα παραλληλόγραμμα ΓΘ, ΒΕ και ΓΕ διότι τα δύο αυτά πρίσματα περιέχονται σε ίσο αριθμό ίσων επιπέδων ομοίως κεκλιμένων προς το ΑΘ (Β11, Ορ10, σελ. 346).

Συνεπώς, το στερεό ΑΒ έχει διχοτομηθεί από το επίπεδο ΓΔΕΖ· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 29 (751) *Τα στερεά παραλληλεπίπεδα που έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος και των οποίων οι ακμές που ξεκινούν από την βάση καταλήγουν στις ίδιες ευθείες είναι ισοδύναμα.*



Απόδειξη. Έστω τα στερεά παραλληλεπίπεδα ΓΜ και ΓΝ με κοινή βάση την ΑΒ. Τα παραλληλεπίπεδα αυτά έχουν ίσα ύψη και επιπλέον οι ακμές που ξεκινούν από την βάση, δηλαδή οι ΑΗ, ΑΖ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ και ΒΚ καταλήγουν στις ίδιες ευθείες, δηλαδή τις ΖΝ και ΔΚ (οι ΛΜ, ΛΝ, ΑΗ, ΑΖ στην ΖΝ και οι ΓΕ, ΓΔ, ΒΘ, ΒΚ στην ΔΚ).

Ισχυρίζομαι ότι τα στερεά ΓΝ και ΓΜ έχουν ίσους όγκους, δηλαδή |ΓΝ| = |ΓΜ|.

Πράγματι καθώς τα ΓΘ και ΓΚ είναι παραλληλόγραμμα έπεται ότι ΓΒ = ΔΘ και ΓΒ = ΕΚ (Β1, Π34, σελ. 41) και άρα ΔΘ = ΕΚ.

Τότε όμως ΔΘ − ΕΘ = ΕΚ − ΕΘ ή ΔΕ = ΕΚ. Έτσι τα τρίγωνα ΔΓΕ και ΘΒΚ έχουν ΔΕ = ΘΚ, ΕΓ = ΚΒ και $\widehat{\Delta E\Gamma} = \widehat{\Theta K B}$ οπότε είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23) ενώ και τα παραλληλόγραμμα ΔΗ και ΘΝ είναι ίσα (Β1, Π36, σελ. 42).

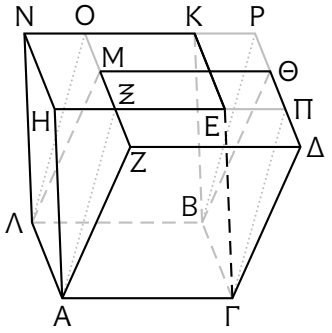
Ομοίως τα τρίγωνα ΑΖΗ και ΛΜΝ είναι ίσα όπως και τα παραλληλόγραμμα ΓΖ και ΒΜ. Επιπλέον και τα παραλληλόγραμμα ΓΗ και ΒΝ είναι ίσα καθώς είναι οι απέναντι έδρες σε ένα στερεό παραλληλεπίπεδο (Π24, σελ. 367).

Τότε όμως το πρίσμα που περιέχεται στα τρίγωνα ΑΖΗ και ΔΓΕ και τα παραλληλόγραμμα ΑΔ, ΔΗ και ΓΗ είναι ίσο με το πρίσμα που περιέχεται στα τρίγωνα ΜΛΝ και ΘΒΚ και τα παραλληλόγραμμα ΒΜ, ΘΝ και ΒΝ. Έτσι τα πρίσματα αυτά έχουν ίσους όγκους.

Προσθέτοντας στους όγκους των πρισμάτων αυτών τον όγκο του στερεού με βάση το παραλληλόγραμμο ΑΒ και απέναντι πλευρά την ΗΕΘΜ προκύπτει ότι τα στερεά παραλληλεπίπεδα ΓΜ και ΓΝ είναι ισοδύναμα, δηλαδή $|\Gamma M| = |\Gamma N|$.

Συνεπώς, τα στερεά παραλληλεπίπεδα με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος και στα οποία οι ακμές που ξεκινούν από την βάση καταλήγουν σε ίδιες ευθείες είναι ισοδύναμα· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 30 (752) *Τα ισοϋψή στερεά παραλληλεπίπεδα που έχουν την ίδια βάση και στα οποία οι ακμές που ξεκινούν από την βάση δεν καταλήγουν στις ίδιες ευθείες είναι ισοδύναμα.*



Απόδειξη. Έστω τα ισοϋψή στερεά παραλληλεπίπεδα ΓΜ και ΓΝ που έχουν βάση την ΑΒ. Έστω ακόμα και οι ακμές ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ και ΒΚ που ξεκινούν από την βάση ΑΒ και δεν καταλήγουν στις ίδιες ευθείες.

Ισχυρίζομαι ότι τα ΓΜ και ΓΝ είναι ισοδύναμα, δηλαδή ισχύει $|\Gamma M| = |\Gamma N|$.

Προεκτείνουμε τις ΝΚ και ΔΘ που τέμνονται στο Ρ. Αντίστοιχα οι προεκτάσεις των ΖΜ και ΗΕ τέμνουν τις ΝΚ και ΔΘ στα Ο και Π. Φέρνουμε και τις ΑΞ, ΛΟ, ΓΠ και ΒΡ.

Τότε το ΓΜ με βάση το παραλληλόγραμμο ΑΓΒΛ και απέναντι έδρα το παραλληλόγραμμο ΖΔΘΜ και το ΓΟ με βάση το παραλληλόγραμμο ΑΓΒΛ και απέναντι έδρα το παραλληλόγραμμο ΞΠΡΟ είναι ισοδύναμα καθώς είναι ισοϋψή, έχουν ίδια βάση και οι ακμές που ξεκινούν από την βάση (δηλαδή οι ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ και ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ) καταλήγουν στις ίδιες ευθείες ΖΟ και ΔΡ (Π29, σελ. 372).

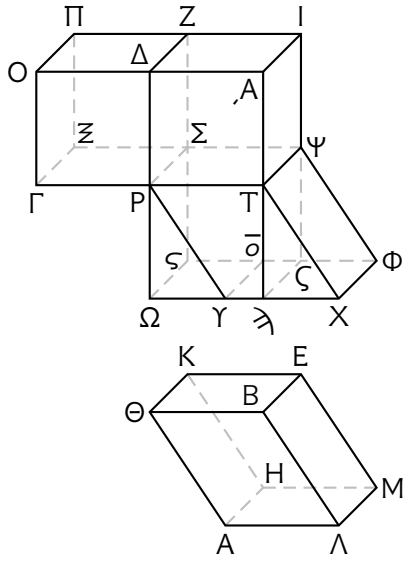
Ομοίως, το ΓΟ με βάση το παραλληλόγραμμο ΑΓΒΛ και απέναντι έδρα το παραλληλόγραμμο ΞΠΡΟ είναι ισοδύναμο με το ΓΝ με βάση το παραλληλόγραμμο ΑΓΒΛ και απέναντι έδρα το παραλληλόγραμμο ΗΕΚΝ, καθώς αυτά είναι ισοϋψή με κοινή βάση και οι ακμές που ξεκινούν από την βάση (δηλαδή οι ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ) καταλήγουν στις ίδιες ευθείες ΗΠ και ΝΡ.

Συνεπώς, |ΓΜ| = |ΓΟ| = |ΓΝ|.

Έτσι, τα ισοϋψή στερεά παραλληλεπίπεδα με την ίδια βάση των οποίων οι ακμές που ξεκινούν από την βάση δεν καταλήγουν στις ίδιες ευθείες είναι ισοδύναμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Στμ: Στην απόδειξη της επόμενης πρότασης χρησιμοποιούνται και γράμματα του αρχαίου ελληνικού αλφαβήτου που ίσως δεν είναι γνωστά καθώς δεν περιλαμβάνονται στα γράμματα του νεοελληνικού αλφαβήτου. Αυτά είναι τα εξής: Κόππα Ϙ, Σαμπί ϡ, Δίγαμμα Ϝ, Στίγμα Ϛ και στίγμα ϛ.

Πρόταση 31 («Τύπος» όγκου παραλληλεπιπέδου) (752) *Τα στερεά παραλληλεπίπεδα που έχουν ισεμβαδικές βάσεις και ίσα ύψη* (στμ: που αντιστοιχούν στις ίσες βάσεις) *είναι ισοδύναμα.*



Απόδειξη. Έστω τα ισοϋψή στερεά παραλληλεπίπεδα ΑΕ και ΓΖ με βάσεις τις ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα με ΑΒ| = |ΓΔ|.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις καθώς τα ΑΕ και ΓΖ είτε είναι ορθογώνια είτε όχι.

1η περίπτωση: Τα ΑΕ και ΓΖ είναι ορθογώνια. Τότε οι ακμές ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓϜ και ΡΣ από τις βάσεις ΑΒ και ΓΔ είναι κάθετες σε αυτές.

Προεκτείνουμε την ΓΡ κατά τμήμα ΡΤ = ΑΛ και κατασκευάζουμε την $\widehat{\text{ΤΡΥ}} = \widehat{\text{ΑΛΒ}}$ (ΒΙ, Π23, σελ. 34) ώστε να ισχύει και ΛΒ = ΡΥ.

Συμπληρώνουμε την βάση ΡΧ και κατασκευάζουμε το στερεό παραλληλεπίπεδο ΨΥ.

Τότε τα παραλληλόγραμμα ΡΧ και ΘΛ είναι ίσα και όμοια καθώς οι ίσες πλευρές τους ΑΛ = ΡΓ και ΛΒ = ΡΥ περιέχουν τις ίσες γωνίες $\widehat{\text{ΤΡΥ}} = \widehat{\text{ΑΛΒ}}$ (Β6, ΠΙ4, σελ. 151).

Για τον ίδιο λόγο, καθώς ΑΛ = ΡΤ, ΛΜ = ΡΣ και $\widehat{\text{ΑΛ}} = \widehat{\text{ΤΡΣ}}$(= 1ορθή) τα παραλληλόγραμμα ΨΡ και ΑΜ είναι ίσα και όμοια. Και ομοίως τα ΛΕ και ΣΥ είναι ίσα και όμοια.

Έτσι, τα τρία παραλληλόγραμμα του στερεού ΑΕ είναι ίσα και όμοια με τρία παραλληλόγραμμα του στερεού ΨΥ και καθώς σε ένα στερεό παραλληλεπίπεδο τα απέναντι επίπεδα είναι ίσα παραλληλόγραμμα (Π24,

σελ. 367), και ομοίως κεκλιμμένα από κατασκευή, έπεται ότι ΑΕ = ΨΥ (Ορ10, σελ. 346).

Στην συνέχεια προεκτείνουμε τις ΔΡ και ΧΥ που τέμνονται στο Ω και από το Τ φέρνουμε την ΑΤ∢ // ΔΩ.

Προεκτείνουμε την ΟΔ προς το Α και συμπληρώνουμε τα στερεά ΩΨ και ΡΙ.

Τότε όμως το ΨΩ έχει βάση το ΡΨ που έχει απέναντι έδρα το ΩΣ, ενώ το ΨΥ έχει βάση το ΡΨ που έχει απέναντι έδρα το ΥΦ.

Καθώς οι ακμές ΡΩ, ΡΥ, Τ∢, ΤΧ, Σς, Σσ̄, ΨΣ και ΨΦ που ξεκινούν από την ίδια βάση ΡΨ καταλήγουν στις ίδιες ευθείες ΩΧ και ςΦ, από την (Π29, σελ. 372) έπεται ότι τα στερεά παραλληλεπίπεδα αυτά είναι ισοδύναμα, δηλαδή |ΨΩ| = |ΨΥ|.

Έτσι,

$$|AE| = |\Psi\Upsilon| = |\Psi\Omega| \tag{12}$$

Ακόμα είναι |ΡΥΧΤ| = |ΩΤ| καθώς έχουν κοινή βάση την ΡΤ και βρίσκονται μεταξύ των παραλλήλων ΡΤ // ΩΧ (Β1, Π35, σελ. 42).

Όμως, |ΡΥΧΤ| = |ΓΔ| επειδή |ΡΥΧΤ| = |ΑΒ| και άρα |ΩΤ| = |ΓΔ|.

Τότε από (Β5, Ορ7, σελ. 126) έχουμε:

$$\frac{|\Gamma\Delta|}{|\Delta T|} = \frac{|\Omega T|}{|\Delta T|}. \tag{13}$$

Το στερεό παραλληλεπίπεδο ΓΙ τέμνεται από το επίπεδο ΡΖ που είναι παράλληλο σε δύο από τις έδρες του (τις ΓΠ και ΙΤ) άρα:

$$\frac{|\Gamma\Delta|}{|\Delta T|} = \frac{|\Gamma Z|}{|PI|} \tag{14}$$

(Π25, σελ. 368).

Ομοίως καθώς το ΩΙ τέμνεται από το ΡΨ που είναι παράλληλο σε δύο από τις έδρες του (τις ΩΣ και ΔΙ) έχουμε:

$$\frac{|\Omega T|}{|PI|} = \frac{|\Gamma Z|}{|PI|} \tag{15}$$

Έτσι, από τις (14) και (15) λόγω της (13) λαμβάνουμε:

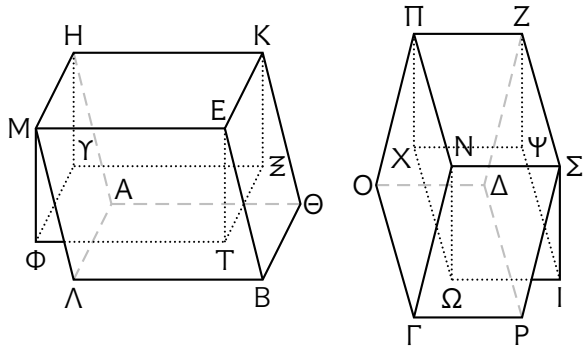
$$\frac{|\Gamma Z|}{|PI|} = \frac{|\Omega\Psi|}{|PI|}, \tag{16}$$

και άρα |ΓΖ| = |ΩΨ| (Β5, Π9, σελ. 132).

Τέλος, από την (12) έπεται ότι |ΑΕ| = |ΩΨ| = |ΓΖ|, δηλαδή τα ΑΕ και ΓΖ είναι ισοδύναμα.

2η περίπτωση: Τα ΑΕ και ΓΖ δεν είναι ορθογώνια. Τότε οι ακμές ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΛΜ,ΓΝ, ΟΠ, ΔΖ και ΡΣ δεν είναι κάθετες στις βάσεις ΑΒ και ΓΔ.

Ισχυρίζομαι ότι τα ΑΕ και ΓΖ είναι ισοδύναμα.



Από τα Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ν και Σ φέρνουμε τις κάθετες στο επίπεδο των ΑΒ και ΓΔ που το τέμνουν στα Ƶ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω και Ι αντίστοιχα. Φέρνουμε και τις ƵΤ, ƵΥ, ΥΦ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ και ΙΨ.

Τότε ισχύει $|\text{ΚΦ}| = |\text{ΠΙ}|$, σύμφωνα με το προηγούμενο μέρος της απόδειξης, καθώς τα ΚΦ και ΠΙ είναι ισοϋψή ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με ίδιες βάσεις.

Όμως $|\text{ΚΦ}| = |\text{ΑΕ}|$ και $|\text{ΠΙ}| = |\text{ΓΖ}|$ διότι αυτά είναι ζεύγη στερεών παραλληλεπιπέδων με ίδιες βάσεις και ίδια ύψη και στα οποία οι ακμές από τις βάσεις δεν καταλήγουν στις ίδιες ευθείες (Π30, σελ. 373).

Άρα, $|\text{ΑΕ}| = |\text{ΚΦ}| = |\text{ΠΙ}| = |\text{ΓΖ}|$, δηλαδή τα ΑΕ και ΓΖ είναι ισοδύναμα.

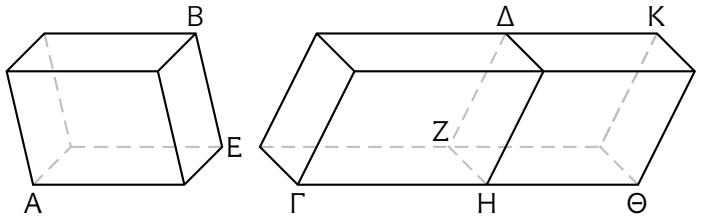
Συνεπώς, τα ισοϋψή στερεά παραλληλεπίπεδα με ίσες βάσεις (στις οποίες αντιστοιχούν τα ίσα ύψη) είναι ισοδύναμα· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 32 (754) *Ο λόγος των όγκων δύο ισοϋψών στερεών παραλληλεπιπέδων είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών των βάσεών τους.*

Απόδειξη. Έστω τα στερεά παραλληλεπίπεδα ΑΒ και ΓΔ που είναι ισοϋψή. Ισχυρίζομαι ότι ο λόγος των όγκων τους είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών των βάσεών τους, δηλαδή

$$\frac{|\text{ΑΒ}|}{|\text{ΓΔ}|} = \frac{|\text{ΑΕ}|}{|\text{ΓΖ}|}$$

Σχεδιάζουμε στη ΖΗ το ΖΘ ώστε $|\text{ΖΘ}| = |\text{ΑΕ}|$ (Β1, Π45, σελ. 47) και με ύψος από την βάση ΖΘ ίσο με το ύψος του στερεού παραλληλεπιπέδου ΓΔ (που αντιστοιχεί στην βάση του ΓΖ) και συμπληρώνουμε το στερεό παραλληλεπίπεδο ΗΚ.



Τότε τα ΑΒ και ΗΚ είναι ισοδύναμα καθώς είναι ισοϋψή και έχουν ίσες βάσεις τις $|\text{ΑΕ}| = |\text{ΖΘ}|$ (Π31, σελ. 374).

Επειδή τώρα το στερεό παραλληλεπίπεδο ΓΚ τέμνεται από το επίπεδο ΔΗ που είναι παράλληλο στις απέναντι έδρες του ΚΘ και ΓΙ, έπεται ότι

$$\frac{|\text{ΓΖ}|}{|\text{ΖΘ}|} = \frac{|\text{ΓΔ}|}{|\text{ΔΘ}|}$$

(Π25, σελ. 368).

Καθώς $|Z\Theta| = |AE|$ και $|HK| = |AB|$ από την προηγούμενη αναλογία προκύπτει ότι

$$\frac{|\Gamma Z|}{|AE|} = \frac{|\Gamma\Delta|}{|AB|}$$

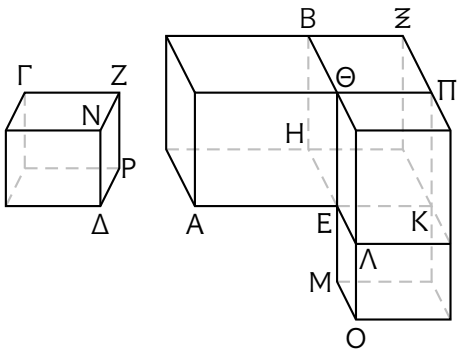
που είναι ισοδύναμη με την αποδεικτέα.

Άρα ο λόγος των όγκων δύο ισοϋψών στερεών παραλληλεπιπέδων είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών των βάσεών τους· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 33 (754) *Ο λόγος των όγκων δύο όμοιων στερεών παραλληλεπιπέδων είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των ομόλογων πλευρών τους.*

Απόδειξη. Έστω τα όμοια στερεά παραλληλεπίπεδα ΑΒ και ΓΔ με ομόλογες πλευρές τις ΑΕ και ΓΖ. Ισχυρίζομαι ότι

$$\frac{|AB|}{|\Gamma\Delta|} = \frac{AE^3}{\Gamma Z^3}$$



Προεκτείνουμε τις ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ προς το Ε και λαμβάνουμε τα Κ, Λ και Μ ώστε $EK = \Gamma Z$, $E\Lambda = ZN$ και $EM = ZP$.

Στην συνέχεια συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο ΚΛ και το στερεό παραλληλεπίπεδο ΚΟ.

Επειδή τα ΑΒ και ΓΔ είναι όμοια ισχύουν $KE = \Gamma Z$, $E\Lambda = ZN$, $\widehat{KE\Lambda} = \widehat{\Gamma ZN}$ και $\widehat{AEH} = \widehat{\Gamma ZN}$ και άρα το ΚΛ είναι ίσο και όμοιο με το ΓΝ.

Ομοίως το ΚΜ είναι ίσο και όμοιο με το ΓΡ όπως και το ΕΟ με το ΔΖ.

Έτσι, τρία παραλληλόγραμμα του ΚΟ είναι ίσα και όμοια με τρία παραλληλόγραμμα του ΓΔ, και καθώς σε ένα στερεό παραλληλεπίπεδο οι απέναντι έδρες είναι ίσα παραλληλόγραμμα (Π24, σελ. 367) συμπεραίνουμε ότι το στερεό παραλληλεπίπεδο ΚΟ είναι ίσο και όμοιο με το ΓΔ (Β11, Ορ10, σελ. 346).

Συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο ΗΚ και με βάσεις τις ΗΚ και ΚΛ και ύψος ίσο με το ύψος του ΑΒ κατασκευάζουμε τα στερεά παραλληλεπίπεδα ΕΞ και ΛΠ.

Από την ομοιότητα των ΑΒ και ΓΔ, έχουμε:

$$\frac{AE}{\Gamma Z} = \frac{EH}{ZN} = \frac{E\Theta}{ZP}$$

(Β6, Ορ1, σελ. 141 και Β11, Ορ9, σελ. 346). Όμως, $\Gamma Z = EK$, $ZN = E\Lambda$ και $ZP = EM$ οπότε η προηγούμενη αναλογία γράφεται:

$$\frac{AE}{EK} = \frac{EH}{E\Lambda} = \frac{E\Theta}{EM}$$

Έχουμε όμως ότι ΑΕ/ΕΚ = |ΑΗ|/|ΗΚ|, ΗΕ/ΕΛ = |ΗΚ|/|ΚΛ| και ΘΕ/ΕΜ = |ΠΕ|/|ΚΜ| (Β6, Π1, σελ. 142) και άρα

$$\frac{|AH|}{|HK|} = \frac{|HK|}{|K\Lambda|} = \frac{|\Pi E|}{|KM|}.$$

Ακόμα ισχύουν |ΑΗ|/|ΗΚ| = |ΑΒ|/|ΕΞ|, |ΗΚ|/|ΚΛ| = |ΞΕ|/|ΠΛ| και |ΠΕ|/|ΚΜ| = |ΠΛ|/|ΚΟ| (Π32, σελ. 376), οπότε από την προηγούμενη έπεται ότι:

$$\frac{|AB|}{|E\Xi|} = \frac{|\Xi E|}{|\Pi\Lambda|} = \frac{|\Pi\Lambda|}{|KO|}.$$

Όταν όμως τέσσαρα μεγέθη βρίσκονται σε συνεχή αναλογία ο λόγος του πρώτου προς το τέταρτο είναι ίσος με τον λόγο των κύβων πρώτου προς το δεύτερο (Β5, Ορ10, σελ. 126) και άρα

$$\frac{|AB|}{|KO|} = \frac{|AB|^3}{|E\Xi|^3}$$

Αλλά

$$\frac{|AB|}{|E\Xi|} = \frac{|AH|}{|HK|} = \frac{AE}{EK}$$

και άρα

$$\frac{|AB|}{|KO|} = \frac{AE^3}{EK^3}$$

Καθώς όμως |ΚΟ| = |ΓΔ| και ΕΚ = ΓΖ τελικά ισχύει

$$\frac{|AB|}{|\Gamma\Delta|} = \frac{AE^3}{\Gamma Z^3}$$

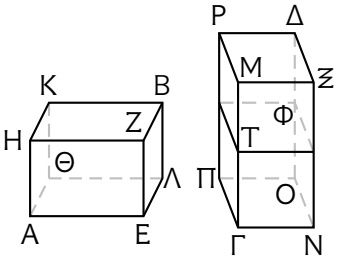
Συνεπώς, ο λόγος των όγκων δύο όμοιων στερεών παραλληλεπιπέδων είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των ομόλογων πλευρών τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα 23 *Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι αν τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα είναι σε αναλογία τότε ο λόγος του πρώτου προς το τέταρτο είναι ίσος με τον λόγο των όγκων του στερεού παραλληλεπιπέδου με ακμή ίση με το πρώτο τμήμα προς τον όγκο του στερεού παραλληλεπιπέδου ακμής ίσης με το δεύτερο τμήμα, το οποίο στερεό είναι όμοιο και ομοίως αναγραφόμενο με το αρχικό.*

Αυτό συμβαίνει διότι σε μια αναλογία ο λόγος του πρώτου μεγέθους προς το τέταρτο είναι ίσος με τον λόγο των κύβων του πρώτου προς το δεύτερο. Δ

Πρόταση 34 (755) *Αν δύο στερεά παραλληλεπίπεδα είναι ισοδύναμα τότε τα εμβαδά των βάσεών τους είναι αντίστροφα ανάλογα με τα ύψη τους. Ισχύει και το αντίστροφο: αν τα εμβαδά δύο στερεών παραλληλεπιπέδων είναι αντίστροφα ανάλογα με τα ύψη τους τότε τα στερεά παραλληλεπίπεδα αυτά είναι ισοδύναμα.*

Απόδειξη. Έστω τα στερεά παραλληλεπίπεδα ΑΒ και ΓΔ. Ισχυρίζομαι ότι τα εμβαδά των βάσεών τους είναι αντίστροφα ανάλογα με τα ύψη τους και αντιστρόφως.



Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις καθώς τα ΑΒ και ΓΔ είτε είναι ορθογώνια είτε όχι.

1η περίπτωση: Τα ΑΒ και ΓΔ είναι ορθογώνια.

Διακρίνουμε ξανά δύο περιπτώσεις καθώς οι βάσεις των ΑΒ και ΓΔ είτε έχουν ίσα εμβαδά είτε όχι.

α' υποπερίπτωση: Έστω ότι οι βάσεις ΕΘ και ΝΠ των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα έχουν ίσα εμβαδά δηλαδή ότι $|ΕΘ| = |ΝΠ|$.

(Ευθύ) Αν $|ΑΒ| = |ΓΔ|$ και ΑΗ και ΓΜ είναι τα ύψη που αντιστοιχούν στις βάσεις ΕΘ και ΝΠ αντίστοιχα τότε θα δείξουμε ότι $|ΕΘ|/|ΝΠ| = ΓΜ/ΑΗ$.

Πράγματι καθώς $|ΑΒ| = |ΓΗ|$ και $|ΕΘ| = |ΝΠ|$ είναι και $ΓΜ = ΑΗ$ διότι αν υποθέσουμε ότι $ΑΗ \neq ΓΜ$ τότε $|ΑΒ| \neq |ΓΔ|$ που είναι άτοπο από την υπόθεση. Τότε όμως $ΓΜ/ΑΗ = 1$.

Έχουμε όμως ότι $|ΕΘ|/|ΝΠ| = |ΑΒ|/|ΓΔ| = 1$ (Π32, σελ. 376) καθώς ο λόγος των όγκων δύο ισοϋψών στερεών παραλληλεπιπέδων είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών των βάσεών τους.

Και έτσι από τις δύο παραπάνω αναλογίες παίρνουμε:

$$\frac{|ΑΒ|}{|ΓΔ|} = \frac{|ΕΘ|}{|ΝΠ|} = \frac{ΓΜ}{ΑΗ} = 1.$$

(Αντίστροφο) Αν $|ΕΘ| = |ΝΠ|$ με $|ΕΘ|/|ΝΠ| = ΓΜ/ΑΗ$ τότε θα δείξουμε ότι $|ΑΒ| = |ΓΔ|$.

Πράγματι, καθώς $|ΕΘ| = |ΝΠ|$ με $|ΕΘ|/|ΝΠ| = ΓΜ/ΑΗ$ είναι και $ΓΜ = ΑΗ$. Τότε $|ΑΒ| = |ΓΔ|$ (Π31, σελ. 374) καθώς τα ΑΒ και ΓΔ είναι ισοϋψή με ισεμβαδικές βάσεις.

β' υποπερίπτωση: Έστω ότι για τα εμβαδά των βάσεων ΕΘ και ΝΠ ισχύει ότι $|ΕΘ| > |ΝΠ|$.

(Ευθύ) Αν $|ΑΒ| = |ΓΔ|$ και ΑΗ και ΓΜ είναι τα ύψη που αντιστοιχούν στις βάσεις ΕΘ και ΝΠ αντίστοιχα τότε θα δείξουμε ότι $|ΕΘ|/|ΝΠ| = ΓΜ/ΑΗ$.

Πράγματι καθώς $|ΑΒ| = |ΓΔ|$ είναι και $ΓΜ > ΑΗ$, διότι αν ήταν $ΓΜ = ΑΗ$ τότε θα ήταν και $|ΑΒ| \neq |ΓΔ|$. Λαμβάνουμε το Τ ώστε $ΓΤ = ΑΗ$ και με βάση το ΝΠ και ύψος ΓΤ κατασκευάζουμε το στερεό παραλληλεπίπεδο ΦΓ. Τότε

είναι |ΑΒ|/|ΓΦ| = |ΓΔ|/|ΓΦ| (Β5, Π7, σελ. 131) και έχουμε αντίστοιχα ότι |ΑΒ|/|ΓΦ| = |ΕΘ|/|ΝΠ| καθώς τα ΑΒ και ΓΦ είναι ισοϋψή (Π32, σελ. 376).

Έχουμε επίσης ότι |ΓΔ|/|ΓΦ| = |ΜΠ|/|ΤΠ| (Π25, σελ. 368) ενώ ισχύει και |ΜΠ|/|ΤΠ| = ΓΜ/ΓΤ (Β6, ΠΙ, σελ. 142).

Συνδυάζοντας τις παραπάνω αναλογίες παίρνουμε:

$$\frac{|ΕΘ|}{|ΝΠ|} = \frac{|ΑΒ|}{|ΓΦ|} = \frac{|ΓΔ|}{|ΓΦ|} = \frac{|ΜΠ|}{|ΤΠ|} = \frac{ΓΜ}{ΤΓ} = \frac{ΓΜ}{ΑΗ},$$

διότι ΓΤ = ΑΗ.

(Αντίστροφο) Έστω ότι |ΕΘ| ≠ |ΝΠ| με |ΕΘ| > |ΝΠ| και |ΕΘ|/|ΝΠ| = ΓΜ/ΑΗ με ΓΜ και ΝΗ τα ύψη που αντιστοιχούν στις βάσεις ΕΘ και ΝΠ αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι |ΑΒ| = |ΓΔ|.

Επειδή |ΕΘ| > |ΝΠ| και |ΕΘ|/|ΝΠ| = ΓΜ/ΑΗ είναι και ΓΜ > ΑΗ. Λαμβάνουμε το Τ ώστε ΓΤ = ΑΗ και συμπληρώνουμε το στερεό παραλληλεπίπεδο ΓΦ με βάση το ΝΠ και ύψος το ΓΤ. Τότε είναι

$$\frac{|ΕΘ|}{|ΝΠ|} = \frac{ΓΜ}{ΑΗ} = \frac{ΓΜ}{ΑΤ}.$$

Αλλά |ΕΘ|/|ΝΠ| = |ΑΒ|/|ΓΦ|, καθώς τα ΑΒ και ΓΦ είναι ισοϋψή με βάσεις τις ΕΘ και ΝΠ (Π32, σελ. 376). Επιπλέον είναι ΓΜ/ΓΤ = |ΜΠ|/|ΠΤ| (Β6, ΠΙ, σελ. 142) αλλά και |ΜΠ|/|ΠΤ| = |ΓΔ|/|ΓΦ| (Π25, σελ. 368).

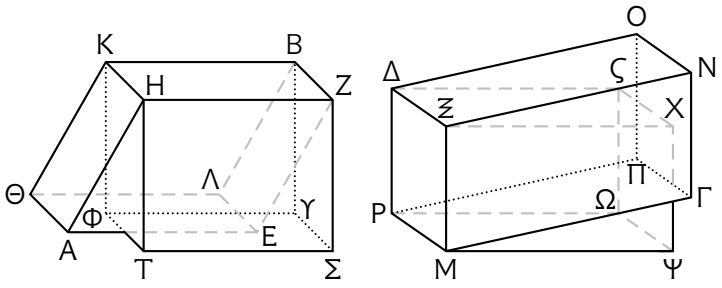
Συνεπώς,

$$\frac{|ΕΘ|}{|ΝΠ|} = \frac{|ΑΒ|}{|ΓΦ|} = \frac{ΓΜ}{ΜΤ} = \frac{|ΜΠ|}{|ΠΤ|} = \frac{|ΓΔ|}{|ΓΦ|}.$$

Οπότε είναι |ΑΒ|/|ΓΦ| = |ΓΔ|/|ΓΦ| από όπου προκύπτει ότι |ΑΒ| = |ΓΦ|.

2η περίπτωση: Τα ΑΒ και ΓΔ δεν είναι ορθογώνια.

(Ευθύ) Αν είναι |ΑΒ| = |ΓΔ| θα δείξουμε ότι |ΕΘ|/|ΝΠ| = $υ_{ΔΓ}/υ_{ΒΑ}$ όπου $υ_{ΑΒ}$ και $υ_{ΔΓ}$ είναι τα ύψη των ΑΒ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις βάσεις τους ΕΘ και ΝΠ αντίστοιχα.



Από τις κορυφές Ζ, Η, Β, Κ, Ƶ, Μ, Δ και Ρ φέρνουμε τις κάθετες στα επίπεδα ΕΘ και ΝΠ που τα τέμνουν στα Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω και Ζ αντίστοιχα. Στην συνέχεια συμπληρώνουμε τα στερεά παραλληλεπίπεδα ΖΦ και ƵΩ.

Επειδή τα ΑΒ και ΒΤ είναι ισοϋψή με την ίδια βάση ΒΚ και οι ακμές που ξεκινούν από αυτήν δεν καταλήγουν στις ίδιες ευθείες, έχουμε |ΑΒ| = |ΒΤ|

(Π29, σελ. 372). Ομοίως, τα ΓΔ και ΔΨ είναι ισοϋψή με την ίδια βάση ΡΖ και οι ακμές που ξεκινούν από αυτήν δεν καταλήγουν στις ίδιες ευθείες και άρα |ΓΔ| = |ΔΨ|. Από τις δύο τελευταίες ισότητες, καθώς |ΑΒ| = |ΓΔ|, προκύπτει ότι |ΒΤ| = |ΔΨ|.

Στα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα όμως που είναι ισοδύναμα τα εμβαδά των βάσεών τους είναι αντίστροφα ανάλογα με τα ύψη τους, σύμφωνα με την 1η περίπτωση της απόδειξης. Δηλαδή, $|ZK|/|ŻP| = \upsilon_{\Delta\Psi}/\upsilon_{BT}$. Αλλά τα ΔΨ και ΔΤ είναι ισοϋψή, όπως και τα ΒΤ και ΑΒ οπότε από την τελευταία προκύπτει $|ZK|/|ŻP| = \upsilon_{\Delta\Gamma}/\upsilon_{BA}$.

Σε ένα στερεό παραλληλεπίπεδο όμως οι απέναντι έδρες είναι ίσα παραλληλόγραμμα (Π24, σελ. 367) και έτσι από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι:

$$\frac{|E\Theta|}{|N\Pi|} = \frac{\upsilon_{\Delta\Gamma}}{\upsilon_{BA}}.$$

(Αντίστροφο) Έστω τα στερεά παραλληλεπίπεδα ΑΒ και ΓΔ με βάσεις ΕΘ και ΝΠ για τα εμβαδά των οποίων ισχύει $|E\Theta|/|N\Pi| = \upsilon_{\Delta\Gamma}/\upsilon_{BA}$. Θα δείξουμε ότι |ΑΒ| = |ΓΔ|.

Πράγματι, καθώς οι απέναντι έδρες σε ένα στερεό παραλληλεπίπεδο είναι ίσα παραλληλόγραμμα (Π24, σελ. 367), έχουμε ότι $|E\Theta|/|N\Pi| = |ZK|/|ŻP|$.

Όμως τα ΑΒ και ΒΤ είναι ισοϋψή όπως και τα ΓΔ και ΔΨ οπότε από την προηγούμενη έπεται $|ZK|/|ŻP| = \upsilon_{\Delta\Psi}/\upsilon_{BT}$.

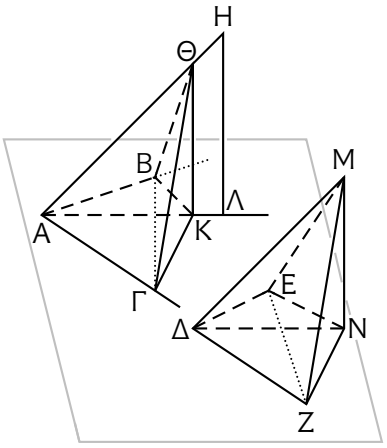
Άρα τα εμβαδά των βάσεών των στερεών παραλληλεπίπεδων ΒΤ και ΔΨ είναι αντίστροφα ανάλογα με τα ύψη τους, και καθώς τα στερεά αυτά είναι ορθογώνια, σύμφωνα με την 1η περίπτωση της απόδειξης, έπεται ότι είναι και ισοδύναμα. Δηλαδή, |ΒΤ| = |ΔΨ|.

Όμως, |ΒΤ| = |ΒΑ| καθώς είναι ισοϋψή με κοινή βάση την ΖΚ και από την οποία οι ακμές δεν καταλήγουν στις ίδιες ευθείες (Π29, σελ. 372).

Ομοίως, επειδή τα ΔΨ και ΔΓ είναι ισοϋψή με κοινή βάση την ŻP (από την οποία οι ακμές δεν καταλήγουν στην ίδια ευθεία) είναι και |ΔΨ| = |ΔΓ|.

Έτσι, από τις τρεις τελευταίες ισότητες παίρνουμε |ΑΒ| = |ΒΤ| = |ΔΨ| = |ΔΓ|, δηλαδή τα ΑΒ και ΔΓ είναι ισοδύναμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 35 (758) *Έστω δύο επίπεδες ίσες γωνίες και έστω ότι από τις κορυφές τους άγονται ευθείες, που δεν βρίσκονται στα επίπεδα των γωνιών, σχηματίζοντας με τις πλευρές τους ίσες γωνίες. Αν από τυχόντα σημεία των ευθειών αυτών αχθούν κάθετες προς τα επίπεδα των γωνιών τότε οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία τομής των παραπάνω καθέτων με τα επίπεδα των γωνιών και τις κορυφές τους σχηματίζουν με τις ευθείες που δεν βρίσκονται στα επίπεδα των γωνιών και που έχουν αχθεί από τις κορυφές τους ίσες γωνίες.*



Απόδειξη. Έστω οι ευθύγραμμες γωνίες $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$ (στμ: χάριν απλότητας θεωρούμε ότι οι γωνίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο).

Από τις κορυφές τους Α και Δ φέρνουμε τις ΑΗ και ΔΜ που δεν βρίσκονται στο επίπεδο των γωνιών και που σχηματίζουν με τις πλευρές των παραπάνω γωνιών ίσες γωνίες. Δηλαδή ισχύουν $\widehat{M\Delta E} = \widehat{HAB}$ και $\widehat{M\Delta Z} = \widehat{HA\Gamma}$, με τα Η και Μ να είναι τυχόντα σημεία των ευθειών που έχουν αχθεί από τα Α και Δ.

Από τα Η και Μ φέρνουμε τις ΗΛ και ΜΝ κάθετες στο επίπεδο των $\widehat{BA\Gamma}$ και $\widehat{E\Delta Z}$. Στην συνέχεια φέρνουμε και τις ΛΑ και ΔΝ.

Ισχυρίζομαι ότι $\widehat{HA\Lambda} = \widehat{M\Delta N}$.

Θεωρούμε το Θ στην ΑΗ ώστε ΑΘ = ΔΜ και από το Θ φέρνουμε την παράλληλη στην ΗΛ που τέμνει το επίπεδο των γωνιών στο Κ. Καθώς ΗΛ ⊥ ΒΑΓ και ΘΚ // ΗΛ είναι και ΘΚ ⊥ ΒΑΓ (Π8, σελ. 353).

Από τα Κ και Ν φέρνουμε τώρα τις ΚΓ, ΚΒ, ΝΖ, ΝΕ κάθετες στις ΑΓ, ΑΒ, ΔΖ και ΔΕ αντίστοιχα. Φέρνουμε και τις ΘΓ, ΓΒ, ΜΖ και ΖΕ.

Τότε, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (ΒΙ, Π47, σελ. 51) είναι $\Theta A^2 = \Theta K^2 + KA^2$ και $KA^2 = K\Gamma^2 + \Gamma A^2$. Άρα $\Theta A^2 = \Theta K^2 + K\Gamma^2 + \Gamma A^2$.

Καθώς $\Theta K^2 + K\Gamma^2 = \Theta\Gamma^2$ από την προηγούμενη ισότητα έπεται $\Theta A^2 = \Theta\Gamma^2 + \Gamma A^2$, οπότε από το Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος (ΒΙ, Π48, σελ. 52) , συμπεραίνουμε ότι $\widehat{\Theta\Gamma A} = 1$ορθή. Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{\Delta ZM} = 1$ορθή. Συνεπώς, $\widehat{A\Gamma\Theta} = \widehat{\Delta ZM} = 1$ορθή, ενώ είναι και $\widehat{\Theta A\Gamma} = \widehat{M\Delta Z}$.

Τότε τα τρίγωνα ΜΔΖ και ΘΑΓ είναι ίσα καθώς $\widehat{\Delta ZM} = \widehat{A\Gamma\Theta}$, $\widehat{M\Delta Z} = \widehat{\Theta A\Gamma}$ και ΘΑ = ΜΔ (ΒΙ, Π26, σελ. 36). Άρα είναι και ΑΓ = ΔΖ.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι ΑΒ = ΔΕ. Πράγματι, φέρνουμε τις ΘΒ και ΜΕ, οπότε όπως προηγουμένως, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (ΒΙ, Π47, σελ. 51) παίρνουμε $A\Theta^2 = AK^2 + K\Theta^2$ και $AK^2 = AB^2 + BK^2$.

Επειδή τώρα $BK^2 + K\Theta^2 = B\Theta^2$ (καθώς $\widehat{\Theta KB} = 1$ορθή) από την προηγούμενη ισότητα έπεται ότι $A\Theta^2 = AB^2 + B\Theta^2$. Έτσι, $\widehat{AB\Theta} = 1$ορθή (ΒΙ, Π48, σελ. 52).

Ομοίως $\widehat{\Delta EM} = 1$ορθή και άρα $\widehat{AB\Theta} = \widehat{\Delta EM}$, ενώ από την υπόθεση έχουμε και ότι $\widehat{BA\Theta} = \widehat{E\Delta M}$.

Τότε τα τρίγωνα ΒΑΘ και ΕΔΜ είναι ίσα καθώς έχουν $\widehat{AB\Theta} = \widehat{\Delta EM}$, $\widehat{BA\Theta} = \widehat{E\Delta M}$ και ΑΘ = ΔΜ (ΒΙ, Π26, σελ. 36) και άρα ΑΒ = ΔΕ.

Όμως και τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα διότι έχουν ΑΓ = ΔΖ, ΑΒ = ΔΕ και $\widehat{\Gamma AB} = \widehat{Z\Delta E}$ (ΒΙ, Π4, σελ. 23). Άρα ισχύουν ΒΓ = ΕΖ και $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta ZE}$.

Τότε, καθώς $\widehat{A\Gamma K} = \widehat{\Delta ZN} = 1$ορθή είναι και $\widehat{B\Gamma K} = \widehat{EZN}$, ενώ ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{\Gamma BK} = \widehat{ZEN}$.

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΒΓΚ και ΕΖΝ παρατηρούμε ότι έχουν $\widehat{B\Gamma K} = \widehat{EZN}$, $\widehat{\Gamma BK} = \widehat{ZEN}$ και ΒΓ = ΕΖ, οπότε είναι ίσα (ΒΙ, Π26, σελ. 36). Έτσι, ΓΚ = ΖΝ.

Είναι όμως ίσα και τα τρίγωνα ΑΓΚ και ΔΖΝ καθώς ΓΚ = ΖΝ, ΑΓ = ΔΖ και $\widehat{A\Gamma K} = \widehat{\Delta ZN} = 1$ορθή (ΒΙ, Π4, σελ. 23). Άρα είναι και ΑΚ = ΔΝ.

Τώρα επειδή ΑΘ = ΔΜ είναι και $A\Theta^2 = \Delta M^2$, ενώ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (ΒΙ, Π47, σελ. 51) είναι $A\Theta^2 = AK^2 + K\Theta^2$ διότι $\widehat{AK\Theta} = 1$ορθή και $\Delta M^2 = \Delta N^2 + NM^2$ διότι $\widehat{\Delta MN} = 1$ορθή.

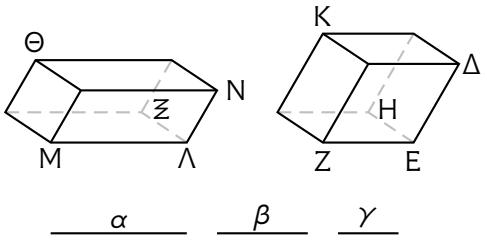
Έτσι, $AK^2 + K\Theta^2 = \Delta N^2 + NM^2$, από όπου παίρνουμε $K\Theta^2 = NM^2$ διότι $AK^2 = \Delta N^2$ (καθώς ΑΚ = ΔΝ). Άρα ΘΚ = ΜΝ.

Τότε όμως, από την ΒΙ, Π8, σελ. 25 έπεται ότι τα τρίγωνα ΘΑΚ και ΜΔΝ είναι ίσα καθώς ΘΑ = ΜΔ, ΑΚ = ΔΝ και ΘΚ = ΜΝ. Άρα $\widehat{\Theta AK} = \widehat{M\Delta N}$· όπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα 24 *Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι αν δύο επίπεδες γωνίες είναι ίσες και αχθούν προς τις κορυφές τους ίσα και πλάγια ευθύγραμμα τμήματα χωρίς να βρίσκονται στα επίπεδα των γωνιών σχηματίζοντας με τις πλευρές των γωνιών ίσες γωνίες, τότε οι κάθετες προς τα επίπεδα των γωνιών που άγονται από τα άκρα των ίσων πλάγιων τμημάτων που δεν βρίσκονται στο επίπεδο των γωνιών και που έχουν αχθεί από τις κορυφές των γωνιών, είναι ίσες μεταξύ τους· όπερ ἔδει δεῖξαι.* Δ

Πρόταση 36 (759) *Αν τρία τμήματα* (στμ: τα μήκη τους) *είναι σε συνεχή αναλογία τότε το στερεό παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις τα τμήματα αυτά είναι ισοδύναμο με το ισογώνιο με αυτό στερεό παραλληλεπίπεδο του οποίου κάθε ακμή είναι ίση με τα δεύτερο τμήμα.* (στμ: αν $\alpha/\beta = \beta/\gamma$ τότε $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = \beta^3$.)

Απόδειξη. Έστω τα τμήματα α, β και γ που βρίσκονται σε συνεχή αναλογία. Δηλαδή ισχύει $\alpha/\beta = \beta/\gamma$.



Ισχυρίζομαι ότι το στερεό παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις α, β και γ είναι ισοδύναμο με το ισογώνιο με αυτό παραλληλεπίπεδο που είναι ισόπλευρο με διαστάσεις β, β και β.

Κατασκευάζουμε την στερεά γωνία κορυφής Ε που περιέχεται στα επίπεδα ΔΕΗ, ΗΕΖ και ΖΕΔ ενώ τα Δ, Ζ και Η λαμβάνονται ώστε $\Delta E = HE = EZ = \beta$.

Στην συνέχεια συμπληρώνουμε το στερεό παραλληλεπίπεδο ΕΚ ώστε $\Lambda M = \alpha$, στην κορυφή Λ να υπάρχει στερεά γωνία ίση με την στερεά γωνία κορυφής Ε και να περιέχεται στις επίπεδες γωνίες $\widehat{N\Lambda\Xi}$ και $\widehat{\Xi\Lambda M}$ και $\widehat{M\Lambda N}$ ενώ τα Ν και Ξ λαμβάνονται ώστε $\Lambda\Xi = \beta$ και $\Lambda N = \gamma$.

Τότε καθώς $\alpha/\beta = \beta/\gamma$ είναι και $\Lambda M/EZ = \Delta E/\Lambda N$.

Συνεπώς στα παραλληλόγραμμα ΜΝ και ΔΖ οι πλευρές των ίσων γωνιών $\widehat{N\Lambda M}$ και $\widehat{\Delta EZ}$ είναι αντίστροφα ανάλογες οπότε τα δύο αυτά παραλληλόγραμμα είναι ισεμβαδικά (Β6, Π14, σελ. 151), δηλαδή $|MN| = |\Delta Z|$.

Τώρα επειδή $\widehat{\Delta EZ} = \widehat{N\Lambda M}$ και από τις κορυφές τους άγονται τα ίσα τμήματα $\Lambda\Xi = EH$ που βρίσκονται εκτός του επιπέδου των γωνιών και που σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις πλευρές των $\widehat{\Delta EZ} = \widehat{N\Lambda M}$ έπεται ότι οι κάθετες που άγονται από τα Η και Ξ προς τα επίπεδα ΝΛΜ και ΔΕΖ είναι ίσες (Πόρισμα Π35, σελ. 381).

Συνεπώς τα στερεά παραλληλεπίπεδα ΛΘ και ΕΚ είναι ισοϋψή και οι βάσεις τους έχουν ίσα εμβαδά καθώς δείξαμε παραπάνω ότι $|MN| = |EK|$ οπότε έπεται ότι είναι και ισοδύναμα (Π31, σελ. 374), δηλαδή ισχύει $|\Lambda\Theta| = |EK|$.

Άρα, το στερεό παραλληλεπίπεδο ΛΘ με διαστάσεις τα α, β και γ είναι ισοδύναμο με το ισογώνιο με αυτό στερεό παραλληλεπίπεδο ΕΚ που έχει ίσες ακμές μήκους β· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 37 (760) *Αν τέσσαρα ευθύγραμμα είναι ανάλογα* (στμ: τα μήκη τους) *τότε τα στερεά παραλληλεπίπεδα που είναι όμοια και ομοίως αναγραφόμενα* (στμ: που κατασκευάζονται όμοια και ομοίως κείμενα) *έχουν ανάλογους όγκους.*

Ισχύει και το αντίστροφο: αν τα στερεά παραλληλεπίπεδα που είναι όμοια και ομοίως αναγραφόμενα από τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα, έχουν ανάλογους όγκους τότε τα τέσσαρα ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα.

Απόδειξη. (Ευθύ) Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ και ΗΘ που είναι ανάλογα, δηλαδή ισχύει ότι $AB/\Gamma\Delta = EZ/H\Theta$.

Από τα τμήματα αυτά κατασκευάζουμε τα όμοια και ομοίως κείμενα στερεά παραλληλεπίπεδα ΚΑ, ΛΓ, ΜΕ και ΝΗ. Ισχυρίζομαι ότι για τους όγκους των στερεών αυτών ισχύει ότι $|KA|/|\Lambda\Gamma| = |ME|/|NH|$.

Καθώς τα ΚΑ και ΛΓ είναι όμοια έπεται ότι ισχύει:

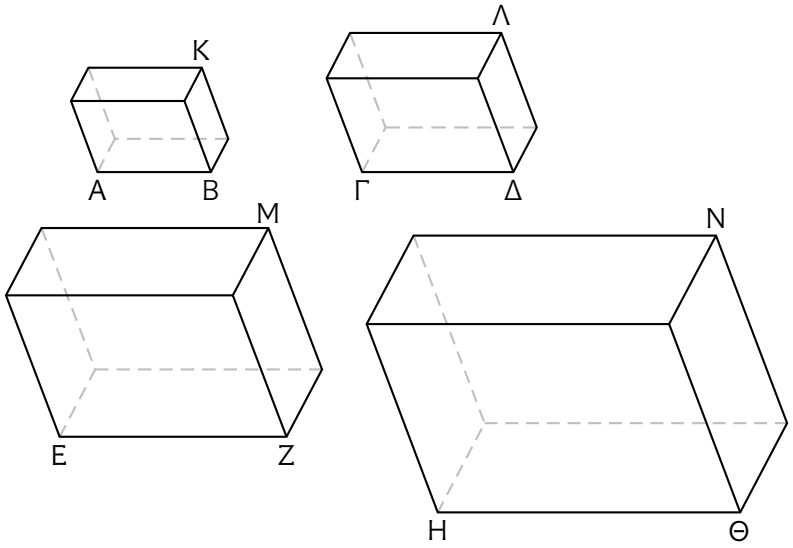
$$\frac{|KA|}{|\Lambda\Gamma|} = \left(\frac{AB}{\Gamma\Delta}\right)^3$$

(Π33, σελ. 377).

Ομοίως, καθώς τα ΜΕ και ΝΗ είναι όμοια, έχουμε:

$$\frac{|ME|}{|NH|} = \left(\frac{EZ}{H\Theta}\right)^3$$

Από την υπόθεση έχουμε όμως ότι $AB/\Gamma\Delta = EZ/H\Theta$ και άρα από τις δύο προηγούμενες ισότητες έπεται η αποδεικτέα.



(Αντίστροφο) Έστω τώρα ότι για τα στερεά παραλληλεπίπεδα ΑΚ, ΛΓ, ΜΕ και ΝΗ που είναι όμοια και ομοίως κείμενα ισχύει $|AK|/|\Lambda\Gamma| = |ME|/|NH|$. Ισχυρίζομαι ότι $AB/\Gamma\Delta = EZ/H\Theta$.

Πράγματι, καθώς τα ΑΚ και ΛΓ είναι όμοια ισχύει

$$\frac{|KA|}{|\Lambda\Gamma|} = \left(\frac{AB}{\Gamma\Delta}\right)^3$$

(Π33, σελ. 377). Ομοίως, καθώς τα ΜΕ και ΝΗ είναι όμοια έχουμε:

$$\frac{|ME|}{|NH|} = \left(\frac{EZ}{H\Theta}\right)^3.$$

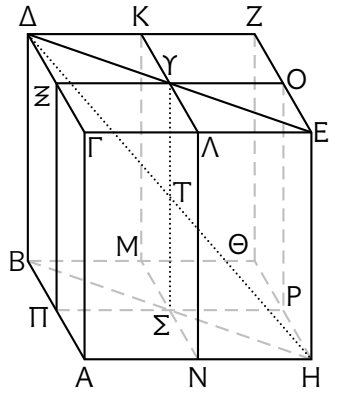
Από τις δύο παραπάνω ισότητες, καθώς $|AK|/|\Lambda\Gamma| = |ME|/|NH|$, προκύπτει ότι

$$\left(\frac{AB}{\Gamma\Delta}\right)^3 = \left(\frac{EZ}{H\Theta}\right)^3$$

και άρα $AB/\Gamma\Delta = EZ/H\Theta$.

Συνεπώς, αν τέσσαρα ευθύγραμμα είναι ανάλογα τότε τα στερεά παραλληλεπίπεδα που είναι όμοια και ομοίως αναγραφόμενα έχουν ανάλογους όγκους και αντιστρόφως· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 38 (761) *Αν οι απέναντι πλευρές των εδρών ενός κύβου διχοτομηθούν και από τα μέσα των πλευρών αυτών διέλθουν δύο επίπεδα, τότε η κοινή τομή των επιπέδων αυτών και η διαγώνιος του κύβου διχοτομούνται.*



Απόδειξη. Έστω οι απέναντι έδρες ΓΖ και ΑΘ του κύβου ΑΖ των οποίων οι πλευρές ΓΕ, ΕΖ, ΖΔ, ΔΓ και ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, ΒΑ έχουν διχοτομηθεί από τα σημεία Λ, Ο, Κ, Ξ, Ν, Ρ, Μ και Π αντίστοιχα.

Θεωρούμε ακόμα τα επίπεδα ΚΝ και ΞΡ που διέρχονται από τα παραπάνω σημεία και έστω ΥΣ η κοινή τομή τους.

Ισχυρίζομαι ότι η διαγώνιος ΔΗ του κύβου ΑΖ και η ΥΣ διχοτομούνται. Δηλαδή, αν Τ είναι το σημείο τομής των ΔΗ και ΥΣ τότε ισχύουν ΥΤ = ΤΣ και ΔΤ = ΤΗ (στμ: τα ΥΣ και ΔΗ τέμνονται γιατί και τα δύο βρίσκονται στο επίπεδο ΔΒΗΕ, αφού παρακάτω θα δειχθεί ότι ΒΗ // ΔΕ).

Φέρνουμε τις ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ και ΣΗ. Τότε επειδή ΔΞ // ΟΕ έπεται ότι $\widehat{\Delta\Xi\Upsilon} = \widehat{\Upsilon\Omega\Epsilon}$ ως εντός εναλλάξ (ΒΙ, Π29, σελ. 38).

Τότε όμως τα τρίγωνα ΔΞΥ και ΟΥΕ είναι ίσα καθώς ΔΞ = ΟΕ, ΞΥ = ΥΟ και $\widehat{\Delta\Xi\Upsilon} = \widehat{\Upsilon\Omega\Epsilon}$ (ΒΙ, Π4, σελ. 23). Έτσι, ΔΥ = ΥΕ και $\widehat{\Xi\Upsilon\Delta} = \widehat{\Omega\Upsilon\Epsilon}$ οπότε η ΔΥΕ είναι ευθεία.

Ομοίως και η ΒΣΗ είναι ευθεία με ΒΣ = ΣΗ.

Επειδή τώρα ΓΑ // ΔΒ και ΓΑ // ΕΗ είναι και ΔΒ // ΕΗ (Π9, σελ. 354).

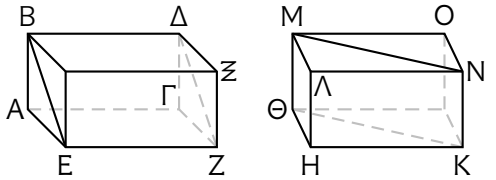
Τότε όμως είναι και ΔΕ // ΒΗ (ΒΙ, Π33, σελ. 40) και άρα $\widehat{\Epsilon\Delta\Upsilon} = \widehat{\Beta\Eta\Upsilon}$ ως εντός εναλλάξ (ΒΙ, Π29, σελ. 38).

Επιπλέον είναι και $\widehat{\Delta\Upsilon\Upsilon} = \widehat{\Eta\Upsilon\Sigma}$ ως κατακορυφήν (ΒΙ, ΠΙ5, σελ. 29).

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΔΤΥ και ΗΤΣ παρατηρούμε ότι έχουν $\widehat{\Delta\Upsilon\Upsilon} = \widehat{\Eta\Upsilon\Sigma}$, $\widehat{\Sigma\Eta\Upsilon} = \widehat{\Upsilon\Delta\Upsilon}$ (διότι $\widehat{\Epsilon\Delta\Upsilon} = \widehat{\Beta\Eta\Upsilon}$) και ΔΥ = ΗΣ (ως μισά των ίσων τμημάτων ΔΕ = ΒΗ). Άρα είναι ίσα (ΒΙ, Π26, σελ. 36) και επομένως ισχύουν ΔΤ = ΤΗ και ΥΤ = ΤΣ.

Συνεπώς, αν οι πλευρές των απέναντι εδρών κύβου διχοτομηθούν και από τα μέσα των πλευρών αυτών διέλθουν επίπεδα τότε η κοινή τομή των επιπέδων αυτών και η διαγώνιος του κύβου διχοτομούνται· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 39 (762) *Αν δύο ισοϋψή πρίσματα έχουν βάσεις ένα τρίγωνο και ένα παραλληλόγραμμο αντίστοιχα, έτσι ώστε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου να είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου, τότε τα πρίσματα αυτά είναι ισοδύναμα.*



Απόδειξη. Έστω τα ισοϋψή πρίσματα ΒΔΖΕΑΓ και ΜΝΚΘΗΛ με βάσεις το παραλληλόγραμμο ΑΖ και το τρίγωνο ΗΘΚ αντί-

στοιχα. Υποθέτουμε ακόμα ότι $|AZ| = 2 \cdot |H\Theta K|$. Ισχυρίζομαι ότι $|B\Delta ZEA\Gamma| = |MNK\Theta H\Lambda|$.

Συμπληρώνουμε τα στερεά παραλληλεπίπεδα $A\Xi$ και HO.

Τότε καθώς $|AZ| = 2 \cdot |H\Theta K|$ και $|\Theta K| = 2 \cdot |H\Theta K|$ είναι και $|AZ| = |\Theta K|$.

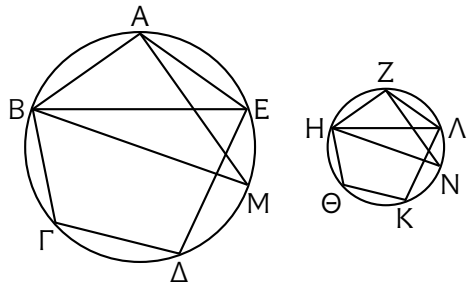
Τότε όμως ισχύει $|A\Xi| = |HO|$ διότι είναι ισοϋψή και οι βάσεις τους AZ και ΘK έχουν ίσα εμβαδά (Π31, σελ. 374).

Αλλά $|B\Delta ZEA\Gamma| = |A\Xi|/2$ και $|MNK\Theta H\Lambda| = |HO|/2$ οπότε $|B\Delta ZEA\Gamma| = |MNK\Theta H\Lambda|$.

Συνεπώς, αν δύο πρίσματα είναι ισοϋψή με βάσεις ένα τρίγωνο και ένα παραλληλόγραμμο αντίστοιχα, έτσι ώστε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου να είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου, τότε τα πρίσματα αυτά είναι ισοδύναμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Βιβλίο 12ο

Πρόταση 1 (763) *Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων που είναι εγγεγραμμένα σε δύο κύκλους είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων των κύκλων αυτών.*



Απόδειξη. Έστω οι κύκλοι ΑΒΓ και ΖΗΘ στους οποίους είναι εγγεγραμμένα τα όμοια πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και ΖΗΘΚΛ (στμ: ο Ευκλείδης επιλέγει να αποδείξει την παραπάνω πρόταση για δύο όμοια πεντάγωνα, η απόδειξη γενικεύεται εύκολα για οποιαδήποτε όμοια πολύγωνα).

Αν ΒΜ και ΗΝ είναι οι διάμετροι των κύκλων ΑΒΓ και ΖΗΘ αντίστοιχα ισχυρίζομαι ότι $\text{ΒΜ}^2/\text{ΗΝ}^2 = |\text{ΑΒΓΔΕ}|/|\text{ΖΗΘΚΛ}|$.

Φέρνουμε τις ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ και ΖΝ. Τότε καθώς τα ΑΒΓΔΕ και ΖΗΘΚΛ είναι όμοια με $\widehat{\text{ΒΑΕ}} = \widehat{\text{ΗΖΛ}}$ από τον ορισμό της ομοιότητας (Β6, Ορ1, σελ. 141) έπεται ότι ΒΑ/ΑΕ = ΗΖ/ΖΛ.

Τότε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΗΖΛ έχουν μια γωνία ίση και οι πλευρές τους που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και άρα είναι ισογώνια (Β6, Π6, σελ. 146). Συνεπώς $\widehat{\text{ΑΕΒ}} = \widehat{\text{ΖΛΗ}}$.

Αλλά $\widehat{\text{ΑΕΒ}} = \widehat{\text{ΑΜΒ}}$ καθώς είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{\text{ΑΒ}}$ (Β3, Π27, σελ. 101) ενώ ομοίως προκύπτει και ότι $\widehat{\text{ΖΛΗ}} = \widehat{\text{ΖΝΗ}}$.

Από τις παραπάνω παίρνουμε $\widehat{\text{ΑΜΒ}} = \widehat{\text{ΖΝΗ}}$.

Καθώς $\widehat{\text{ΒΑΜ}} = \widehat{\text{ΗΖΝ}} = 1$ορθή έπεται ότι $\widehat{\text{ΑΒΜ}} = \widehat{\text{ΖΗΝ}}$, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΖΗΝ είναι ισογώνια, και άρα ισχύει ΒΜ/ΗΝ = ΒΑ/ΗΖ (Β6, Π4, σελ. 144).

Αλλά

$$\left(\frac{\text{ΒΜ}}{\text{ΗΝ}}\right)^2 = \frac{\text{ΒΜ}^2}{\text{ΗΝ}^2} \quad \text{και} \quad \left(\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΗΖ}}\right)^2 = \frac{|\text{ΑΒΓΔΕ}|}{|\text{ΖΗΘΚΛ}|}$$

διότι το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας δύο όμοιων σχημάτων είναι ίσο με τον λόγο των εμβαδών τους (Β6, Π20, σελ. 156).

Από τις παραπάνω προκύπτει

$$\frac{\text{ΒΜ}^2}{\text{ΗΝ}^2} = \frac{|\text{ΑΒΓΔΕ}|}{|\text{ΖΗΘΚΛ}|}$$

Συνεπώς, ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων που είναι εγγεγραμμένα σε δύο κύκλους είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων των κύκλων αυτών· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 2 (763) *Ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους.*

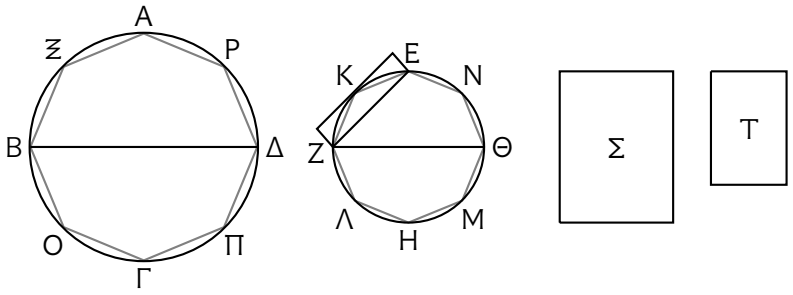
Απόδειξη. Έστω οι κύκλοι ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ με διαμέτρους τις ΒΔ και ΖΘ αντίστοιχα. Αν E_1 και E_2 είναι τα εμβαδά των κύκλων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ αντίστοιχα, ισχυρίζομαι ότι ισχύει $E_1/E_2 = B\Delta^2/Z\Theta^2$.

Αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η παραπάνω τότε ο λόγος $B\Delta^2/Z\Theta^2$ θα είναι ίσος με τον λόγο του E_1 προς το εμβαδόν ενός χωρίου Σ που είναι είτε μικρότερο είτε μεγαλύτερο από το εμβαδόν E_2 του κύκλου ΕΖΗΘ.

1η περίπτωση: $B\Delta^2/Z\Theta^2 = E_1/|\Sigma|$ με $|\Sigma| < E_2$.

Εγγράφουμε στον κύκλο ΕΖΗΘ το τετράγωνο ΕΖΗΘ οπότε $|EZH\Theta| > E_2/2$ καθώς αν φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα Ε, Ζ, Η και Θ τότε το εμβαδόν $|EZH\Theta|$ του εγγεγραμμένου τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του περιγεγραμμένου τετραγώνου το οποίο είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του κύκλου ΕΖΗΘ.

Στην συνέχεια διχοτομούμε τα τόξα $\widehat{EZ}$, $\widehat{ZH}$, $\widehat{H\Theta}$ και $\widehat{\Theta E}$ λαμβάνοντας τα σημεία τους Κ, Λ, Μ και Ν αντίστοιχα ενώ φέρνουμε και τις ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ και ΝΕ.



Τότε όμως το εμβαδόν καθενός από τα τρίγωνα ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ και ΘΝΕ είναι μεγαλύτερο από το μισό του αντίστοιχου του τμήματος του κύκλου ΕΖΗΘ που ανιστοιχεί σε αυτό διότι αν φέρουμε τις εφαπτομένες του κύκλου στα Κ, Λ, Μ και Ν συμπληρώνοντας τα επί των ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ και ΘΕ παραλληλόγραμμα καθένα από τα παραπάνω τρίγωνα έχει εμβαδόν ίσο με το μισό του αντίστοιχου παραλληλογράμμου ενώ το αντίστοιχο τμήμα του κύκλου ΕΖΗΘ έχει εμβαδόν μικρότερο από το εμβαδόν του παραλληλογράμμου αυτού.

Ώστε το εμβαδόν καθενός από τα τρίγωνα ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ και ΘΝΕ είναι μεγαλύτερο από το μισό του εμβαδού του αντίστοιχου με αυτό τμήματος του κύκλου ΕΖΗΘ.

Επαναλαμβάνουμε συνεχώς την ίδια διαδικασία διχοτομώντας τα προκύπτοντα τόξα και φέρνοντας τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία που διχοτομούν τα τόξα και έτσι θα απομείνουν στο τέλος τμήματα του κύκλου ΕΖΗΘ με εμβαδόν μικρότερο από την διαφορά των εμβαδών του κύκλου ΕΖΗΘ και του χωρίου Σ, δηλαδή την $E_2 - |\Sigma|$.

Πράγματι, σύμφωνα με την (Β10, Π1, σελ. 229) όταν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και από το μεγαλύτερο αφαιρείται συνεχώς ένα μέγεθος που είναι μεγαλύτερο από το μισό του τότε το μέγεθος που προκύπτει είναι μικρότερο από το μικρότερο των μεγεθών που έχουν δοθεί.

Χάριν απλότητας υποθέτουμε ότι απομένουν τα τμήματα ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ και ΝΕ του κύκλου ΕΖΗΘ το εμβαδόν των οποίων είναι μικρότερο από την διαφορά $E_2 - |\Sigma|$.

Τότε όμως $|\text{ΕΚΖΛΗΜΘΝ}| > |\Sigma|$.

Στην συνέχεια εγγράφουμε στον κύκλο ΑΒΓΔ το πολύγωνο ΑΞΒΟΓΠΔΡ όμοιο προς το ΕΚΖΛΗΜΘΝ, οπότε ισχύει

$$\frac{|\text{ΑΞΒΟΓΠΔΡ}|}{|\text{ΕΚΖΛΗΜΘΝ}|} = \frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΖΘ}^2}$$

(Π1, σελ. 389) . Είναι όμως

$$\frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΖΘ}^2} = \frac{E_1}{|\Sigma|},$$

και άρα

$$\frac{|\text{ΑΞΒΟΓΠΔΡ}|}{|\text{ΕΚΖΛΗΜΘΝ}|} = \frac{E_1}{|\Sigma|}$$

ή

$$\frac{E_1}{|\text{ΑΞΒΟΓΠΔΡ}|} = \frac{|\Sigma|}{|\text{ΕΚΖΛΗΜΘΝ}|}$$

(Β5, Π16, σελ. 134).

Καθώς $E_1 > |\text{ΑΞΒΟΓΠΔΡ}|$ έπεται και ότι $|\Sigma| > |\text{ΕΚΖΛΗΜΘΝ}|$ που όμως είναι αδύνατον καθώς παραπάνω δείξαμε ότι $|\text{ΕΚΖΛΗΜΘΝ}| > |\Sigma|$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει

$$\frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΖΘ}^2} = \frac{E_1}{|\Sigma|}, \quad \text{και} \quad |\Sigma| < E_2.$$

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει

$$\frac{\text{ΖΘ}^2}{\text{ΒΔ}^2} = \frac{E_2}{|\Sigma|}, \quad \text{και} \quad |\Sigma| < E_1.$$

2η περίπτωση: $\text{ΒΔ}^2/\text{ΖΘ}^2 = E_1/|\Sigma|$ με $|\Sigma| > E_2$.

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει

$$\frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΖΘ}^2} = \frac{E_1}{|\Sigma|} \quad \text{και} \quad |\Sigma| > E_2$$

τότε, ισχύει και

$$\frac{\text{ΖΘ}^2}{\text{ΔΒ}^2} = \frac{|\Sigma|}{E_1}$$

(Πόρισμα Β5, Π7, σελ. 131).

Αλλά σύμφωνα με το παρακάτω λήμμα είναι

$$\frac{|\Sigma|}{E_1} = \frac{E_2}{|T|}$$

για κάποιο χωρίο Τ με $|T| < E_1$. Συνεπώς,

$$\frac{Z\Theta^2}{\Delta B^2} = \frac{E_2}{|T|} \quad \text{και} \quad |T| < E_1$$

που όμως είναι αδύνατον να συμβαίνει όπως αποδείξαμε στην $1^{η}$ περίπτωση της απόδειξης.

Άρα, είναι αδύνατον να ισχύει

$$\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{E_1}{|\Sigma|} \quad \text{και} \quad |\Sigma| > E_2$$

και επομένως έπεται τελικά ότι

$$\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{E_1}{E_2}.$$

Συνεπώς, ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους.

Λήμμα 15 *Αν για το χωρίο* Σ *ισχύει* $|\Sigma| > E_2$ *τότε για κάποιο χωρίο* Τ *με* $|T| < E_1$ *ισχύει*

$$\frac{|\Sigma|}{E_1} = \frac{E_2}{|T|}$$

Απόδειξη. Πράγματι, έστω ότι για το χωρίο Τ ισχύει

$$\frac{|\Sigma|}{E_1} = \frac{E_2}{|T|}$$

Ισχυρίζομαι ότι $|T| < E_1$.

Όμως

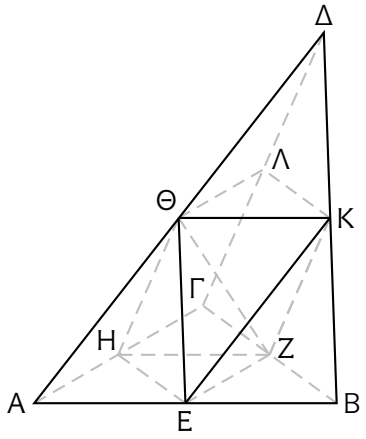
$$\frac{|\Sigma|}{E_2} = \frac{E_1}{|T|},$$

(Β5, Π16, σελ. 134) από όπου βέβαια, καθώς $|\Sigma| > E_2$, έπεται και ότι $E_1 > |T|$ (Β5, Π14, σελ. 134)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 3 (765) *Κάθε πυραμίδα με βάση τρίγωνο διαιρείται σε δύο ίσες τριγωνικές πυραμίδες που είναι όμοιες με την αρχική και σε δύο ισοδύναμα πρίσματα.*

Οι όγκοι των ισοδύναμων αυτών πρισμάτων έχουν άθροισμα μεγαλύτερο από το μισό του όγκου της αρχικής πυραμίδας.

Απόδειξη. Θεωρούμε την πυραμίδα ΑΒΓΔ με βάση το τρίγωνο ΑΒΓ και κορυφή το Δ. Ισχυρίζομαι ότι αυτή διαιρείται σε δύο ίσες τριγωνικές πυραμίδες που είναι όμοιες με την αρχική πυραμίδα και σε δύο ισοδύναμα πρίσματα με όγκο μεγαλύτερο από το μισό του συνολικού όγκου της αρχικής πυραμίδας.



Διχοτομούμε τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ και έστω Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ τα μέσα τους αντίστοιχα.

Επειδή ΑΕ = ΕΒ και ΑΘ = ΔΘ έπεται ότι ΕΘ // ΔΒ (Β6, Π2, σελ. 142). Ομοίως είναι και ΘΚ // ΑΒ οπότε το ΘΕΒΚ είναι παραλληλόγραμμο και άρα ΘΚ = ΕΒ (Β1, Π34, σελ. 41).

Καθώς ΕΒ = ΕΑ έπεται ότι ΑΕ = ΘΚ.

Ακόμα είναι $\widehat{ΕΑΘ} = \widehat{ΚΘΔ}$ (Β1, Π29, σελ. 38), οπότε τα τρίγωνα ΕΑΘ και ΚΘΔ έχουν ΕΑ = ΚΘ, ΑΘ = ΘΔ και $\widehat{ΕΑΘ} = \widehat{ΚΘΔ}$. Έτσι είναι ίσα (και όμοια) και άρα ΕΘ = ΚΔ (Β1, Π4, σελ. 23).

Ομοίως και τα τρίγωνα ΑΘΗ και ΘΛΔ είναι ίσα και όμοια.

Τότε όμως δυο τεμνόμενες ευθείες (οι ΕΘ και ΘΗ) είναι παράλληλες με δύο άλλες τεμνόμενες ευθείες (τις ΚΔ και ΔΛ) χωρίς να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτές. Άρα, οι αντίστοιχες γωνίες που περιέχονται σε αυτές είναι ίσες (Β11, Π10, σελ. 354). Δηλαδή, $\widehat{ΕΘΗ} = \widehat{ΚΔΛ}$.

Έτσι, τα τρίγωνα ΕΘΗ και ΚΔΛ έχουν ΕΘ = ΚΔ, ΘΗ = ΔΛ και $\widehat{ΕΘΗ} = \widehat{ΚΔΛ}$ και άρα είναι ίσα και όμοια (Β1, Π4, σελ. 23).

Ομοίως και τα τρίγωνα ΑΕΗ και ΘΚΛ είναι ίσα και όμοια και άρα η πυραμίδα με βάση ΑΕΗ και κορυφή το Θ είναι ίση και όμοια με την πυραμίδα με βάση ΘΚΛ και κορυφή το Δ (Β11, Ορ10, σελ. 346).

Στο ΑΔΒ πάλι είναι ΘΚ // ΑΒ οπότε το ΑΔΒ είναι ισογώνιο με το ΔΘΚ (Β1, Π29, σελ. 38) και έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και άρα είναι όμοια (Β6, Ορ1, σελ. 141).

Ομοίως, και το ΔΒΓ είναι όμοιο με το ΔΚΛ όπως και το ΑΔΓ με το ΔΛΘ.

Επιπλέον, οι τεμνόμενες ΒΑ και ΑΓ είναι παράλληλες με τις ΚΘ και ΘΛ αντίστοιχα χωρίς να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με αυτές. Έτσι, οι αντίστοιχες γωνίες που σχηματίζονται από αυτά τα ζεύγη τεμνόμενων ευθειών είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΚΘΛ}$ (Β11, Π10, σελ. 354).

Καθώς

$$\frac{ΒΑ}{ΑΓ} = \frac{2 \cdot ΚΘ}{2 \cdot ΘΛ} = \frac{ΚΘ}{ΘΛ}$$

έπεται ότι τα ΑΒΓ και ΘΚΛ είναι όμοια (Β6, Π6, σελ. 146).

Τότε όμως η πυραμίδα με βάση ΑΒΓ και κορυφή το Δ είναι όμοια με την πυραμίδα με βάση ΘΚΛ και κορυφή το Δ (Β11, Ορ9, σελ. 346).

Παραπάνω όμως δείξαμε ότι η πυραμίδα με βάση ΘΚΛ και κορυφή το Δ είναι όμοια με την πυραμίδα με βάση ΑΕΗ και κορυφή το Θ, οπότε καθεμιά από τις πυραμίδες αυτές είναι όμοια με την πυραμίδα με βάση ΑΒΓ και κορυφή το Δ.

Επειδή τώρα ΒΖ = ΖΓ θα είναι |ΕΒΖΗ| = 2|ΗΖΓ| (ΒΙ, Π41, σελ. 44).

Τότε όμως υπάρχουν δύο ισοϋψή πρίσματα (αυτό που περιέχεται στα τρίγωνα ΒΚΖ και ΕΘΗ και στα παραλληλόγραμμα ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ και ΘΚΖΗ και αυτό που περιέχεται αντίστοιχα στα τρίγωνα ΗΖΓ και ΘΚΛ και στα παραλληλόγραμμα ΛΓΗΘ και ΘΚΖΗ) που το ένα έχει βάση τρίγωνο ενώ το άλλο έχει βάση παραλληλόγραμμο με διπλάσιο εμβαδόν από το εμβαδόν του τριγώνου. Άρα τα δύο αυτά πρίσματα είναι ισοδύναμα (ΒΙΙ, Π39, σελ. 386).

Φέρνοντας τις ΕΖ και ΕΚ παρατηρούμε ότι το πρίσμα με βάση το παραλληλόγραμμο ΕΒΖΗ που έχει απέναντι την ΘΚ έχει όγκο μεγαλύτερο από τον όγκο της πυραμίδας με βάση το ΕΒΖ και κορυφή το Κ.

Καθώς η πυραμίδα αυτή είναι ισοδύναμη με την πυραμίδα βάσης ΑΕΗ και κορυφής Θ (διότι αυτές περιέχονται σε ίσα και όμοια επίπεδα) συμπεραίνουμε ότι το πρίσμα με βάση ΕΒΖΗ που έχει απέναντι την ΘΚ έχει όγκο μεγαλύτερο από την πυραμίδα βάσης ΑΕΗ και κορυφής Θ.

Επίσης είναι φανερό ότι το πρίσμα με βάση το ΗΖΓ που έχει απέναντι το ΘΚΛ έχει όγκο μεγαλύτερο από τον όγκο της πυραμίδας βάσης ΘΚΛ και κορυφής Δ.

Άρα, τα δυο παραπάνω ισοδύναμα πρίσματα έχουν όγκο μεγαλύτερο από το άθροισμα των όγκων των δύο ισοδύναμων πυραμίδων.

Συμβολίζοντας με α τον όγκο καθενός από τα δύο ισοδύναμα πρίσματα και με β τον όγκο καθεμιάς από τις δύο ισοδύναμες πυραμίδες για τον όγκο των πρισμάτων διαδοχικά έχουμε:

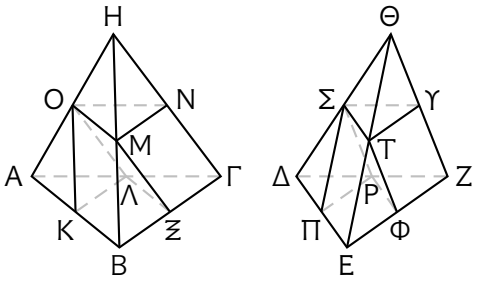
$$\begin{aligned} 2\alpha &> 2\beta \\ 2\alpha + 2\alpha &> 2\alpha + 2\beta \\ 4\alpha &> |\text{ΑΒΓΔ}| && (\text{αφού } |\text{ΑΒΓΔ}| = 2\alpha + 2\beta) \\ 2\alpha &> \frac{|\text{ΑΒΓΔ}|}{2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η αρχική πυραμίδα έχει διαιρεθεί σε δύο ίσες πυραμίδες όμοιες με αυτήν και δύο ισοδύναμα πρίσματα ο όγκος των οποίων είναι μεγαλύτερος από το μισό του όγκου της· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 4 (767) *Αν καθεμιά από δύο ισοϋψείς πυραμίδες διαιρεθεί σε δύο ίσες πυραμίδες όμοιες με την αρχική και σε δύο ισοδύναμα πρίσματα τότε ο λόγος των εμβαδών των βάσεων των δύο αρχικών πυραμίδων είναι ίσος με τον λόγο των αθροισμάτων των όγκων των πρισμάτων της κάθε πυραμίδας.*

Απόδειξη. Έστω οι δύο ισοϋψείς πυραμίδες με βάσεις τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ και κορυφές τα Η και Θ αντίστοιχα.

Διαιρούμε καθεμιά από τις πυραμίδες αυτές σε δύο ίσες πυραμίδες όμοιες προς την αρχική και δύο ισοδύναμα πρίσματα με τον τρόπο που εργαστήκαμε στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης.



Ισχυρίζομαι ότι $|AB\Gamma|/|\Delta EZ| = (\alpha_1 + \alpha_2)/(\beta_1 + \beta_2)$ όπου α_1 και α_2 είναι οι όγκοι των δύο πρισμάτων της πρώτης πυραμίδας ενώ β_1 και β_2 είναι οι όγκοι των δύο πρισμάτων της δεύτερης.

Αν Ξ και Λ είναι τα μέσα των ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα τότε καθώς $B\Xi = \Xi\Gamma$ και $A\Lambda = \Lambda\Gamma$ έπεται ότι $\Lambda\Xi \parallel AB$ και ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΛΞΓ είναι όμοια. Για τον ίδιο λόγο και τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΡΦΖ είναι όμοια. Ακόμα ισχύουν $B\Gamma = 2\Xi\Gamma$ και $EZ = 2Z\Phi$ οπότε

$$\frac{B\Gamma}{\Xi\Gamma} = \frac{EZ}{Z\Phi},$$

και άρα από τα ΒΓ και ΞΓ έχουν αναγραφεί όμοια και ομοίως κείμενα ΑΒΓ και ΛΞΓ ενώ από τα ΕΖ και ΖΦ τα ΔΕΖ και ΡΦΖ.

Συνεπώς, έπεται ότι $|AB\Gamma|/|\Lambda\Xi\Gamma| = |\Delta EZ|/|P\Phi Z|$ (Β6, Π22, σελ. 158), και εναλλάξ

$$\frac{|AB\Gamma|}{|\Delta EZ|} = \frac{|\Lambda\Xi\Gamma|}{|P\Phi Z|}$$

(Β5, Π16, σελ. 134).

Όμως ο λόγος $|AB\Gamma|/|\Lambda\Xi\Gamma|$ είναι ίσος με τον λόγο των πρισμάτων με βάσεις ΛΞΓ και ΡΦΖ που έχουν απέναντι έδρες τις ΟΜΝ και ΣΤΥ αντίστοιχα σύμφωνα με το λήμμα που ακολουθεί στο τέλος της απόδειξης.

Έτσι ισχύει

$$\frac{|AB\Gamma|}{|\Delta EZ|} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Ο λόγος πάλι των όγκων των πρισμάτων αυτών είναι ίσος με τον λόγο των όγκων των πρισμάτων με βάσεις τα παραλληλόγραμμα ΚΒΞΛ και ΠΕΦΡ που έχουν απέναντι τις ΟΜ και ΣΤ αντίστοιχα καθώς τα πρίσματα αυτά είναι ισοϋψή και η βάση τους ενός είναι τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με το μισό του εμβαδού της βάσης του άλλου (Β11, Π39, σελ. 386, Β5, Π7, σελ. 131 και Π3, σελ. 392).

Δηλαδή

$$\frac{|AB\Gamma|}{|\Delta EZ|} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Και έτσι (Β5, Π7, σελ. 131) ισχύει

$$\frac{|AB\Gamma|}{|\Delta EZ|} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2}.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο την διαίρεση των πυραμίδων ΟΜΝΗ και ΣΤΥΘ σε δύο ίσες πυραμίδες όμοιες με την αρχική και δύο ισοδύναμα πρίσματα προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$\frac{|OMN|}{|\Sigma TY|} = \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\beta_3 + \beta_4}$$

όπου με α_3, α_4 συμβολίζουμε τους όγκους των πρισμάτων της ΟΜΝΗ ενώ με β_3, β_4 τους όγκους των πρισμάτων της ΣΤΥΘ.

Αλλά

$$\frac{|\text{ΟΜΝ}|}{|\text{ΣΤΥ}|} = \frac{|\text{ΑΒΓ}|}{|\text{ΔΕΖ}|}$$

καθώς τα τρίγωνα ΟΜΝ και ΛΞΓ είναι ίσα όπως και τα ΣΤΥ και ΡΦΖ.

Συνεπώς,

$$\frac{|\text{ΑΒΓ}|}{|\text{ΔΕΖ}|} = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2} = \frac{\alpha_3+\alpha_4}{\beta_3+\beta_4} = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4}$$

Διαιρώνας συνεχώς τις υπολειπόμενες πυραμίδες σε δύο ίσες πυραμίδες και δύο ισοδύναμα πρίσματα τελικά προκύπτει ότι:

$$\frac{|\text{ΑΒΓ}|}{|\text{ΔΕΖ}|} = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}$$

όπου α_1, α_2, **...**, α_ν και β_1, β_2, **...**, β_ν είναι οι όγκοι των πρισμάτων που περιέχονται στις πυραμίδες ΑΒΓΗ και ΔΕΖΘ αντίστοιχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα 16 *Ισχύει ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων* ΛΞΓ *και* ΡΦΖ *είναι ίσος με τον λόγο των όγκων των πρισμάτων με βάσεις τα* ΛΞΓ *και* ΡΦΖ *απέναντι έδρες τα* ΟΜΝ *και* ΣΤΥ *αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν από τα Η και Θ φέρουμε τις κάθετες στα επίπεδα ΑΒΓ και ΔΕΖ τότε αυτές είναι ίσες καθώς οι πυραμίδες είναι ισοϋψείς. Τότε οι ΗΓ και η κάθετη από το Η τέμνονται από τα παράλληλα επίπεδα ΑΒΓ και ΟΜΝ και άρα τα τμήματα που ορίζονται σε αυτές είναι ανάλογα (Β11, Π17, σελ. 361).

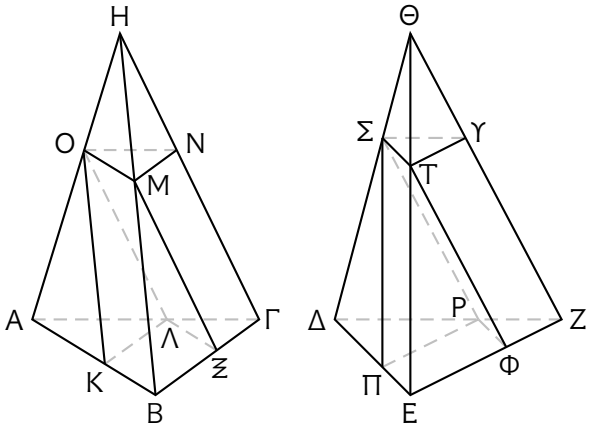
Καθώς η ΗΓ έχει διχοτομηθεί από το ΟΜΝ κατά το σημείο Ν ομοίως και η κάθετη στο ΑΒΓ από το Η διχοτομείται από το ΟΜΝ ενώ ομοίως και η κάθετη στο ΔΕΖ από το Θ διχοτομείται από το επίπεδο ΣΤΥ.

Όμως οι κάθετες από τα Η και Θ προς τα ΑΒΓ και ΔΕΖ αντίστοιχα είναι ίσες και άρα και οι κάθετες από τα τρίγωνα ΟΜΝ και ΣΤΥ προς τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσες. Έτσι, τα πρίσματα με βάσεις τα ΛΞΓ και ΡΦΖ που έχουν απέναντι τα ΟΜΝ και ΣΤΥ είναι ισοϋψή.

Ώστε και τα στερεά παραλληλεπίπεδα που κατασκευάζονται από τα πρίσματα αυτά είναι ισοϋψή και έτσι ο λόγος των όγκων τους είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών των βάσεών τους (Β11, Π32, σελ. 376).

Τότε και για τα μισά των στερεών αυτών ισχύει επίσης ότι ο λόγος των εμβαδών των βάσεών τους ΛΞΓ και ΡΦΖ είναι ίσος με τον λόγο των όγκων των πρισμάτων με βάσεις τα ΛΞΓ και ΡΦΖ που έχουν απέναντι τα ΟΜΝ και ΣΤΥ αντίστοιχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 5 (769) *Ο λόγος των όγκων δύο ισοϋψών πυραμίδων που έχουν βάσεις τρίγωνα είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών των βάσεών τους.*



Απόδειξη. Έστω οι δύο ισοϋψείς πυραμίδες με βάσεις τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ και κορυφές τα Η και Θ αντίστοιχα. Ισχυρίζομαι ότι ισχύει

$$|\text{ΑΒΓ}|/|\text{ΔΕΖ}| = |\text{ΑΒΓΗ}|/|\text{ΔΕΖΘ}|.$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η παραπάνω τότε θα είναι $|\text{ΑΒΓ}|/|\text{ΔΕΖ}| = |\text{ΑΒΓΗ}|/|X|$ όπου $|X|$ είναι ο όγκος ενός στερεού Χ με $|X| < |\text{ΔΕΖΘ}|$ ή $|X| > |\text{ΔΕΖΘ}|$.

1η περίπτωση: $|\text{ΑΒΓ}|/|\text{ΔΕΖ}| = |\text{ΑΒΓΗ}|/|X|$ με $|X| < |\text{ΔΕΖΗΘ}|$

Διαιρούμε την πυραμίδα ΔΕΖΘ σε δύο ίσες πυραμίδες που είναι όμοιες με αυτήν και δύο ισοδύναμα πρίσματα που έχουν όγκο μεγαλύτερο από το μισό του όγκου της πυραμίδας ΔΕΖΘ (Β12, Π3, σελ. 392).

Διαιρώντας συνεχώς με τον ίδιο τρόπο τις προκύπτουσες πυραμίδες (δηλαδή κάθε φορά καθεμιά από αυτές να διαιρείται σε δύο ίσες πυραμίδες που να είναι όμοιες προς την αρχική και σε δύο ισοδύναμα πρίσματα) και αφαιρώντας τον όγκο των δύο ισοδύναμων πρισμάτων, που είναι μεγαλύτερος από το μισό του όγκου της αρχικής πυραμίδας, οι υπολειπόμενες πυραμίδες που θα προκύψουν στο τέλος θα έχουν όγκο μικρότερο της διαφοράς $|\text{ΔΕΖΘ}| - |X|$ (Β10, Π1, σελ. 229).

Χάριν απλότητας υποθέτουμε ότι προκύπτουν οι πυραμίδες ΔΠΡΣ και ΣΤΥΘ. Τότε

$$|\text{ΔΠΡΣ}| + |\text{ΣΤΥΘ}| < |\text{ΔΕΖΘ}| - |X|$$

ή

$$|\text{ΔΠΡΣ}| + |\text{ΣΤΥΘ}| < |\text{ΔΠΡΣ}| + |\text{ΣΤΥΘ}| + \alpha_1 + \alpha_2 - |X|$$

όπου α_1 και α_2 οι όγκοι των δύο ισοδύναμων πρισμάτων που περιέχονται στην πυραμίδα ΔΕΖΘ.

Από την παραπάνω έπεται

$$\alpha_1 + \alpha_2 > |X|$$

Στην συνέχεια διαιρούμε και την πυραμίδα ΑΒΓΗ ομοίως και ισοπληθώς με την ΔΕΖΘ οπότε έχουμε ότι ο λόγος των εμβαδών των βάσεών των δύο αυτών πυραμίδων, δηλαδή ο $|ΑΒΓ|/|ΔΕΖ|$, είναι ίσος με τον λόγο των αθροισμάτων των όγκων των πρισμάτων που περιέχονται σε αυτές τις πυραμίδες (Π4, σελ. 394). Δηλαδή

$$\frac{|ΑΒΓ|}{|ΔΕΖ|} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

όπου με β_1 και β_2 έχουμε συμβολίσει τους όγκους των δύο πρισμάτων της πυραμίδας ΑΒΓΗ. Καθώς όμως

$$\frac{|ΑΒΓ|}{|ΔΕΖ|} = \frac{|ΑΒΓΗ|}{|X|}$$

η προηγούμενη αναλογία γράφεται

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{ΑΒΓΗ}{|X|}$$

ή

$$\frac{|ΑΒΓΗ|}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{|X|}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Από την παραπάνω καθώς $|ΑΒΓΗ| > \beta_1 + \beta_2$ παίρνουμε και ότι $|X| > \alpha_1 + \alpha_2$ (Β5, Π14, σελ. 134). Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς έχουμε αποδείξει ότι $|X| < \alpha_1 + \alpha_2$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει

$$\frac{|ΑΒΓ|}{|ΔΕΖ|} = \frac{|ΑΒΓΗ|}{|X|} \quad \text{και} \quad |X| < |ΔΕΖΘ|$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι δεν μπορεί να ισχύει

$$\frac{|ΔΕΖ|}{|ΑΒΓ|} = \frac{|ΔΕΖΘ|}{|X|} \quad \text{και} \quad |X| < |ΑΒΓΗ|$$

2η περίπτωση: $|ΑΒΓ|/|ΔΕΖ| = |ΑΒΓΗ|/|X|$ με $|X| > |ΔΕΖΘ|$

Τότε έχουμε

$$\frac{|ΔΕΖ|}{|ΑΒΓ|} = \frac{|X|}{|ΑΒΓΗ|}$$

Αλλά, με τρόπο ανάλογο με αυτόν που περιγράφεται στο Λήμμα της Π2, σελ. 390 είναι

$$\frac{|X|}{|ΑΒΓΗ|} = \frac{|ΔΕΖΘ|}{|T|}$$

για κάποιο στερεό Τ με όγκο $|T| < |ΑΒΓΗ|$.

Οπότε ισχύει και

$$\frac{|ΔΕΖ|}{|ΑΒΓ|} = \frac{|ΔΕΖΘ|}{|T|}$$

με $|\Gamma| < |\Delta EZ\Theta|$.

Αυτό όμως είναι αδύνατον να ισχύει όπως αποδείχτηκε στην 1η περίπτωση.

Άρα, είναι αδύνατον να ισχύει

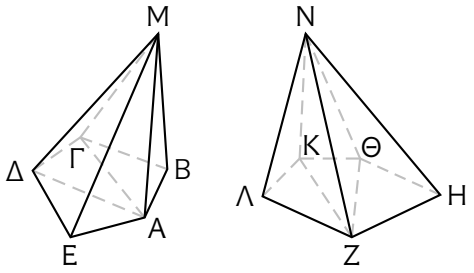
$$\frac{|AB\Gamma|}{|\Delta EZ|} = \frac{|AB\Gamma H|}{|X|} \quad \text{και} \quad |X| > |\Delta EZ\Theta|$$

και επομένως έπεται τελικά ότι

$$\frac{|AB\Gamma|}{|\Delta EZ|} = \frac{|AB\Gamma H|}{|\Delta EZ\Theta|}$$

όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 6 (770) *Ο λόγος των όγκων δύο ισοϋψών πυραμίδων με βάσεις πολύγωνα είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών των βάσεών τους.*



Απόδειξη. Έστω οι δύο ισοϋψείς πυραμίδες με βάσεις τα πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και ΖΗΘΚΛ. Ισχυρίζομαι ότι $|AB\Gamma\Delta E|/|ZH\Theta K\Lambda| = |AB\Gamma\Delta EM|/|ZH\Theta K\Lambda M|$ (στμ: ο Ευκλείδης αποδεικνύει την πρόταση όταν οι βάσεις των πυραμίδων είναι πεντάγωνα. Η απόδειξη όμως γίνεται με όμοιο τρόπο όταν η βάση κάθε πυραμίδας είναι οποιοδήποτε πολύγωνο).

Φέρνουμε τις ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ και ΖΚ. Τότε οι πυραμίδες ΑΒΓΜ και ΑΓΔΜ έχουν τριγωνικές βάσεις και είναι ισοϋψείς. Έτσι έχουμε

$$\frac{|AB\Gamma|}{|A\Gamma\Delta|} = \frac{|AB\Gamma M|}{|A\Gamma\Delta M|}$$

(Π5, σελ. 396). Συνθέτοντας τους λόγους αυτούς (Β5, Ορ14, σελ. 127) παίρνουμε

$$\frac{|AB\Gamma| + |A\Gamma\Delta|}{|A\Gamma\Delta|} = \frac{|AB\Gamma M| + |A\Gamma\Delta M|}{|A\Gamma\Delta M|}$$

ή

$$\frac{|AB\Gamma\Delta|}{|A\Gamma\Delta|} = \frac{|AB\Gamma\Delta M|}{|A\Gamma\Delta M|}$$

Αλλά

$$\frac{|A\Gamma\Delta|}{|A\Delta E|} = \frac{|A\Gamma\Delta M|}{|A\Delta EM|}.$$

Έτσι από τις δύο παραπάνω αναλογίες παίρνουμε

$$\frac{|AB\Gamma\Delta|}{|A\Delta E|} = \frac{|AB\Gamma\Delta M|}{|A\Delta EM|}$$

(Β5, Π22, σελ. 137). Συνθέτοντας ξανά (Β5, Ορ14, σελ. 127)

$$\frac{|AB\Gamma\Delta| + |A\Delta E|}{|A\Delta E|} = \frac{|AB\Gamma\Delta M| + |A\Delta EM|}{|A\Delta EM|}$$

δηλαδή

$$\frac{|ΑΒΓΔΕ|}{|ΑΔΕ|} = \frac{|ΑΒΓΔΕΜ|}{|ΑΔΕΜ|}$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι

$$\frac{|ΖΗΘΚΛ|}{|ΖΗΘ|} = \frac{|ΖΗΘΚΛΝ|}{|ΖΗΘΝ|}$$

και επειδή οι ισοϋψείς πυραμίδες ΑΔΕΜ και ΖΗΘΝ έχουν τριγωνικές βάσεις θα είναι

$$\frac{|ΑΔΕ|}{|ΖΗΘ|} = \frac{|ΑΔΕΜ|}{|ΖΗΘΝ|}.$$

Αλλά

$$\frac{|ΑΔΕ|}{|ΑΒΓΔΕ|} = \frac{|ΑΔΕΜ|}{|ΑΒΓΔΕΜ|}$$

και άρα δι' ίσου (Β5, Π22, σελ. 137) προκύπτει

$$\frac{|ΑΒΓΔΕ|}{|ΖΗΘ|} = \frac{|ΑΒΓΔΕΜ|}{|ΖΗΘΝ|}.$$

Καθώς όμως προηγουμένως δείξαμε ότι

$$\frac{|ΖΗΘ|}{|ΖΗΘΚΛ|} = \frac{|ΖΗΘΝ|}{|ΖΗΘΚΛΝ|}$$

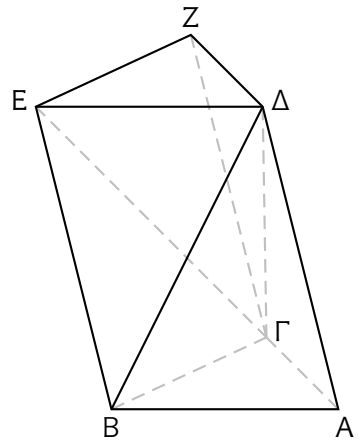
ξανά για δι' ίσου παίρνουμε τελικά ότι

$$\frac{|ΑΒΓΔΕ|}{|ΖΗΘΚΛ|} = \frac{|ΑΒΓΔΕΜ|}{|ΖΗΘΚΛΝ|}$$

(Β5, Π22, σελ. 137)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 7 (771) *Κάθε πρίσμα με τριγωνική βάση μπορεί να διαιρεθεί σε τρεις ισοδύναμες πυραμίδες με τριγωνικές βάσεις.*

Απόδειξη. Έστω το πρίσμα με βάση το ΑΒΓ με απέναντι έδρα το ΔΕΖ. Ισχυρίζομαι ότι το πρίσμα αυτό (στο εξής ΑΒΓΔΕΖ) διαιρείται σε τρεις ισοδύναμες πυραμίδες με βάσεις τρίγωνα.



Φέρνουμε τις ΒΔ, ΕΓ και ΔΓ. Τότε επειδή το ΑΒΕΔ είναι παραλληλόγραμμο με διαγώνιο την ΒΔ έπεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΔ είναι ίσα (Β1, Π34, σελ. 41).

Έτσι οι πυραμίδες με βάσεις τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΔ και κορυφή το Γ είναι ισοδύναμες.

Η πυραμίδα με βάση το ΕΒΔ και κορυφή το Γ είναι ισοδύναμη με την πυραμίδα βάσης ΕΒΓ και κορυφή Δ καθώς αυτές περιέχονται στα ίδια επίπεδα (στμ: έχουν τις ίδιες έδρες). Συνεπώς, η πυραμίδα βάσης ΑΒΔ και κορυφή το Γ είναι ισοδύναμη με την πυραμίδα βάσης ΕΒΓ και κορυφή το Δ.

Επειδή πάλι το ΖΓΒΕ είναι παραλληλόγραμμο με διαγώνιο την ΓΕ έπεται ότι τα τρίγωνα ΓΕΖ και ΓΒΕ είναι ίσα (Β1, Π34, σελ. 41). Άρα η πυραμίδα με βάση το ΒΓΕ και κορυφή το Δ είναι ισοδύναμη με την πυραμίδα με βάση ΕΓΖ και κορυφή το Δ. Παραπάνω δείξαμε όμως ότι η πυραμίδα με βάση ΒΓΕ και κορυφή Δ είναι ισοδύναμη με την πυραμίδα που έχει βάση το ΑΒΔ και κορυφή το Γ. Συνεπώς η πυραμίδα βάσης ΕΓΖ και κορυφής Δ είναι ισοδύναμη με την πυραμίδα βάσης ΑΒΔ και κορυφής Γ.

Έτσι το πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ έχει διαιρεθεί σε τρεις ισοδύναμες πυραμίδες που έχουν βάσεις τρίγωνα.

Και επειδή η πυραμίδα με βάση ΑΒΔ και κορυφή το Γ είναι ισοδύναμη με την πυραμίδα που έχει βάση το ΓΑΒ και κορυφή το Δ καθώς περιέχονται στα ίδια επίπεδα ενώ η πυραμίδα βάσης ΑΒΔ και κορυφής Γ αποδείχτηκε ότι έχει όγκο ίσο με το 1/3 του όγκου του πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ συμπεραίνουμε ότι και η πυραμίδα με βάση το ΑΒΓ και κορυφή το Δ έχει όγκο ίσο με το 1/3 του όγκου του πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ.

Πόρισμα 25 *Είναι λοιπόν από αυτό φανερό, ότι κάθε πυραμίδα είναι το ένα τρίτο του πρίσματος που έχει την ίδια βάση με αυτήν και το ίδιο ύψος* [*επειδή ακόμα και αν η βάση του πρίσματος έχει άλλο ευθύγραμμο σχήμα* (*εκτός δηλαδή του τριγώνου*)*, το ίδιο σχήμα θα έχει και η απέναντι βάση, και διαιρείται σε πρίσματα με βάσεις και απέναντι έδρες τρίγωνα, έχει τον ίδιο λόγο με όλη τη βάση του όπως και καθένα από τα πρίσματα στα οποία χωρίστηκε με τη βάση του*]· *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* Δ

Πρόταση 8 (772) *Ο λόγος των όγκων δύο όμοιων πυραμίδων που έχουν βάσεις τρίγωνα είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των ομόλογων πλευρών τους.*

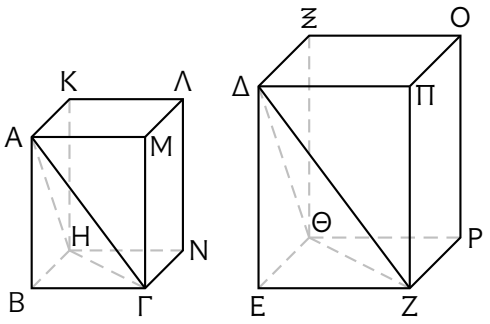
Απόδειξη. Έστω οι όμοιες και ομοίως κείμενες πυραμίδες με βάσεις τα ΑΒΓ και ΔΕΖ και κορυφές τα Η και Θ αντίστοιχα. Ισχυρίζομαι ότι

$$|\text{ΑΒΓΗ}|/|\text{ΔΕΖΘ}| = \text{ΒΓ}^3/\text{ΕΖ}^3.$$

Συμπληρώνουμε τα στερεά παραλληλεπίπεδα ΒΗΜΛ και ΕΘΠΟ.

Καθώς οι πυραμίδες ΑΒΓΗ και ΔΕΖΘ είναι όμοιες έπεται ότι $\widehat{\text{ΑΒΓ}} = \widehat{\text{ΔΕΖ}}$, $\widehat{\text{ΗΒΓ}} = \widehat{\text{ΘΕΖ}}$, $\widehat{\text{ΑΒΗ}} = \widehat{\text{ΔΕΘ}}$ και ΑΒ/ΔΕ = ΒΓ/ΕΖ = ΒΗ/ΕΘ.

Επειδή ΑΒ/ΔΕ = ΒΓ/ΕΖ και $\widehat{\text{ΑΒΓ}} = \widehat{\text{ΔΕΖ}}$ οι περί τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες και άρα τα παραλληλόγραμμα ΒΜ και ΕΠ είναι όμοια (Β6, Ορ1, σελ. 141).



Για τον ίδιο λόγο και τα ΒΝ και ΕΡ είναι όμοια όπως και τα ΒΚ και ΕΖ. Δηλαδή τα ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ είναι όμοια με τα ΕΠ, ΕΖ και ΕΡ αντίστοιχα.

Σε ένα παραλληλεπίπεδο όμως οι απέναντι έδρες είναι ίσες και όμοιες (Β11, Π24, σελ. 367) και έτσι στο ΒΗΜΛ τα ΜΒ, ΒΚ και ΒΝ είναι ίσα και όμοια με τα απέναντί τους όπως και τα ΕΠ, ΕΖ και ΕΡ στο ΕΘΠΟ. Και άρα τα ΒΗΜΛ και ΕΘΠΟ περιέχονται στο ίδιο πλήθος ομοίων και ομοίως κεκλιμένων επιπέδων και άρα είναι όμοια (Β11, Ορ9, σελ. 346).

Άρα ό λόγος των όγκων των στερεών αυτών παραλληλεπιπέδων είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των ομόλογων πλευρών τους (Β11, Π33, σελ. 377) συνεπώς

$$\frac{|\text{ΒΗΜΛ}|}{|\text{ΕΘΠΟ}|} = \frac{\text{ΒΓ}^3}{\text{ΕΖ}^3}.$$

Όμως είναι και

$$\frac{|\text{ΒΗΜΛ}|}{|\text{ΕΘΠΟ}|} = \frac{|\text{ΑΒΓΗ}|}{|\text{ΔΕΖΘ}|}$$

καθώς ο όγκος της πυραμίδας είναι ίσος με το 1/6 του όγκου του αντίστοιχου στερεού παραλληλεπιπέδου διότι το αντίστοιχο πρίσμα έχει όγκο ίσο με το μισό του όγκου το στερεού παραλληλεπιπέδου και τριπλάσιο από τον όγκο της πυραμίδας.

Άρα

$$\frac{|\text{ΑΒΓΗ}|}{|\text{ΔΕΖΘ}|} = \frac{\text{ΒΓ}^3}{\text{ΕΖ}^3},$$

όπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα 26 *Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι και ο λόγος των όγκων δύο όμοιων πυραμίδων με βάσεις πολύγωνα είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των ομόλογων πλευρών τους.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν δύο τέτοιες πυραμίδες διαιρεθούν σε πυραμίδες με βάσεις τρίγωνα επειδή τα όμοια πολύγωνα που είναι οι βάσεις διαιρούνται στο ίδιο πλήθος όμοιων τριγώνων ο λόγος του όγκου κάθε πυραμίδας με βάση τρίγωνο (που περιέχεται στην πρώτη πυραμίδα) προς τον όγκο της αντίστοιχης πυραμίδας με βάση τρίγωνο (που περιέχεται στην δεύτερη πυραμίδα) είναι ίσος με τον λόγο του αθροίσματος των όγκων των μερικών πυραμίδων με βάσεις τρίγωνα (που περιέχονται στην πρώτη πυραμίδα) προς το άθροισμα των όγκων των μερικών πυραμίδων με βάσεις τρίγωνα (που περιέχονται στην δεύτερη πυραμίδα). Άρα θα είναι ίσος με τον λόγο των πυραμίδων που έχουν βάσεις πολύγωνα.

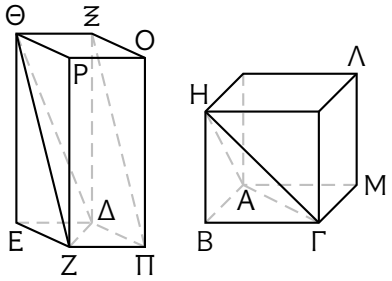
Επίσης ο λόγος του όγκου μιας πυραμίδας με βάση τρίγωνο (που περιέχεται στην πρώτη πυραμίδα) προς τον όγκο της αντίστοιχης πυραμίδας με βάση τρίγωνο (που περιέχεται στην δεύτερη πυραμίδα) είναι ίσος και με τον λόγο των κύβων των ομόλογων πλευρών τους όπως δείξαμε παραπάνω (Β12, Π8, σελ. 401).

Συνεπώς, ο λόγος των όγκων δύο πυραμίδων με βάσεις όμοια πολύγωνα είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των ομόλογων πλευρών τους.

Δ

Πρόταση 9 (773) *Τα εμβαδά των βάσεων δύο ισοδύναμων πυραμίδων των οποίων οι βάσεις είναι τρίγωνα είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη των πυραμίδων.*

Ισχύει και το αντίστροφο: αν τα εμβαδά των βάσεων δύο πυραμίδων με βάσεις τρίγωνα είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη των πυραμίδων τότε οι πυραμίδες αυτές είναι ισοδύναμες.



Απόδειξη. (Ευθύ) Έστω οι ισοδύναμες πυραμίδες με βάσεις τα ΑΒΓ και ΔΕΖ και κορυφές τα Η και Θ αντίστοιχα. Ισχυρίζομαι ότι τα εμβαδά των βάσεων των δύο πυραμίδων είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη των πυραμίδων. Δηλαδή αν συμβολίσουμε με υ_1 και υ_2 τα ύψη των πυραμίδων ΑΒΓΗ και ΔΕΖΘ αντίστοιχα τότε ισχύει $|\text{ΑΒΓ}|/|\text{ΔΕΖ}| = \upsilon_2/\upsilon_1$.

Συμπληρώνουμε τα στερεά παραλληλεπίπεδα ΒΗΜΛ και ΕΘΠΟ οπότε καθώς $|\text{ΑΒΓΗ}| = |\text{ΔΕΑΖΘ}|$ και $|\text{ΒΗΜΛ}| = 6\cdot|\text{ΑΒΓΗ}|$ και $|\text{ΕΘΠΟ}| = 6\cdot|\text{ΔΕΖΘ}|$ έπεται και ότι $|\text{ΒΗΜΛ}| = |\text{ΕΘΠΟ}|$.

Οι βάσεις όμως δύο ισοδύναμων στερεών παραλληλεπιπέδων έχουν τα εμβαδά τους αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη τους (ΒΙΙ, Π34, σελ. 378) και άρα $|\text{ΒΜ}|/|\text{ΕΠ}| = \upsilon_2/\upsilon_1$ καθώς τα ύψη των στερεών παραλληλεπιπέδων ΒΗΜΛ και ΕΘΠΟ είναι τα ύψη των πυραμίδων ΑΒΓΗ και ΔΕΖΘ.

Επιπλέον είναι και $|\text{ΒΜ}|/|\text{ΕΠ}| = |\text{ΑΒΓ}|/|\text{ΔΕΖ}|$ ΒΙ, Π34, σελ. 41) και άρα $|\text{ΑΒΓ}|/|\text{ΔΕΖ}| = \upsilon_2/\upsilon_1$.

Συνεπώς, οι βάσεις των πυραμίδων ΑΒΓΗ και ΔΕΖΘ έχουν εμβαδά αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη τους.

(Αντίστροφο) Έστω τώρα ότι τα εμβαδά των βάσεων των πυραμίδων ΑΒΓΗ και ΔΕΖΘ είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη υ_1 και υ_2 των δύο πυραμίδων, δηλαδή $|\text{ΑΒΓ}|/|\text{ΔΕΖ}| = \upsilon_2/\upsilon_1$. Ισχυρίζομαι ότι $|\text{ΑΒΓΗ}| = |\text{ΔΕΖΘ}|$.

Όπως προηγουμένως συμπληρώνουμε τα στερεά παραλληλεπίπεδα ΒΗΜΛ και ΕΘΠΟ οπότε ισχύει $|\text{ΑΒΓ}|/|\text{ΔΕΖ}| = |\text{ΒΜ}|/|\text{ΕΠ}|$. Άρα θα είναι και $|\text{ΒΜ}|/|\text{ΕΠ}| = \upsilon_2/\upsilon_1$.

Όμως τα ύψη των πυραμίδων ΑΒΓΗ και ΔΕΖΘ είναι ίσα με τα ύψη των στερεών παραλληλεπιπέδων ΒΗΜΛ και ΕΘΠΟ αντίστοιχα.

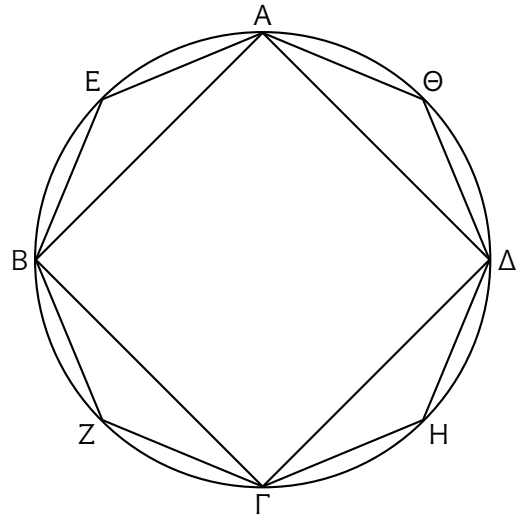
Άρα τα εμβαδά των βάσεων των στερεών παραλληλεπιπέδων είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη τους και επομένως τα στερεά παραλληλεπίπεδα είναι ισοδύναμα (Β1, Π34, σελ. 41), δηλαδή $|ΒΗΜΛ| = |ΕΘΠΟ|$.

Οι πυραμίδες ΑΒΓΗ και ΔΕΖΘ όμως έχουν όγκους ίσους με το 1/6 των ΒΗΜΛ και ΕΘΠΟ αντίστοιχα, δηλαδή $|ΑΒΓΗ| = |ΒΗΜΛ|/6$ και $|ΔΕΖΘ| = |ΕΘΠΟ|/6$.

Καθώς λοιπόν $|ΒΗΜΛ| = |ΕΘΠΟ|$ έπεται ότι $|ΑΒΓΗ| = |ΔΕΖΘ|$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν δύο τριγωνικές πυραμίδες είναι ισοδύναμες τότε τα εμβαδά των βάσεών τους είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη τους και αντιστρόφως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 10 (Όγκος κώνου) (774) *Κάθε κώνος έχει όγκο ίσο με το* 1/3 *του όγκου του κυλίνδρου που έχει την ίδια βάση και είναι ισοϋψής με τον κώνο αυτό.*



Απόδειξη. Έστω οι ισοϋψείς κύλινδρος και κώνος με ίδια βάση τον κύκλο ΑΒΓΔ. Ισχυρίζομαι ότι ο όγκος του κώνου είναι ίσος με το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου ή ισοδύναμα ότι ο κύλινδρος έχει τριπλάσιο όγκο από τον όγκο του κώνου.

Αν υποθέσουμε ότι ο κύλινδρος δεν έχει τριπλάσιο όγκο από τον όγκο του κυλίνδρου τότε ο όγκος του κυλίνδρου θα είναι είτε μεγαλύτερος είτε μικρότερος από το τριπλάσιο του όγκου του κώνου.

Συμβολίζοντας με α τον όγκο του κυλίνδρου και με β τον όγκο του κώνου θα είναι είτε $\alpha > 3\beta$ είτε $\alpha < 3\beta$.

1η περίπτωση: Έστω ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι μεγαλύτερος από το τριπλάσιο του όγκου του κώνου, δηλαδή $\alpha > 3\beta$.

Εγγράφουμε στον κύκλο ΑΒΓΔ το τετράγωνο ΑΒΓΔ που έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το μισό του εμβαδού του κύκλου (Β12, Π2, σελ. 390).

Με βάση το τετράγωνο ΑΒΓΔ υψώνουμε πρίσμα ισοϋψές με τον κύλινδρο του οποίου ο όγκος είναι μεγαλύτερος από το μισό του όγκου του κυλίνδρου.

Πράγματι, αν περιγράψουμε περί τον κύκλο ΑΒΓΔ ένα τετράγωνο τότε το εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν ίσο με το μισό του εμβαδού του περιγεγραμμένου τετραγώνου ενώ τα στερεά παραλληλεπίπεδα (που είναι πρίσματα) με βάσεις τα τετράγωνα αυτά είναι ισοϋψή και άρα

ο λόγος των όγκων τους είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών των βάσεών τους (Β11, Π32, σελ. 376).

Έτσι ο όγκος του πρίσματος με βάση το ΑΒΓΔ είναι ίσος με τον μισό του όγκου του πρίσματος με βάση το περιγεγραμμένο στον κύκλο ΑΒΓΔ τετράγωνο.

Ο κύλινδρος πάλι έχει όγκο μικρότερο από τον όγκο του πρίσματος με βάση το περιγεγραμμένο στον κύκλο ΑΒΓΔ τετράγωνο. Άρα ο όγκος του πρίσματος με βάση το ΑΒΓΔ (και που είναι ισοϋψές με τον κύλινδρο) είναι μεγαλύτερος από το μισό του όγκου του κυλίνδρου.

Στην συνέχεια διχοτομούμε τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και $\overset{\frown}{\Delta A}$ κατά σημεία τους Ε, Ζ, Η και Θ αντίστοιχα ενώ φέρνουμε και τις ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ και ΘΑ.

Τότε το εμβαδόν καθενός από τα τρίγωνα ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ και ΔΘΑ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του αντίστοιχου τμήματος του κύκλου ΑΒΓΔ (αυτό στο οποίο περιέχεται) (Β12, Π2, σελ. 390).

Με βάσεις τα τρίγωνα ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ και ΔΘΑ ανυψώνουμε ξανά πρίσματα ισοϋψή με τον κύλινδρο.

Τότε κάθε ένα από τα πρίσματα αυτά έχει όγκο μεγαλύτερο από το μισό του όγκου του αντίστοιχου κυλινδρικού τμήματος.

Πράγματι, από τα Ε, Ζ, Η και Θ φέρουμε τις παράλληλες προς τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, συμπληρώνουμε αντίστοιχα ορθογώνια παραλληλόγραμμα και με βάσεις τα ορθογώνια αυτά παραλληλόγραμμα υψώνουμε πρίσματα ισοϋψή προς τον κύλινδρο.

Τότε κάθε ένα από τα πρίσματα με βάσεις τα τρίγωνα ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ και ΔΘΑ έχει όγκο ίσο με το μισό του όγκου του αντίστοιχου στερεού παραλληλεπιπέδου που έχει ανυψωθεί.

Τα τμήματα του κυλίνδρου πάλι έχουν όγκο μικρότερο από τα αντίστοιχα στερεά παραλληλεπίπεδα (με βάσεις τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα) και άρα ο όγκος καθενός από τα τριγωνικά πρίσματα είναι μεγαλύτερος από το μισό του όγκου του αντίστοιχου τμήματος του κυλίνδρου.

Επαναλαμβάνοντας συνεχώς την παραπάνω διαδικασία της διχοτόμησης των τόξων που προκύπτουν, κατασκευής των παραλληλογράμμων και ύψωσης τριγωνικών πρισμάτων θα απομείνουν κάποια στιγμή ως υπόλοιπο τμήματα του κυλίνδρου με όγκο μικρότερο της διαφοράς $\alpha - 3\beta$ του τριπλασίου του όγκου του κώνου από τον όγκο του κυλίνδρου (Β10, Π1, σελ. 229).

Πράγματι αν θεωρήσουμε ως δύο μεγέθη τον όγκο του κυλίνδρου α και την διαφορά $\alpha - 3\beta$ και από το μεγαλύτερο από αυτά, δηλαδή το α αφαιρέσουμε τον όγκο των τριγωνικών πρισμάτων που είναι μεγαλύτερος από το μισό του όγκου του κυλίνδρου και από το υπόλοιπο συνεχίζουμε να αφαιρούμε συνεχώς τον όγκο τριγωνικών πρισμάτων που είναι μεγαλύτε-

ρος από το μισό του όγκου του θα προκύψει στο τέλος μέγεθος μικρότερο από την διαφορά $\alpha - 3\beta$.

Χάριν απλότητας υποθέτουμε ότι έχουν απομείνει τα τμήματα ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ και ΘΑ του κυλίνδρου και συμβολίζουμε με α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7 και α_8 αντίστοιχα τους όγκους τους (στμ: που είναι ίσοι).

Τότε

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + |\text{ΑΒΓΔΕΖΗΘ}| = \alpha > 3\beta$$

και άρα ο όγκος του πολυγωνικού πρίσματος βάσης ΑΒΓΔΕΖΗΘ που είναι ισοϋψές με τον κύλινδρο είναι μεγαλύτερος από το τριπλάσιο του όγκου του κώνου.

Το πρίσμα όμως αυτό έχει όγκο ίσο με το τριπλάσιο του όγκου της πυραμίδας με βάση ΑΒΓΔΕΖΗΘ και κορυφή την κορυφή του κώνου (Π7, σελ. 400, Πόρισμα) και άρα η πυραμίδα αυτή έχει μεγαλύτερο από τον όγκο του κώνου.

Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς η πυραμίδα με βάση ΑΒΓΔΕΖΗΘ εμπεριέχεται στον κώνο και άρα έχει μικρότερο όγκο.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο όγκος του κυλίνδρου δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από το τριπλάσιο του όγκου του κώνου, δηλαδή δεν μπορεί να ισχύει $\alpha > 3\beta$.

$2^η$ περίπτωση: Έστω ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι μικρότερος από το τριπλάσιο του όγκου του κώνου, δηλαδή $\alpha < 3\beta$.

Τότε ο όγκος του κώνου είναι μεγαλύτερος από το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου, δηλαδή $\beta > \alpha/3$.

Εγγράφουμε στον κύκλο ΑΒΓΔ το τετράγωνο ΑΒΓΔ που έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το μισό του εμβαδού του κύκλου (Β12, Π2, σελ. 390).

Με βάση το τετράγωνο ΑΒΓΔ ανυψώνουμε πυραμίδα με κορυφή την κορυφή του κώνου οπότε αυτή έχει όγκο μεγαλύτερο από το μισό του όγκου του κώνου.

Πράγματι αν περιγράψουμε περί τον κύκλο ΑΒΓΔ τετράγωνο τότε το εμβαδόν του εγγεγραμμένου τετραγώνου είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του περιγεγραμμένου τετραγώνου οπότε αν υψώσουμε πρίσματα ισοϋψή με τον κύλινδρο με βάσεις τα τετράγωνα αυτά ο όγκος του πρίσματος με βάση το ΑΒΓΔ θα είναι ίσος με το μισό του όγκου του πρίσματος με βάση το περιγεγραμμένο τετράγωνο καθώς ο λόγος των όγκων των πρισμάτων αυτών είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών των βάσεών τους (Β11, Π32, σελ. 376).

Άρα η πυραμίδα με βάση ΑΒΓΔ και κορυφή την κορυφή του κώνου έχει όγκο ίσο με τον μισό του όγκου της πυραμίδας με την ίδια κορυφή και με βάση το περιγραμμένο στον κύκλο ΑΒΓΔ τετράγωνο καθώς ο όγκος

μιας πυραμίδας είναι ίσος με τον 1/3 του όγκου του ισοϋψούς με αυτήν πρίσματος με την ίδια βάση.

Η πυραμίδα όμως με βάση το περιγραμμένο στον κύκλο ΑΒΓΔ τετράγωνο και κορυφή την κορυφή του κώνου έχει όγκο μεγαλύτερο από τον κώνο με βάση τον κύκλο καθώς τον εμπεριέχει. Και άρα η πυραμίδα με βάση το ΑΒΓΔ και κορυφή την κορυφή του κώνου έχει όγκο μεγαλύτερο από το μισό του όγκου του κώνου.

Στην συνέχεια διχοτομούμε τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και $\overset{\frown}{\Delta A}$ λαμβάνοντας τα σημεία τους Ε, Ζ, Η και Θ αντίστοιχα και φέρνουμε τις ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ και ΘΑ. Τότε το εμβαδόν καθενός από τα τρίγωνα ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ και ΔΘΑ είναι μεγαλύτερο από το μισό του εμβαδού του αντίστοιχου τμήματος του κύκλου ΑΒΓΔ.

Με κορυφή την κορυφή του κώνου και βάσεις τα ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ και ΔΘΑ ανυψώνουμε πυραμίδες καθεμιά από τις οποίες έχει όγκο μεγαλύτερο από το μισό του όγκου του κώνου.

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία αυτή συνεχώς (διχοτόμηση τόξων, κατασκευή τριγώνων, ύψωση τριγωνικών πυραμίδων με κορυφή την κορυφή του κώνου) λαμβάνουμε κάποια στιγμή ως υπόλοιπο τμήματα του κώνου με όγκο μικρότερο από την διαφορά $\beta - \alpha/3$ του 1/3 του όγκου του κυλίνδρου από τον όγκο του κώνου (Β10, Π1, σελ. 229).

Πράγματι αν θεωρήσουμε ως δύο μεγέθη τον όγκο του κώνου β και την διαφορά $\beta - \alpha/3$ και από το μεγαλύτερο από αυτά, δηλαδή το β αφαιρέσουμε τον όγκο των τριγωνικών πυραμίδων που είναι μεγαλύτερος από το μισό του όγκου του κώνου και από το υπόλοιπο συνεχίζουμε να αφαιρούμε συνεχώς τον όγκο τριγωνικών πυραμίδων που είναι μεγαλύτερος από το μισό του όγκου του θα προκύψει στο τέλος μέγεθος μικρότερο από την διαφορά $\beta - \alpha/3$.

Χάριν απλότητας υποθέτουμε ότι έχουν απομείνει τα τμήματα του κώνου με βάσεις τα τμήματα ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ και ΘΑ του κύκλου ΑΒΓΔ και συμβολίζουμε με β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6, β_7 και β_8 αντίστοιχα τους όγκους τους (στμ: που είναι ίσοι) και με γ τον όγκο της πυραμίδας με βάση ΑΕΒΖΓΗΔΘ και κορυφή την κορυφή του κώνου.

Τότε

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 + \beta_8 + \gamma = \beta > \frac{\alpha}{3}$$

και άρα ο όγκος της πυραμίδας αυτής είναι μεγαλύτερος από το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου.

Η πυραμίδα όμως αυτή έχει όγκο ίσο με το 1/3 του όγκου του πρίσματος με βάση ΑΕΒΖΓΗΔΘ και ύψος το ύψος του κυλίνδρου.

Άρα το πρίσμα βάσης ΑΕΒΖΓΗΔΘ που είναι ισοϋψές με τον κύλινδρο έχει όγκο μεγαλύτερο από τον όγκο του κυλίνδρου, κάτι που όμως είναι

αδύνατον καθώς το πρίσμα εμπεριέχεται στον κύλινδρο αυτό και άρα έχει μικρότερο όγκο.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο όγκος του κυλίνδρου δεν μπορεί να είναι μικρότερος από το τριπλάσιο του όγκου του κώνου, δηλαδή δεν μπορεί να ισχύει $\alpha < 3\beta$.

Τελικά καθώς δεν μπορεί να ισχύει $\alpha > 3\beta$ και $\alpha < 3\beta$ συμπεραίνουμε ότι θα είναι $\alpha = 3\beta$.

Συνεπώς, κάθε κώνος έχει όγκο ίσο με το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου που είναι ισοϋψής με τον κώνο και έχει την ίδια βάση με αυτόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 11 (776) *Ο λόγος των όγκων των ισοϋψών κώνων και κυλίνδρων είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών των βάσεών τους.*

Απόδειξη. Έστω ο κώνος ΑΛ και ο κώνος ΕΝ με βάσεις τους κύκλους ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ αντίστοιχα. Έστω ότι οι άξονές τους είναι οι ΚΛ και ΜΝ αντίστοιχα και οι διάμετροι των βάσεών τους είναι οι ΑΓ και ΕΗ αντίστοιχα.

Ισχυρίζομαι ότι $|\text{ΑΛ}|/|\text{ΕΝ}| = |\text{ΑΒΓΔ}|/|\text{ΕΖΗΘ}|$.

Αν δεν ισχύει η παραπάνω τότε θα είναι $|\text{ΑΒΓΔ}|/|\text{ΕΖΗΘ}| = |\text{ΑΛ}|/|\text{Ƶ}|$ με Ƶ να είναι ένα στερεό με όγκο $|\text{Ƶ}| < |\text{ΕΝ}|$ ή $|\text{Ƶ}| > |\text{ΕΝ}|$.

1η περίπτωση: Έστω ότι ο όγκος του στερεού Ƶ είναι μικρότερος από τον όγκο του κώνου ΕΝ, δηλαδή $|\text{Ƶ}| < |\text{ΕΝ}|$.

Έστω ακόμα το στερεό Ψ τέτοιο ώστε $|\text{ΕΝ}| = |\text{Ƶ}| + |\Psi|$.

Εγγράφουμε στον κύκλο ΕΖΗΘ το τετράγωνο ΕΖΗΘ που έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το μισό του εμβαδού του κύκλου ΕΖΗΘ (Β12, Π2, σελ. 390).

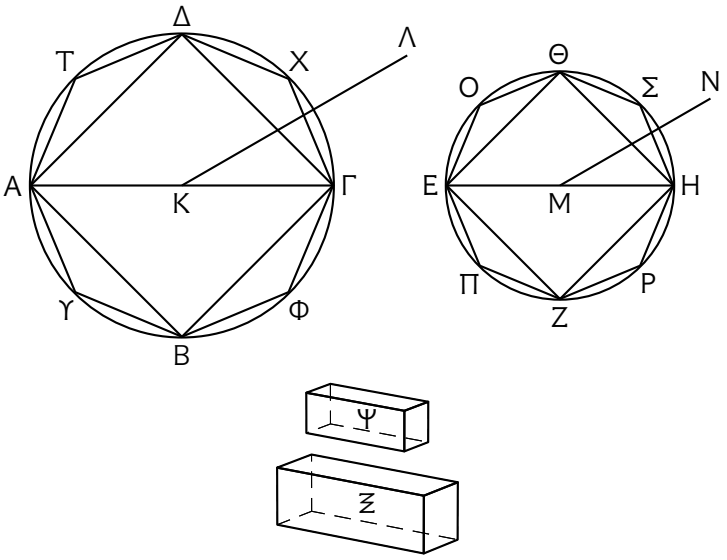
Με βάση το τετράγωνο ΕΖΗΘ ανυψώνουμε πυραμίδα που είναι ισοϋψής με τον κώνο. Τότε ο όγκος της είναι μεγαλύτερος από το μισό του όγκου του κώνου διότι αν περιγράψουμε περί τον κύκλο ΕΖΗΘ τετράγωνο και με βάση αυτό το περιγεγραμμένο στον κύκλο τετράγωνο ανυψώσουμε πυραμίδα ισοϋψή με τον κώνο τότε ο όγκος της εγγραφείσας πυραμίδας θα είναι ίσος με το μισό του όγκου της περιγραφείσας καθώς ο λόγος των όγκων τους είναι ίσος με τον λόγο των βάσεών τους (Β12, Π6, σελ. 399).

Επίσης ο όγκος του κώνου είναι μικρότερος από τον όγκο της περιγραφείσας πυραμίδας.

Στην συνέχεια διχοτομούμε τα τόξα $\overset{\frown}{\text{ΕΖ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΖΗ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΗΘ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΘΕ}}$ λαμβάνοντας τα σημεία τους Ο, Π, Ρ και Σ αντίστοιχα. Φέρνουμε και τις ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ και ΣΘ. Τότε το εμβαδόν καθενός από τα τρίγωνα ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ και ΗΣΘ είναι ίσο με το μισό του αντίστοιχου τμήματος του κύκλου ΕΖΗΘ. Με βάσεις τα τρίγωνα αυτά ανυψώνουμε πυραμίδες ισοϋψείς με

τον κώνο καθεμιά από τις οποίες έχει όγκο μεγαλύτερο από το μισό του αντίστοιχου τμήματος του κώνου.

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία αυτή συνεχώς (διχοτόμηση τόξων, κατασκευή τριγώνων, ύψωση τριγωνικών πυραμίδων με κορυφή την κορυφή του κώνου) λαμβάνουμε κάποια στιγμή ως υπόλοιπο τμήματα του κώνου με όγκο μικρότερο από τον όγκο του στερεού Ψ (Β10, ΠΙ, σελ. 229).



Πράγματι αν θεωρήσουμε ως δύο μεγέθη τον όγκο του κώνου ΑΛ και τον όγκο του στερεού Ψ και από το μεγαλύτερο από αυτά, δηλαδή το |ΑΛ| αφαιρέσουμε τον όγκο των τριγωνικών πυραμίδων που είναι μεγαλύτερος από το μισό του όγκου του κώνου και από το υπόλοιπο συνεχίζουμε να αφαιρούμε συνεχώς τον όγκο τριγωνικών πυραμίδων που είναι μεγαλύτερος από το μισό του όγκου του θα προκύψει στο τέλος μέγεθος μικρότερο από το |Ψ|.

Χάριν απλότητας για την κατασκευή του σχήματος υποθέτουμε ότι έχουν απομείνει τα τμήματα του κώνου με βάσεις τα τμήματα του κύκλου ΕΖΗΘ που αντιστοιχούν στα ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ και ΗΣΘ. Συμβολίζουμε με α_1, α_2, α_3 και α_4 αντίστοιχα τους όγκους τους (στμ: που είναι ίσοι) και με β τον όγκο της πυραμίδας με βάση ΘΟΕΠΖΡΗΣ και κορυφή την κορυφή του κώνου, οπότε έχουμε:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \beta = |\text{ΕΝ}| > |\text{Ζ}|$$

και άρα ο όγκος της πυραμίδας αυτής είναι μεγαλύτερος από τον |Ζ|.

Στην συνέχεια εγγράφουμε στον κύκλο ΑΒΓΔ το πολύγωνο ΔΤΑΥΒΦΓΧ όμοιο και ομοίως κείμενο με το ΘΟΕΠΖΡΗΣ και με βάση αυτό ανυψώνουμε

πυραμίδα ισοϋψή με τον κώνο ΑΛ. Τότε είναι

$$\frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΕΗ}^2} = \frac{|\Delta\text{ΤΑΥΒΦΓΧ}|}{|\Theta\text{ΟΕΠΖΡΗΣ}|}$$

ενώ ισχύει και ότι ο λόγος των τετραγώνων των διαμέτρων των κύκλων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών τους, δηλαδή

$$\frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΕΗ}^2} = \frac{|\text{ΑΒΓΔ}|}{|\text{ΕΖΗΘ}|}.$$

Οπότε

$$\frac{|\Delta\text{ΤΑΥΒΦΓΧ}|}{|\Theta\text{ΟΕΠΖΡΗΣ}|} = \frac{|\text{ΑΒΓΔ}|}{|\text{ΕΖΗΘ}|}.$$

Από την υπόθεση έχουμε όμως ότι

$$\frac{|\text{ΑΒΓΔ}|}{|\text{ΕΖΗΘ}|} = \frac{|\text{ΑΛ}|}{|\text{Ξ}|},$$

ενώ αν συμβολίσουμε με γ τον όγκο της πυραμίδας με βάση το ΔΤΑΥΒΦΓΧ και κορυφή το Λ, ο λόγος των όγκων γ και β των δύο πυραμίδων είναι ίσος με τον λόγο των όγκων των εμβαδών των βάσεών τους, δηλαδή

$$\frac{|\Delta\text{ΤΑΥΒΦΓΧ}|}{|\Theta\text{ΟΕΠΖΡΗΣ}|} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Συνδυάζοντας τις τρεις παραπάνω αναλογίες παίρνουμε:

$$\frac{|\text{ΑΛ}|}{|\text{Ξ}|} = \frac{\gamma}{\beta}$$

ή

$$\frac{|\text{ΑΛ}|}{\gamma} = \frac{|\text{Ξ}|}{\beta}.$$

Από την παραπάνω, καθώς $|\text{ΑΛ}| > \gamma$ (διότι ο κώνος ΑΛ περιέχει την πυραμίδα βάσης ΔΤΑΥΒΦΓΧ και κορυφής Λ), έπεται ότι $|\text{Ξ}| > \beta$.

Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς παραπάνω δείξαμε ότι $\beta > |\text{Ξ}|$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει $|\text{ΑΒΓΔ}|/|\text{ΕΖΗΘ}| = |\text{ΑΛ}|/|\text{Ξ}|$ με Ξ να είναι ένα στερεό με όγκο $|\text{Ξ}| < |\text{ΕΝ}|$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι δεν μπορεί να ισχύει ούτε

$$\frac{|\text{ΕΖΗΘ}|}{|\text{ΑΒΓΔ}|} = \frac{|\text{ΕΝ}|}{|\text{Ξ}|}$$

με Ξ στερεό με όγκο $|\text{Ξ}| < |\text{ΑΛ}|$.

2η περίπτωση: Έστω ότι ο όγκος του στερεού Ξ είναι μεγαλύτερος από τον όγκο του κώνου ΕΝ, δηλαδή $|\text{Ξ}| > |\text{ΕΝ}|$.

Ισχυρίζομαι ότι δεν μπορεί να ισχύει

$$\frac{|\text{ΑΒΓΔ}|}{|\text{ΕΖΗΘ}|} = \frac{|\text{ΑΛ}|}{|\text{Ξ}|} \quad \text{με} \quad |\text{Ξ}| > |\text{ΕΝ}|.$$

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η παραπάνω τότε είναι και

$$\frac{|\text{ΕΖΗΘ}|}{|\text{ΑΒΓΔ}|} = \frac{|\text{Ξ}|}{|\text{ΑΛ}|}.$$

Αλλά

$$\frac{|\Xi|}{|A\Lambda|} = \frac{|EN|}{|T|}$$

για ένα στερεό Τ με όγκο $|T| < |A\Lambda|$. Από τις δύο παραπάνω αναλογίες παίρνουμε

$$\frac{|EZH\Theta|}{|AB\Gamma\Delta|} = \frac{|EN|}{|T|} \quad \text{με} \quad |T| > |A\Lambda|.$$

Αυτό όμως είναι αδύνατον όπως έχει αποδειχτεί στη $1^{η}$ περίπτωση της απόδειξης.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει

$$\frac{|AB\Gamma\Delta|}{|EZH\Theta|} = \frac{|A\Lambda|}{|\Xi|} \quad \text{με} \quad |\Xi| > |EN|$$

και επομένως έπεται τελικά ότι

$$\frac{|AB\Gamma\Delta|}{|EZH\Theta|} = \frac{|A\Lambda|}{|EN|}.$$

Επειδή ο όγκος ενός κυλίνδρου είναι τριπλάσιος από τον όγκο του ισοϋψούς κώνου με την ίδια βάση (Β12, Π10, σελ. 404), η παραπάνω αναλογία γράφεται

$$\frac{|AB\Gamma\Delta|}{|EZH\Theta|} = \frac{|A\Lambda|}{|EN|} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2},$$

όπου με κ_1 και κ_2 έχουμε συμβολίσει τους όγκους των κυλίνδρων που είναι ισοϋψείς με τους κώνους ΑΛ και ΕΝ αντίστοιχα και έχουν τις ίδιες βάσεις με αυτούς.

Συνεπώς, ο λόγος των όγκων των ισοϋψών κώνων και κυλίνδρων είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών των βάσεών τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

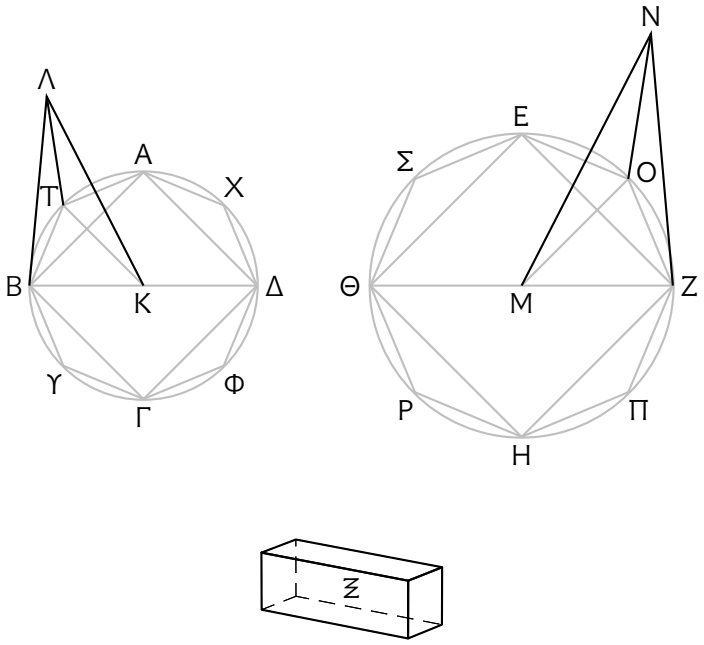
Πρόταση 12 (778) *Ο λόγος των όγκων των όμοιων κώνων ή κυλίνδρων είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των διαμέτρων των βάσεών τους.*

Απόδειξη. Έστω τα ζεύγη των όμοιων κώνων και κυλίνδρων με βάσεις τους κύκλους ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ αντίστοιχα. Έστω ακόμα ότι οι διάμετροι των βάσεών τους είναι αντίστοιχα οι ΒΔ και ΖΘ ενώ οι άξονες τους οι ΚΛ και ΜΝ αντίστοιχα.

Ισχυρίζομαι κατ' αρχήν ότι ο λόγος των όγκου του κώνου με βάση ΑΒΓΔ και κορυφή Λ και του όγκου του κώνου με βάση ΕΖΗΘ και κορυφή Ν είναι ίσος με τον λόγο των διαμέτρων των βάσεών τους, δηλαδή $|AB\Gamma\Delta\Lambda|/|EZH\Theta N| = B\Delta^3/Z\Theta^3$.

Αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η παραπάνω τότε θα είναι $|AB\Gamma\Delta\Lambda|/|\Xi| = B\Delta^3/Z\Theta^3$ με Ξ να είναι ένα στερεό με όγκο $|\Xi| < |EZH\Theta N|$ ή $|\Xi| > |EZH\Theta N|$.

$1^{η}$ περίπτωση: Έστω ότι ο όγκος του στερεού Ξ είναι μικρότερος από τον όγκο του κώνου ΕΖΗΘΝ, δηλαδή $|\Xi| < |EZH\Theta N|$.



Εγγράφουμε στον κύκλο ΕΖΗΘ το τετράγωνο ΕΖΗΘ (Β4, Π6, σελ. 115) που έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το μισό του εμβαδού του κύκλου ΕΖΗΘ.

Με βάση το ΕΖΗΘ ανυψώνουμε πυραμίδα με κορυφή την κορυφή του κώνου Ν η οποία έχει όγκο μεγαλύτερο από το μισό του όγκου του κώνου.

Στην συνέχεια διχοτομούμε τα τόξα $\overset{\frown}{ΕΖ}$, $\overset{\frown}{ΖΗ}$, $\overset{\frown}{ΗΘ}$ και $\overset{\frown}{ΘΕ}$ λαμβάνοντας τα Ο, Π, Ρ και Σ αντίστοιχα. Φέρνουμε και τις ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ και ΣΕ.

Τότε κάθε ένα από τα τρίγωνα ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ και ΘΣΕ έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το μισό του αντίστοιχου τμήματος του κύκλου ΕΖΗΘ ενώ καθεμιά από τις πυραμίδες που ανυψώνονται με βάσεις τα τρίγωνα αυτά και κορυφή την κορυφή του κώνου Ν έχει όγκο μεγαλύτερο από το μισό του αντίστοιχου τμήματος του κώνου.

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία αυτή συνεχώς (διχοτόμηση τόξων, κατασκευή τριγώνων, ύψωση τριγωνικών πυραμίδων με κορυφή την κορυφή του κώνου) λαμβάνουμε κάποια στιγμή ως υπόλοιπο τμήματα του κώνου με όγκο μικρότερο από τον όγκο του στερεού Ƶ δηλαδή από τον |Ƶ| (Β10, ΠΙ, σελ. 229).

Πράγματι αν θεωρήσουμε ως δύο μεγέθη τον όγκο του κώνου ΕΖΗΘΝ και τον όγκο του στερεού Ƶ και από το μεγαλύτερο από αυτά, δηλαδή το |ΕΖΗΘΝ| αφαιρέσουμε τον όγκο των τριγωνικών πυραμίδων που είναι μεγαλύτερος από το μισό του όγκου του κώνου και από το υπόλοιπο συνεχίζουμε να αφαιρούμε συνεχώς τον όγκο τριγωνικών πυραμίδων που είναι μεγαλύτερος από το μισό του όγκου των τμημάτων του κώνου θα

προκύψει στο τέλος μέγεθος μικρότερο από την διαφορά του όγκου του Ζ από τον κώνο ΕΖΗΘΝ, δηλαδή την $|EZH\Theta N| - |Z|$.

Αν συμβολίσουμε με α τον όγκο του απομένοντος τμήματος του κώνου και με β τον όγκο της πυραμίδας με βάση ΕΟΖΠΗΡΘΣ και κορυφή το Ν τότε έχουμε $\alpha + \beta = |EZH\Theta N|$ ή $\alpha = |EZH\Theta N| - \beta$ οπότε από τα παραπάνω παίρνουμε $|EZH\Theta N| - \beta < |EZH\Theta N| - |Z|$ ή $\beta > |Z|$.

Εγγράφουμε και στον κύκλο ΑΒΓΔ το πολύγωνο ΑΤΒΥΓΦΔΧ όμοιο και ομοίως κείμενο με το ΕΟΖΠΗΡΘΣ και με βάση το ΑΤΒΥΓΦΔΧ ανυψώνουμε πυραμίδα με κορυφή την κορυφή Λ του κώνου με βάση τον κύκλο ΑΒΓΔ.

Έστω ΛΤΒ ένα από τα τρίγωνα που περιέχουν την πυραμίδα με βάση ΑΤΒΥΓΦΔΧ και κορυφή το Λ. Έστω ακόμα ΝΖΟ ένα από τα τρίγωνα που περιέχουν την πυραμίδα με βάση ΕΟΖΠΗΡΘΣ και κορυφή το Ν. Φέρνουμε τις ΚΤ και ΜΟ.

Τότε οι κώνοι ΑΒΓΔΛ και ΕΖΗΘΝ είναι όμοιοι και άρα ο λόγος των εμβαδών των βάσεών τους είναι ίσος με τον λόγο των αξόνων (Β11, Ορ24, σελ. 348). Δηλαδή

$$\frac{|B\Delta|}{|Z\Theta|} = \frac{K\Lambda}{MN}.$$

Όμως

$$\frac{|B\Delta|}{|Z\Theta|} = \frac{BK}{ZM},$$

και άρα

$$\frac{BK}{ZM} = \frac{K\Lambda}{MN} \quad \text{ή} \quad \frac{BK}{K\Lambda} = \frac{ZM}{MN}.$$

Έτσι στα τρίγωνα ΒΚΛ και ΖΜΝ οι πλευρές περί τις ίσες γωνίες $\widehat{BK\Lambda} = \widehat{ZMN}$ είναι ανάλογες και επομένως τα τρίγωνα ΒΚΛ και ΖΜΝ είναι όμοια.(Β6, Ορ1, σελ. 141). Επειδή πάλι

$$\frac{BK}{KT} = \frac{ZM}{MO}$$

οι οποίες είναι οι πλευρές των ίσων γωνιών $\widehat{BKT} = \widehat{ZMO}$ (καθώς ό,τι μέρος των τεσσάρων ορθών περί το Κ είναι η $\widehat{BKT}$ το ίδιο μέρος των τεσσάρων ορθών περί το Μ είναι και η $\widehat{ZMO}$) έπεται ότι τα τρίγωνα ΒΚΤ και ΖΜΟ είναι όμοια. Τώρα επειδή $BK = K\Lambda$ και $ZM/MN = BK/KT$, ενώ $ZM/OM = TK/K\Lambda$ έπεται ότι

$$\frac{TK}{K\Lambda} = \frac{OM}{MN}.$$

Τότε όμως οι περί τις ίσες γωνίες $\widehat{TK\Lambda} = \widehat{OMN}$ είναι ανάλογες και άρα τα τρίγωνα ΛΚΤ και ΝΜΟ είναι όμοια (Β6, Ορ1, σελ. 141).

Επειδή τα ΛΚΒ και ΝΜΖ είναι όμοια είναι $\Lambda B/BK = NZ/ZM$, ενώ από την ομοιότητα των ΒΚΤ και ΖΜΟ ισχύει αντίστοιχα και ότι $KB/BT = MZ/ZO$ οπότε από δι' ίσου (Β5, Π22, σελ. 137) παίρνουμε $\Lambda B/BT = NZ/ZO$. Από την ομοιότητα των ΛΤΚ και ΝΟΜ έχουμε πάλι ότι $\Lambda T/TK =$

ΝΟ/ΟΜ ενώ επειδή και τα ΤΚΒ και ΟΜΖ είναι όμοια ισχύει αντίστοιχα ότι ΚΤ/ΤΒ = ΜΟ/ΟΖ.

Από τις δύο τελευταίες αναλογίες προκύπτει δι' ίσου ότι ΛΤ/ΤΒ = ΝΟ/ΟΖ. Επειδή όμως ΤΒ/ΒΛ = ΖΟ/ΖΝ και πάλι από την δια του ίσου όρου αναλογία παίρνουμε

$$\frac{\Lambda T}{B\Lambda} = \frac{NO}{ZN}.$$

Τότε όμως οι πλευρές των ΛΤΒ και ΝΟΖ είναι ανάλογες και άρα αυτά είναι ισογώνια (Β6, Π5, σελ. 145) και άρα είναι όμοια (Β6, Ορ1, σελ. 141).

Συνεπώς η πυραμίδα με βάση ΒΚΤ και κορυφή το Λ είναι όμοια με την πυραμίδα με βάση ΖΜΟ και κορυφή το Ν καθώς αυτές περιέχονται στο ίδιο πλήθος όμοιων επιπέδων (Β11, Ορ9, σελ. 346).

Ο λόγος όμως των όγκων δύο όμοιων πυραμίδων με τριγωνικές βάσεις είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των ομόλογων πλευρών τους (Π8, σελ. 353), δηλαδή

$$\frac{|B\Kappa T\Lambda|}{|ZMON|} = \frac{B\Kappa^3}{ZM^3}.$$

Με όμοιο τρόπο φέρνοντας από τα Α, Χ, Δ, Φ, Γ και Υ τα ευθύγραμμα τμήματα προς το Κ και από τα Ε, Σ, Θ, Ρ, Η και Π τα ευθύγραμμα τμήματα προς το Μ και ανυψώνοντας στην συνέχεια τις πυραμίδες με βάσεις τα τρίγωνα και κορυφές τις κορυφές των κώνων Λ και Ν παίρνουμε ότι ο λόγος των όγκων των ομοταγών (αντίστοιχων) πυραμίδων είναι ίσος με τον λόγο $B\Kappa^3/ZM^3$ που είναι ίσος με τον λόγο $B\Delta^3/Z\Theta^3$.

Δηλαδή

$$\begin{aligned}\frac{|B\Kappa T\Lambda|}{|ZMON|} &= \frac{|\Kappa TA\Lambda|}{|EOMN|} = \frac{|\Kappa A\Chi\Lambda|}{|EM\Sigma N|} = \frac{|\Chi\Kappa\Delta\Lambda|}{|\Sigma MBN|} \\ &= \frac{|\Delta\Kappa\Phi\Lambda|}{|BMPN|} = \frac{|\Phi\Kappa\Gamma\Lambda|}{|PMHN|} = \frac{|\Gamma\Kappa\Upsilon\Lambda|}{|HM\Pi N|} = \frac{|\Upsilon\Kappa B\Lambda|}{|M\Pi ZN|} \\ &= \frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}\end{aligned}$$

και άρα παίρνουμε

$$\frac{\begin{array}{c}|B\Kappa T\Lambda| + |\Kappa TA\Lambda| + |\Kappa A\Chi\Lambda| + |\Chi\Kappa\Delta\Lambda| \\ + |\Delta\Kappa\Phi\Lambda| + |\Phi\Kappa\Gamma\Lambda| + |\Gamma\Kappa\Upsilon\Lambda| + |\Upsilon\Kappa B\Lambda|\end{array}}{\begin{array}{c}|ZMON| + |EOMN| + |EM\Sigma N| + |\Sigma MBN| \\ + |BMPN| + |PMHN| + |HM\Pi N| + |M\Pi ZN|\end{array}} = \frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}$$

(Β5, Π12, σελ. 133) ή

$$\frac{|ATBY\Gamma\Phi\Delta\Chi\Lambda|}{|EOZ\Pi HP\Theta\Sigma EN|} = \frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}.$$

Έχουμε όμως υποθέσει ότι ισχύει

$$\frac{|AB\Gamma\Delta\Lambda|}{|\Xi|} = \frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}$$

με $|\Ze| < |\text{ΕΖΗΘΝ}|$, οπότε

$$\frac{|\text{ΑΤΒΥΓΦΔΧΛ}|}{|\text{ΕΟΖΠΗΡΘΣΕΝ}|} = \frac{|\text{ΑΒΓΔΛ}|}{|\Ze|},$$

από όπου προκύπτει

$$\frac{|\text{ΑΒΓΔΛ}|}{|\text{ΑΤΒΥΓΦΔΧΛ}|} = \frac{|\Ze|}{|\text{ΕΟΖΠΗΡΘΣΕΝ}|}.$$

Επίσης, $|\text{ΑΒΓΔΛ}| > |\text{ΑΤΒΥΓΦΔΧΛ}|$ καθώς ο κώνος ΑΒΓΔΛ περιέχει την πυραμίδα ΑΤΒΥΓΦΔΧΛ και άρα από την παραπάνω αναλογία έπεται $|\Ze| > |\text{ΕΟΖΠΗΡΘΣΝ}|$ που όμως είναι αδύνατον καθώς έχουμε αποδείξει παραπάνω ότι $|\Ze| < |\text{ΕΟΖΠΗΡΘΣΝ}|$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει

$$\frac{|\text{ΑΒΓΔΛ}|}{|\Ze|} = \frac{\text{ΒΔ}^3}{\text{ΖΘ}^3} \quad \text{με} \quad |\Ze| < |\text{ΕΖΗΘΝ}|.$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι είναι αδύνατον να ισχύει και

$$\frac{|\text{ΕΖΗΘΝ}|}{|\Ze|} = \frac{\text{ΖΘ}^3}{\text{ΒΔ}^3} \quad \text{με} \quad |\Ze| > |\text{ΑΒΓΔΛ}|.$$

1η περίπτωση: Έστω ότι ο όγκος του στερεού Ζ είναι μεγαλύτερος από τον όγκο του κώνου ΕΖΗΘΝ, δηλαδή $|\Ze| > |\text{ΕΖΗΘΝ}|$.

Ισχυρίζομαι ότι δεν μπορεί να ισχύει

$$\frac{|\text{ΑΒΓΔΛ}|}{|\Ze|} = \frac{\text{ΒΔ}^3}{\text{ΖΘ}^3}$$

με Ζ στερεό όγκου $|\Ze| > |\text{ΕΖΗΘΝ}|$.

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η παραπάνω τότε θα είναι και

$$\frac{|\Ze|}{\text{ΑΒΓΔΛ}} = \frac{\text{ΖΘ}^3}{\text{ΒΔ}^3}$$

(Πόρισμα, Β5, Π7, σελ. 131).

Όμως

$$\frac{|\Ze|}{|\text{ΑΒΓΔΛ}|} = \frac{|\text{ΕΖΗΘΝ}|}{|\text{Τ}|}$$

με Τ στερεό όγκου $|\text{Τ}| < |\text{ΑΒΓΔΛ}|$ (Λήμμα Π2, σελ. 390).

Οπότε θα είναι και

$$\frac{|\text{ΕΖΗΘΝ}|}{|\text{Τ}|} = \frac{\text{ΖΘ}^3}{\text{ΒΔ}^3} \quad \text{με} \quad |\text{Τ}| < |\text{ΑΒΓΔΛ}|,$$

κάτι που όμως είναι αδύνατον όπως έχει αποδειχθεί στο πρώτο μέρος της απόδειξης.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν μπορεί να ισχύει ούτε

$$\frac{|\text{ΑΒΓΔΛ}|}{|\Ze|} = \frac{\text{ΒΔ}^3}{\text{ΖΘ}^3}$$

με Ζ στερεό όγκου $|\Ze| > |\text{ΕΖΗΘΝ}|$.

Έτσι, έπεται τελικά ότι

$$\frac{|\mathrm{AB\Gamma\Delta\Lambda}|}{|\mathrm{EZH\Theta N}|} = \frac{\mathrm{B\Delta}^3}{\mathrm{Z\Theta}^3}.$$

Ο λόγος των όγκων των κώνων όμως είναι ίσος με τον λόγο των όγκων των κυλίνδρων που είναι ισοϋψείς με τους κώνους και έχουν τις ίδιες βάσεις με αυτούς, διότι ένας κύλινδρος που είναι ισοϋψής με έναν κώνο και έχει την ίδια βάση με αυτόν έχει όγκο ίσο με το τριπλάσιο του όγκου του κώνου. Έτσι και ο λόγος των όγκων των κυλίνδρων είναι ίσος με $\mathrm{B\Delta}^3/\mathrm{Z\Theta}^3$.

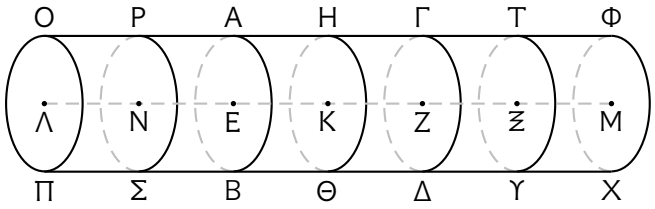
Συνεπώς, ο λόγος των όγκων των όμοιων κώνων και κυλίνδρων που είναι ισοϋψείς με τους κώνους και έχουν τις ίδιες βάσεις με αυτούς, είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των διαμέτρων των βάσεών τους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 13 (781) *Αν ένας κύλινδρος τμηθεί από ένα επίπεδο που είναι παράλληλο στις βάσεις του τότε ο λόγος των όγκων των δύο κυλίνδρων στους οποίους διαιρείται ο αρχικός κύλινδρος είναι ίσος με τον λόγο των αξόνων τους.*

Απόδειξη. Έστω ο κύλινδρος ΑΔ που τέμνεται απότο επίπεδο ΗΘ το οποίο είναι παράλληλο στις βάσεις ΑΒ και ΓΔ του κυλίνδρου. Έστω ακόμα ότι το ΗΘ τέμνει τον άξονα ΑΔ του κυλίνδρου ΑΔ στο Κ. Ισχυρίζομαι ότι $|\mathrm{BH}|/|\mathrm{H\Delta}| = \mathrm{EK}/\mathrm{KZ}$.

Προεκτείνουμε τον άξονα ΕΖ και προς τις δύο κατευθύνσεις παίρνοντας ν ίσα με το ΕΚ τμήματα προς την μεριά του Ε και μ ίσα με το ΖΚ τμήματα προς την μεριά του Ζ.

Χάριν απλότητας για την κατασκευή του σχήματος υποθέτουμε ότι $\mu = \nu = 2$, οπότε έχουν ληφθεί τα $\mathrm{EN} = \mathrm{N\Lambda} = \mathrm{EK}$ προς το Ε και τα $\mathrm{Z\dot{Z}} = \dot{\mathrm{Z}}\mathrm{M} = \mathrm{ZK}$ προς το Ζ.



Θεωρούμε τον κύλινδρο ΟΧ με άξονα ΛΜ και βάσεις τους κύκλους διαμέτρων ΟΠ και ΦΧ.

Από τα σημεία Ν και Ż φέρνουμε τα επίπεδα που είναι παράλληλα στα ΑΒ και ΓΔ και τις βάσεις του κυλίνδρου ΟΧ. Τότε οι τομές των επιπέδων αυτών με τον κύλινδρο είναι οι κύκλοι με κέντρα τα Ν και Ż αντίστοιχα.

Επειδή $\Lambda\mathrm{N} = \mathrm{NE} = \mathrm{EK}$ έπεται ότι οι όγκοι των κυλίνδρων ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ έχουν ίσους λόγους προς τα εμβαδά των βάσεών τους (ΠΙΙ, σελ. 408). Καθώς οι βάσεις έχουν ίσα εμβαδά έπεται ότι οι κύλινδροι ΠΡ, ΡΒ και ΒΗ

έχουν ίσους όγκους και μάλιστα όσες φορές είναι μεγαλύτερος ο ΚΛ από τον ΕΚ τόσες φορές είναι μεγαλύτερος ο όγκος του κυλίνδρου ΠΗ από τον όγκο του κυλίνδρου ΗΒ, δηλαδή $|\Pi H| = 3 \cdot |HB|$.

Για τους ίδιους λόγους όσες φορές είναι μεγαλύτερος ο ΜΚ από τον ΚΖ τόσες φορές είναι μεγαλύτερος και ο όγκος του κυλίνδρου ΧΗ από τον όγκο του κυλίνδρου ΗΔ, δηλαδή $|XH| = 3 \cdot |H\Delta|$.

Επίσης αν $K\Lambda = KM$ τότε $|\Pi H| = |HX|$ ενώ αν $K\Lambda > \Lambda M$ θα είναι $|\Pi H| > |HX$ και αν $K\Lambda < \Lambda M$ τότε $|\Pi H| < |HX|$.

Επειδή κατασκευάστηκαν ν κύλινδροι προς το Ε και μ κύλινδροι προς το Ζ με $K\Lambda = \mu \cdot EK$ και $KM = \nu \cdot KZ$ θα είναι και $|\Pi H| = \mu \cdot |BH|$ και $|HX| = \nu \cdot |H\Delta|$ καθώς τα ΚΛ και ΚΜ είναι πολλαπλάσια των ΕΚ και ΚΖ αντίστοιχα ενώ οι όγκοι $|\Pi H$ και $|HX|$ είναι ίσα πολλαπλάσια των $|BH|$ και $|H\Delta|$ αντίστοιχα.

Συνεπώς:

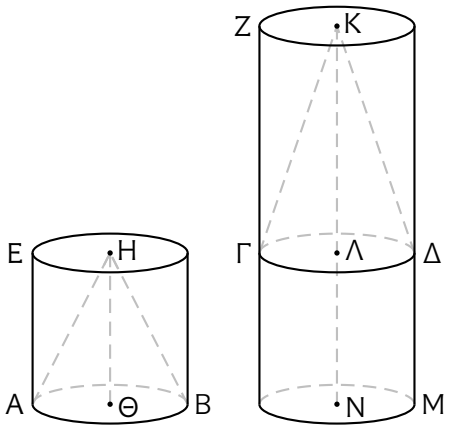
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{είτε ισχύει } \mu \cdot EK > \nu \cdot KZ \text{ και } \mu \cdot |BH| > \nu \cdot |H\Delta| \\ \text{είτε ισχύει } \mu \cdot EK = \nu \cdot KZ \text{ και } \mu \cdot |BH| = \nu \cdot |H\Delta| \\ \text{είτε ισχύει } \mu \cdot EK < \nu \cdot KZ \text{ και } \mu \cdot |BH| < \nu \cdot |H\Delta| \end{array} \right\}.$$

Τότε όμως,

$$\frac{EK}{KZ} = \frac{|BH|}{|H\Delta|}$$

(Β5, Ορ5, σελ. 126) που είναι η αποδεικτέα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 14 (782) *Ο λόγος των όγκων των κώνων ή των κυλίνδρων που έχουν ίσες βάσεις είναι ίσος με τον λόγο των υψών τους.*



Απόδειξη. Έστω οι κύλινδροι ΕΒ και ΖΔ που έχουν βάσεις τους ίσους κύκλους διαμέτρων ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Ισχυρίζομαι ότι $|EB|/|Z\Delta| = H\Theta/K\Lambda$.

Προεκτείνουμε τον άξονα ΚΛ προς το Λ κατά τμήμα $\Lambda N = H\Theta$ και θεωρούμε τον κύλινδρο ΓΜ με άξονα ΛΝ.

Καθώς οι κύλινδροι ΕΒ και ΓΜ έχουν ίδια ύψη έπεται ότι ο λόγος των όγκων τους είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών των βάσεών τους (ΠΙΙ, σελ. 408). Επειδή οι βάσεις τους είναι ίσες έπεται ότι $|EB| = |\Gamma M|$.

Επειδή τώρα ο κύλινδρος ΖΜ έχει τμηθεί από το επίπεδο ΓΔ που είναι παράλληλο προς τα επίπεδα των βάσεών του, έπεται ότι

$$\frac{|\Gamma M|}{|Z\Delta|} = \frac{\Lambda N}{K\Lambda}$$

(Π13, σελ. 416). Όμως $|\Gamma M| = |EB|$ και $\Lambda N = H\Theta$ οπότε

$$\frac{|EB|}{|Z\Delta|} = \frac{H\Theta}{K\Lambda}.$$

Επίσης,

$$\frac{|EB|}{|Z\Delta|} = \frac{|ABH|}{|\Gamma\Delta K|}$$

(Π10, σελ. 404) οπότε

$$\frac{|EB|}{|Z\Delta|} = \frac{|ABH|}{|\Gamma\Delta K|} = \frac{H\Theta}{K\Lambda},$$

που είναι η αποδεικτέα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 15 (782) *Τα εμβαδά των βάσεων των ισοδύναμων κώνων* (*ή κυλίνδρων*) *είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη τους.*

Ισχύει και το αντίστροφο: αν τα εμβαδά των βάσεων δύο κώνων (*ή κυλίνδρων*) *είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη τους τότε οι κώνοι* (*ή κύλινδροι*) *αυτοί είναι ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. (Ευθύ) Έστω οι ισοδύναμοι κώνοι ΑΒΓΔΛ και ΕΖΗΘΜ και οι ισοδύναμοι κύλινδροι ΑΞ και ΕΟ με βάσεις τους κύκλους ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ αντίστοιχα. Έστω ακόμα ΑΓ και ΕΗ οι διάμετροι των δύο βάσεων και ΚΛ και ΜΝ οι άξονες των κώνων (και των κυλίνδρων) που είναι και τα ύψη τους.

Ισχυρίζομαι ότι τα εμβαδά των βάσεων των κώνων (και των κυλίνδρων) είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη τους, δηλαδή $|ABΓΔ|/|EZHΘ| = MN/K\Lambda$.

1η περίπτωση: $K\Lambda = MN$.

Είναι $|AΞ| = |EO|$ οπότε ο λόγος των όγκων των κώνων (και των κυλίνδρων) είναι ίσος με τον λόγο των εμβαδών των βάσεών τους (Π11, σελ. 408), δηλαδή

$$\frac{|ABΓΔ|}{|EZHΘ|} = \frac{|AΞ|}{|EO|}.$$

Από την παραπάνω αναλογία καθώς $|AΞ| = |EO|$ έπεται ότι $|ABΓΔ| = |EZHΘ|$ και άρα

$$\frac{|ABΓΔ|}{|EZHΘ|} = 1 = \frac{MN}{K\Lambda},$$

δηλαδή τα εμβαδά των βάσεων των κώνων (και των κυλίνδρων) είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη τους.

2η περίπτωση: $K\Lambda \neq MN$.

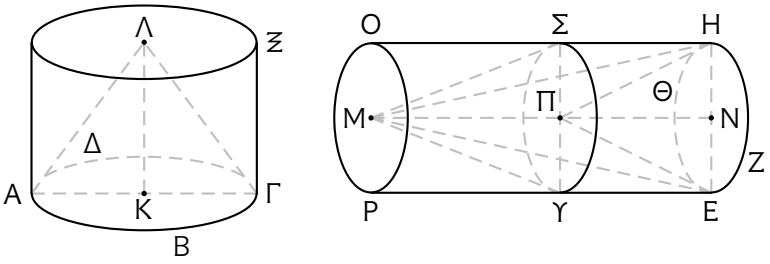
Έστω ΜΝ > ΛΚ. Αφαιρούμε από το ΜΝ το ΠΝ = ΚΛ και έστω ότι το επίπεδο ΤΥΣ που διέρχεται από το Π και που είναι παράλληλο στα επίπεδα των κύκλων ΕΖΗΘ και ΡΟ τέμνει τον κύλινδρο ΕΟ.

Θεωρούμε τον κύλινδρο ΕΣ με ύψος ΝΠ. Τότε $|A\Xi|/|E\Sigma| = |EO|/|E\Sigma|$ (Β5, Π7, σελ. 131). Οι κύλινδροι ΑΞ και ΕΣ όμως είναι ισοϋψείς και άρα $|A\Xi|/|E\Sigma| = |AB\Gamma\Delta|/|EZH\Theta|$ (Π11, σελ. 408). Επιπλέον ισχύει και ότι $|EO|/|E\Sigma| = MN/\Pi N$, καθώς ο κύλινδρος ΕΟ έχει τμηθεί από το επίπεδο ΤΥΣ που είναι παράλληλο στα επίπεδα των βάσεών του (Π13, σελ. 440).

Από τις τρεις παραπάνω αναλογίες, καθώς ΠΝ = ΚΛ παίρνουμε

$$\frac{|AB\Gamma\Delta|}{|EZH\Theta|} = \frac{MN}{\Pi N} = \frac{MN}{K\Lambda}.$$

Άρα τα εμβαδά των βάσεων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ των κώνων (και των κυλίνδρων) είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη τους.



(Αντίστροφο) Έστω τώρα ότι τα εμβαδά των βάσεων των κυλίνδρων ΑΞ και ΕΟ είναι αντιστρόφως ανάλογα με τα ύψη ΚΛ και ΜΝ των κυλίνδρων αντίστοιχα. Δηλαδή έστω ότι ισχύει $|AB\Gamma\Delta|/|EZH\Theta| = MN/K\Lambda$.

Ισχυρίζομαι ότι οι κύλινδροι ΑΞ και ΕΟ είναι ισοδύναμοι δηλαδή ότι $|A\Xi| = |EO|$.

Εργαζόμαστε όπως προηγουμένως λαμβάνοντας στη ΜΝ τμήμα ΠΝ = ΚΛ και έστω το επίπεδο που περνάει από το Π και είναι παράλληλο στα επίπεδα των βάσεων ΕΖΗΘ και ΡΟ του κυλίνδρου ΕΟ.

Τότε $|AB\Gamma\Delta|/EZH\Theta| = MN/\Pi N$. Αλλά $|AB\Gamma\Delta|/EZH\Theta| = |A\Xi|/|E\Sigma|$ καθώς οι κύλινδροι ΑΞ και ΕΣ είναι ισοϋψείς (Π11, σελ. 408).

Επιπλέον $MN/\Pi N = |EO|/|E\Sigma|$ (Π13, σελ. 416) και επομένως από τις τρεις τελευταίες αναλογίες παίρνουμε

$$\frac{|A\Xi|}{|E\Sigma|} = \frac{|EO|}{|E\Sigma|},$$

οπότε $|A\Xi| = |EO|$.

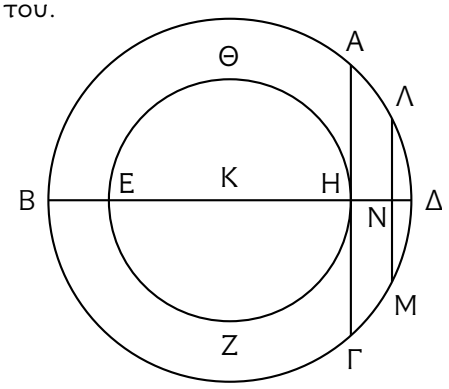
Ο ίδιος συλλογισμός ισχύει και για την περίπτωση των κώνων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 16 (Κατασκευή) (783) *Σε ομόκεντρους κύκλους να εγγραφεί στον μεγαλύτερο από αυτούς πολύγωνο ισόπλευρο και αρτιόπλευρο* (στμ: με άρτιο πλήθος πλευρών) *που δεν «αγγίζει» στον μικρότερο κύκλο* (στμ: ούτε εφάπτεται ούτε τέμνει).

Υλοποίηση: Έστω οι δοθέντες ομόκεντροι κύκλοι ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ που έχουν κοινό κέντρο το Κ. Πρέπει να εγγραφεί στον ΑΒΓΔ, που είναι ο μεγαλύτερος από τους δύο κύκλους, πολύγωνο ισόπλευρο και αρτιόπλευρο που δεν αγγίζει στον κύκλο ΕΖΗΘ.

Φέρνουμε την διάμετρο ΒΚΔ του ΑΒΓΔ που τέμνει τον ΕΖΗΘ στα Ε και Η. Από το Η φέρνουμε την ΗΑ κάθετη στην ΒΔ. Η ΗΑ προεκτεινόμενη προς το Η τέμνει τον ΑΒΓΔ στο Γ οπότε η ΑΓ εφάπτεται στον ΕΖΗΘ.

Διχοτομούμε το τόξο $\overset{\frown}{BA\Delta}$ και στην συνέχεια διχοτομούμε ξανά το μισό του.



Επαναλαμβάνοντας συνεχώς την διαδικασία της διχοτόμησης των τόξων που προκύπτουν κάποια στιγμή θα απομείνει τόξο μικρότερο του $\overset{\frown}{A\Delta}$ (Β10, Π1, σελ. 229).

Έστω $\overset{\frown}{\Lambda\Delta}$ το τόξο που απομένει στο τέλος. Από το Λ φέρνουμε την ΛΝ κάθετη στην ΒΔ που προεκτεινόμενη προς το Ν τέμνει τον ΑΒΓΔ στο Μ. Φέρνουμε και τις ΛΔ και ΔΝ. Τότε $\overset{\frown}{\Lambda\Delta} = \overset{\frown}{\Delta N}$ (Β3, Π3, σελ. 82 και Β1, Π4, σελ. 23). Επειδή ΛΝ // ΑΓ και η ΑΓ εφάπτεται στον ΕΖΗΘ, έπεται ότι η ΛΝ δεν εφάπτεται στον ΕΖΗΘ. Κατά μείζονα λόγο δεν εφάπτονται στον ΕΖΗΘ ούτε οι ΛΔ και ΔΝ.

Εναρμόζοντας τώρα διαδοχικά στον ΑΒΓΔ χορδές ίσες με ΛΔ θα εγγραφεί στον ΑΒΓΔ πολύγωνο ισόπλευρο και αρτιόπλευρο που δεν εφάπτεται στον ΕΖΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρόταση 17 (Κατασκευή) (784) *Σε δυο σφαίρες με το ίδιο κέντρο να εγγραφεί στην μεγαλύτερη από αυτές στερεό πολύεδρο που δεν «αγγίζει» την επιφάνεια της μικρότερης σφαίρας* (στμ: ούτε εφάπτεται ούτε τέμνει).

Υλοποίηση: Θεωρούμε δυο σφαίρες με κοινό κέντρο το Α. Πρέπει να εγγραφεί στην μεγαλύτερη από αυτές ένα στερεό πολύεδρο που δεν αγγίζει την επιφάνεια της μικρότερης σφαίρας.

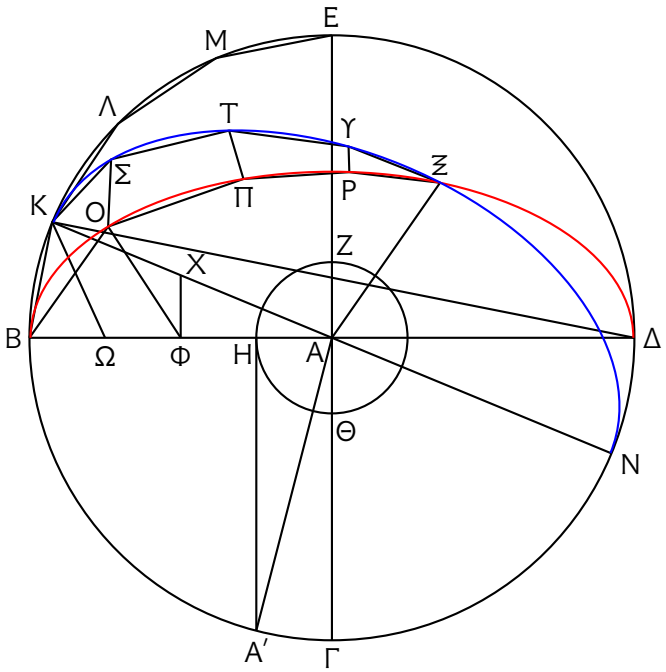
Αν θεωρήσουμε ότι οι σφαίρες τέμνονται από ένα επίπεδο στο οποίο βρίσκεται και το κέντρο τους τότε οι τομές θα είναι κύκλοι καθώς μια σφαίρα δημιουργείται από την στροφή ενός ημικυκλίου περί την ακίνητη διάμετρό του. Έτσι, σε οποιαδήποτε θέση και αν θεωρήσουμε το ημικύκλιο το επίπεδο στο οποίο αυτό βρίσκεται θα σχηματίσει στην επιφάνεια της σφαίρας κύκλο.

Ο κύκλος αυτός είναι ένας από τους μέγιστους κύκλους διότι η διάμετρός του (που είναι η διάμετρος της σφαίρας και του ημικυκλίου) είναι ένα από τα μεγαλύτερα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα στον κύκλο και την επιφάνεια της σφαίρας.

Έστω λοιπόν ότι γράφονται στην μεγαλύτερη σφαίρα ο κύκλος ΒΓΔΕ και στην μικρότερη ο κύκλος ΖΗΘ.

Φέρνουμε τις κάθετες διαμέτρους ΒΔ και ΓΕ των δύο ομόκεντρων αυτών κύκλων και εγγράφουμε στον ΒΓΔΕ, που είναι ο μεγαλύτερος, ένα πολύγωνο ισόπλευρο και αρτιόπλευρο (ΠΙ6, σελ. 420) μη εφαπτόμενο στον μικρότερο κύκλο ΖΗΘ.

Έστω ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ και ΜΕ οι πλευρές του πολυγώνου που βρίσκονται στο τεταρτημόριο $\widehat{\text{ΒΕ}}$.



Φέρνουμε την ΚΑ της οποίας η προέκταση τέμνει τον ΒΓΔΕ στο Ν και από το Α ανυψώνουμε την κάθετη στο επίπεδο του κύκλου ΒΓΔΕ η οποία τέμνει την επιφάνεια της σφαίρας στο Ϛ.

Από τις ΑϚ, ΒΔ και τις ΑϚ, ΚΝ διέρχονται επίπεδα που σχηματίζουν μέγιστους κύκλους στην επιφάνεια της σφαίρας και έστω τα ημικύκλια ΒϚΔ και ΚϚΝ διαμέτρων ΒΔ και ΚΝ αντίστοιχα.

Επειδή τώρα η ϚΑ είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου ΒΓΔΕ τότε και κάθε άλλο επίπεδο επί του οποίου κείται η ϚΑ είναι κάθετο στο επίπεδο του κύκλου ΒΓΔΕ (ΒΙΙ, ΠΙ8, σελ. 362). Έτσι τα ημικύκλια ΒϚΔ και ΚϚΝ είναι κάθετα στο επίπεδο του κύκλου ΒΓΔΕ.

Ακόμα είναι $\overset{\frown}{BE\Delta} = \overset{\frown}{B\Zeta\Delta} = \overset{\frown}{K\Zeta N}$ καθώς οι διάμετροί τους είναι ίσες με ΒΔ = ΚΝ (Β3, Ορ1, σελ. 79) και επομένως είναι ίσα και τα αντίστοιχα τεταρτημόρια, δηλαδή $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{B\Zeta} = \overset{\frown}{K\Zeta}$.

Άρα όσες πλευρές του πολυγώνου βρίσκονται στο τεταρτημόριο $\overset{\frown}{BE}$ το ίδιο πλήθος πλευρών βρίσκεται στα τεταρτημόρια $\overset{\frown}{B\Zeta}$ και $\overset{\frown}{K\Zeta}$. Οι πλευρές αυτές είναι ίσες με τις ΒΚ = ΚΛ = ΛΜ = ΜΕ.

Εγγράφουμε τις ίσες αυτές πλευρές του πολυγώνου ως εξής: τις ΒΟ = ΟΠ = ΠΡ = Ρ$\Zeta$ στο τεταρτημόριο $\overset{\frown}{B\Zeta}$ και τις ΚΣ = ΣΤ = ΤΥ = Υ$\Zeta$ στο τεταρτημόριο $\overset{\frown}{K\Zeta}$. Στην συνέχεια φέρνουμε τις ΣΟ, ΤΠ και ΥΡ ενώ από τα Ο και Σ φέρνουμε και τις κάθετες προς το επίπεδο του κύκλου ΒΓΔΕ οι οποίες καταλήγουν στα σημεία Φ και Χ των ΒΔ και ΚΝ αντίστοιχα καθώς τα επίπεδα των $B\Zeta\Delta$ και $K\Zeta N$ είναι κάθετα στο επίπεδο του κύκλου ΒΓΔΕ.

Επειδή τώρα στα ίσα ημικύκλια $\overset{\frown}{B\Zeta\Delta}$ και $\overset{\frown}{K\Zeta N}$ ελήφθησαν ίσες χορδές (Β3, Π28, σελ. 101) οι ΒΟ = ΚΣ και οι ΟΦ ⊥ ΣΧ θα είναι και ΟΦ = ΣΧ και ΒΦ = ΚΧ (Β3, Π27, σελ. 101 και Β3, Π26, σελ. 100).

Καθώς ΒΑ = ΚΑ έπεται ότι ΒΑ − ΒΦ = ΚΑ − ΚΧ ή ΦΑ = ΧΑ. Άρα ΒΦ/ΦΑ = ΚΧ/ΧΑ οπότε θα είναι και ΧΦ // ΚΒ (Β6, Π2, σελ. 142).

Οι ΟΦ και ΣΧ είναι κάθετες στο επίπεδο του κύκλου ΒΓΔΕ και άρα ΟΦ // ΣΧ (Β11, Π6, σελ. 352).

Έτσι οι ΟΦ και ΣΧ είναι ίσες και παράλληλες οπότε και οι ΣΟ και ΦΧ είναι ίσες και παράλληλες (Β1, Π33, σελ. 40).

Τότε όμως ΧΦ // ΣΟ και ΧΦ // ΚΒ οπότε είναι και ΣΟ // ΚΒ (Β1, Π30, σελ. 39).

Επειδή τώρα οι ΣΟ και ΚΒ συνδέονται από τις ΒΟ και ΚΣ το ΚΒΟΣ είναι σε ένα επίπεδο καθώς αν υπάρχουν δύο παράλληλες ευθείες και σε καθεμιά από αυτές ληφθούν τυχόντα σημεία τότε η ευθεία που τα συνδέει βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τις παράλληλες (Β11, Π7, σελ. 353).

Ομοίως, καθένα από τα τετράπλευρα ΣΟΠΤ και ΤΠΡΥ βρίσκεται σε ένα επίπεδο, ενώ και το τρίγωνο ΥΡ$\Zeta$ βρίσκεται σε ένα επίπεδο.

Αν θεωρήσουμε τώρα τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα το Α και καθένα από τα Ο, Σ, Π, Τ, Ρ και Υ θα σχηματιστεί μεταξύ των τόξων $B\Zeta$ και $K\Zeta$ ένα στερεό σχήμα που αποτελείται από πυραμίδες με βάσεις τα τετράπλευρα ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ και το τρίγωνο ΥΡ$\Zeta$ και κορυφή το Α.

Κάνοντας στην συνέχεια τις αντίστοιχες κατασκευές σε καθεμιά από τις ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ όπως με την ΒΚ και σε κάθε άλλο τεταρτημόριο θα σχηματιστεί ένα στερεό πολύεδρο εγγεγραμμένο στη σφαίρα και περιέχεται στις πυραμίδες με κορυφή το Α και βάσεις τα τετράπλευρα που είναι ομοταγή (αντίστοιχα) με τα ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ και το τρίγωνο ΥΡ$\Zeta$.

Ισχυρίζομαι ότι το πολύεδρο αυτό δεν εφάπτεται επί της επιφάνειας της μικρότερης σφαίρας και επί την οποία είναι ο κύκλος ΖΗΘ.

Φέρνουμε από το Α την κάθετη στο επίπεδο του τετραπλεύρου ΚΒΟΣ που τέμνει το επίπεδο στο Ψ. Φέρνουμε και τις ΨΒ και ΨΚ.

Επειδή η ΑΨ είναι κάθετη στο επίπεδο του τετραπλεύρου ΚΒΟΣ θα είναι κάθετη και σε κάθε ευθεία που κείται επί του επιπέδου και που διέρχεται από το Ψ (Β11, Ορ3, σελ. 345). Έτσι ΑΨ ⊥ ΒΨ και ΑΨ ⊥ ΨΚ.

Καθώς ΑΒ = ΑΚ είναι και $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΚ}^2$ ενώ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51) έχουμε ότι $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΨ}^2 + \text{ΨΒ}^2$ διότι $\widehat{\text{ΑΨΒ}} = 1$ ορθή. Ομοίως είναι και $\text{ΑΚ}^2 = \text{ΑΨ}^2 + \text{ΨΚ}^2$ καθώς $\widehat{\text{ΑΨΚ}} = 1$ ορθή.

Από τις παραπάνω προκύπτει $\text{ΑΨ}^2 + \text{ΨΒ}^2 = \text{ΑΨ}^2 + \text{ΨΚ}^2$ οπότε $\text{ΨΒ}^2 = \text{ΨΚ}^2$ ή ΨΒ = ΨΚ.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι ΨΟ = ΒΨ και ΨΣ = ΨΚ και άρα ο γραφόμενος κύκλος με κέντρο το Ψ και ακτίνα ΨΒ = ΨΚ διέρχεται και από τα Ο και Σ. Άρα το ΚΒΟΣ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτό.

Επειδή ΚΒ > ΧΦ και ΧΦ = ΣΟ έπεται ότι ΚΒ > ΣΟ. Αλλά ΚΒ = ΚΣ = ΒΟ οπότε ΚΣ > ΣΟ και ΒΟ > ΣΟ.

Καθώς λοιπόν το ΚΒΟΣ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και ΟΣ < ΚΒ = ΒΟ = ΚΣ και η ΒΨ είναι ακτίνα του κύκλου ισχύει $\text{ΚΒ}^2 > 2\text{ΒΨ}^2$.

Φέρνουμε από το Κ και την ΚΩ κάθετη στην ΒΦ.

Επειδή τώρα ΒΔ < 2ΔΩ και

$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΩ}} = \frac{\text{ΔΒ} \cdot \text{ΩΒ}}{\text{ΔΩ} \cdot \text{ΩΒ}}.$$

Αφού αναγραφεί το τετράγωνο πλευράς ΒΩ και συμπληρωθεί το παραλληλόγραμμο με μια πλευρά ΩΔ θα είναι ΔΒ · ΒΩ < 2ΔΒ · ΩΒ Αφού αχθεί η ΚΔ θα είναι και $\text{ΔΒ} \cdot \text{ΒΩ} = \text{ΒΚ}^2$ και $\text{ΔΩ} \cdot \text{ΩΒ} = \text{ΚΩ}^2$ (Β3, Π31, σελ. 102 και Πόρισμα, Β6, Π8, σελ. 148). Άρα θα είναι $\text{ΚΒ}^2 < 2\text{ΚΩ}^2$ και καθώς $\text{ΚΒ}^2 > 2\text{ΒΨ}^2$ είναι και $\text{ΚΩ}^2 > \text{ΒΨ}^2$.

Επίσης επειδή ΒΑ = ΑΚ θα είναι και $\text{ΒΑ}^2 = \text{ΚΑ}^2$ ενώ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51) ισχύουν $\text{ΒΑ}^2 = \text{ΒΨ}^2 + \text{ΨΑ}^2$ και $\text{ΚΑ}^2 = \text{ΚΩ}^2 + \text{ΩΑ}^2$. Συνεπώς, $\text{ΒΨ}^2 + \text{ΨΑ}^2 = \text{ΚΩ}^2 + \text{ΩΑ}^2$ με $\text{ΚΩ}^2 > \text{ΒΨ}^2$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\text{ΩΑ}^2 < \text{ΨΑ}^2$ και άρα ΩΑ < ΨΑ, οπότε κατά μείζονα λόγο προκύπτει ΑΨ > ΑΗ.

Έτσι, η ΑΨ καταλήγει σε μια βάση του πολύεδρου ενώ η ΑΗ στην επιφάνεια της μικρότερης σφαίρας. Και άρα το πολύεδρο δεν εφάπτεται στην επιφάνεια της μικρότερης σφαίρας.

Σε δυο ομόκεντρες σφαίρες έχει εγγραφεί στην μεγαλύτερη από αυτές στερεό πολύεδρο που δεν αγγίζει την επιφάνεια της μικρότερης σφαίρας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα 27 *Αν σε μια άλλη σφαίρα εγγραφεί στερεό πολύεδρο όμοιο προς αυτό που εγγράφηκε στην σφαίρα* ΒΓΔΕ *τότε ο λόγος των όγκων των δύο στερεών πολυέδρων είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των διαμέτρων των σφαιρών μέσα στις οποίες είναι εγγεγραμμένα τα πολύεδρα αυτά.*

Απόδειξη. Πράγματι αν διαιρεθούν τα στερεά πολύεδρα σε ομοιοπληθείς και ομοταγείς (όμοιες κατά την τάξη) πυραμίδες τότε οι πυραμίδες αυτές θα είναι όμοιες.

Ο λόγος των όγκων των όμοιων πυραμίδων όμως είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των ομόλογων πλευρών τους (Πόρισμα, Π8, σελ. 401).

Έτσι ο λόγος του όγκου της πυραμίδας ΚΒΟΣΛ προς τον όγκο της ομοταγούς της που βρίσκεται στην άλλη σφαίρα είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των ακτίνων των δύο σφαιρών καθώς αυτός ο λόγος είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των ομόλογων πλευρών των δύο ομοταγών πυραμίδων.

Ομοίως ο λόγος του όγκου καθεμιάς από τις πυραμίδες που βρίσκονται στην πρώτη σφαίρα προς τον όγκο της ομοταγούς της που βρίσκεται στην δεύτερη σφαίρα είναι ίσος με τον λόγο των ακτίνων των σφαιρών.

Δηλαδή αν α_1, α_2, ..., α_ν είναι οι όγκοι των πυραμίδων της πρώτης σφαίρας που έχει ακτίνα ρ_1 και β_1, β_2, ..., β_ν είναι αντίστοιχα οι όγκοι των ομοταγών πυραμίδων που βρίσκονται στην δεύτερη σφαίρας που έχει ακτίνα ρ_2 τότε ισχύει:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = \ldots = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\rho_1^3}{\rho_2^3}$$

και άρα

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu}{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu} = \frac{\rho_1^3}{\rho_2^3}$$

(Β5, Π12, σελ. 133).

Έτσι αν συμβολίσουμε με α τον όγκο του στερεού πολυέδρου που είναι εγγεγραμμένο στην πρώτη σφαίρα και με β αντίστοιχα τον όγκο του στερεού της δεύτερης σφαίρας τότε από την παραπάνω αναλογία παίρνουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta_1^3}{\delta_2^3},$$

όπου δ_1 και δ_2 οι διάμετροι των δύο σφαίρων ακτίνων ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 18 (Όγκος σφαίρας) (787) *Ο λόγος των όγκων δύο σφαιρών είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των διαμέτρων τους.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τις σφαίρες ΑΒΓ και ΔΕΖ με διαμέτρους ΒΓ και ΕΖ αντίστοιχα. Ισχυρίζομαι ότι $|\text{ΑΒΓ}|/|\text{ΔΕΖ}| = \text{ΒΓ}^3/\text{ΕΖ}^3$.

Αν δεν ισχύει η παραπάνω τότε θα είναι $|\text{ΑΒΓ}|/|\text{ΗΘΚ}| = \text{ΒΓ}^3/\text{ΕΖ}^3$ όπου ΗΘΚ είναι μια σφαίρα με όγκο $|\text{ΗΘΚ}| < |\text{ΔΕΖ}|$ ή $|\text{ΗΘΚ}| > |\text{ΔΕΖ}|$.

1η περίπτωση: Υποθέτουμε πρώτα ότι $|\text{ΑΒΓ}|/|\text{ΔΕΖ}| = \text{ΒΓ}^3/\text{ΕΖ}^3$ με $|\text{ΗΘΚ}| < |\text{ΔΕΖ}|$.

Θεωρούμε ότι οι ΔΕΖ και ΗΘΚ είναι ομόκεντρες και εγγράφουμε στην μεγαλύτερη σφαίρα ΔΕΖ στερεό πολύεδρο που δεν εφάπτεται στην επιφάνεια της μικρότερης σφαίρας ΗΘΚ (Π17, σελ. 420).

Στην συνέχεια εγγράφουμε και στην άλλη σφαίρα, την ΑΒΓ, ένα στερεό πολύεδρο όμοιο με το στερεό πολύεδρο που έχει εγγραφεί στην σφαίρα ΔΕΖ. Οπότε ο λόγος των όγκων των δύο πολυέδρων είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των διαμέτρων των σφαιρών στις οποίες αυτά έχουν εγγραφεί (Πόρισμα, ΠΙ7, σελ. 420).

Δηλαδή αν α και β είναι οι όγκοι των στερεών πολυέδρων που έχουν εγγραφεί στις σφαίρες διαμέτρων ΒΓ και ΕΖαντίστοιχα θα ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{ΒΓ}^3}{\text{ΕΖ}^3}$$

από όπου, καθώς

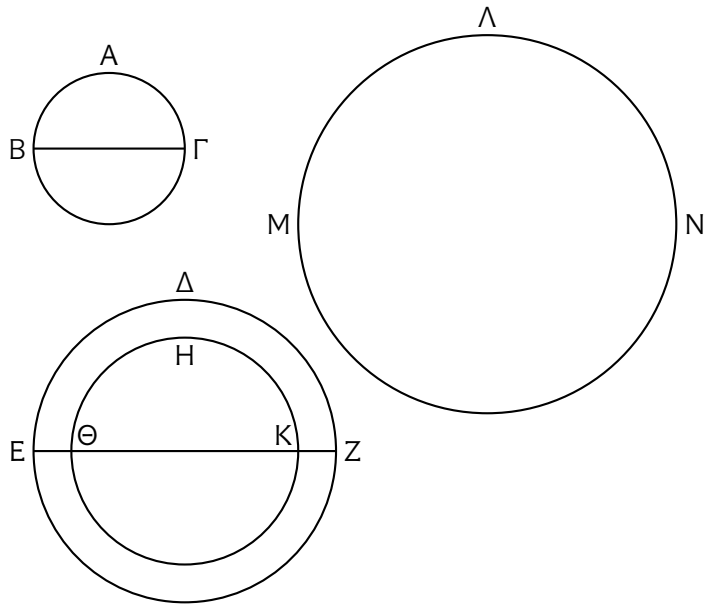
$$\frac{|\text{ΑΒΓ}|}{|\text{ΗΘΚ}|} = \frac{\text{ΒΓ}^3}{\text{ΕΖ}^3}$$

παίρνουμε

$$\frac{|\text{ΑΒΓ}|}{|\text{ΗΘΚ}|} = \frac{\alpha}{\beta}$$

ή

$$\frac{|\text{ΑΒΓ}|}{\alpha} = \frac{|\text{ΗΘΚ}|}{\beta}.$$



Καθώς $|\text{ΑΒΓ}| > \alpha$ έπεται ότι είναι και $|\text{ΗΘΚ}| > \beta$ (Β5, ΠΙ4, σελ. 134). Αλλά αυτό είναι αδύνατον καθώς $|\text{ΗΘΚ}| < \beta$ διότι η σφαίρα ΗΘΚ εμπεριέχεται στο στερεό πολύεδρο που έχει εγγραφεί στην σφαίρα ΔΕΖ.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει $|\text{ΑΒΓ}|/|\text{ΗΘΚ}| = \text{ΒΓ}^3/\text{ΕΖ}^3$ με ΗΘΚ σφαίρα όγκου $|\text{ΗΘΚ}| < |\Delta\text{ΕΖ}|$.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει $|\Delta\text{ΕΖ}|/|\Sigma| = \text{ΕΖ}^3/\text{ΒΓ}^3$ με Σ να είναι μια σφαίρα με όγκο $|\Sigma| < |\text{ΑΒΓ}|$.

2η περίπτωση: Έστω ότι ισχύει $|ΑΒΓ|/|ΛΜΝ| = ΒΓ^3/ΕΖ^3$ για τη σφαίρα ΛΜΝ με όγκο $|ΛΜΝ| > |ΔΕΖ|$.

Τότε ισχύει $|ΛΜΝ|/|ΑΒΓ| = ΕΖ^3/ΒΓ^3$ (Πόρισμα, Β5, Π7, σελ. 131). Όμως

$$\frac{|ΛΜΝ|}{|ΑΒΓ|} = \frac{|ΔΕΖ|}{|Τ|}$$

για κάποια σφαίρα Τ με όγκο μικρότερο από τον όγκο της σφαίρας ΑΒΓ, δηλαδή ισχύει $|Τ| < |ΑΒΓ|$ (Λήμμα, Π2, σελ. 390). Οπότε ισχύει

$$\frac{|ΔΕΖ|}{|Τ|} = \frac{ΕΖ^3}{ΒΓ^3}$$

με $|Τ| < |ΑΒΓ|$. Αυτό όμως είναι αδύνατον όπως αποδείχτηκε στην 1η περίπτωση παραπάνω.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει ούτε $|ΑΒΓ|/|ΛΜΝ| = ΒΓ^3/ΕΖ^3$ με ΛΜΝ σφαίρα όγκου $|ΛΜΝ| > |ΔΕΖ|$.

Έτσι έπεται τελικά ότι

$$\frac{|ΑΒΓ|}{|ΔΕΖ|} = \frac{ΒΓ^3}{ΕΖ^3}$$

που είναι η αποδεικτέα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Βιβλίο 13ο

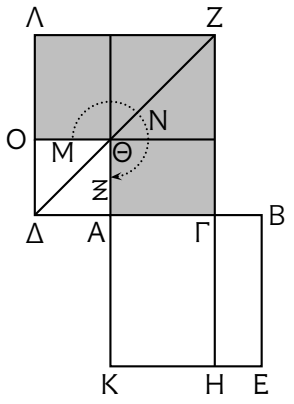
Πρόταση 1 (789) *Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο τότε το τετράγωνο του αθροίσματος του μεγαλύτερου από τα τμήματα που προκύπτουν και του μισού του αρχικού τμήματος είναι ίσο με το πενταπλάσιο του τετραγώνου του μισού του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»:

$$\begin{aligned}(\text{ΑΓ}+\text{ΑΔ})^2 &= \text{ΑΓ}^2+\text{ΑΔ}^2+2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΑΔ}\\ &= \text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}+\text{ΑΔ}^2+2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΑΔ}\\ &= 2\text{ΑΔ}\cdot\text{ΒΓ}+\text{ΑΔ}^2+2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΑΔ}\\ &= 2\text{ΑΔ}(\text{ΒΓ}+\text{ΑΓ})+\text{ΑΔ}^2 = 2\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΒ}+\text{ΑΔ}^2\\ &= 2\text{ΑΔ}\cdot 2\text{ΑΔ}+\text{ΑΔ}^2\\ &= 5\text{ΑΔ}^2.\end{aligned}$$

∎

«πρωτότυπη»: Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που διαιρείται σε άκρο και μέσο λόγο από το σημείο του Γ με ΑΓ να είναι το μεγαλύτερο από τα τμήματα στα οποία έχει διαιρεθεί το ΑΒ.



Λαμβάνουμε στην προέκταση του ΓΑ προς το Α τμήμα ΑΔ = ΑΒ/2. Ισχυρίζομαι ότι $(\text{ΑΓ}+\text{ΑΔ})^2 = 5\cdot\text{ΔΑ}^2$.

Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΕ και ΔΖ πλευρών ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα και έστω ότι η προέκταση της ΖΓ προς το Γ τέμνει την ΚΕ στο Η.

Τώρα επειδή το ΑΒ έχει διαιρεθεί από το Γ σε άκρο και μέσο λόγο ισχύει $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ} = \text{ΑΓ}^2$ (Β6, Ορ3, σελ. 141 και Β6, ΠΙ7, σελ. 154). Αλλά $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ} = |\text{ΓΕ}|$ και $\text{ΑΓ}^2 = |\text{ΖΘ}|$ οπότε $|\text{ΓΕ}| = |\text{ΖΘ}|$. Επειδή $\text{ΒΑ} = 2\cdot\text{ΑΔ}$ και $\text{ΒΑ} = \text{ΚΑ}$, $\text{ΑΔ} = \text{ΑΘ}$ θα είναι και $\text{ΚΑ} = 2\cdot\text{ΑΘ}$. Επίσης είναι $\text{ΚΑ}/\text{ΑΘ} = |\text{ΓΚ}|/|\text{ΓΘ}|$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142) και άρα $|\text{ΓΚ}| = 2\cdot|\text{ΓΘ}|$. Όμως $|\text{ΛΘ}|+|\text{ΘΓ}| = 2\cdot\text{ΓΘ}$ (ΒΙ, Π43, σελ. 45). Συνεπώς το τετράγωνο ΑΕ είναι ισοδύναμο με τον γνώμονα

ΜΝΞ, δηλαδή το πολυγωνικό χωρίο ΑΓΖΛΟΘ. Επειδή $\text{ΒΑ} = 2 \cdot \text{ΑΔ}$ είναι $\text{ΒΑ}^2 = 4 \cdot \text{ΑΔ}^2$ δηλαδή $|\text{ΑΕ}| = 4 \cdot |\text{ΔΘ}|$. Ακόμα ισχύει $|\text{ΑΓΖΛΟΘ}| = 4 \cdot |\text{ΑΟ}|$ και άρα $|\text{ΔΖ}| = 5 \cdot |\text{ΑΟ}|$. Καθώς $|\text{ΔΖ}| = \text{ΔΓ}^2$ και $|\text{ΑΟ}| = \text{ΔΑ}^2$ από την προηγούμενη έπεται $\text{ΔΓ}^2 = 5 \cdot \text{ΔΑ}^2$.

Συνεπώς, αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο το τετράγωνο του αθροίσματος του μεγαλύτερου από τα τμήματα στα οποία διαιρέθηκε το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα και του μισού του αρχικού τμήματος είναι ίσο με το πενταπλάσιο του τετραγώνου του μισού του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 2 (789) *Αν το τετράγωνο ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι πενταπλάσιο από το τετράγωνο ενός τμήματός του και το διπλάσιο του τμήματος αυτού διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο τότε το μεγαλύτερο από τα τμήματα που προκύπτουν από την διαίρεση είναι ίσο με το υπόλοιπο τμήμα του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Αν $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} + \text{ΓΒ}$ με $\text{ΑΒ}^2 = 5\text{ΑΓ}^2$ και $\text{ΓΔ} = 2\text{ΑΓ}$, πρέπει να δείξουμε ότι $\text{ΓΒ} > \text{ΒΔ}$ και $\text{ΓΔ}/\text{ΓΒ} = \text{ΓΒ}/\text{ΒΔ}$.

Επειδή $\text{ΑΒ}^2 = 5\text{ΑΓ}^2$ έπεται ότι $\text{ΑΒ} = \sqrt{5}\text{ΑΓ}$. Τότε, καθώς $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} + \text{ΓΒ}$, θα είναι $\sqrt{5}\text{ΑΓ} = \text{ΑΓ} + \text{ΒΓ}$ και άρα $\text{ΓΒ} = (\sqrt{5} - 1)\text{ΑΓ}$. Επίσης, $\text{ΒΔ} = \text{ΓΔ} - \text{ΒΓ} = 2\text{ΑΓ} - (\sqrt{5} - 1)\text{ΑΓ} = (3 - \sqrt{5})\text{ΑΓ}$ οπότε $\text{ΓΒ} > \text{ΒΔ}$.

Ακόμα

$$\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{2\text{ΑΓ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{2\text{ΑΓ}}{(\sqrt{5} - 1)\text{ΑΓ}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$$

και

$$\frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{(\sqrt{5} - 1)\text{ΑΓ}}{(3 - \sqrt{5})\text{ΑΓ}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}}.$$

Αλλά

$$\frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}}$$

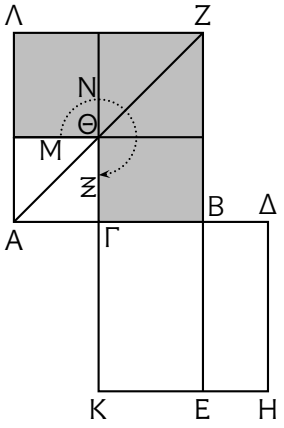
καθώς $2(3 - \sqrt{5}) = (\sqrt{5} - 1)^2$ (διότι $6 - 2\sqrt{5} = 5 - 2\sqrt{5} + 1$) και επομένως έπεται ότι $\text{ΓΔ}/\text{ΓΒ} = \text{ΓΒ}/\text{ΒΔ}$. Δ

«πρωτότυπη» Έστω ότι $\text{ΑΒ}^2 = 5 \cdot \text{ΑΓ}^2$ και $\text{ΓΔ} = 2 \cdot \text{ΑΓ}$. Ισχυρίζομαι ότι αν το ΓΔ τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο τότε το μεγαλύτερο από τα τμήματα που θα προκύψουν είναι ίσο με το ΓΒ.

Με πλευρές ΑΒ και ΓΔ γράφουμε τα τετράγωνα ΑΒΖΛ και ΓΔΗΚ αντίστοιχα. Η προέκταση της ΚΓ προς το Γ τέμνει την ΖΑ στο Θ και την ΛΖ στο Ν. Από το Θ φέρνουμε την παράλληλη προς τις ΛΖ και ΑΒ που τέμνει τις ΛΑ και ΖΒ στα Μ και Ξ αντίστοιχα.

Η προέκταση τέλος της ΖΒ προς το Β τέμνει την ΚΗ στο Ε.

Επειδή $\text{ΒΑ}^2 = 5 \cdot \text{ΑΓ}^2$ και $|\text{ΑΖ}| = 5 \cdot |\text{ΑΘ}|$ ο γνώμονας ΜΝΞ, δηλαδή το πολυγωνικό χωρίο ΛΜΘΓΒΖ, έχει εμβαδόν $|\text{ΛΜΘΓΒΖ}| = 4 \cdot |\text{ΑΘ}|$.



Επίσης καθώς $\Delta\Gamma = 2 \cdot \Gamma A$ είναι $\Delta\Gamma^2 = 4 \cdot \Gamma A^2$ δηλαδή $|\Gamma H| = 4 \cdot |A\Theta|$. Έτσι $|\Lambda M\Theta\Gamma BZ| = |\Gamma H|$.

Επειδή $\Delta\Gamma = 2 \cdot \Gamma A$ και $\Delta\Gamma = \Gamma K$, $A\Gamma = \Gamma\Theta$ (άρα $\Gamma K = 2 \cdot \Gamma\Theta$) θα είναι και $|KB| = 2 \cdot |B\Theta|$ (Β6, Π1, σελ. 142).

Επίσης είναι $|\Lambda\Theta| + |\Theta B| = 2 \cdot |\Theta B|$ (Β1, Π43, σελ. 45) και άρα $|KB| = |\Lambda\Theta| + |\Theta B|$. Καθώς $|\Lambda M\Theta\Gamma BZ| = |\Gamma H|$ θα είναι $|\Theta Z| = |BH|$. Όμως $|BH| = \Gamma\Delta \cdot \Delta B$ διότι $\Gamma\Delta = \Delta H$ και $|\Theta Z| = \Gamma B^2$. Άρα είναι $\Gamma\Delta/\Gamma B = \Gamma B/B\Delta$ (Β6, Π17, σελ. 154). Όμως $\Delta\Gamma > \Gamma B$ και έτσι $\Gamma B > B\Delta$ (Β5, Π14, σελ. 134).

Συνεπώς, αν το τετράγωνο ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι πενταπλάσιο από το τετράγωνο ενός τμήματός του και το διπλάσιο του τμήματος αυτού τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο τότε το μεγαλύτερο τμήμα από αυτά που προκύπτουν είναι το υπόλοιπο από το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα· όπερ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα 17 *Το ότι* $2 \cdot A\Gamma > B\Gamma$ *αποδεικνύεται ως εξής:*

Έστω ότι δεν ισχύει η παραπάνω και είναι $B\Gamma = 2 \cdot A\Gamma$. Τότε $B\Gamma^2 = 4 \cdot A\Gamma^2$ ή $B\Gamma^2 + \Gamma A^2 = 5 \cdot \Gamma A^2$. Όμως $BA^2 = 5 \cdot \Gamma A^2$ και άρα $BA^2 = B\Gamma^2 + \Gamma A^2$ που όμως είναι αδύνατον (Β2, Π4, σελ. 62).

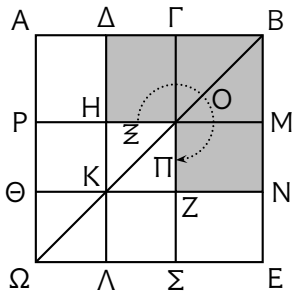
Άρα $B\Gamma \neq 2 \cdot A\Gamma$ ενώ ομοίως αποδεικνύεται ότι αν $\alpha < B\Gamma$ τότε δεν μπορεί να ισχύει $\alpha = 2 \cdot \Gamma A$ διότι αυτό είναι επίσης άτοπο κατά μείζονα λόγο.

Συνεπώς $2 \cdot A\Gamma > \Gamma B$· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 3 (790) *Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο το τετράγωνο του αθροίσματος του μικρότερου και του μισού του μεγαλύτερου από τα τμήματα που προκύπτουν είναι ίσο με το πενταπλάσιο του τετραγώνου του μισού του μεγαλύτερου τμήματος.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Αν $AB \cdot B\Gamma = A\Gamma^2$, Δ μέσο του $A\Gamma$ και $A\Gamma > \Gamma B$ πρέπει να δείξουμε ότι $B\Delta^2 = 5\Delta\Gamma^2$. Έχουμε

$$\begin{aligned} B\Delta^2 = (\Delta\Gamma + \Gamma B)^2 &= \Delta\Gamma^2 + 2 \cdot \Delta\Gamma \cdot \Gamma B + \Gamma B^2 \\ &= \Delta\Gamma^2 + 2 \cdot \frac{A\Gamma}{2} \cdot \Gamma B + \Gamma B^2 \\ &= \Delta\Gamma^2 + \Gamma B \cdot (A\Gamma + \Gamma B) \\ &= \Delta\Gamma^2 + AB \cdot \Gamma B \\ &= \Delta\Gamma^2 + A\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 + (2\Delta\Gamma)^2 \\ &= 5\Delta\Gamma^2 \end{aligned}$$



«πρωτότυπη»: Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που διαιρείται σε άκρο και μέσο λόγο από το σημείο του Γ. Αν ΑΓ είναι το μεγαλύτερο από τα τμήματα που προκύπτουν και Δ είναι το μέσο του ισχυρίζομαι ότι $\text{ΒΔ}^2 = 5 \cdot \text{ΔΓ}^2$.

Με πλευρά ΑΒ γράφουμε το τετράγωνο ΑΒΕΩ.

Επειδή $\text{ΑΓ} = 2 \cdot \text{ΔΓ}$ είναι $\text{ΑΓ}^2 = 4 \cdot \text{ΔΓ}^2$ δηλαδή $|\text{ΡΣ}| = 4 \cdot |\text{ΖΗ}|^2$.

Όμως $\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ} = \text{ΑΓ}^2$ (Β6, Ορ3, σελ. 141 και Β6, ΠΙ7, σελ. 154) και άρα $\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ} = |\text{ΓΕ}|$.

Συνεπώς, $|\text{ΓΕ}| = \text{ΑΓ}^2 = |\text{ΡΣ}|$, και επειδή $|\text{ΡΣ}| = 4 \cdot |\text{ΖΗ}|$. θα είναι και $|\text{ΓΕ}| = 4 \cdot |\text{ΖΗ}|$.

Επειδή πάλι είναι ΑΔ = ΔΓ έπεται ΘΚ = ΚΖ, ώστε |ΗΖ| = |ΘΛ|. Άρα ΗΚ = ΚΛ και ΜΝ = ΝΕ, |ΜΖ| = |ΖΕ|. Αλλά |ΜΖ| = |ΓΗ|, οπότε |ΓΗ| = |ΖΕ|. Έτσι, |ΓΝ| + |ΓΗ| = |ΓΝ| + |ΖΕ| ή |ΔΗΟΖΝΒ| = |ΓΕ|.

Καθώς έχει δειχθεί ότι $|\text{ΓΕ}| = 4 \cdot |\text{ΗΖ}|$ είναι $|\text{ΔΗΟΖΝΒ}| = 4 \cdot |\text{ΗΖ}|$ και έτσι $|\text{ΔΗΟΖΝΒ}| + |\text{ΗΖ}| = 5 \cdot |\text{ΗΖ}|$ ή $|\text{ΔΝ}| = 5 \cdot |\text{ΗΖ}|$.

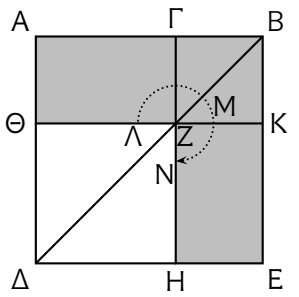
Όμως $|\text{ΔΝ}| = \text{ΔΒ}^2$ και $|\text{ΗΖ}| = \text{ΔΓ}^2$ οπότε $\text{ΔΒ}^2 = 5 \cdot \text{ΔΓ}^2$ που είναι η αποδεικτέα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 4 (791) *Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο τότε το άθροισμα των τετραγώνων του αρχικού τμήματος και του μικρότερου τμήματος* (*από τα δύο τμήματα στα οποία διαιρέθηκε το αρχικό τμήμα*) *είναι ίσο με το τριπλάσιο του τετραγώνου του μεγαλύτερου τμήματος.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»:

$$\begin{aligned}\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 &= \text{ΑΒ}^2 + (\text{ΑΒ} - \text{ΑΓ})^2 \\ &= 2\text{ΑΒ}^2 - 2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΓ} + \text{ΑΓ}^2 \\ &= 2\text{ΑΒ}(\text{ΑΒ} - \text{ΑΓ}) + \text{ΑΓ}^2 = 2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ} + \text{ΑΓ}^2.\end{aligned}$$

Αλλά $\text{ΑΒ}/\text{ΑΓ} = \text{ΑΓ}/\text{ΒΓ}$ οπότε $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ}$. Και τώρα η προηγούμενη δίνει $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 = 3\text{ΑΓ}^2$. Δ



«πρωτότυπη»: Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που διαιρείται από το σημείο του Γ σε άκρο και μέσο λόγο όπως φαίνεται στο σχήμα. Ισχυρίζομαι ότι $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 = 3 \cdot \text{ΓΑ}^2$.

Με πλευρά ΑΒ γράφουμε το τετράγωνο ΑΔΕΒ και από το Γ φέρνουμε την παράλληλη στις ΑΔ και ΒΕ που τέμνει την διαγώνιο ΒΔ στο Ζ και την ΔΕ στο Η. Επειδή η ΑΒ έχει τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο από το Γ με ΑΓ > ΓΒ ισχύει $\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ} = \text{ΑΓ}^2$

(Β6, Ορ3, σελ. 141 και Β6, Π17, σελ. 154). Αλλά $\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΓ} = |\text{ΑΚ}|$ και $\text{ΑΓ}^2 = |\text{ΘΗ}|$ οπότε $|\text{ΑΚ}| = |\text{ΘΗ}|$. Όμως $|\text{ΑΖ}| = |\text{ΖΕ}|$ (Β1, Π43, σελ. 45) και έτσι $|\text{ΑΖ}| + |\Gamma\text{Κ}| = |\text{ΖΕ}| + |\Gamma\text{Κ}|$ ή $|\text{ΑΚ}| = |\Gamma\text{Ε}|$. Άρα $2 \cdot |\text{ΑΚ}| = |\text{ΑΚ}| + |\Gamma\text{Ε}|$.

Αλλά το άθροισμα των εμβαδών των ΑΚ και ΓΕ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών του γνώμονα ΛΜΝ (που είναι το πολυγωνικό χωρίο ΑΒΕΗΖΘ) και του τετραγώνου ΓΚ, δηλαδή

$$|\text{ΑΒΕΗΖΘ}| + |\Gamma\text{Κ}| = 2 \cdot |\text{ΑΚ}|$$

και άρα

$$|\text{ΑΒΕΗΖΘ}| + |\Gamma\text{Κ}| = 2 \cdot |\text{ΘΗ}|,$$

οπότε

$$|\text{ΑΒΕΗΖΘ}| + |\Gamma\text{Κ}| + |\text{ΘΗ}| = 3 \cdot |\text{ΘΗ}|$$

ή

$$|\text{ΑΕ}| + |\Gamma\text{Κ}| = 3 \cdot |\text{ΘΗ}|.$$

Αλλά $|\text{ΑΕ}| = \text{ΑΒ}^2$, $|\Gamma\text{Κ}| = \text{ΒΓ}^2$ και $|\text{ΘΗ}| = \text{ΘΖ}^2 = \text{ΑΓ}^2$ (διότι $\text{ΘΖ} = \text{ΑΓ}$).

Συνεπώς

$$\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 = 3 \cdot \text{ΑΓ}^2$$

που είναι η αποδεικτέα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 5 (792) *Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο τότε το ευθύγραμμο τμήμα που είναι ίσο με το άθροισμα του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος και του μεγαλύτερου τμήματος (από τα δύο τμήματα στα οποία διαιρέθηκε το αρχικό τμήμα) έχει τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο και το μεγαλύτερο τμήμα (από τα τμήματα στα οποία διαιρείται) είναι το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: $\text{ΑΒ}/\text{ΑΓ} = \text{ΑΓ}/\text{ΒΓ}$, άρα

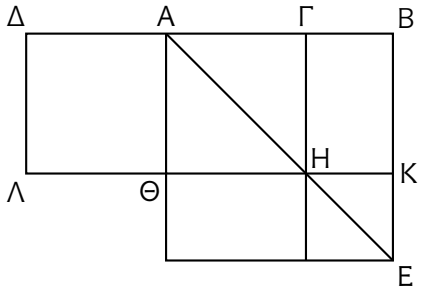
$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΒ} + \text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΓ} + \text{ΒΓ}}.$$

Συνεπώς

$$\frac{\text{ΑΒ} + \text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΓ} + \text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}}.$$ Δ

«πρωτότυπη»: Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που διαιρείται σε άκρο και μέσο λόγο από το σημείο του Γ ώστε $\text{ΑΓ} > \text{ΒΓ}$. Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Α κατά τμήμα $\text{ΑΔ} = \text{ΑΓ}$. Ισχυρίζομαι ότι το ΔΒ έχει διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο από το Α με $\text{ΑΒ} > \text{ΑΔ}$.

Με πλευρά ΑΒ γράφουμε το τετράγωνο ΑΒΕΖ. Στην συνέχεια, από το Γ φέρνουμε την παράλληλη στις ΒΕ και ΑΖ που τέμνει την διαγώνιο ΑΕ στο Η. Από το Η φέρνουμε την παράλληλη στις ΑΒ και ΕΖ που τέμνει τις ΑΖ και ΒΕ στα Κ και Θ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΘΚ προς το Θ κατά τμήμα $\Theta\Lambda = \text{ΑΔ}$.



Επειδή η ΑΒ έχει διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο από το Γ είναι $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ} = \text{ΑΓ}^2$ (Β6, Ορ3, σελ. 141 και Β6, Π17, σελ. 154). Όμως $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ} = |\text{ΓΕ}|$ και $\text{ΑΓ}^2 = |\text{ΓΘ}|$ και άρα $|\text{ΓΕ}| = |\text{ΓΘ}|$. Επίσης $|\text{ΓΕ}| = |\text{ΘΕ}|$ (Β1, Π43, σελ. 45) ενώ $|\text{ΔΘ}| = |\text{ΘΓ}|$. Από τις παραπάνω έπεται ότι $|\text{ΔΘ}| = |\text{ΘΕ}|$ και άρα $|\text{ΔΘ}| + |\text{ΘΒ}| = |\text{ΘΕ}| + |\text{ΘΒ}|$ ή $|\text{ΔΚ}| = |\text{ΑΕ}|$.

Αλλά $|\text{ΔΚ}| = \text{ΒΔ}\cdot\text{ΔΑ}$ διότι $\text{ΔΛ} = \text{ΔΑ}$ και $|\text{ΑΕ}| = \text{ΑΒ}^2$, οπότε $\text{ΒΔ}\cdot\text{ΔΑ} = \text{ΑΒ}^2$ ή $\text{ΔΒ}/\text{ΒΑ} = \text{ΒΑ}/\text{ΑΔ}$ (Β6, Π17, σελ. 154).

Καθώς $\text{ΔΒ} > \text{ΒΑ}$ έπεται ότι $\text{ΒΑ} > \text{ΑΔ}$ (Β5, Π14, σελ. 134).

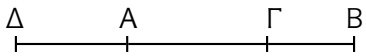
Συνεπώς, η ΔΒ έχει διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο από το Α και το ΑΒ είναι το μεγαλύτερο τμήμα από αυτά στα οποία έχει διαιρεθεί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι ∎

Πρόταση 6 (792) *Αν ένα ρητό ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο τότε καθένα από τα δύο τμήματα που προκύπτουν είναι άλογο και μάλιστα αποτομή.*

Απόδειξη. «σύγχρονη»: Θέτοντας $\rho = \text{ΑΒ}$ ρητό τμήμα και Γ το σημείο που χωρίζει το ΑΒ σε μέσο και άκρο λόγο με $\text{ΑΓ} > \text{ΓΒ}$ πρέπει να δείξουμε ότι τα ΑΓ και ΒΓ είναι άλογα και μάλιστα αποτομές. Πράγματι, ισχύει $\text{ΑΒ}/\text{ΑΓ} = \text{ΑΓ}/\text{ΒΓ}$ και $\text{ΒΓ} = \rho - \text{ΑΓ}$. Λύνοντας αυτό το σύστημα των δύο εξισώσεων και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\text{ΒΓ} < \text{ΑΓ} < \rho = \text{ΑΒ}$ βρίσκουμε ότι

$$\text{ΑΓ} = \rho\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{και} \quad \text{ΒΓ} = \rho\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

που είναι και τα δύο άλογα τμήματα και μάλιστα αποτομές. ∎



«πρωτότυπη»: Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που έχει διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο από το σημείο του Γ με $\text{ΑΓ} > \text{ΓΒ}$. Ισχυρίζομαι ότι καθένα από τα ΑΓ και ΓΒ είναι άλογο και μάλιστα αποτομή.

Προεκτείνουμε το ΒΑ προς το Α και λαμβάνουμε τμήμα $\text{ΑΔ} = \text{ΒΑ}/2$.

Τότε επειδή το ΑΒ έχει διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο από το Γ και στο μεγαλύτερο τμήμα ΑΓ έχει προστεθεί το $\text{ΑΔ} = \text{ΑΒ}/2$ έπεται ότι $\text{ΓΔ}^2 = 5\cdot\text{ΔΑ}^2$ (ΠΙ, σελ. 427).

Τότε ισχύει

$$\frac{\text{ΓΔ}^2}{\text{ΔΑ}^2} = 5$$

οπότε ο λόγος του ΓΔ^2 προς το ΔΑ^2 είναι ίσος με τον λόγο δύο (στμ: φυσικών) αριθμών και άρα το ΓΔ^2 είναι σύμμετρο προς το ΔΑ^2 (Β10, Π6, σελ. 232).

Όμως το ΔA^2 είναι ρητό καθώς το ΔΑ είναι ρητό ως μισό του ΑΒ που είναι ρητό από την υπόθεση.

Συνεπώς, και το $\Gamma\Delta^2$ είναι επίσης ρητό (Β10, Ορ4, σελ. 226) οπότε και το ΓΔ είναι ρητό.

Επειδή πάλι ο λόγος $\Gamma\Delta^2/\Delta A^2$ δεν είναι ίσος με τον λόγο δύο τετράγωνων αριθμών έπεται ότι το ΓΔ είναι μήκει ασύμμετρο προς το ΔΑ (Β10, Π9, σελ. 233).

Έτσι τα ΓΔ και ΔΑ είναι ρητά δυνάμει μόνο σύμμετρα και επομένως το ΑΓ είναι αποτομή (Β10, Π73, σελ. 308).

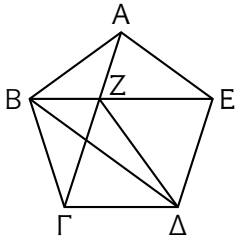
Όμως η ΑΒ έχει διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο από το Γ και το ΑΓ είναι το μεγαλύτερο από τα τμήματα που προέκυψαν. Έτσι ισχύει $AB \cdot B\Gamma = A\Gamma^2$ (Β6, Ορ3, σελ. 141 και Β6, Π17, σελ. 154).

Το ορθογώνιο λοιπόν που έχει τις πλευρές του ίσες με ΑΒ και ΒΓ έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ΑΓ που είναι αποτομή. Καθώς το ΑΒ είναι ρητό έπεται ότι το ΒΓ είναι πρώτη αποτομή (Β10, Π97, σελ. 326).

Συνεπώς καθεμιά από τα ΓΑ και ΒΓ είναι αποτομή.

Άρα αν ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο τότε καθένα από τα δύο τμήματα που προκύπτουν είναι άλογο και μάλιστα αποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 7 (793) *Αν σε ένα ισόπλευρο πεντάγωνο τρεις γωνίες του συνεχόμενες ή όχι είναι ίσες τότε το πεντάγωνο είναι ισογώνιο.*



Απόδειξη. 1η περίπτωση: Έστω ότι τρεις συνεχόμενες γωνίες του ισόπλευρου πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι ίσες, δηλαδή έστω ότι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$. Ισχυρίζομαι ότι το ΑΒΓΔΕ είναι ισογώνιο.

Φέρνουμε τις ΑΓ, ΒΕ και ΖΔ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΕ έχουν ΓΒ = ΒΑ, ΒΑ = ΑΕ και $\widehat{\Gamma BA} = \widehat{BAE}$ οπότε είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23). Άρα ΑΓ = ΒΕ ενώ και οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{BEA}$ και $\widehat{ABE} = \widehat{\Gamma AB}$.

Ώστε είναι και ΑΖ = ΖΒ (Β1, Π6, σελ. 24).

Καθώς έχει δειχθεί ότι ΑΓ = ΒΕ έπεται ότι ΑΓ − ΑΖ = ΒΕ − ΒΖ ή ΖΓ = ΖΕ.

Τότε όμως τα τρίγωνα ΖΓΔ και ΖΕΔ έχουν ΖΓ = ΖΕ, ΓΔ = ΕΔ και την ΖΔ κοινή οπότε είναι ίσα (Β1, Π8, σελ. 25) και άρα $\widehat{Z\Gamma\Delta} = \widehat{ZE\Delta}$.

Έχουμε όμως δείξει και ότι $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{BEA}$ οπότε είναι και $\widehat{Z\Gamma\Delta} + \widehat{A\Gamma B} = \widehat{ZE\Delta} + \widehat{BEA}$ δηλαδή $\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{AE\Delta}$.

Καθώς όμως $\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{BAE} = \widehat{AB\Gamma}$ από την πρηγούμενη έπεται ότι $\widehat{AE\Delta} = \widehat{BAE} = \widehat{AB\Gamma}$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι $\widehat{\Gamma\Delta E} = \widehat{BAE} = \widehat{B\Gamma\Delta}$ οπότε το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι ισογώνιο.

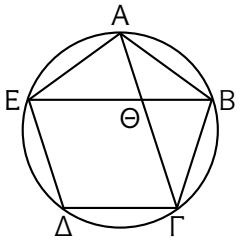
$2^{η}$ περίπτωση: Έστω τώρα ότι δεν είναι ίσες τρεις συνεχόμενες γωνίες του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ αλλά οι γωνίες με κορυφές τα Α, Γ και Δ. Ισχυρίζομαι ότι και πάλι το ΑΒΓΔΕ είναι ισογώνιο.

Φέρνουμε την ΒΔ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΓΔ έχουν ΒΑ = ΒΓ, ΑΕ = ΓΔ και $\widehat{BAE} = \widehat{B\Gamma\Delta}$ οπότε είναι ίσα (Βι, Π4, σελ. 23) και απέναντι από τις ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες, δηλαδή $\widehat{AEB} = \widehat{\Gamma\Delta B}$. Ισχύει όμως ότι $\widehat{BE\Delta} = \widehat{B\Delta E}$ διότι ΒΕ = ΒΔ (Βι, Π6, σελ. 24). Άρα $\widehat{AE\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta E} = \hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{AB\Gamma} = \hat{A} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ και άρα το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι ισογώνιο.

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση όταν τρεις γωνίες ενός ισοπλεύρου πενταγώνου είναι ίσες τότε το πεντάγωνο αυτό είναι ισογώνιο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 8 (794) *Οι διαγώνιες από δύο διαδοχικές κορυφές ενός ισοπλεύρου και ισογώνιου πενταγώνου τέμνονται σε άκρο και μέσο λόγο και τα μεγαλύτερα τμήματα που προκύπτουν είναι ίσα με την πλευρά του πενταγώνου.*



Απόδειξη. Έστω οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΕ από τις κορυφές Α και Β του ισόπλευρου και ισογώνιου πενταγώνου ΑΒΓΔΕ που τέμνονται στο Θ. Ισχυρίζομαι ότι καθεμιά από τις ΑΓ και ΘΕ διαιρείται από το Θ σε άκρο και μέσο λόγο και τα μεγαλύτερα τμήματα από αυτά που προκύπτουν είναι ίσα με την πλευρά του πενταγώνου.

Περιγράφουμε το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ με τον κύκλο που διέρχεται από τις κορυφές του (Β4, Π14, σελ. 121). Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΑΒ έχουν ΕΑ = ΑΒ, ΑΒ = ΒΓ και $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{EAB}$ οπότε είναι ίσα και άρα ΒΕ = ΑΓ και $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{ABE}$ (Βι, Π4, σελ. 23). Τότε είναι και $\widehat{A\Theta E} = 2 \cdot \widehat{BA\Theta}$ (Βι, Π32, σελ. 40). Είναι όμως και $\widehat{EA\Gamma} = 2 \cdot \widehat{BA\Gamma}$ καθώς $\widehat{E\Delta\Gamma} = 2 \cdot \widehat{\Gamma B}$ (Β3, Π28, σελ. 101 και Β6, Π33, σελ. 170). Άρα $\widehat{\Theta AE} = \widehat{A\Theta E}$ οπότε ΘΕ = ΕΑ (Βι, Π6, σελ. 24). Έτσι, ΘΕ = ΑΒ.

Επειδή ΑΒ = ΕΑ είναι $\widehat{ABE} = \widehat{AEB}$ (Βι, Π5, σελ. 24) και καθώς δείξαμε ότι $\widehat{ABE} = \widehat{BA\Theta}$ προκύπτει και ότι $\widehat{AEB} = \widehat{BA\Theta}$.

Τότε όμως τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΘ είναι ισογώνια καθώς έχουν δύο γωνίες τους ίσες ($\widehat{ABE} = \widehat{BA\Theta}$ και $\widehat{ABE}$ κοινή) οπότε θα είναι ίσες και οι άλλες γωνίες τους (Βι, Π32, σελ. 40).

Συνεπώς ισχύει και η αναλογία ΕΒ/ΒΑ = ΑΒ/ΒΘ (Β6, Π4, σελ. 144), από όπου επειδή ΒΑ = ΕΘ λαμβάνουμε ΕΒ/ΕΘ = ΕΘ/ΒΘ.

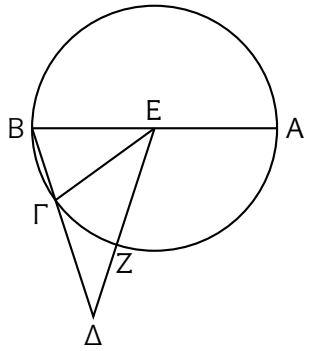
Επιπλέον καθώς ΒΕ > ΕΘ είναι και ΕΘ > ΘΒ.

Συνεπώς, η ΒΕ έχει διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο από το Θ και το μεγαλύτερο τμήμα είναι το ΘΕ = ΑΕ, δηλαδή είναι ίσο με την πλευρά του πενταγώνου.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και η ΑΓ διαιρείται σε άκρο και μέσο λόγο από το Θ με ΓΘ > ΑΘ· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 9 (794) *Το ευθύγραμμο τμήμα που αποτελείται από τις πλευρές* (στμ: που έχουν τοποθετηθεί διαδοχικά) *ενός ισόπλευρου εξαγώνου και ενός ισόπλευρου δεκαγώνου που έχουν εγγραφεί στον ίδιο κύκλο διαιρείται σε άκρο και μέσο λόγο* (στμ: από το κοινό άκρο της πλευράς του εξαγώνου και του δεκαγώνου) *και το μεγαλύτερο τμήμα είναι η πλευρά του εξαγώνου.*

Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓ και ΒΓ, ΓΔ οι πλευρές των δεκαγώνου και εξαγώνου αντίστοιχα που έχουν εγγραφεί σε αυτόν. Θεωρούμε ακόμα ότι οι ΒΓ και ΓΔ έχουν τοποθετηθεί στην ίδια ευθεία.



Ισχυρίζομαι ότι η ΒΔ διαιρείται από το Γ σε άκρο και μέσο λόγο με ΓΔ > ΒΓ.

Λαμβάνουμε το κέντρο Ε του κύκλου ΑΒΓ (Β3, Π1, σελ. 81), φέρνουμε τις ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ και προεκτείνουμε την ΒΕ που τέμνει τον κύκλο στο Α.

Επειδή η ΒΓ είναι πλευρά ισόπλευρου δεκαγώνου έπεται ότι $\widehat{\text{ΑΓΒ}} = 5 \cdot \widehat{\text{ΒΓ}}$ και άρα $\widehat{\text{ΑΓ}} = 4 \cdot \widehat{\text{ΓΒ}}$. Τότε όμως είναι και $\widehat{\text{ΑΕΓ}} = 4 \cdot \widehat{\text{ΓΕΒ}}$ καθώς αυτές είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στα $\widehat{\text{ΑΓ}}$ και $\widehat{\text{ΒΓ}}$ αντίστοιχα (Β6, Π33, σελ. 170). Επειδή $\widehat{\text{ΕΒΓ}} = \widehat{\text{ΕΓΒ}}$ είναι και $\widehat{\text{ΑΕΓ}} = 2 \cdot \widehat{\text{ΕΓΒ}}$ (Β1, Π32, σελ. 40). Επίσης καθώς ΕΓ = ΓΔ, διότι καθεμιά από αυτές είναι ίση με την πλευρά του εξαγώνου που εγγράφεται στον κύκλο (Πόρισμα, Β4, Π15, σελ. 122) θα είναι και $\widehat{\text{ΓΕΔ}} = \widehat{\text{ΓΔΕ}}$ και επομένως θα είναι $\widehat{\text{ΕΓΒ}} = 2 \cdot \widehat{\text{ΕΔΓ}}$ (Β1, Π32, σελ. 40).

Έχουμε όμως δείξει ότι $\widehat{\text{ΑΕΓ}} = 2 \cdot \widehat{\text{ΕΓΒ}}$ οπότε από την παραπάνω έπεται ότι $\widehat{\text{ΑΕΓ}} = 4 \cdot \widehat{\text{ΕΔΓ}}$.

Καθώς έχει δειχθεί και ότι $\widehat{\text{ΑΕΓ}} = 4 \cdot \widehat{\text{ΒΕΓ}}$ έπεται ότι $\widehat{\text{ΒΕΓ}} = \widehat{\text{ΕΔΓ}}$.

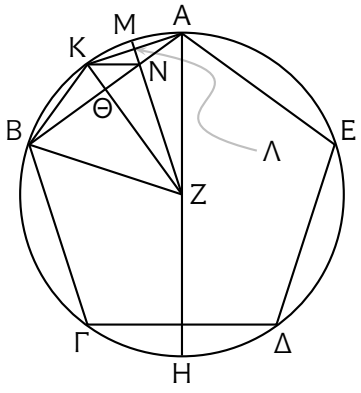
Τότε όμως τα τρίγωνα ΕΒΔ και ΕΒΓ έχουν την $\widehat{\text{ΕΒΔ}}$ κοινή και $\widehat{\text{ΒΕΓ}} = \widehat{\text{ΕΔΓ}}$ οπότε θα έχουν ίση και την τρίτη γωνία τους, δηλαδή $\widehat{\text{ΒΕΔ}} = \widehat{\text{ΕΓΒ}}$ (Β1, Π32, σελ. 40).

Έτσι, τα τρίγωνα αυτά είναι ισογώνια και άρα ισχύει ΔΒ/ΒΕ = ΒΕ/ΒΓ (Β6, Π4, σελ. 144).

Αλλά ΕΒ = ΓΔ και άρα ΔΒ/ΓΔ = ΓΔ/ΓΒ και καθώς ΒΔ > ΔΓ θα είναι και ΔΓ > ΓΒ (Β5, Π14, σελ. 134).

Συνεπώς, το ΒΔ έχει τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο κατά το Γ με μεγαλύτερο τμήμα το ΓΔ· όπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρόταση 10 (795) *Αν σε έναν κύκλο εγγραφεί ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο τότε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την πλευρά του πενταγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές την πλευρά του εξαγώνου και την πλευρά του δεκαγώνου* (στμ: που είναι ισόπλευρα και ισογώνια) *που εγγράφονται στον κύκλο αυτό.*



Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔΕ στον οποίο έχει εγγραφεί το ισόπλευρο πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ. Ισχυρίζομαι ότι το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με την πλευρά του ΑΒΓΔΕ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων που έχουν τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές των ισόπλευρων εξαγώνου και δεκαγώνου που εγγράφονται στον κύκλο ΑΒΓΔΕ.

Λαμβάνουμε το κέντρο Ζ του κύκλου (Β3, Π1, σελ. 81) και φέρνουμε την ΑΖ η οποία προεκτεινόμενη προς το Ζ τέμνει τον κύκλο στο Η. Στην συνέχεια φέρνουμε την ΖΒ και την κάθετη ΖΘ από το Ζ προς την ΑΒ που τέμνει τον κύκλο στο Κ. Φέρνουμε ακόμα την κάθετη ΖΛ από το Ζ προς την ΑΚ. Η ΖΛ τέμνει την ΑΒ στο Ν ενώ προεκτεινόμενη προς το Λ τέμνει τον κύκλο στο Μ. Φέρνουμε και την ΚΝ.

Επειδή τώρα $\overset{\frown}{AB\Gamma H} = \overset{\frown}{AE\Delta H}$ και $\overset{\frown}{AB\Gamma} = \overset{\frown}{AE\Delta}$ είναι και $\overset{\frown}{\Gamma H} = \overset{\frown}{H\Delta}$ (στμ: τα τόξα αντιστοιχούν στις κυρτές επίκεντρες γωνίες). Η ΓΔ όμως είναι η πλευρά του πενταγώνου και άρα η ΓΗ θα είναι η πλευρά του δεκαγώνου. Επίσης καθώς ΖΑ = ΖΒ και ΖΚ ⊥ ΑΒ είναι και $\widehat{AZK} = \widehat{KZB}$ (Β1, Π5, σελ. 24 και Β1, Π26, σελ. 36).

Τότε όμως θα είναι $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{KB}$ (Β3, Π26, σελ. 100) οπότε $\overset{\frown}{AB} = 2 \cdot \overset{\frown}{BK}$ και άρα η ΑΚ είναι πλευρά δεκαγώνου. Ομοίως $\overset{\frown}{AK} = 2 \cdot \overset{\frown}{KM}$ και επειδή $\overset{\frown}{AB} = 2 \cdot \overset{\frown}{BK}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{AB}$ έπεται ότι $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 2 \cdot \overset{\frown}{BK}$. Όμως, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 2 \cdot \overset{\frown}{\Gamma H}$ και έτσι θα είναι $\overset{\frown}{\Gamma H} = \overset{\frown}{BK}$. Αλλά $\overset{\frown}{BK} = 2 \cdot \overset{\frown}{KM}$ (διότι $\overset{\frown}{AK} = 2 \cdot \overset{\frown}{KM}$) και επομένως $\overset{\frown}{\Gamma H} = 2 \cdot \overset{\frown}{KM}$.

Επιπλέον είναι $\overset{\frown}{\Gamma B} = 2 \cdot \overset{\frown}{BK}$ διότι $\overset{\frown}{\Gamma B} = \overset{\frown}{BA}$ και έτσι $\overset{\frown}{HB} = 2 \cdot \overset{\frown}{BM}$ οπότε $\widehat{HZB} = 2 \cdot \widehat{BZM}$ (Β6, Π33, σελ. 170). Είναι όμως και $\widehat{HZB} = 2 \cdot \widehat{ZAB}$ (διότι η $\widehat{HZB}$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΒΖ και $\widehat{ZAB} = \widehat{ABZ}$) οπότε από την παραπάνω έπεται $\widehat{BZM} = \widehat{ZAB}$.

Τότε επειδή τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΒΖΝ έχουν και την $\widehat{ABZ}$ κοινή θα έχουν ίση και την τρίτη γωνίας τους, δηλαδή $\widehat{AZB} = \widehat{BNZ}$ (Β1, Π32, σελ. 40) και άρα τα τρίγωνα αυτά είναι ισογώνια. Συνεπώς, ισχύει η αναλογία ΑΒ/ΒΖ = ΖΒ/ΒΝ (Β6, Π4, σελ. 144) και άρα $AB \cdot BN = BZ^2$ (Β6, Π17, σελ. 154).

Συγκρίνοντας τώρα τα τρίγωνα ΑΛΝ και ΚΛΝ παρατηρούμε ότι αυτά έχουν ΑΛ = ΛΚ, την ΛΝ κοινή και $\widehat{\text{ΝΛΑ}} = \widehat{\text{ΝΛΚ}} = 1$ορθή και άρα είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23) οπότε ΚΝ = ΑΝ και $\widehat{\text{ΛΚΝ}} = \widehat{\text{ΛΑΝ}}$.

Αλλά $\widehat{\text{ΛΑΝ}} = \widehat{\text{ΚΒΝ}}$ (στμ: το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισοσκελές) (Β3, Π29, σελ. 102 και Β1, Π5, σελ. 24) οπότε $\widehat{\text{ΛΚΝ}} = \widehat{\text{ΚΒΝ}}$. Τότε όμως τα τρίγωνα ΚΝΑ και ΚΒΑ έχουν δύο γωνίες ίσες καθώς $\widehat{\text{ΛΚΝ}} = \widehat{\text{ΚΒΝ}}$ ενώ η γωνία με κορυφή το Α είναι κοινή, οπότε θα έχουν ίση και την τρίτη γωνία τους. Δηλαδή $\widehat{\text{ΑΚΒ}} = \widehat{\text{ΚΝΑ}}$ (Β1, Π32, σελ. 40).

Έτσι, τα ΚΒΑ και ΚΝΑ είναι ισογώνια και επομένως ισχύει η αναλογία ΒΑ/ΑΚ = ΚΑ/ΑΝ (Β6, Π4, σελ. 144). Άρα ΒΑ · ΑΝ = ΑΚ^2 (Β6, ΠΙ7, σελ. 154).

Έχουμε όμως δείξει ότι ΑΒ · ΒΝ = ΒΖ^2 και άρα αθροίζοντας κατά μέλη με την παραπάνω παίρνουμε

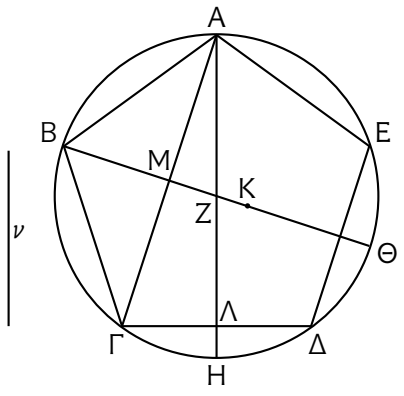
$$\text{ΒΑ} \cdot \text{ΑΝ} + \text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΝ} = \text{ΑΚ}^2 + \text{ΒΖ}^2$$

από όπου προκύπτει ότι $\text{ΒΑ}^2 = \text{ΑΚ}^2 + \text{ΒΖ}^2$ (Β2, Π2, σελ. 60), ενώ η ΒΑ είναι πλευρά πενταγώνου, η ΒΖ πλευρά εξαγώνου και η ΑΚ πλευρά δεκαγώνου που έχουν εγγραφεί στον ίδιο κύκλο ΑΒΓΔΕ.

Συνεπώς, το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ίσης με την πλευρά του πενταγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές την πλευρά του εξαγώνου και την πλευρά του δεκαγώνου που έχουν εγγραφεί στον ίδιο κύκλο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 11 (796) *Αν σε έναν κύκλο με ρητή διάμετρο εγγραφεί ισόπλευρο πεντάγωνο τότε η πλευρά του πενταγώνου είναι άλογος και μάλιστα ελάσσων.*

Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓΔΕ με ρητή διάμετρο στον οποίο έχει εγγραφεί το ισόπλευρο πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ. Ισχυρίζομαι ότι η πλευρά του πενταγώνου είναι άλογος και μάλιστα ελάσσων (Β10, Π76, σελ. 309).



Λαμβάνουμε το κέντρο Ζ του κύκλου (Β3, ΠΙ, σελ. 81) και φέρνουμε τις ΑΖ και ΖΒ οι οποίες προεκτεινόμενες τέμνουν τον κύκλο στα Η και Θ αντίστοιχα, και η ΑΖ τη ΓΔ στο Λ. Φέρνουμε και την ΑΓ ενώ στη ΒΘ λαμβάνουμε το τμήμα ΖΚ = ΑΖ/4.

Επειδή η ΑΖ είναι ρητή έπεται ότι και η ΖΚ είναι ρητή. Καθώς η ΒΖ είναι ρητή συμπεραίνουμε ότι και η ΒΖ + ΖΚ = ΒΚ είναι επίσης ρητή.

Επίσης καθώς $\widehat{\text{ΑΓΗ}} = \widehat{\text{ΑΔΗ}}$ με $\widehat{\text{ΑΒΓ}} = \widehat{\text{ΑΕΔ}}$ είναι και $\widehat{\text{ΓΗ}} = \widehat{\text{ΗΔ}}$ (στμ: που αντιστοιχούν στις κυρτές επίκεντρες γωνίες).

Φέρνοντας την ΑΔ και καθώς τα τρίγωνα ΑΓΛ και ΑΛΔ είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23) έχουμε ότι $\widehat{A\Lambda\Gamma} = \widehat{A\Lambda\Delta} = 1$ ορθή και $\Gamma\Delta = 2 \cdot \Gamma\Lambda$.

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $\widehat{BMA} = \widehat{BM\Gamma} = 1$ ορθή και $A\Gamma = 2 \cdot \Gamma M$.

Τότε τα τρίγωνα ΑΛΓ και ΑΜΖ έχουν $\widehat{A\Lambda\Gamma} = \widehat{AMZ} = 1$ ορθή και την $\widehat{\Lambda A\Gamma}$ κοινή όπότε θα είναι και $\widehat{A\Gamma\Lambda} = \widehat{MZA}$ (Β1, Π32, σελ. 40).

Έτσι, τα ΑΛΓ και ΑΜΖ είναι ισογώνια και άρα ισχύει η αναλογία $\Lambda\Gamma/\Gamma A = MZ/ZA$ (Β6, Π4, σελ. 144) οπότε

$$\frac{2 \cdot \Lambda\Gamma}{\Gamma A} = \frac{2 \cdot MZ}{ZA}.$$

Όμως

$$\frac{2 \cdot MZ}{ZA} = \frac{MZ}{ZA/2}$$

και έτσι

$$\frac{2 \cdot \Lambda\Gamma}{\Gamma A} = \frac{MZ}{ZA/2}$$

Παίρνοντας τα μισά των παρονομαστών της παραπάνω αναλογίας έχουμε

$$\frac{2 \cdot \Lambda\Gamma}{\Gamma A/2} = \frac{MZ}{ZA/4}$$

από όπου, καθώς $\Delta\Gamma = 2 \cdot \Lambda\Gamma$, $\Gamma M = \Gamma A/2$ και $ZK = ZA/4$, προκύπτει ότι

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma M} = \frac{MZ}{ZK}.$$

Συνθέτοντας (Π18, σελ. 135),

$$\frac{\Delta\Gamma + \Gamma M}{\Gamma M} = \frac{MZ + ZK}{ZK},$$

οπότε

$$\frac{(\Delta\Gamma + \Gamma M)^2}{\Gamma M^2} = \frac{MK^2}{KZ^2}. \tag{17}$$

Επειδή τώρα η ΑΓ βρίσκεται απέναντι από την γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ του ισόπλευρου πενταγώνου, όταν τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο το μεγαλύτερο από τα τμήματα που προκύπτουν θα είναι ίσο με την πλευρά του πενταγώνου, έστω την ΔΓ (Π8, σελ. 434).

Επίσης, το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά το άθροισμα του μεγαλύτερου από τα τμήματα που προκύπτουν από την διαίρεση σε άκρο και μέσο λόγο και του μισού του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος είναι ίσο με το πενταπλάσιο του εμβαδού του τετραγώνου πλευράς ίσης με με το μισό του αρχικού τμήματος. Δηλαδή,

$$(\Delta\Gamma + \Gamma M)^2 = 5 \cdot \Gamma M^2$$

και άρα αντικαθιστώντας στην (17) παίρνουμε $MK^2 = 5 \cdot KZ^2$. Επειδή τώρα η KZ^2 είναι ρητή (διότι η διάμετρος είναι ρητή) έπεται ότι είναι ρητή και η MK^2 (Β10, Ορ4, σελ. 226 και Β10, Π6, σελ. 232). Έτσι η ΜΚ είναι ρητή (Β10, Ορ4, σελ. 226).

Επειδή πάλι $BZ = 4 \cdot ZK$ είναι και $BK = 5 \cdot KZ$ και επομένως $BK^2 = 25 \cdot KZ^2$. Επιπλέον, $MK^2 = 5 \cdot KZ^2$ και άρα $BK^2 = 5 \cdot KM^2$. Συνεπώς το BK^2 προς το KM^2 δεν έχει λόγο ίσο με τον λόγο δύο τετράγωνων αριθμών και άρα η BK είναι ασύμμετρη με την KM (Β10, Π9, σελ. 233). Καθώς καθεμιά από αυτές είναι ρητή έπεται ότι τα BK και KM είναι ρητά δυνάμει μόνο σύμμετρα.

Αν τώρα από ρητή αφαιρεθεί ρητή που είναι δυνάμει σύμμετρη προς όλη, η υπόλοιπη είναι άλογος και μάλιστα αποτομή (Β10, Π73, σελ. 308) και άρα η MB είναι αποτομή με προσαρμόζουσα την MK.

Ισχυρίζομαι ότι η MB είναι τέταρτη αποτομή.

Έστω $BK^2 - KM^2 = \nu^2$, δηλαδή έστω ότι το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς BK υπερέχει από το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς KM κατά το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς ν. Επειδή η KZ είναι σύμμετρη με την ZB έπεται ότι και το άθροισμα $KZ + ZB = KB$ είναι σύμμετρο προς την ZB (Β10, ΠΙ5, σελ. 238).

Αλλά η ZB είναι σύμμετρη με την ΒΘ οπότε και η BK είναι σύμμετρη με την ΒΘ (Β10, ΠΙ2, σελ. 236).

Επειδή $BK^2 = 5 \cdot KM^2$ το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς BK έχει λόγο προς το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς KM ίσο με 5/1 και επομένως (Β5, ΠΙ9, σελ. 136 Πόρισμα) θα είναι και

$$\frac{BK^2}{N^2} = \frac{5}{4}$$

που δεν είναι λόγος τετράγωνων αριθμών. Άρα το BK είναι ασύμμετρο με το ν (Β10, Π9, σελ. 233). Έτσι το BK^2 υπερέχει από το KM^2 κατά τετράγωνο πλευράς ασύμμετρης με την BK.

Επειδή λοιπόν το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς BK υπερέχει από το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την προσαρμόζουσα KM κατά το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά που είναι ασύμμετρη με την BK έπεται ότι η BK είναι σύμμετρη με την αρχική ρητή ΒΘ. Άρα η MB είναι τέταρτη αποτομή (Β10, Ορ3, Ορ4, σελ. 315).

Το ορθογώνιο πάλι με πλευρές ρητή και τέταρτη αποτομή έχει εμβαδόν άλογο και η πλευρά του ισοδύναμου προς αυτό τετράγωνο είναι άλογος και μάλιστα ελάσσων (Β10, Π94, σελ. 323).

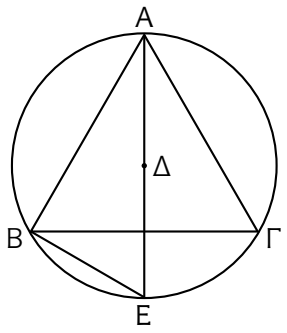
Επίσης, είναι $BΘ \cdot BM = AB^2$ διότι αν αχθεί η ΑΘ τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΒΜ είναι ισογώνια οπότε ισχύει η αναλογία ΘΒ/ΒΑ = ΑΒ/ΒΜ.

Συνεπώς, η πλευρά ΑΒ του πενταγώνου είναι άλογος και μάλιστα ελάσσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 12 (798) *Αν σε έναν κύκλο εγγραφεί ισόπλευρο τρίγωνο τότε το τετράγωνο της πλευράς του τριγώνου είναι τριπλάσιο από το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου.*

Απόδειξη. Έστω ο κύκλος ΑΒΓ και εγγραφεί σε αυτόν το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ (Β4, Π2, σελ. 112). Ισχυρίζομαι ότι το τετράγωνο της πλευράς του τριγώνου είναι τριπλάσιο από το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου.

Λαμβάνουμε το κέντρο Δ του κύκλου ΑΒΓ (Β3, Π1, σελ. 81) και φέρνουμε την ΑΔ που προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο ΑΒΓ στο Ε. Φέρνουμε και την ΒΕ.



Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο το $\overset{\frown}{\text{ΒΕΓ}}$ είναι το 1/3 της περιφέρειας του κύκλου και άρα το $\overset{\frown}{\text{ΒΕ}}$ είναι ίσο με το 1/6 της περιφέρειας του κύκλου. Άρα η ΒΕ είναι πλευρά εξαγώνου (στμ: ισόπλευρου και ισογώνιου) και είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου. Έτσι, $\text{ΒΕ} = \text{ΔΕ}$ (Πόρισμα, Β4, Π15, σελ. 122).

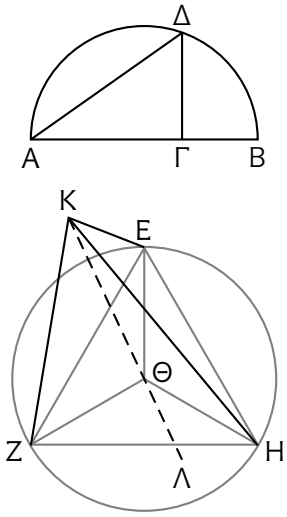
Καθώς $\text{ΑΕ} = 2 \cdot \text{ΔΕ}$ είναι $\text{ΑΕ}^2 = 4 \cdot \text{ΔΕ}^2 = 4 \cdot \text{ΒΕ}^2$.

Επίσης, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51) είναι $\text{ΑΕ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΕ}^2$ καθώς $\widehat{\text{ΑΒΕ}} = 1$ορθή επειδή είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο (Β3, Π31, σελ. 102).

Από τις δύο παραπάνω ισότητες προκύπτει $\text{ΑΒ}^2 = 3 \cdot \text{ΒΕ}^2 = 3 \cdot \text{ΔΕ}^2$.

Συνεπώς, το τετράγωνο της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου που έχει εγγραφεί σε έναν κύκλο είναι ίσο με το τριπλάσιο του τετραγώνου της ακτίνας του κύκλου· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 13 (Κατασκευή) (798) *Να κατασκευαστεί πυραμίδα* (στμ: κανονικό τετράεδρο) *και να περιληφθεί σε δοθείσα σφαίρα. Στην συνέχεια να δειχθεί ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι ίσα με τα* 3/2 *του τετραγώνου της πλευράς της πυραμίδας.*



Υλοποίηση: Έστω ΑΒ η διάμετρος της σφαίρας και Γ το σημείο της τέτοιο ώστε $\text{ΑΓ} = 2 \cdot \text{ΓΒ}$ (Β6, Π10, σελ. 149).

Με διάμετρο ΑΒ γράφουμε το ημικύκλιο $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ και από το Γ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΒ που τέμνει το ημικύκλιο $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ στο Δ. Φέρνουμε και την ΔΑ.

Στην συνέχεια γράφουμε τον κύκλο ΕΖΗ με ακτίνα ίση με ΔΓ και εγγράφουμε σε αυτόν το ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΗ (Β4, Π2, σελ. 112) ενώ λαμβάνουμε και το κέντρο Θ του κύκλου ΕΖΗ (Β3, Π1, σελ. 81). Φέρνουμε και τις ΕΘ, ΘΖ και ΘΗ ενώ από το Θ υψώνουμε την κάθετη ΘΚ προς το επίπεδο του κύκλου ΕΖΗ.

Τότε η ΘΚ θα είναι κάθετη στις ΕΘ, ΘΖ και ΘΗ καθώς είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου του κύκλου ΕΖΗ που διέρχεται από το Θ (Β11, Ορ3, σελ. 345).

Επειδή ΑΓ = ΘΚ, ΓΔ = ΘΕ και $\widehat{\text{ΕΘΚ}} = \widehat{\text{ΑΓΔ}} = 1$ορθή τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΘΚΕ είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23), οπότε ΑΔ = ΚΕ.

Για τους ίδιους λόγους ισχύουν ΚΖ = ΔΑ και ΚΗ = ΔΑ οπότε ΚΕ = ΚΖ = ΚΗ.

Επειδή ΑΓ = 2 · ΓΒ θα είναι και ΑΒ = 3 · ΒΓ ενώ ισχύει και ΑΒ/ΒΓ = $\text{ΑΔ}^2/\text{ΔΓ}^2$ όπως θα δειχθεί στο λήμμα που ακολουθεί παρακάτω.

Από τις παραπάνω έπεται ότι $\text{ΑΔ}^2 = 3 \cdot \text{ΔΓ}^2$ ενώ $\text{ΖΕ}^2 = 3 \cdot \text{ΕΘ}^2$ (Π12, σελ. 439).

Επιπλέον καθώς ΔΓ = ΕΘ από τις δύο προηγούμενες προκύπτει ότι ΑΔ = ΖΕ και καθώς ΑΔ = ΚΕ = ΚΖ = ΚΗ έπεται ότι ΖΗ = ΗΕ = ΕΖ = ΚΕ = ΚΖ = ΚΗ.

Έτσι τα τέσσαρα τρίγωνα ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ και ΚΕΗ είναι ισόπλευρα και άρα έχει κατασκευαστεί πυραμίδα με παράπλευρες έδρες τα τρίγωνα αυτά, βάση το τρίγωνο ΕΖΗ και κορυφή το Κ.

Μένει τώρα η πυραμίδα αυτή να περιληφθεί στην δοθείσα σφαίρα και να δειχθεί ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι ίσο με τα 3/2 του τετραγώνου της πλευράς της πυραμίδας.

Προεκτείνουμε την ΚΘ κατά τμήμα ΘΛ = ΓΒ. Επειδή ΑΓ/ΓΔ = ΓΔ/ΓΒ (Πόρισμα, Β6, Π8, σελ. 148) και ΑΓ = ΚΘ, ΓΔ = ΘΕ και ΓΒ = ΘΛ θα ισχύει και ΚΘ/ΘΕ = ΕΘ/ΘΛ ή $\text{ΚΘ} \cdot \text{ΘΛ} = \text{ΕΘ}^2$. Δηλαδή το ορθογώνιο που έχει τις πλευρές του ίσες με τις ΚΘ και ΘΛ είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο πλευράς ΕΘ (Β6, ΠΙ7, σελ. 154).

Επειδή $\widehat{\text{ΚΘΕ}} = \widehat{\text{ΕΘΛ}} = 1$ορθή, το ημικύκλιο που γράφεται με διάμετρο ΚΛ διέρχεται από το Ε και αυτό διότι αν φέρουμε την ΕΛ θα είναι $\widehat{\text{ΛΕΚ}} = 1$ορθή καθώς το τρίγωνο ΕΛΚ είναι ισογώνιο με κάθε ένα από τα ΕΛΘ και ΕΘΚ.

Περιστρέφοντας το ημικύκλιο περί την ΚΛ που διατηρούμε σταθερή μέχρι αυτό να επανέλθει στην αρχική του θέση τότε αυτό θα διέλθει και από τα Ζ, Η καθώς αν αχθούν οι ΖΛ και ΛΗ οι γωνίες παρά τα Ζ και Η είναι ορθές.

Επειδή ΚΛ = ΑΒ που είναι η διάμετρος της δοθείσης σφαίρας και ΑΓ = ΚΘ και ΓΒ = ΘΛ συμπεραίνουμε ότι η πυραμίδα έχει εγγραφεί στην δοθείσα σφαίρα.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι ίσο με τα 3/2 του τετραγώνου της πλευράς της πυραμίδας.

Πράγματι, καθώς ΑΓ = 2 · ΓΒ είναι και ΑΒ = 3 · ΒΓ και άρα

$$\text{ΒΑ} = \frac{3}{2}\text{ΑΓ}$$

Ακόμα είναι $ΒΑ/ΑΓ = ΒΑ^2/ΑΔ^2$ επειδή αν αχθεί η ΔΒ ισχύει $ΒΑ/ΑΔ = ΑΔ/ΑΓ$ από την ομοιότητα των τριγώνων ΔΑΒ και ΔΑΓ οπότε $ΒΑ/ΑΓ = ΒΑ^2/ΑΔ^2$ (Β5, Ορ9, σελ. 126).

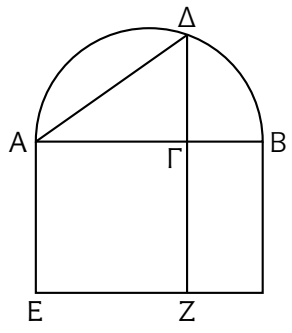
Έτσι ισχύει

$$ΒΑ^2 = \frac{3}{2}ΑΔ^2$$

και η ΑΒ είναι η διάμετρος της δοθείσας σφαίρας ενώ η ΑΔ είναι ίση με την πλευρά της πυραμίδας.

Συνεπώς, το τετράγωνο της διαμέτρου της δοθείσας σφαίρας είναι ίσο με τα 3/2 του τετραγώνου της πλευράς της πυραμίδας· όπερ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα 18 *Ισχύει ότι* $ΑΒ/ΒΓ = ΑΔ^2/ΔΓ^2$.



Απόδειξη. Θεωρούμε το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ που γράφτηκε παραπάνω, φέρνουμε την ΔΒ και κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΕΖ πλευράς ΑΓ. Στην συνέχεια συμπληρώνουμε και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΖΒ.

Τότε καθώς τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΑΓ είναι ισογώνια ισχύει η αναλογία $ΒΑ/ΑΔ = ΔΑ/ΑΓ$ ή $ΒΑ \cdot ΑΓ = ΔΑ^2$ και άρα το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει τις πλευρές του ίσες με ΒΑ και ΑΓ είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο πλευράς ΔΑ (Β6, ΠΙ7, σελ. 154).

Επειδή τώρα $ΑΒ/ΒΓ = |ΕΒ|/|ΒΖ|$ (Β6, ΠΙ, σελ. 142) και $|ΕΒ| = ΒΑ \cdot ΑΓ$ (διότι $ΕΑ = ΑΓ$) και $|ΒΖ| = ΑΓ \cdot ΓΒ$ θα είναι

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΒΑ \cdot ΑΓ}{ΒΓ \cdot ΑΓ}.$$

Επιπλέον ισχύουν $ΒΑ \cdot ΑΓ = ΑΔ^2$ και $ΑΓ \cdot ΓΒ = ΔΓ^2$ διότι η ΔΓ είναι η μέση ανάλογος των ΑΓ και ΓΒ (Πόρισμα, Β6, Π8, σελ. 148) καθώς $\widehat{ΛΔΒ} = 1$ ορθή.

Συνεπώς,

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ^2}{ΔΓ^2},$$

που είναι η αποδεικτέα· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 14 (Κατασκευή) (800) *Να κατασκευαστεί οκτάεδρο* (στμ: κανονικό) *και να περιληφθεί σε δοθείσα σφαίρα. Στην συνέχεια να δειχθεί ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι διπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του οκταέδρου.*

Υλοποίηση: Έστω ΑΒ η διάμετρος της δοθείσας σφαίρας. Διχοτομούμε την ΑΒ και έστω Γ το μέσο της. Στην συνέχεια γράφουμε το ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ και από το Γ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΒ που τέμνει το ημικύκλιο στο Δ.

Φέρνουμε και την ΔΒ και κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΕΖΗΘ πλευράς ίσης με ΔΒ. Φέρνουμε τις ΘΖ και ΕΗ και από το σημείο τομής τους Κ

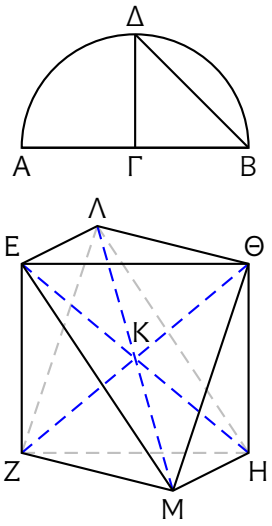
ανυψώνουμε την ΚΛ κάθετη στο επίπεδο του τετραγώνου ΕΖΗΘ ώστε να ισχύει ΚΛ = ΕΚ = ΖΚ = ΗΚ = ΘΚ.

Προεκτείνουμε την ΚΛ προς το Κ κατά τμήμα ΚΜ = ΚΛ και φέρνουμε τις ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ και ΜΘ.

Τότε καθώς ΚΕ = ΚΘ και $\widehat{\text{ΕΚΘ}}$ = 1 ορθή, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51) έπεται ότι $\text{ΘΕ}^2 = 2 \cdot \text{ΕΚ}^2$. Επειδή πάλι ΛΚ = ΚΕ και $\widehat{\text{ΛΚΕ}}$ = 1 ορθή ισχύει αντίστοιχα ότι $\text{ΕΛ}^2 = 2 \cdot \text{ΕΚ}^2$ οπότε $\text{ΛΕ}^2 = \text{ΕΘ}^2$ και άρα ΛΕ = ΕΘ.

Για τους ίδιους λόγους ισχύει και ότι ΛΘ = ΘΕ και άρα το τρίγωνο ΛΕΘ είναι ισόπλευρο.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και τα υπόλοιπα τρίγωνα με βάσεις τις πλευρές του τετραγώνου ΕΖΗΘ και κορυφές τα Λ και Μ είναι ισόπλευρα.



Έτσι έχει κατασκευαστεί οκτάεδρο που περιέχεται σε οκτώ ισόπλευρα τρίγωνα.

Πρέπει τώρα το οκτάεδρο αυτό να περιληφθεί στην δοθείσα σφαίρα και να δειχθεί ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας αυτής είναι διπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του οκταέδρου.

Επειδή ΛΚ = ΚΜ = ΚΕ το ημικύκλιο που γράφεται με διάμετρο ΛΜ διέρχεται από το Ε. Έτσι, αν το ημικύκλιο αυτό περιστραφεί περί την ΛΜ που παραμένει σταθερή και επανέλθει στην αρχική του θέση θα διέλθει και από τα Ζ, Η και Θ οπότε το οκτάεδρο περιλαμβάνεται σε μια σφαίρα.

Ισχυρίζομαι ότι το οκτέδρο περιλαμβάνεται στην δοθείσα σφαίρα. Πράγματι επειδή τα ΛΚΕ και ΜΚΕ έχουν ΛΚ = ΚΜ, την ΚΕ κοινή και $\widehat{\text{ΛΚΕ}}$ = $\widehat{\text{ΜΚΕ}}$ = 1 ορθή είναι ίσα (Β1, Π4, σελ. 23) και άρα ΛΕ = ΕΜ.

Ακόμα $\widehat{\text{ΛΕΜ}}$ = 1 ορθή διότι βαίνει σε ημικύκλιο (Β3, Π31, σελ. 102). Τότε όμως από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51) έχουμε $\text{ΛΜ}^2 = 2 \cdot \text{ΛΕ}^2$.

Επειδή πάλι ΑΓ = ΓΒ θα είναι και ΑΒ = 2·ΒΓ ενώ ισχύει και η αναλογία $\text{ΑΒ}/\text{ΒΓ} = \text{ΑΒ}^2/\text{ΒΔ}^2$ (Β6, Π8, σελ. 148 και Β5, Ορ9, σελ. 126), επομένως θα ισχύει $\text{ΑΒ}^2 = 2 \cdot \text{ΒΔ}^2$.

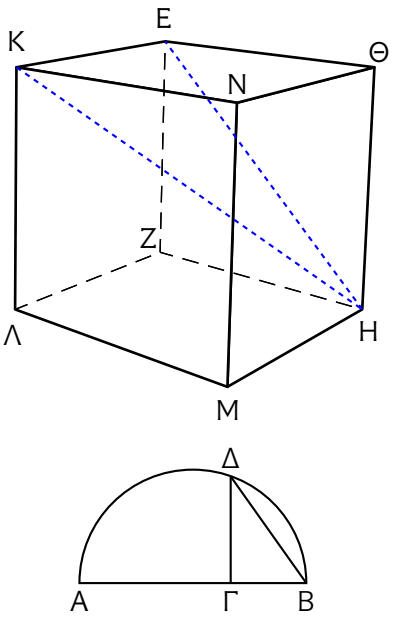
Επιπλέον $\text{ΔΒ}^2 = \text{ΛΕ}^2$ καθώς έχει ληφθεί ΕΘ = ΔΒ και άρα $\text{ΑΒ}^2 = 2 \cdot \text{ΛΕ}^2$.

Έτσι καθώς έχει δειχθεί και ότι $\text{ΛΜ}^2 = 2 \cdot \text{ΛΕ}^2$ προκύπτει ότι $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΛΜ}^2$ και άρα ΑΒ = ΛΜ.

Δηλαδή η ΛΜ είναι ίση με τη διάμετρο ΑΒ της δοθείσας σφαίρας.

Συνεπώς, το οκτάεδρο έχει περιληφθεί στην δοθείσα σφαίρα ενώ αποδείχτηκε και ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας αυτής είναι διπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του οκταέδρου· όπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρόταση 15 (Κατασκευή) (801) *Να κατασκευαστεί κύβος και να περιληφθεί σε δοθείσα σφαίρα. Στην συνέχεια να δειχθεί ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι τριπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του κύβου.*



Υλοποίηση: Έστω ΑΒ η διάμετρος της δοθείσας σφαίρας. Λαμβάνουμε το σημείο της Γ ώστε ΑΓ = 2 · ΓΒ (Β6, Π10, σελ. 149) και γράφουμε το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ. Από το Γ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΒ που τέμνει το ημικύκλιο στο Δ. Φέρνουμε και την ΔΒ.

Στην συνέχεια κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΕΖΗΘ πλευράς ΔΒ και από τα Ε, Ζ, Η και Θ φέρνουμε τις κάθετες ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ αντίστοιχα στο επίπεδο του ΕΖΗΘ. Οι κάθετες κατασκευάζονται ώστε να είναι ίσες με την πλευρά του τετραγώνου ΕΖΗΘ, δηλαδή,

$$ΕΚ = ΖΛ = ΗΜ = ΘΝ = ΕΖ = ΖΗ = ΗΘ = ΘΕ.$$

Στην συνέχεια φέρνουμε και τις ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ και ΝΚ οπότε έχει κατασκευαστεί ο κύβος που περιέχεται σε έξι ίσα τετράγωνα.

Πρέπει τώρα ο κύβος αυτός να περιληφθεί στην δοθείσα σφαίρα και να δειχτεί ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας αυτής είναι τριπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του κύβου.

Φέρνουμε τις ΚΗ και ΕΗ. Τότε ΚΕ ⊥ ΕΗ καθώς είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου ΕΗ η οποία διέρχεται από το Ε (Β11, Ορ3, σελ. 345). Συνεπώς, $\widehat{ΚΕΗ} = 1$ ορθή.

Έτσι το ημικύκλιο που γράφεται με διάμετρο την ΚΗ διέρχεται και από το Ε.

Επειδή πάλι ΗΖ ⊥ ΖΛ και ΗΖ ⊥ ΖΕ έπεται ότι η ΗΖ είναι κάθετη στο επίπεδο ΖΚ (Β11, Π4, σελ. 350). Τότε αν φέρουμε και την ΖΚ θα είναι ΗΖ ⊥ ΖΚ και για αυτό το ημικύκλιο που γράφεται με διάμετρο ΗΚ διέρχεται και από το Ζ.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι το ημικύκλιο αυτό διέρχεται και από τις υπόλοιπες κορυφές του κύβου.

Αν λοιπόν το ημικύκλιο περιστραφεί περί την ΚΗ, που παραμένει σταθερή, μέχρι να επανέλθει στην αρχική του θέση ο κύβος θα έχει περιληφθεί σε μια σφαίρα.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι ο κύβος περιλαμβάνεται και στην δοθείσα σφαίρα. Πράγματι καθώς ΗΖ = ΖΕ και η γωνία στο Ζ είναι ορθή, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51) έχουμε $ΕΗ^2 = 2 \cdot ΕΖ^2$ και επειδή ΕΖ = ΕΚ θα είναι και $ΕΗ^2 = 2 \cdot ΕΚ^2$.

Όμως, και πάλι από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι $ΗΕ^2 + ΕΚ^2 = ΗΚ^2$ οπότε $3 \cdot ΕΚ^2 = ΗΚ^2$.

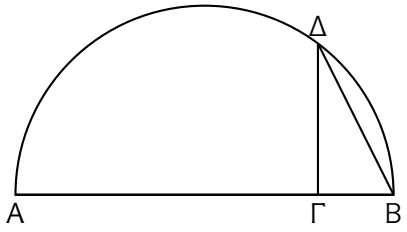
Επειδή ΑΒ = 3 · ΒΓ και $ΑΒ/ΒΓ = ΑΒ^2/ΒΔ^2$ είναι και $ΑΒ^2 = 3 \cdot ΒΔ^2$ ενώ έχει δειχθεί και ότι $ΗΚ^2 = 3 \cdot ΕΚ^2$.

Επιπλέον η ΚΕ έχει ληφθεί ώστε ΚΕ = ΒΔ και άρα από τις δύο προηγούμενες παίρνουμε $ΗΚ^2 = ΑΒ^2$ και έτσι ΗΚ = ΑΒ, οπότε η ΗΚ είναι ίση με την διάμετρο ΑΒ της δοθείσας σφαίρας.

Συνεπώς, ο κύβος έχει περιληφθεί στην δοθείσα σφαίρα ενώ αποδείχτηκε και ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας αυτής είναι ίσο με το τριπλάσιο του τετραγώνου της πλευράς του κύβου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ∎

Πρόταση 16 (Κατασκευή) (802) *Να κατασκευαστεί εικοσάεδρο* (στμ: κανονικό) *και να περιληφθεί σε δοθείσα σφαίρα. Στην συνέχεια να δειχθεί ότι η πλευρά του είναι άλογος και μάλιστα ελάσσων* (στμ: με ρητή τη διάμετρο της σφαίρας).

Υλοποίηση: Λαμβάνουμε την διάμετρο ΑΒ της δοθείσας σφαίρας και το σημείο της Γ ώστε ΑΓ = 4·ΓΒ. Γράφουμε το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και από το Γ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΒ που τέμνει το ημικύκλιο στο Δ. Φέρνουμε και την ΔΒ.



Στην συνέχεια λαμβάνουμε τον κύκλο ΕΖΗΘΚ με ακτίνα ίση με ΔΒ και εγγράφουμε σε αυτόν το ισογώνιο και ισόπλευρο πεντάγωνο ΕΖΗΘΚ (Β4, ΠΙΙ, σελ. 119).

Διχοτομούμε τα τόξα $\overset{\frown}{ΕΖ}$, $\overset{\frown}{ΖΗ}$, $\overset{\frown}{ΗΘ}$, $\overset{\frown}{ΘΚ}$ και $\overset{\frown}{ΚΕ}$ λαμβάνοντας τα σημεία τους Λ, Μ, Ν, Ξ και Ο αντίστοιχα και φέρνουμε τις ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ και ΕΟ.

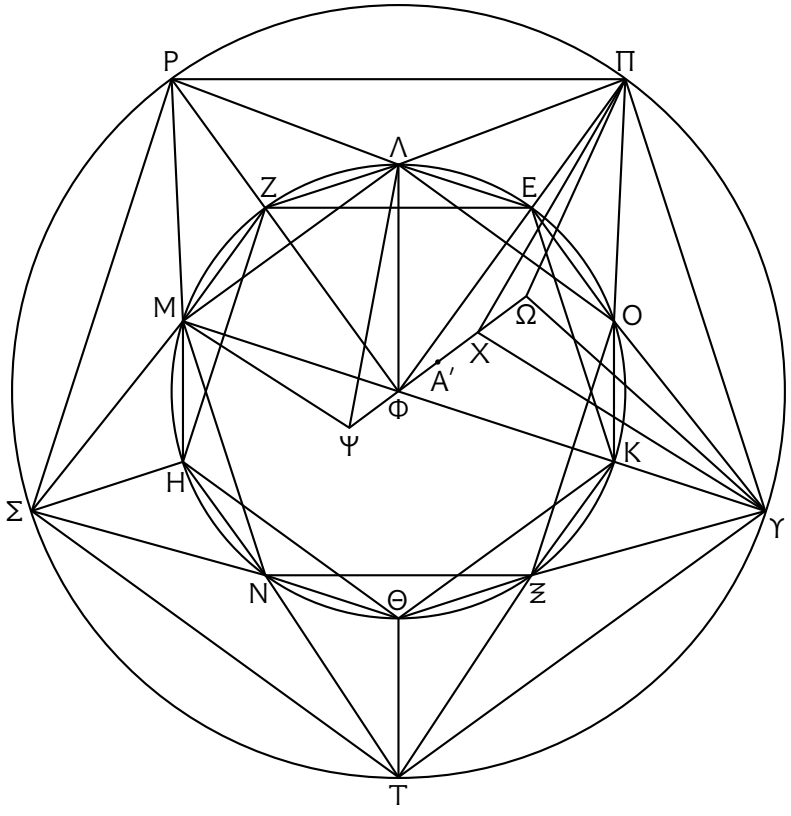
Τότε είναι ισόπλευρο και το πεντάγωνο ΛΜΝΞΟ και η ΕΟ είναι πλευρά δεκαγώνου.

Από τα Ε, Ζ, Η, Θ και Κ ανυψώνουμε τις κάθετες ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ και ΚΥ στο επίπεδο του κύκλου ώστε καθεμιά από αυτές να είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου ΕΖΗΘΚ. Φέρνουμε και τις ΠΡ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ και ΟΠ.

Επειδή τώρα οι ΕΠ και ΚΥ είναι κάθετες στο ίδιο επίπεδο έπεται ότι είναι παράλληλες (Β11, Π6, σελ. 352). Δηλαδή οι ΕΠ και ΚΥ είναι ίσες και παράλληλες. Τότε όμως και οι ΠΥ και ΕΚ είναι ίσες και παράλληλες καθώς συνδέουν τα άκρα των ΕΠ και ΚΥ προς το ίδιο μέρος (Β1, Π33, σελ. 40).

Καθώς η ΕΚ είναι πλευρά ισοπλεύρου πενταγώνου έπεται ότι και η ΠΥ είναι πλευρά ισοπλεύρου πενταγώνου που έχει εγγραφεί στον κύκλο ΕΖΗΘΚ (στμ: που είναι ίσος με τον κύκλο ΡΣΤΥ).

Για τους ίδιους λόγους καθεμιά από τις ΡΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ είναι ίση με την πλευρά του ισόπλευρου πενταγώνου που έχει εγγραφεί στον κύκλο ΕΖΗΘΚ (στμ: που είναι ίσος με τον κύκλο ΡΣΤΥ). Έτσι και το πεντάγωνο ΡΣΤΥ είναι ισόπλευρο.



Επειδή τώρα η ΠΕ είναι πλευρά εξαγώνου (στμ: ως μήκος για τον κύκλο ΕΖΗΘΚ), η ΕΟ πλευρά δεκαγώνου (που έχουν εγγραφεί στον ίδιο κύκλο) και $\overset{\frown}{\text{ΟΕΠ}} = 1$ορθή έπεται ότι η ΠΟ είναι πλευρά πενταγώνου (στμ: ως μήκος για τον κύκλο ΕΖΗΘΚ) καθώς το τετράγωνο με πλευρά την πλευρά του πενταγώνου έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα του εμβαδού

του τετραγώνου με πλευρά την πλευρά του εξαγώνου και του εμβαδού του τετραγώνου με πλευρά την πλευρά του δεκαγώνου, όταν τα πεντάγωνο, εξάγωνο και δεκάγωνο έχουν εγγραφεί στον ίδιο κύκλο (ΠΙ0, σελ. 436).

Ομοίως και η ΟΥ είναι πλευρά πενταγώνου ενώ και η ΠΥ είναι πλευρά πενταγώνου όπως δείξαμε παραπάνω.

Έτσι το τρίγωνο ΠΟΥ είναι ισόπλευρο και για τους ίδιους λόγους τα τρίγωνα ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ και ΤΞΥ είναι ισόπλευρα.

Επειδή οι ΠΛ και ΠΟ δείχτηκε ότι είναι πλευρές πενταγώνου και η ΛΟ θα είναι πλευρά πενταγώνου και έτσι το ΠΛΟ είναι ισόπλευρο.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και τα ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ και ΞΥΟ είναι ισόπλευρα.

Στην συνέχεια λαμβάνουμε το κέντρο Φ του κύκλου ΕΖΗΘΚ (Β3, ΠΙ, σελ. 81) και ανυψώνουμε από το Φ την ΦΩ κάθετη προς το επίπεδο του κύκλου και την προεκτείνουμε προς την άλλη μεριά του επιπέδου κατά τμήμα ΦΨ ώστε η ΦΧ να είναι πλευρά εξαγώνου και οι ΦΨ και ΧΩ να είναι πλευρές δεκαγώνου. Φέρνουμε και τις ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ και ΨΜ.

Επειδή τώρα οι οι ΦΧ και ΠΕ είναι κάθετες στο ίδιο επίπεδο θα είναι μεταξύ τους παράλληλες (Β11, Π6, σελ. 352) ενώ είναι και ίσες.

Τότε θα είναι και οι ΕΦ και ΠΧ ίσες και παράλληλες (Β1, Π33, σελ. 40) και καθώς η ΕΦ είναι πλευρά εξαγώνου έπεται ότι και η ΠΧ είναι πλευρά εξαγώνου.

Επειδή η ΠΧ είναι πλευρά εξαγώνου ενώ η ΧΩ πλευρά δεκαγώνου και $\widehat{\Pi X \Omega} = 1$ορθή Β11, Ορ3, σελ. 345 και Β1, Π29, σελ. 38) έπεται ότι και η ΠΩ είναι πλευρά πενταγώνου (ΠΙ0, σελ. 436).

Για τους ίδιους λόγους και η ΥΩ είναι πλευρά πενταγώνου. Πράγματι, επειδή αν φέρουμε τις ΦΚ και ΧΥ αυτές θα είναι ίσες και παράλληλες, οπότε καθώς η ΦΚ είναι πλευρά εξαγώνου σαν ακτίνα του κύκλου, έπεται ότι και η ΧΥ είναι πλευρά εξαγώνου. Τότε όμως καθώς η ΧΩ είναι πλευρά δεκαγώνου και $\widehat{\Upsilon X \Omega} = 1$ορθή έπεται ότι η ΥΩ είναι πλευρά πενταγώνου (ΠΙ0, σελ. 436).

Αλλά και η ΠΥ είναι πλευρά πενταγώνου και άρα το τρίγωνο ΠΥΩ είναι ισόπλευρο.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και τα τρίγωνα με βάσεις ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ και ΤΥ και κορυφή το Ω είναι ισόπλευρα.

Επειδή πάλι η ΦΛ είναι πλευρά εξαγώνου, η ΦΨ πλευρά δεκαγώνου και $\widehat{\Lambda \Phi \Psi} = 1$ορθή έπεται ότι η ΛΨ είναι πλευρά πενταγώνου (ΠΙ0, σελ. 436).

Ομοίως αν φέρουμε την ΜΦ που είναι πλευρά εξαγώνου έπεται ότι και η ΜΨ είναι πλευρά πενταγώνου ενώ και η ΛΜ είναι πλευρά πενταγώνου. Έτσι, το τρίγωνο ΛΜΨ είναι ισόπλευρο και όμοια αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα με βάσεις τις ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ και κορυφή το Ψ είναι ισόπλευρα.

Κατασκευάστηκε λοιπόν εικοσάεδρο που περιέχεται σε είκοσι ισόπλευρα τρίγωνα.

Πρέπει τώρα το εικοσάεδρο αυτό να περιληφθεί στην δοθείσα σφαίρα και να δειχθεί ότι η πλευρά του είναι άλογος και μάλιστα ελάσσων.

Επειδή η ΦΧ είναι πλευρά εξαγώνου και η ΧΩ πλευρά δεκαγώνου, η ΦΩ έχει διαιρεθεί από το Χ σε άκρο και μέσο λόγο με μεγαλύτερο τμήμα το ΦΧ (Π9, σελ. 435). Έτσι, $\Omega\Phi/\Phi X = \Phi X/X\Omega$ και επειδή $\Phi X = \Phi E$ και $X\Omega = \Phi\Psi$ έπεται $\Omega\Phi/\Phi E = E\Phi/\Phi\Psi$.

Επίσης $\widehat{\Omega\Phi E} = \widehat{E\Phi\Psi} = 1$ ορθή και άρα αν φέρουμε την ΕΩ θα είναι και $\widehat{\Psi E\Omega} = 1$ ορθή από την ομοιότητα των τριγώνων ΨΕΩ και ΦΕΩ (Β6, Π8, σελ. 148).

Ομοίως επειδή $\Omega\Phi/\Phi X = \Phi X/X\Omega$ και $\Omega\Phi = \Psi X$ και $\Phi X = X\Pi$ θα είναι $\Psi X/X\Pi = \Pi X/X\Omega$ και αν φέρουμε την ΠΨ η γωνία στο Π θα είναι ορθή (Β6, Π8, σελ. 148)

Έτσι το ημικύκλιο διαμέτρου ΨΩ διέρχεται και από το Π (Β1, Π31, σελ. 39). Αν λοιπόν το ημικύκλιο αυτό περιστραφεί περί την ΨΩ (που παραμένει σταθερή) μέχρι να επιστρέψει στην αρχική του θέση θα διέλθει από το Π και τις υπόλοιπες κορυφές του εικοσαέδρου και άρα το εικοσάεδρο θα έχει περιληφθεί σε μια σφαίρα.

Διχοτομούμε την ΦΧ λαμβάνοντας το σημείο A'. Επειδή η ΦΩ έχει τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο από το Χ με μικρότερο τμήμα τον ΩΧ έπεται ότι το τετράγωνο με πλευρά $\Omega X + XA' = \Omega A'$ είναι ισοδύναμο με το πενταπλάσιο του τετραγώνου με πλευρά το μισό του μεγαλύτερου τμήματος από αυτά που έχουν προκύψει από την διαίρεση σε άκρο και μέσο λόγο (Π3, σελ. 429). Δηλαδή, $A'\Omega^2 = 5 \cdot A'X^2$ ενώ είναι και $\Omega\Psi = 2 \cdot \Omega A'$ και $\Phi X = 2 \cdot A'X$ και άρα $\Omega\Psi^2 = 5 \cdot \Phi X^2$.

Επειδή τώρα $A\Gamma = 4 \cdot \Gamma B$ θα είναι και $AB = 5 \cdot B\Gamma$ ενώ ισχύει η αναλογία $AB/B\Gamma = AB^2/B\Delta^2$ (Β6, Π8, σελ. 148 και Β5, Ορ9, σελ. 126) οπότε $AB^2 = 5 \cdot B\Delta^2$.

Έχουμε όμως δείξει και ότι $\Omega\Psi^2 = 5 \cdot \Phi X^2$ ενώ $B\Delta = \Phi X$ διότι είναι ακτίνες του κύκλου ΕΖΗΘΚ. Συνεπώς, $AB = \Omega\Psi$ και άρα η ΩΨ είναι ίση με την διάμετρο ΑΒ της δοθείσας σφαίρας. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι το εικοσάεδρο έχει περιληφθεί στην δοθείσα σφαίρα.

Ισχυρίζομαι τέλος ότι η πλευρά του εικοσαέδρου είναι άλογος και μάλιστα ελάσσων (Β10, Π76, σελ. 309).

Πράγματι επειδή η διάμετρος της σφαίρας είναι ρητή και το τετράγωνο με πλευρά την διάμετρο είναι ισοδύναμο με το πενταπλάσιο του τετραγώνου με πλευρά την ακτίνα του κύκλου ΕΖΗΘΚ, έπεται ότι είναι ρητή και η ακτίνα του κύκλου ΕΖΗΘΚ.

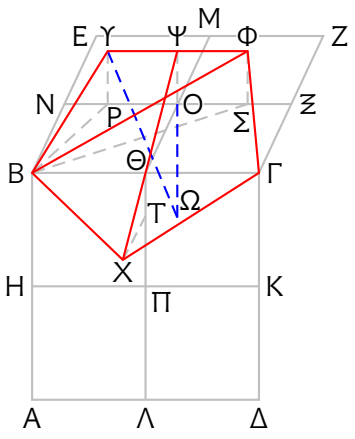
Αν όμως σε έναν κύκλο με ρητή διάμετρο εγγραφεί ισόπλευρο πεντάγωνο τότε η πλευρά του πενταγώνου είναι άλογος και μάλιστα ελάσσων (Π11, σελ. 437).

Η πλευρά όμως του πενταγώνου ΕΖΗΘΚ είναι η πλευρά του εικοσαέδρου. Άρα η πλευρά του εικοσαέδρου είναι άλογος και μάλιστα ελάσσων.

Πόρισμα 28 *Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι ισοδύναμο με το πενταπλάσιο του τετραγώνου με πλευρά την ακτίνα του κύκλου στον οποίο έχει αναγραφεί το εικοσάεδρο.*

Επιπλέον, η διάμετρος της σφαίρας αποτελείται από την πλευρά του εξαγώνου και δύο φορές από την πλευρά του δεκαγώνου που έχουν εγγραφεί στον κύκλο αυτό· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ∆

Πρόταση 17 (Κατασκευή) (805) *Να κατασκευαστεί δωδεκάεδρο* (στμ: κανονικό) *και να περιληφθεί σε δοθείσα σφαίρα. Στην συνέχεια να δειχθεί ότι η πλευρά του είναι άλογος και μάλιστα αποτομή* (στμ: με ρητή τη διάμετρο της σφαίρας).



Υλοποίηση: Κατασκευάζουμε τον κύβο (Π15, σελ. 444) και λαμβάνουμε δύο από τις έδρες του που είναι κάθετες μεταξύ τους. Έστω ΑΒΓΔ και ΓΒΕΖ οι δύο αυτές έδρες.

Διχοτομούμε τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ και ΖΓ λαμβάνοντας τα σημεία τυος Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν και Ƶ αντίστοιχα και φέρνουμε τις ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ και ΝƵ.

Έστω Ο το σημείο τομής των ΜΘ και ΝƵ και Π το σημείο τομής των ΗΚ και ΘΛ.

Στην συνέχεια διχοτομούμε σε άκρο και μέσο λόγο τις ΝΟ, ΟƵ και ΘΠ λαμβάνοντας τα σημεία τους Ρ, Σ και Τ αντίστοιχα και έστω ότι τα μεγαλύτερα που προκύπτουν είναι τα ΡΟ, ΟΣ και ΤΠ.

Από τα Ρ, Σ και Τ ανυψώνουμε τις κάθετες ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ προς τις δύο έδρες του κύβου ώστε οι κάθετες αυτές να είναι αντίστοιχα ίσες με τις ΡΟ, ΟΣ και ΤΠ. Φέρνουμε και τις ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ και ΦΥ.

Ισχυρίζομαι ότι το πεντάγωνο ΥΒΧΓΦ είναι ισόπλευρο, βρίσκεται επί ενός επιπέδου και είναι ισογώνιο.

Πράγματι, φέρνουμε τις ΡΒ, ΣΒ και ΦΒ. Επειδή η ΝΟ διαιρείται σε άκρο και μέσο λόγο από το Ρ και το μεγαλύτερο τμήμα είναι το ΡΟ ισχύει $ON^2 + NP^2 = 3 \cdot PO^2$ (Π4, σελ. 430).

Επειδή ΟΝ = ΝΒ και ΟΡ = ΡΥ από την προηγούμενη έπεται $NB^2 + NP^2 = 3 \cdot PY^2$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (ΒΙ, Π47, σελ. 51) όμως

είναι $\mathrm{NB}^2 + \mathrm{NP}^2 = \mathrm{BP}^2$ και άρα $\mathrm{BP}^2 = 3 \cdot \mathrm{PY}^2$ από όπου προκύπτει ότι $\mathrm{BP}^2 + \mathrm{PY}^2 = 4 \cdot \mathrm{PY}^2$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα και πάλι είναι $\mathrm{BP}^2 + \mathrm{PY}^2 = \mathrm{BY}^2$ οπότε $\mathrm{BY}^2 = 4 \cdot \mathrm{PY}^2$ και άρα $\mathrm{BY} = 2 \cdot \mathrm{PY}$.

Επιπλέον ισχύει $\Phi\mathrm{Y} = 2 \cdot \mathrm{YP}$ επειδή βεβαίως είναι $\Sigma\mathrm{P} = 2 \cdot \mathrm{OP} = 2 \cdot \mathrm{PY}$ και $\Sigma\mathrm{P} = \Phi\mathrm{Y}$, οπότε από την προηγούμενη έπεται $\mathrm{BY} = \mathrm{Y}\Phi$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι καθεμιά από τις ΒΧ, ΧΓ και ΓΦ είναι ίση με τις ΒΥ και ΥΦ και έτσι το πεντάγωνο ΒΥΦΓΧ είναι ισόπλευρο.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι το πεντάγωνο αυτό βρίσκεται επί ενός επιπέδου.

Πράγματι, από το Ο φέρνουμε την ΟΨ παράλληλη στις ΡΥ και ΣΦ (στο εξωτερικό μέρος του κύβου) και στην συνέχεια τις ΨΘ και ΘΧ. Ισχυρίζομαι ότι η ΨΘΧ είναι ευθεία.

Πράγματι καθώς η ΘΠ διαιρείται σε άκρο και μέσο λόγο από το Τ με μεγαλύτερο τμήμα το ΠΤ είναι $\Theta\Pi/\Pi\mathrm{T} = \Pi\mathrm{T}/\mathrm{T}\Theta$. Αλλά $\Theta\Pi = \Theta\mathrm{O}$ και $\Pi\mathrm{T} = \mathrm{TX} = \mathrm{O}\Psi$ και έτσι η προηγούμενη αναλογία γράφεται $\Theta\mathrm{O}/\mathrm{O}\Psi = \mathrm{XT}/\mathrm{T}\Theta$.

Ισχύει ακόμα ότι $\Theta\mathrm{O} \mathbin{/\!/} \mathrm{TX}$ καθώς είναι κάθετες στο ίδιο επίπεδο ΒΔ (ΒΙΙ, Π6, σελ. 352) και ομοίως $\mathrm{T}\Theta \mathbin{/\!/} \mathrm{O}\Psi$ καθώς είναι κάθετες στο ΒΖ.

Τότε τα τρίγωνα ΨΟΘ και ΘΤΧ που έχουν συντεθεί κατά μιά γωνία έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και οι ομόλογες πλευρές τους είναι παράλληλες. Έτσι και οι άλλες πλευρές τους ΨΘ και ΘΧ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία (Β6, Π32, σελ. 170).

Συνεπώς, η ΨΘΧ είναι ευθεία και άρα κείται επί ενός επιπέδου (ΒΙΙ, ΠΙ, σελ. 349). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το πεντάγωνο ΥΒΧΓΦ κείται επί ενός επιπέδου.

Ισχυρίζομαι ακόμα ότι το πεντάγωνο αυτό είναι και ισογώνιο.

Πράγματι, επειδή η ΝΟ διαιρείται σε άκρο και μέσο λόγο από το Ρ και μεγαλύτερο τμήμα είναι το ΟΡ θα είναι

$$\frac{\mathrm{NO} + \mathrm{OP}}{\mathrm{ON}} = \frac{\mathrm{NO}}{\mathrm{OP}}$$

και επειδή $\mathrm{OP} = \mathrm{O}\Sigma$ θα είναι και

$$\frac{\mathrm{N}\Sigma}{\mathrm{NO}} = \frac{\mathrm{NO}}{\mathrm{O}\Sigma}$$

και άρα η ΝΣ διαιρείται σε άκρο και μέσο λόγο από το Ο με μεγαλύτερο τμήμα το ΝΟ (Π5, σελ. 431). Επομένως θα ισχύει και ότι $\mathrm{N}\Sigma^2 + \Sigma\mathrm{O}^2 = 3 \cdot \mathrm{NO}^2$ (Π4, σελ. 430).

Αλλά $\mathrm{NO} = \mathrm{NB}$ και $\mathrm{O}\Sigma = \Sigma\Phi$ και άρα από την παραπάνω έπεται $\mathrm{N}\Sigma^2 + \Sigma\Phi^2 = 3 \cdot \mathrm{NB}^2$. Έτσι θα είναι και $\mathrm{N}\Sigma^2 + \Sigma\Phi^2 + \mathrm{NB}^2 = 4 \cdot \mathrm{NB}^2$ ενώ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (ΒΙ, Π47, σελ. 51) είναι $\Sigma\mathrm{N}^2 + \mathrm{NB}^2 = \Sigma\mathrm{B}^2$. Έτσι, $\Sigma\mathrm{B}^2 + \Sigma\Phi^2 = 4 \cdot \mathrm{NB}^2$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα και πάλι όμως, καθώς $\widehat{\Phi\Sigma B}$ = 1ορθή (Β11, Ορ3, σελ. 345) είναι $\Sigma B^2 + \Sigma\Phi^2 = B\Phi^2$ και άρα $B\Phi^2 = 4 \cdot NB^2$.

Έτσι, $B\Phi = 2 \cdot BN$ και επειδή $2 \cdot BN = B\Gamma$ έχουμε $B\Phi = B\Gamma$.

Συγκρίνοντας στην συνέχεια τα τρίγωνα ΒΥΦ και ΒΧΓ παρατηρούμε ότι έχουν $BY = BX$, $Y\Phi = X\Gamma$ και $B\Phi = B\Gamma$ και άρα είναι ίσα (Β1, Π8, σελ. 25). Άρα $\widehat{BY\Phi} = \widehat{BX\Gamma}$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι $\widehat{Y\Phi\Gamma} = \widehat{BX\Gamma}$ και άρα $\widehat{BX\Gamma} = \widehat{BY\Phi} = \widehat{Y\Phi\Gamma}$.

Ένα ισόπλευρο πεντάγωνο όμως που έχει τρεις γωνίες του ίσες είναι και ισογώνιο (Π7, σελ. 433) οπότε το πεντάγωνο ΒΥΦΓΧ είναι ισογώνιο.

Έτσι λοιπόν, το πεντάγωνο ΒΥΦΓΧ είναι ισόπλευρο και ισογώνιο και έχει κατασκευαστεί επί της πλευράς ΒΓ του κύβου.

Άρα, αν σε καθεμιά από τις δώδεκα πλευρές του κύβου κάνουμε τις αντίστοιχες κατασκευές θα σχηματιστεί ένα στερεό σχήμα που περιέχεται σε δώδεκα ισόπλευρα και ισογώνια πεντάγωνα και που λέγεται δωδεκάεδρο.

Μένει τώρα το δωδεκάεδρο αυτό να περιληφθεί στην δοθείσα σφαίρα και να αποδειχτεί ότι η πλευρά του είναι άλογος και μάλιστα αποτομή.

Προεκτείνουμε την ΨΟ προς το Ο κατά τμήμα ΟΩ. Τότε η ΟΩ και η διαγώνιος του κύβου διχοτομούνται (Β11, Π38, σελ. 385). Έστω ότι τέμνονται στο Ω. Τότε το Ω θα είναι το κέντρο της σφαίρας που περιλαμβάνει τον κύβο και η ΟΩ θα είναι ίση με το μισό της πλευράς του κύβου. Φέρνουμε και την ΥΩ.

Επειδή η ΝΣ διαιρείται σε άκρο και μέσο λόγο από το Ο με μεγαλύτερο τμήμα το ΝΟ ισχύει ότι $N\Sigma^2 + \Sigma O^2 = 3 \cdot NO^2$ (Π4, σελ. 430).

Όμως $N\Sigma = \Psi\Omega$ επειδή $NO = O\Omega$ και $\Psi O = O\Sigma$. Ακόμα $O\Sigma = \Psi Y$ επειδή $O\Sigma = PO$ και έτσι έχουμε $\Psi\Omega^2 + \Psi Y^2 = 3 \cdot NO^2$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51) όμως είναι $\Psi\Omega^2 + \Psi Y^2 = Y\Omega^2$ και άρα $Y\Omega^2 = 3 \cdot NO^2$.

Αλλά το τετράγωνο της ακτίνας της σφαίρας που περιλαμβάνει τον κύβο είναι τριπλάσιο από το τετράγωνο του μισού της πλευράς του κύβου (Π15, σελ. 444).

Καθώς η ΝΟ είναι ίση με το μισό της πλευράς του κύβου συμπεραίνουμε ότι η ΥΩ είναι η ακτίνα της σφαίρας που περιλαμβάνει τον κύβο. Έτσι το Υ είναι σημείο της επιφάνειας της σφαίρας.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και οι υπόλοιπες κορυφές του δωδεκαέδρου είναι σημεία της επιφάνειας της σφαίρας και έτσι το δωδεκάεδρο έχει περιληφθεί στην δοθείσα σφαίρα.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι η πλευρά του δωδεκαέδρου είναι άλογος και μάλιστα αποτομή (Β10, Π73, σελ. 308).

Επειδή το μεγαλύτερο τμήμα της ΝΟ που έχει διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο από το Ρ είναι το ΡΟ, ενώ αντίστοιχα της ΖΟ που έχει επίσης διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο από το Σ το μεγαλύτερο τμήμα είναι το ΟΣ έπεται ότι η ΝΖ αν διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο το μεγαλύτερο τμήμα της θα είναι ίσο με το ΡΣ.

Πράγματι, επειδή $NO/OP = OP/PN$ θα ισχύει και η αναλογία για τα διπλάσια καθώς ίσα πολλαπλάσια έχουν ίσους λόγους (Β5, Π15, σελ. 134). Δηλαδή,

$$\frac{N\Zeta}{P\Sigma} = \frac{P\Sigma}{NP + \Zeta\Sigma}$$

Καθώς $N\Zeta > P\Sigma$ θα είναι και $P\Sigma > NP + \Zeta\Sigma$ (Β5, Π14, σελ. 134).

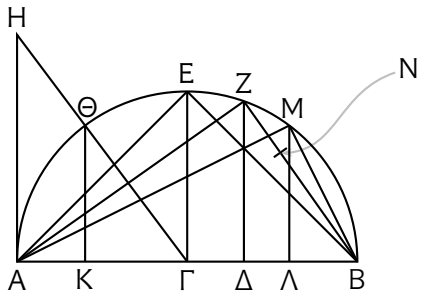
Καθώς $P\Sigma = \Upsilon\Phi$ έπεται ότι όταν η ΝΖ διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο τότε το μεγαλύτερο τμήμα από αυτά που προκύπτουν είναι ίσο με το ΥΦ.

Επειδή η διάμετρος της σφαίρας είναι ρητή και το τετράγωνό της είναι ίσο με το τριπλάσιο του τετραγώνου της πλευράς του κύβου, έπεται ότι είναι ρητή και η πλευρά του κύβου. Δηλαδή η ΝΖ είναι ρητή.

Όταν όμως ένα ρητό ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο τότε καθένα από τα δύο τμήματα που προκύπτουν είναι άλογος και μάλιστα αποτομή. (Π6, σελ. 432). Συνεπώς η ΥΦ που είναι η πλευρά του δωδεκαέδρου είναι άλογος και μάλιστα αποτομή.

Πόρισμα 29 *Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι όταν η πλευρά του κύβου διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο, τότε το μεγαλύτερο από τα τμήματα που προκύπτουν είναι ίσο με την πλευρά του δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.* *Δ*

Πρόταση 18 (Κατασκευή) (807) *Να εκτεθούν οι πλευρές των: κανονικού τετραέδρου* (πυραμίδας)*, κανονικού οκταέδρου, κύβου, κανονικού εικοσαέδρου και κανονικού δωδεκαέδρου και να συγκριθούν μεταξύ τους.*



Υλοποίηση: Λαμβάνουμε την διάμετρο ΑΒ της δοθείσας σφαίρας και έστω Γ και Δ τα σημεία της ώστε $A\Gamma = \Gamma B$ και $A\Delta = 2 \cdot \Delta B$. Γράφουμε το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και από τα Γ και Δ φέρνουμε τις κάθετες στην ΑΒ που τέμνουν το ημικύκλιο στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Φέρνουμε και τις ΑΖ, ΖΒ και ΕΒ.

Επειδή $A\Delta = 2 \cdot \Delta B$ θα είναι και $AB = 3 \cdot \Delta B$ και άρα $BA = (3/2) \cdot A\Delta$. Όμως $BA/A\Delta = BA^2/AZ^2$ διότι τα τρίγωνα ΑΖΒ και ΑΖΔ είναι ισογώνια και άρα από την ομοιότητά τους έπεται ότι $BA/AZ = AZ/A\Delta$ (Β6, Π8, σελ. 148). Έτσι θα ισχύει και η αναλογία $BA/A\Delta = BA^2/AZ^2$ (Β5, Ορ9, σελ. 126).

Συνεπώς, $ΒΑ^2 = (3/2) \cdot ΑΖ^2$. Αλλά το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι ίσο με τα 3/2 του τετραγώνου της πλευράς της πυραμίδας (Π13, σελ. 440) και έτσι αφού η ΑΒ είναι η διάμετρος της δοθείσας σφαίρας έπεται ότι η ΑΖ είναι ίση με την πλευρά της πυραμίδας.

Επειδή πάλι $ΑΔ = 2 \cdot ΔΒ$ είναι και $ΑΒ = 3 \cdot ΒΔ$. Επιπλέον είναι και $ΑΒ/ΒΔ = ΑΒ^2/ΒΖ^2$ καθώς τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΒΖΔ είναι όμοια και άρα $ΑΒ/ΒΖ = ΒΖ/ΒΔ$, από όπου προκύπτει η παραπάνω (Β5, Ορ9, σελ. 126).

Έτσι, $ΑΒ^2 = 3 \cdot ΒΖ^2$. Αλλά το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι τριπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του κύβου που έχει περιληφθεί σε αυτήν (Π15, σελ. 444) και έτσι αφού η ΑΒ είναι η διάμετρος της σφαίρας συμπεραίνουμε ότι η ΒΖ είναι η πλευρά του κύβου.

Ακόμα επειδή $ΑΓ = ΓΒ$ θα είναι $ΑΒ = 2 \cdot ΒΓ$ ενώ είναι και $ΑΒ/ΒΓ = ΑΒ^2/ΒΕ^2$ (Β6, Π8, σελ. 148 και Β5, Ορ9, σελ. 126).

Άρα $ΑΒ^2 = 2 \cdot ΒΕ^2$. Όμως το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι διπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του οκταέδρου (Π14, σελ. 442). Καθώς λοιπόν η ΑΒ είναι η διάμετρος της σφαίρας έπεται ότι η ΒΕ είναι η πλευρά του οκταέδρου.

Φέρνουμε τώρα την ΑΗ κάθετη στην ΑΒ στο Α ώστε $ΑΗ = ΑΒ$ ενώ φέρνουμε και την ΗΓ που τέμνει το ημικύκλιο στο Θ. Από το Θ φέρνουμε την $ΘΚ \perp ΑΒ$.

Επειδή $ΗΑ = 2 \cdot ΑΓ$ (διότι $ΗΑ = ΑΒ$) είναι και $ΗΑ/ΑΓ = ΘΚ/ΚΓ$ (Β6, Π4, σελ. 144) και άρα $ΘΚ = 2 \cdot ΚΓ$. Συνεπώς, $ΘΚ^2 = 4 \cdot ΚΓ^2$ και άρα $ΘΚ^2 + ΚΓ^2 = 5 \cdot ΚΓ^2$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Β1, Π47, σελ. 51) όμως είναι $ΘΚ^2 + ΚΓ^2 = ΘΓ^2$ και έτσι από την προηγούμενη έπεται $ΘΓ^2 = 5 \cdot ΚΓ^2$.

Καθώς $ΘΓ = ΓΒ$ έχουμε $ΒΓ^2 = 5 \cdot ΚΓ^2$.

Επειδή τώρα $ΑΒ = 2 \cdot ΓΒ$ και $ΑΔ = 2 \cdot ΔΒ$ θα είναι $ΑΒ - ΑΔ = 2 \cdot (ΓΒ - ΔΒ)$ ή $ΒΔ = 2 \cdot ΔΓ$.

Άρα, $ΒΓ = 3 \cdot ΓΔ$ οπότε $ΒΓ^2 = 9 \cdot ΓΔ^2$.

Επίσης είναι $ΒΓ^2 = 5 \cdot ΓΚ^2$ και άρα $ΓΚ^2 > ΓΔ^2$ οπότε $ΓΚ > ΓΔ$.

Στην συνέχεια λαμβάνουμε την $ΓΛ = ΓΚ$ και από το Λ φέρνουμε την $ΛΜ \perp ΑΒ$ ενώ φέρνουμε και την ΜΒ.

Επειδή $ΒΓ^2 = 5 \cdot ΓΚ^2$ και $ΑΒ = 2 \cdot ΒΓ$ και $ΚΛ = 2 \cdot ΓΚ$ θα είναι και $ΑΒ^2 = 5 \cdot ΚΛ^2$. Το τετράγωνο όμως της διαμέτρου της σφαίρας είναι πενταπλάσιο από το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου από τον οποίο έχει αναγραφεί το εικοσάεδρο (Πόρισμα, Π16, σελ. 445).

Αφού λοιπόν η ΑΒ είναι η διάμετρος της σφαίρας συμπεραίνουμε ότι η ΚΛ είναι η διάμετρος του κύκλου από τον οποίο αναγράφηκε το εικοσάεδρο. Άρα η ΚΛ είναι ίση με την πλευρά του εξαγώνου που εγγράφεται στον κύκλο αυτό (Πόρισμα, Β4, Π15, σελ. 122).

Επειδή πάλι η διάμετρος της σφαίρας είναι ίση με την πλευρά του εξαγώνου και δύο φορές την πλευρά του δεκαγώνου που εγγράφονται στο κύκλο (Πόρισμα, Π16, σελ. 445) και η μεν ΑΒ είναι η διάμετρος της σφαίρας η δε ΚΛ η πλευρά του εξαγώνου έπεται ότι η ΑΚ = ΛΒ είναι η πλευρά του δεκαγώνου που εγγράφεται στον κύκλο από τον οποίο έχει αναγραφεί το εικοσάεδρο.

Καθώς λοιπόν η ΑΒ είναι πλευρά δεκαγώνου και η ΜΛ πλευρά εξαγώνου διότι ΜΛ = ΘΛ = ΚΛ καθώς απέχουν το ίδιο από το κέντρο και ΘΚ = ΘΛ = 2 · ΚΓ έπεται ότι η ΜΒ είναι πλευρά πενταγώνου (Π10, σελ. 436 και Β1, Π47, σελ. 51).

Η πλευρά του πενταγώνου όμως είναι ίση με την πλευρά του εικοσαέδρου (Π16, σελ. 445) και άρα η ΜΒ είναι πλευρά του εικοσαέδρου.

Στην συνέχεια διαιρούμε σε άκρο και μέσο λόγο την ΖΒ, που είναι η πλευρά του κύβου, λαμβάνοντας το σημείο της Ν και έστω ΝΒ το μεγαλύτερο από τα δύο τμήματα που προκύπτουν. Τότε η ΝΒ είναι ίση με την πλευρά του δωδεκαέδρου (Πόρισμα, Π17, σελ. 449).

Επειδή έχει δειχθεί ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι ίσο με τα 3/2 του τετραγώνου της πλευράς της πυραμίδας (που είναι η ΑΖ) ενώ είναι διπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του οκταέδρου (που είναι η ΒΕ) και τριπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του κύβου (που είναι η ΖΒ), αν υποθέσουμε ότι το τετράγωνο της διαμέτρου της σφαίρας είναι ίσο με έξι ίσα τετράγωνα τότε το τετράγωνο της πλευράς της πυραμίδας θα είναι ίσο με τέσσαρα τέτοια τετράγωνα, το τετράγωνο της πλευράς του οκταέδρου θα είναι αντίστοιχα ίσο με τρία τέτοια τετράγωνα ενώ το τετράγωνο της πλευράς του κύβου θα είναι ίσο με δύο από τα τετράγωνα αυτά.

Έτσι λοιπόν, το τετράγωνο της πλευράς της πυραμίδας είναι ίσο με τα 4/3 του τετραγώνου της πλευράς του οκταέδρου και διπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς του κύβου.

Επίσης το τετράγωνο της πλευράς του οκταέδρου είναι ίσο με τα 3/2 του τετραγώνου της πλευράς του κύβου.

Συνεπώς, οι πλευρές των τριών σχημάτων (πυραμίδα, οκτάεδρο και κύβος) σχηματίζουν ρητούς λόγους μεταξύ τους. Ενώ οι πλευρές του εικοσαέδρου και δωδεκαέδρου δεν σχηματίζουν ρητούς λόγους ούτε μεταξύ τους αλλά ούτε και με τις πλευρές των υπόλοιπων σχημάτων καθώς αυτές είναι άλογοι αριθμοί: η πλευρά του εικοσαέδρου ελάσσων (Π16, σελ. 445) και η πλευρά του δωδεκαέδρου αποτομή (Π17, σελ. 449).

Το ότι η πλευρά ΜΒ του εικοσαέδρου είναι μεγαλύτερη από την πλευρά ΝΒ αποδεικνύεται ως εξής: επειδή τα ΖΔΒ και ΖΑΒ είναι ισογώνια (Β6, Π8, σελ. 148) ισχύει η αναλογία ΔΒ/ΒΖ = ΒΖ/ΒΑ (Β6, Π4, σελ. 144). Τότε

ισχύει και η αναλογία $\Delta B/BA = \Delta B^2/BZ^2$ (Β5, Ορ9, σελ. 126) και άρα $AB/B\Delta = ZB^2/B\Delta^2$.

Όμως, $AB = 3 \cdot B\Delta$ και άρα $ZB^2 = 3 \cdot B\Delta^2$ ενώ είναι και $A\Delta^2 = 4 \cdot \Delta B^2$ διότι $A\Delta = 2 \cdot \Delta B$. Συνεπώς, $A\Delta^2 > ZB^2$ και άρα $A\Delta > ZB$ οπότε κατά μείζονα λόγο θα είναι και $A\Lambda > ZB$.

Όταν η ΑΛ διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο από το Κ τότε το μεγαλύτερο τμήμα από αυτά που θα προκύψουν είναι το ΚΛ επειδή αυτή είναι η πλευρά του εξαγώνου ενώ η ΚΑ είναι η πλευρά του δεκαγώνου (Π9, σελ. 435).

Αντίστοιχα όταν η ZB διαιρεθεί σε άκρο και μέσο λόγο από το Ν τότε το μεγαλύτερο από τα τμήματα που προκύπτουν είναι το ΝΒ.

Άρα $K\Lambda > NB$ και επειδή $K\Lambda = \Lambda M$ είναι $\Lambda M > NB$ ($MB > \Lambda M$). Έτσι λοιπόν η ΜΒ που είναι πλευρά του εικοσαέδρου είναι μεγαλύτερη από την ΝΒ που είναι η πλευρά του δεωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Ισχυρισμός 1 *Εκτός από τα πέντε στερεά που αναφέρθηκαν παραπάνω, δηλαδή τα: πυραμίδα, οκτάεδρο, κύβο, εικοσάεδρο και δωδεκάεδρο, κανένα άλλο στερεό δεν μπορεί να κατασκευαστεί ώστε να περιέχεται σε ισόπλευρα και ισογώνια σχήματα τα οποία να είναι ίσα μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Καταρχήν από δύο τρίγωνα ή γενικά επίπεδα δεν κατασκευάζεται τρίεδρη στερεά γωνία (Β11, Ορ11, σελ. 347).

Από τρία τρίγωνα κατασκευάζεται η στερεά γωνία της πυραμίδας, από τέσσαρα αυτή του οκταέδρου, από πέντε του εικοσαέδρου ενώ από έξι τρίγωνα ισόπλευρα και ισογώνια με κοινή κορυφή δεν κατασκευάζεται στερεά γωνία καθώς η γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίση με τα 2/3 της ορθής και άρα έξι τέτοιες γωνίες θα είναι ίσες με τέσσαρες ορθές. Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς κάθε στερεά γωνία περιέχεται σε λιγότερες από τέσσαρες ορθές (Β11, Π21, σελ. 364).

Ομοίως δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί στερεά γωνία που να περιέχεται σε περισσότερες από έξι επίπεδες γωνίες.

Σε τρία τετράγωνα πάλι περιέχεται η γωνία του κύβου ενώ σε τέσσαρα δεν μπορεί να περιέχεται στερεά γωνία διότι αυτή πρέπει να περιέχεται σε λιγότερες από τέσσαρες ορθές (Β11, Π21, σελ. 364).

Σε τρία ισόπλευρα και ισογώνια πεντάγωνα περιέχεται η γωνία του δωδεκαέδρου ενώ σε τέσσαρα δεν είναι δυνατόν να περιέχεται στερεά γωνία καθώς η γωνία του ισόπλευρου και ισογώνιου πενταγώνου είναι ίση με το 1+1/5 της ορθής οπότε τέσσαρες τέτοιες γωνίες έχουν άθροισμα μεγαλύτερο από τέσσαρες ορθές.

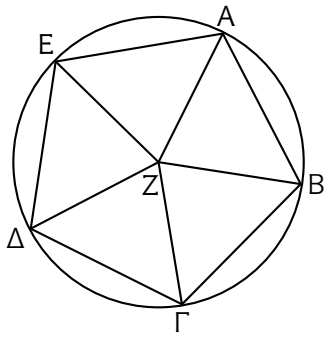
Για τους ίδιους λόγους δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί στερεά γωνία που να περιέχεται σε άλλα πολύγωνα.

Συνεπώς, δεν κατασκευάζεται άλλο στερεό σχήμα που να περιέχεται σε ισόπλευρα και ισογώνια σχήματα εκτός από τα πέντε σχήματα που ανα-

φέρθηκαν παραπάνω, δηλαδή τα: πυραμίδα, οκτάεδρο, κύβος, εικοσάεδρο και δωδεκάεδρο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα 19 *Η γωνία του ισόπλευρου και ισογώνιου πενταγώνου είναι ίση με το* $1+1/5$ *της ορθής.*

Απόδειξη. Πράγματι, θεωρούμε το ισόπλευρο και ισογώνιο πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και περιγράφουμε περί αυτό τον κύκλο ΑΒΓΔΕ (Β4, Π14, σελ. 121).



Λαμβάνουμε το κέντρο Ζ του κύκλου (Β3, Π1, σελ. 81) και φέρνουμε τις ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ και ΖΕ οι οποίες διχοτομούν τις γωνίες του πενταγώνου.

Επειδή οι γωνίες με κορυφή το Ζ είναι ίσες και έχουν άθροισμα ίσο με τέσσαρες ορθές καθεμιά από αυτές θα είναι ίση με $1-1/5$ της ορθής. Έτσι $\widehat{AZB} = 1-1/5$ της ορθής και επομένως οι άλλες δύο γωνίες του τριγώνου AZB θα έχουν άθροισμα ίσο με το $1+1/5$ της ορθής (στμ: καθώς το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές).

Δηλαδή, $\widehat{ZAB} + \widehat{ABZ} = 1+1/5$ της ορθής ενώ είναι και $\widehat{ZAB} = \widehat{ABZ}$.

Έτσι, για την γωνία $\widehat{ABΓ}$ του πενταγώνου ισχύει $\widehat{ABΓ} = 1+1/5$ της ορθής· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

Αρχαίο Κείμενο

Βιβλίο 1ο

Ὁρισμοὶ καὶ Ἀξιώματα

Ὁρισμοὶ 1 (19)

(ὁρ. 1) Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

(ὁρ. 2) Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

(ὁρ. 3) Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

(ὁρ. 4) Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

(ὁρ. 5) Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

(ὁρ. 6) Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

(ὁρ. 7) Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

(ὁρ. 8) Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

(ὁρ. 9) Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

(ὁρ. 10) Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.

Ὁρισμοὶ 2 (20)

(ὁρ. 11) Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

(ὁρ. 12) Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

(ὁρ. 13) Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

(ὁρ. 14) Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἢ τινων ὅρων περιεχόμενον.

(ὁρ. 15) Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

(ὁρ. 16) Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

(ὁρ. 17) Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

(ὁρ. 18) Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

(ὁρ. 19) Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

(ὁρ. 20) Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

Ὅρισμοί 3 (21)

(ὁρ. 21) Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

(ὁρ. 22) Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

(ὁρ. 23) Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Ἀξιώματα 4 (Αἰτήματα) (21)

(αἴτημα 1) Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

(αἴτημα 2) Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβαλεῖν.

(αἴτημα 3) Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

(αἴτημα 4) Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

(αἴτημα 5) Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾽ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Ἀξιώματα 5 (Κοιναὶ ἔννοιαι) (21)

(κ.ἔν. 1) Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

(κ.ἔν. 2) Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

(κ.ἔν. 3) Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

(κ.ἔν. 4) [Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

(κ.ἔν. 5) Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

(κ.ἔν. 6) Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.]

(κ.ἔν. 7) Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

(κ.ἔν. 8) Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστιν].

(κ.ἔν. 9) Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

Προτάσεις καὶ Θεωρήματα

Πρότασις 1 *(22) Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς AB εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.

[Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 2 (22) *Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΚΛΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 3 (23) *Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστιν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρότασις 4 (23) *Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς* [*ταῖς*] *δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην. λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει· ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 5 (24) *Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση· καί εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 6 (24) *Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίαις ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.*

Ἀπόδειξις.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάττονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 7 (25) *Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.*

Ἀπόδειξις. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 8 (25) *Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρα, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον τῆς δὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ οὐκ ἐφαρμόσουσιν ἀλλὰ παραλλάξουσιν ὡς αἱ ΕΗ, ΗΖ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 9 (26) *Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 10 (26) *Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Συνεστάτω ἐπ᾽ αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρότασις 11 (27) *Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω, ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΕ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστίν· καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΓΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρότασις 12 (27) *Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΗ εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΗΘ, ΘΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστιν

ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστιν ἴση. καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ᾽ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 13 (28) *Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ᾽εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ᾽εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι ἤτοι δύο ὀρθαί εἰσιν ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ [εὐθείᾳ] πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπ᾽εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 14 (29) *Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.*

Ἀπόδειξις. Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν· λέγω, ὅτι ἐπ᾽ εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω

ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστιν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπ᾽ εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ.

Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 15 (29) *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

[Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι, ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσιν.]

Πρότασις 16 (30) *Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ

γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. ὁμοίως δὴ τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 17 (30) *Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.*

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἀπόδειξις. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 18 (31) *Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 19 (31) *Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 20 (32) *Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστι μείζων. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 21 (33) *Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.*

Ἀπόδειξις. Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι

αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μέν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσιν. πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσιν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσιν.

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν, τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ ταὐτὰ τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μέν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 22 (34) *Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις* [*εὐθείαις*]*, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας* [*διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας*].

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω, ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστιν ἴση. καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστιν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 23 (34) *Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΔΓΕ· δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Εἰλήφθω ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δύο ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ΖΗ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστιν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνέσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 24 (35) *Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς* [*ταῖς*] *δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Α γωνία τῆς πρὸς τῷ Δ γωνίας μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ, καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΗ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 25 (35) *Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· βάσις δὲ ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν·

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκάτερᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 26 (36) *Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει* [*ἑκατέραν ἑκατέρᾳ*] *καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ

τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστιν ἴση· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ· ἴση ἄρα. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 27 (37) *Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.*

Ἀπόδειξις. Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπεσοῦνται ἤτοι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ Α, Γ. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη κατὰ τὸ Η. τριγώνου δὴ τοῦ ΗΕΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Α, Γ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 28 (37) *Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.*

Ἀπόδειξις. Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην ποιείτω ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν· κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 29 (38) *Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.*

Ἀπόδειξις. Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ· λέγω, ὅτι τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ,

ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. [καὶ] αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ· ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 30 (39) *Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστι παράλληλος.

Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ ΗΚΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

[Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι·] ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 31 (39) *Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας τῇ ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 32 (40) *Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 33 (40) *Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ, ΒΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΒΓ

τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 34 (41) *Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση. καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἴση. καὶ τὸ ΑΒΓ [ἄρα] τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 35 (42) *Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἐστιν ἴση· καὶ κοινὴ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλῃ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἐστιν ἴση ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον· κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 36 (42) *Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστιν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΕΒ, ΘΓ· αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· [καὶ αἱ ΕΒ, ΘΓ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι]. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ ταῖς ΒΓ, ΑΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἐστιν ἴσον.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 37 (43) *Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΔ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Ε, Ζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ.

παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ· καί εἰσιν ἴσα· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΕΖ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. [τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 38 (43) *Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΘ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΖ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· [τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 39 (44) *Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΒΓ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ

μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστι παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 40 (44) *Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ [τριγώνῳ]· καὶ τὸ ΔΓΕ ἄρα [τρίγωνον] ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλος ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἐστι παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 41 (44) *Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.*

Ἀπόδειξις. Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς ΒΓ, ΑΕ· λέγω, ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΒΕΓ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 42 (45) *Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΖΕΓΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 43 (45) *Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΖΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΘ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον τῷ ΚΗΓ ἐστιν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ· ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΚΔ παραπληρώματί ἐστιν ἴσον.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 44 (46) *Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΗ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, ΕΖ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΛΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΒ τῷ ΒΖ. ἀλλὰ τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΛΒ ἄρα τῷ Γ ἐστιν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ Δ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ ἄρα τῇ Δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΛΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 45 (47) *Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ Ε.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΗΘ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε. καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΘΜ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΜ ἐστιν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ

καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ δύο εὐθεῖαι αἱ ΚΘ, ΘΜ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ· καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ, καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ ΜΛ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΚΜ, ΖΛ· καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΔΒΓ τῷ ΗΜ, ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΛΜ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΚΖΛΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ Ε· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 46 (48) *Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ. Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. ἀλλὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καί ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 47 (51) *Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν, πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστιν ἐπ᾽ εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΑ δύο ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ [ἐστιν] ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ [ἐστὶ] τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον· βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ. [τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·] ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν [γωνίαν] περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 48 (52) *Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.*

Ἀπόδειξις. Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω, ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΒΓ· ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δύο ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ [ἐστιν] ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Βιβλίο 2ο

Ὅρισμοί

Ὅρισμοί 1 (59)

(ὁρ. 1) Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

(ὁρ. 2) Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω.

Πρότασις 1 (60) *Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ, καὶ κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΒΗ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ τῇ ΒΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΒΘ τοῖς ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΓ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΒΚ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α. τὸ δὲ ΔΛ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ· ἴση γὰρ ἡ ΔΚ, τουτέστιν ἡ ΒΗ, τῇ Α. καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ ΕΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ Α, ΒΔ καὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΕ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ Α, ΕΓ.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς

ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 2 (60) *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ. καί ἐστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 3 (61) *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΔΕΒ, καὶ διήχθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΔ, ΓΕ· καί ἐστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἴση γὰρ ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ· τὸ δὲ ΔΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 4 (62) *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ, διὰ δὲ τοῦ Η ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστιν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση· ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΚΒ· καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ [καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΓΒ], αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ, ΗΓΒ γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ ὀρθαί εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καί ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστιν· καί ἐστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τουτέστιν [ἀπὸ] τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΘΖ, ΚΓ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καί ἐστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἴση γὰρ ἡ ΗΓ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστιν]. Δ

Πρότασις 5 (63) *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΒΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος πάλιν ἤχθω ἡ ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῷ ΘΖ παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ ὅλῳ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΓΜ τῷ ΑΛ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῷ ΜΝΞ *γνώμονι* ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΑΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ ΔΘ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα *γνώμων* ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὁ ἄρα ΜΝΞ *γνώμων* καὶ τὸ ΛΗ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ ΜΝΞ *γνώμων* καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 6 (64) *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΓ, ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΜ, καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΔΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ τῷ ΓΘ. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΘΖ ἴσον ἐστίν. καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΘΖ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΞΟ *γνώμονί* ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΑΜ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα *γνώμων* ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ [περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ]. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΞΟ *γνώμονι* καὶ τῷ ΛΗ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ *γνώμων* καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 7 (65) *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ· καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἴσον ἐστίν· τὰ ἄρα ΑΖ, ΓΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. ἀλλὰ τὰ ΑΖ, ΓΕ ὁ ΚΛΜ ἐστι *γνώμων* καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον· ὁ ΚΛΜ ἄρα *γνώμων* καὶ τὸ ΓΖ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. ἔστι δὲ τοῦ ΑΖ διπλάσιον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΒΖ τῇ ΒΓ· ὁ ἄρα ΚΛΜ *γνώμων* καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΗ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΚΛΜ *γνώμων* καὶ τὰ ΒΗ, ΗΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ ΚΛΜ *γνώμων* καὶ τὰ ΒΗ, ΗΔ τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ καὶ τὸ ΓΖ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ [τε] δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ

τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 8 (66) *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ᾽ εὐθείας [τῇ ΑΒ εὐθεῖα] ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον τὸ ΑΕΖΔ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΒΔ τῇ ΚΝ, καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΝ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΡ τῇ ΡΟ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΚΝ, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΓΚ τῷ ΚΔ, τὸ δὲ ΗΡ τῷ ΡΝ. ἀλλὰ τὸ ΓΚ τῷ ΡΝ ἐστιν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓΟ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΚΔ ἄρα τῷ ΗΡ ἴσον ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΔΚ, ΓΚ, ΗΡ, ΡΝ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΓΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΚ, τουτέστι τῇ ΓΗ ἴση, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΗΚ, τουτέστι τῇ ΗΠ, ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΠ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΠΡ τῇ ΡΟ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ. ἀλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠΛ ἐστιν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΜΛ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ ἴσον ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ ΑΗ ἐστι τετραπλάσια. ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ τοῦ ΓΚ τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὀκτώ, ἃ περιέχει τὸν ΣΤΥ *γνώμονα*, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ ΒΚ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΚ. ἐδείχθη δὲ τοῦ ΑΚ τετραπλάσιος καὶ ὁ ΣΤΥ *γνώμων*· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ *γνώμονι*. κοινὸν προσκείσθω τὸ ϟΘ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ *γνώμονι* καὶ τῷ ϟΘ. ἀλλὰ ὁ ΣΤΥ *γνώμων* καὶ τὸ ϟΘ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ· ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τετραγώνου

ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 9 (68) *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν· καί εἰσιν ἴσαι· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΑ, ΓΑΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα [ἐστὶν] ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Β γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ· ἴση γὰρ πάλιν ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΔ πλευρᾷ τῇ ΔΒ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΓ τῷ ἀπὸ ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΖ

τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 10 (69) *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ, τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΕΖ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΓ, ΖΔ εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ ΕΖ, αἱ ὑπὸ ΓΕΖ, ΕΖΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ, ΕΖΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΕΒ, ΖΔ ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῇ ὑπὸ ΑΕΓ· καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Γ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς [ἐστιν] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ. καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ ὀρθή· ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ ΔΓΕ· ἐναλλὰξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΗΒ τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΗΔ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ζ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΗΖ πλευρᾷ τῇ ΕΖ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ [ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ,] ἴσον ἐστὶ [καὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. πάλιν, ἐπεὶ ἴση

ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΕΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ [τετράγωνα] διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ [τετραγώνων]. ἴση δὲ ἡ ΔΗ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ [τετράγωνα] διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 11 (73) *Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διήχθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον τὸ ΖΘ, καὶ διήχθω ἡ ΗΘ ἐπὶ τὸ Κ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΖΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΒ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ ΕΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ τὸ ΖΚ· ἴση γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔ· τὸ ἄρα ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΚ· λοιπὸν

ἄρα τὸ ΖΘ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΘΑ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 12 (74) *Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΑ τέτμηται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Α σημεῖον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ [περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ]. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνων μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 13 (74) *Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΒ τέτμηται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Δ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· ὥστε μόνον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 14 (75) *Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· δεῖ δὴ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Συνεστάτω γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. συνέσταται γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ΒΔ· εἰ δὲ οὔ, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΒΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΖ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ κέντρῳ τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΒΘΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ.

ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ τὸ ΒΔ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΔ· τὸ ἄρα ΒΔ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετραγώνῳ. ἴσον δὲ τὸ ΒΔ τῷ Α εὐθυγράμμῳ. καὶ τὸ Α ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Α ἴσον τετράγωνον συνέσταται τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησόμενον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Βιβλίο 3ο

Ὁρισμοί

Ὁρισμοί 1 (79)

(όρ. 1) Ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι εἰσίν, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.

(όρ. 2) Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον.

(όρ. 3) Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

(όρ. 4) Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ᾽ αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν.

(όρ. 5) Μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ᾽ ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

(όρ. 6) Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

(όρ. 7) Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

(όρ. 8) Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστίν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥ ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

(όρ. 9) Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ᾽ ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

(όρ. 10) Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῶν περιφερείας.

(ὁρ. 11) Ὅμοια τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Πρότασις 1 (81) *Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Διήχθω τις εἰς αὐτόν, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΓ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ· λέγω, ὅτι τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ [κύκλου].

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΗ δύο ταῖς ΗΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΗΑ βάσει τῇ ΗΒ ἐστιν ἴση· ἐκ κέντρου γάρ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ ἴση ἐστίν. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΔΒ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΔΒ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἡ μείζων τῇ ἐλάττονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Η κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Ζ.

Τὸ Ζ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ [κύκλου].

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 2 (82) *Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖΕ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ ΑΕΒ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ. ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ

μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ. ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΔΖ. μείζων ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ᾽ αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἐντὸς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 3 (82) *Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δυσὶν ἴσαι [εἰσίν]. καὶ βάσις ἡ ΕΑ βάσει τῇ ΕΒ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση ἐστίν. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΒΖΕ ὀρθή ἐστιν. ἡ ΓΔ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὖσα τὴν ΑΒ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τέμνουσα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΓΔ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω· λέγω, ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τουτέστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ. ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΖΕ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση· δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΑΖ, ΕΖΒ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν ΕΖ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 4 (83) *Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω, ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὴν δὲ ΒΕ τῇ ΕΔ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΕΑ· πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΔ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΑ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΑ τῇ ὑπὸ ΖΕΒ ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 5 (84) *Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΗ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα. λέγω, ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖΗ, ὡς ἔτυχεν. καὶ ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΗ· ἐδείχθη δὲ ἡ ΕΓ καὶ τῇ ΕΖ ἴση· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστιν ἴση ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΗ κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔστιν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 6 (84) *Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΖΕΒ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΖΕ. ἐδείχθη δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΖΒ ἐστιν ἴση, ἡ

ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 7 (84) *Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ᾽ ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω, ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ἄρα ΕΒ, ΕΖ τῆς ΒΖ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΒΕ [αἱ ἄρα ΒΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΖ]· μείζων ἄρα ἡ ΑΖ τῆς ΒΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὴ αἱ ΒΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΓΕΖ μείζων. βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσεως τῆς ΓΖ μείζων ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΗ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΕΔ, αἱ ἄρα ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσιν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ λοιπῆς τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Λέγω, ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου δύο μόνον ἴσαι προσπεσοῦνται πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση ἐστίν. λέγω δή, ὅτι τῇ ΖΗ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἡ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΖΗ ἴση ἐστίν, ἀλλὰ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ [ἴση ἐστίν], καὶ ἡ ΖΚ ἄρα τῇ ΖΘ ἐστιν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί

τινες, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ᾽ ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 8 (86) *Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαί, ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου. λέγω, ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ, τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΗ ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς ΑΗ, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Μ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΜΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἴση ἐστὶ ταῖς ΕΜ, ΜΔ. ἀλλ᾽ αἱ ΕΜ, ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσιν· καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΕ τῇ ΜΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, αἱ ΕΜ, ΜΔ ἄρα ταῖς ΖΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστίν. βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσεως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῆς ΓΔ μείζων ἐστίν· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ αἱ ΜΚ, ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΜΗ τῇ ΜΚ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῆς ΗΔ μείζων ἐστίν· ὥστε ἡ ΗΔ τῆς ΚΔ ἐλάττων ἐστίν· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΜΛΔ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΜΔ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν αἱ ΜΚ, ΚΔ, αἱ ἄρα ΜΚ, ΚΔ τῶν ΜΛ, ΛΔ ἐλάττονές εἰσιν· ἴση δὲ ἡ ΜΚ τῇ ΜΛ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΚ λοιπῆς τῆς ΔΛ ἐλάττων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ τῆς ΔΘ ἐλάττων ἐστίν· ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΗ, ἐλάττων δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Λέγω, ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ Δ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης· συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΔ εὐθείᾳ

καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Μ τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔΜΒ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΚ τῇ ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, δύο δὴ αἱ ΚΜ, ΜΔ δύο ταῖς ΒΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. λέγω [δή], ὅτι τῇ ΔΚ εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΔΝ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΚ τῇ ΔΝ ἐστιν ἴση, ἀλλ᾽ ἡ ΔΚ τῇ ΔΒ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΔΝ ἐστιν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερον [ἐστιν] ἴση· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης προσπεσοῦνται.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου αἱ δὲ λοιπαί, ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 9 (88) *Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω, ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΔ, ΖΔ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Κ, Θ, Λ σημεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΔ δύο ταῖς ΒΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΔΒ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΒΕΔ γωνιῶν· ἡ ΗΚ ἄρα τὴν ΑΒ τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς. καὶ ἐπεί, ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεῖάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἐπὶ τῆς ΗΚ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς ΘΛ ἐστι τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ ΗΚ, ΘΛ εὐθεῖαι ἢ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 10 (89) *Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.*

Ἀπόδειξις. Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο τὰ Β, Η, Ζ, Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΒΘ, ΒΗ δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ σημεῖα· καὶ ἀπὸ τῶν Κ, Λ ταῖς ΒΘ, ΒΗ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ΚΓ, ΛΜ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε σημεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΘ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς ΑΓ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΝΞ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΗ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς ΝΞ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ, καὶ κατ᾽ οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ ΑΓ, ΝΞ εὐθεῖαι ἢ κατὰ τὸ Ο· τὸ Ο ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ Ο· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τὸ Ο· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 11 (90) *Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Α πεσεῖται.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, πιπτέτω ὡς ἡ ΖΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ τῆς ΖΑ, τουτέστι τῆς ΖΘ, μείζονές εἰσιν, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ· καὶ ἡ ΗΔ ἄρα τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶν ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται· κατὰ τὸ Α ἄρα ἐπὶ τῆς συναφῆς πεσεῖται.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, [καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα], ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα [καὶ ἐκβαλλομένη] ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 12 (90) *Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.*

Ὑλοποίησις: Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὡς ἡ ΖΓΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΑ τῇ ΗΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ ἴση· αἱ ἄρα ΖΑ, ΑΗ ταῖς ΖΓ, ΗΔ ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ΖΗ τῶν ΖΑ, ΑΗ μείζων ἐστίν· ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι᾽ αὐτῆς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη [εὐθεῖα] διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 13 (91) *Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ᾽ ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.*

Ἀπόδειξις. Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλου τοῦ ΕΒΖΔ ἐφαπτέσθω πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν τὰ Δ, Β.

Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓΔ κύκλου κέντρον τὸ Η, τοῦ δὲ ΕΒΖΔ τὸ Θ.

Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη ἐπὶ τὰ Β, Δ πεσεῖται. πιπτέτω ὡς ἡ ΒΗΘΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΔ· μείζων ἄρα ἡ ΒΗ τῆς ΘΔ· πολλῷ ἄρα μείζων ἡ ΒΘ τῆς ΘΔ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΘ τῇ ΘΔ· ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐκτός.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΓΚ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτέσθω ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν τὰ Α, Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν ΑΒΓΔ, ΑΓΚ εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Γ, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται· ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒΓΔ ἐντὸς ἔπεσεν, τοῦ δὲ ΑΓΚ ἐκτός· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐντός.

Κύκλος ἄρα κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ [καθ᾽] ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 14 (92) *Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΓ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΓΗ ἐστι διπλῆ· καί ἐστιν ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΕΖ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΕ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ. ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ᾽ αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τουτέστιν ἴση ἔστω ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΑΖ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΓΗ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ· ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἐστιν ἴσον· ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· καί ἐστι τῆς μὲν ΑΖ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΗ διπλῆ ἡ ΓΔ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 15 (93) *Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἡ διάμετρος τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἔγγιον μὲν τῆς ΑΔ διαμέτρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω, ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ, ΕΚ. καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ. κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΛΜ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΕΝ, ΖΕ, ΕΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΕΛ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΜΝ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΝ, ἡ ἄρα ΑΔ ταῖς ΜΕ, ΕΝ ἴση ἐστίν. ἀλλ᾽ αἱ μὲν ΜΕ, ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονές εἰσιν [καὶ ἡ ΑΔ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν, ἴση δὲ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ· ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΒΓ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΕ, ΕΝ δύο ταῖς ΖΕ, ΕΗ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΕΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μείζων [ἐστίν], βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ ἐδείχθη ἴση [καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν]. μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΑΔ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 16 (94) *Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς ὡς ἡ ΓΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἐπὶ τῆς περιφερείας· ἐκτὸς ἄρα.

Πιπτέτω ὡς ἡ ΑΕ· λέγω δή, ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΑΕ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΖΑ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἡ ΔΗ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔΑΗ, μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΔΘ· μείζων ἄρα ἡ ΔΘ τῆς ΔΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Λέγω, ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἐστί τις γωνία εὐθύγραμμος μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας εὐθεῖα περεμπεσεῖται, ἥτις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. οὐ παρεμπίπτει δέ· οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἔσται μείζων ὀξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οὐδὲ μὴν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου [καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ᾽ ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον, ἐπειδήπερ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη]. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 17 (95) *Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΑΒ· λέγω, ὅτι ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τῶν ΒΓΔ, ΑΖΗ κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΒ· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δύο ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν πρὸς τῷ Ε· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΕΒΑ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΔΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΑ. καί ἐστιν ἡ ΕΒ ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΑΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΒΓΔ κύκλου.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου τοῦ Α τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ ΒΓΔ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 18 (96) *Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.*

Ἀπόδειξις. Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΖΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΗΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΗ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΖΓ τῆς ΖΗ· ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΒ τῆς ΖΗ ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΖΗ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 19 (96) *Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς [γωνίας] εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.*

Ἀπόδειξις. Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω, ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἐστι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ.

Ἐπεὶ [οὖν] κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλο τι πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 20 (97) *Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ ΒΕΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΑΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλασίους εἰσίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ταῖς ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἐστι διπλῆ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἐστι διπλῆ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἐστι διπλῆ.

Κεκλάσθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω ἑτέρα γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΓ, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΕΔΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΔΓ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν [αἱ γωνίαι]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 21 (97) *Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓΔ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἐστι διπλασίων· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 22 (98) *Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

Ἐπεὶ οὖν παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ ΑΒΓ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΒΑΔΓ· ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΑΔΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΔΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 23 (98) *Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.*

Ἀπόδειξις. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ.

Ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΓΒ τμῆμα τῷ ΑΔΒ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 24 (99) *Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα τῷ ΓΖΔ τμήματι.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΕΒ τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Γ τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΓΔ· τῆς δὲ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμοσάσης ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ. εἰ γὰρ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ μὴ ἐφαρμόσει, ἤτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται ἢ ἐκτὸς ἢ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΗΔ, καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται.

Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 25 (99) *Κύκλου τμήματος δοθέντος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμῆμα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλου τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ τμήματος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμῆμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἄρα τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἴση ἢ ἐλάττων.

Ἔστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΔΒ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΒ εὐθεῖα τῇ ΕΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΕ δύο ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΕ βάσει τῇ ΓΕ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΒΕ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ ΓΕ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος. κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος προσαναγέγραπται ὁ κύκλος. καὶ δῆλον, ὡς τὸ ΑΒΓ τμῆμα ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου διὰ τὸ τὸ Ε κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ τυγχάνειν.

Ὁμοίως [δὲ] κἂν ᾖ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, τῆς ΑΔ ἴσης γενομένης ἑκατέρᾳ τῶν ΒΔ, ΔΓ αἱ τρεῖς αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ προσαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ᾖ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ, καὶ συστησώμεθα πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴσην, ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΔΒ, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ ΑΒΓ τμῆμα μεῖζον ἡμικυκλίου.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος προσαναγέγραπται ὁ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 26 (100) *Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΗΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΖ ἴσαι· καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Η γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Θ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι· καί εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν [τῶν ΒΓ, ΕΖ]· τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ. ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 27 (101) *Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.*

Ἀπόδειξις. Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ πρὸς μὲν τοῖς Η, Θ κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η τῇ ὑπὸ ΕΘΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΚ· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΒΚ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΒΚ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ· ἴση ἄρα. καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Α, τῆς δὲ ὑπὸ ΕΘΖ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Δ· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 28 (101) *Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν τοῖς κύκλοις ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ τὰς μὲν ΑΓΒ, ΔΖΕ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦσαι τὰς δὲ ΑΗΒ, ΔΘΕ ἐλάττονας· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ΑΓΒ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΔΖΕ μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΑΗΒ ἐλάττων περιφέρεια τῇ ΔΘΕ.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΑΚ, ΚΒ δυσὶ ταῖς ΔΛ, ΛΕ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΔΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΛΕ ἴση ἐστίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ. ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔΖΕ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 29 (102) *Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 30 (102) *Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ ΑΔΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΔΒ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· καί ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΑΔ, ΔΒ περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ περιφερείᾳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 31 (102) *Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς· καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ὀρθῆς.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΕ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστίν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΓ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία· καί ἐστιν ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν [αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν], καί ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστιν· καί ἐστιν ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Λέγω, ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό [τε] τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό [τε] τῆς ΑΔ[Γ] περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. καί ἐστιν αὐτόθεν φανερόν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν

ΑΓ, ΑΖ εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓΑ εὐθείας καὶ τῆς ΑΔ[Γ] περιφερείας περιεχομένη ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι [τμήματι] μείζων ὀρθῆς, καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος [γωνία] μείζων [ἐστὶν] ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος [γωνία] ἐλάττων ὀρθῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν [ἡ] μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν ἡ γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐκτὸς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι· ἐὰν δὲ αἱ ἐφεξῆς ἴσαι ὦσιν, ὀρθαί εἰσιν.] *Δ*

Πρότασις 32 (104) *Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.*

Ἀπόδειξις. Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου διήχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ. λέγω, ὅτι ἃς ποιεῖ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἐφαπτομένης, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἦκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, ἐπὶ τῆς ΒΑ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. ἡ ΒΑ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα ὀρθή ἐστιν. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΓΔ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΔΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 33 (105) *Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἡ δὴ πρὸς τῷ Γ [γωνία] ἤτοι ὀξεῖά ἐστιν ἢ ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα· ἔστω πρότερον ὀξεῖα, καὶ ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ. ἤχθω τῇ ΔΑ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δύο ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ [γωνίᾳ] τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. γεγράφθω καὶ ἔστω ὁ ΑΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΒ. ἐπεὶ οὖν ἀπ᾽ ἄκρας τῆς ΑΕ διαμέτρου ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΕ κύκλου· ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΕ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἁφῆς εἰς τὸν ΑΒΕ κύκλον διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου γέγραπται τὸ ΑΕΒ δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΕΒ ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Γ· καὶ δέον πάλιν ἔστω ἐπὶ τῆς ΑΒ γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ [γωνίᾳ]. συνεστάτω [πάλιν] τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν ΖΑ, ΖΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΒ.

Ἐφάπτεται ἄρα ἡ ΑΔ εὐθεῖα τοῦ ΑΒΕ κύκλου διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ Α γωνίαν. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ ἐν τῷ ΑΕΒ τμήματι· ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστίν. καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΕΒ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΕΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεῖα ἔστω· καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ.

Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δύο ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. ἐρχέσθω ὡς ὁ ΑΕΒ. καὶ ἐπεὶ τῇ ΑΕ διαμέτρῳ ἀπ᾽ ἄκρας πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου. καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστίν. καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γέγραπται τμῆμα κύκλου τὸ ΑΘΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 34 (107) *Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΖΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΒΓ, ἡ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΓ ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμήματι ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ [γωνίᾳ].

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμῆμα ἀφῄρηται τὸ ΒΑΓ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 35 (107) *Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.*

Ἀπόδειξις. Ἐν γὰρ κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθο- γώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν ὥστε τὸ Ε κέντρον εἶναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, φανερόν, ὅτι ἴσων οὐσῶν τῶν ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΒ εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΗΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΓ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ· [κοινὸν] προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΓ. ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖαι δύο τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 36 (108) *Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.*

Ἀπόδειξις. Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓ[Α], ΔΒ· καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν ΑΒΓ κύκλον, ἡ δὲ ΒΔ ἐφαπτέσθω· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ.

Ἤ ἄρα [Δ]ΓΑ ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ

ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐφαπτο- μένης.

ἀλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΔ, ΖΕ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ· ὀρθὴ γὰρ [ἐστιν] ἡ ὑπὸ ΕΖΓ [γωνία]· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. ἴση δὲ ἡ ΕΓ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 37 (109) *Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ* [*τῆς*] *ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.*

Ἀπόδειξις. κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ προσπιπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἤχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ. ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ ΔΓΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ. ἦν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ

τῆς ΔΒ· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΒ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δύο ταῖς ΔΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ. καί ἐστιν ἡ ΖΒ ἐκβαλλομένη διάμετρος· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, κἂν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΓ τυγχάνῃ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾗ δὲ τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Βιβλίο 4ο

Ὁρισμοί

Ὁρισμοί 1 (III)

(ὁρ. 1) Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

(ὁρ. 2) Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

(ὁρ. 3) Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

(ὁρ. 4) Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

(ὁρ. 5) Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

(ὁρ. 6) Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

(ὁρ. 7) Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

Πρότασις 1 (III) *Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ Δ. δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος ἡ ΒΓ. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· ἐνήρμοσται γὰρ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΒΓ. εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς Δ, κείσθω τῇ Δ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ κέντρῳ τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΑΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΓΕ. ἀλλὰ τῇ Δ ἡ ΓΕ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ ΓΑ ἐστιν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν ΑΒΓ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Δ ἴση ἐνήρμοσται ἡ ΓΑ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 2 (I12) *Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΗΘ κατὰ τὸ Α, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΘ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΓ, πρὸς δὲ τῇ ΑΗ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΖΕ [γωνίᾳ] ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΘ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεῖα ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΘΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση· [ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον].

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 3 (I13) *Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΖ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ διήχθω, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα ἡ ΚΒ, καὶ

συνεστάτω πρὸς τῇ ΚΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Κ τῇ μὲν ὑπὸ ΔΕΗ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΑ, τῇ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ κατὰ τὰ Α, Β, Γ σημεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὰ Α, Β, Γ σημεῖα ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ σημείοις γωνίαι. καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΜΒΚ τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἐπειδήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ ΑΜΒΚ, καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΚΑΜ, ΚΒΜ γωνίαι, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΚΒ, ΑΜΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΚΒ, ΑΜΒ ταῖς ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΑΚΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΛΝΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΛΝ [λοιπῇ] τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 4 (113) *Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δίχα ταῖς ΒΔ, ΓΔ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΔ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΒΔ, ΖΒΔ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΔ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν Ε, Ζ, Η κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Η σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτάς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Δ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Ε, Ζ, Η γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν, καὶ ἔσται ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. ἐγγεγράφθω ὡς ὁ ΖΗΕ.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλος ἐγγέγραπται ὁ ΕΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 5 (114) *Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ (δὴ) περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι δίχα κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν Δ, Ε σημείων ταῖς ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΖ· συμπεσοῦνται δὴ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἢ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας ἢ ἐκτὸς τῆς ΒΓ.

Συμπιπτέτωσαν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ, βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΖ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας κατὰ τὸ Ζ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου κατὰ τὸ Ζ πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ, βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΒΖ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΖ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση· ὁ ἄρα [πάλιν] κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

[Πόρισμα]

Καὶ φανερόν, ὅτι, ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστιν· ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ τριγώνου πίπτει, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐν ἐλάττονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. [ὥστε καὶ ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου πεσοῦνται αἱ ΔΖ, ΕΖ, ὅταν δὲ ὀρθή, ἐπὶ τῆς ΒΓ, ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐκτὸς τῆς ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.] *Δ*

Πρότασις 6 (115) *Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ· κέντρον γὰρ τὸ Ε· κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΑ, βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΑΔ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΑΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΔ εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ ὀρθή ἐστιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν. καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγέγραπται τὸ ΑΒΓΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρότασις 7 (116) *Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΖΗ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Α ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΕΑ, αἱ ἄρα πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία, ἐστὶ δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΗ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΑΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΖΚ ἐστι παράλληλος. ὥστε καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΖΚ ἐστι παράλληλος. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΖ, ΘΚ τῇ ΒΕΔ ἐστι παράλληλος. παραλληλόγραμμα ἄρα ἐστὶ τὰ ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΖ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ΑΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΘ, ΖΚ, ἡ δὲ ΒΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστιν ἴση [καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστιν ἴση], ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΗΒΕΑ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ, Κ, Ζ γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν. καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 8 (116) *Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΔ, ΑΒ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν ΑΚ, ΚΒ, ΑΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ, ΗΔ, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι [εἰσίν]. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΔ ἡμίσεια ἡ ΑΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΖ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΗ, ΗΕ ἐστιν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ ἴσαι ἀλλήλαις [εἰσίν]. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Ε, Ζ, Θ, Κ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Θ, Κ γωνίας· εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Η διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Ε, Ζ, Θ, Κ κύκλος γραφόμενος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθείας. ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλος ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 9 (117) *Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση ἐστίν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΒ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΑΒ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΒΑ, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἐστιν ἴση·

ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΑ, ΕΒ [εὐθειῶν] ἑκατέρᾳ τῶν ΕΓ, ΕΔ ἴση ἐστίν. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον. περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρότασις 10 (118) *Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· καὶ κέντρῳ τῷ Α καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν ΒΔΕ κύκλον τῇ ΑΓ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ ΒΔΕ κύκλου διαμέτρου ἴση εὐθεῖα ἡ ΒΔ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΓΔ εἴληπταί τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸν ΑΓΔ κύκλον προσπεπτώκασι δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ, ἡ ΒΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΓΔ κύκλου. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Δ ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΔΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΓΔΑ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ. ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΒΓΔ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστιν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστιν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΓ. ἀλλὰ ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστιν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ εἰσι διπλασίους. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΑΔ ἐστι διπλῆ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ τῆς ὑπὸ ΔΑΒ ἐστι διπλῆ.

Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνέσταται τὸ ΑΒΔ ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΔΒ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρότασις 11 (II19) *Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ Ζ γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ ἐστι διπλῆ. τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, [ΓΔ], ΔΕ, ΕΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση. καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒΓΔ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 12 (II19) *Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ (δὴ) περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ περιφερείας· καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΛ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓΔΕ κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΛ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστιν ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστιν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἐστιν ἴσον. ἴση ἄρα ἡ ΒΚ τῇ ΓΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΚ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ [ἐστιν] ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ [γωνία] τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστιν ἴση· ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ· διπλῆ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΓ τῆς ὑπὸ ΖΚΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ τῆς ὑπὸ ΓΖΛ ἐστι διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΛΓ τῆς ὑπὸ ΖΛΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΔ. καί ἐστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΓ τῆς ὑπὸ ΛΖΓ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΚΖΓ τῇ ὑπὸ ΛΖΓ· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΛ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΚΓ, ΖΛΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΓΛ, διπλῆ ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΚΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῆ. καί ἐστιν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ΘΚ, ΚΛ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΛΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΚΛΜ, καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΛΜ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΛ, ΚΛΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον.

[Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγέγραπται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρότασις 13 (120) *Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ [ἐστιν] ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσει τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΒΓΖ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἐστιν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΑ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΒΖ ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΒΖ εὐθείας. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΓΖ, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΘΓ [ὀρθῇ] τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ κάθετος τῇ ΖΚ καθέτῳ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘ, ΖΚ ἴση ἐστίν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Η, Θ, Κ, Λ, Μ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Η, Θ, Κ, Λ, Μ σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ οὐκ ἐφάψεται αὐτῶν, ἀλλὰ τεμεῖ αὐτάς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένην ἐντὸς πίπτειν τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Η, Θ, Κ, Λ, Μ σημείων γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν. γεγράφθω ὡς ὁ ΗΘΚΛΜ.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 14 (121) *Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ

τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΓΔ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΖΓΔ, τῆς δὲ ὑπὸ ΓΔΕ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΓΔΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΓ πλευρᾷ τῇ ΖΔ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΓ, ΖΔ ἐστιν ἴση· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται περιγεγραμμένος. περιγεγράφθω καὶ ἔστω ὁ ΑΒΓΔΕ.

Περὶ ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 15 (I22) *Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου διάμετρος ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΗ, ΓΗ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΓΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΗ. ἀλλ᾽ ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΗΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐπειδήπερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· καί εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΓ τρίτον δύο ὀρθῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΗ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΕΒ σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΗΓ, ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι εἰσίν [ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ]. αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἓξ ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἓξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΕΔ

περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒΑ ἐστιν ἴση· καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ τὸν κύκλον διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 16 (123) *Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἡ ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ· οἵων ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια τρίτον οὖσα τοῦ κύκλου ἔσται πέντε, ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια πέμπτον οὖσα τοῦ κύκλου ἔσται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ περιφερειῶν πεντεκαιδέκατόν ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.

Ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς ΒΕ, ΕΓ ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ[Ε] κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ τὸν κύκλον διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ἔτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου δείξεων καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαιδεκάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Βιβλίο 5ο

Ὁρισμοί

Ὁρισμοί 1 (125)

(όρ. 1) Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

(όρ. 2) Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

(όρ. 3) Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις.

(όρ. 4) Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

(όρ. 5) Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

(όρ. 6) Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλείσθω.

(όρ. 7) Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

(όρ. 8) Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.

(όρ. 9) Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

(ὁρ. 10) Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ὁμοίως, ὡς ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

(ὁρ. 11) Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

(ὁρ. 12) Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

(ὁρ. 13) Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

(ὁρ. 14) Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

(ὁρ. 15) Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

(ὁρ. 16) Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

(ὁρ. 17) Δι᾽ ἴσου λόγος ἐστὶ πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον· ἢ ἄλλως· Λῆψις τῶν ἄκρων καθ᾽ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

(ὁρ. 18) Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος γίνηται ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

Πρότασις 1 (128) *Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.*

Ἀπόδειξις.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ AB, ΓΔ ὁποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν E, Z ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· λέγω, ὅτι ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ AB τοῦ E, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB, ΓΔ τῶν E, Z.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Ζ. διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Ε μεγέθη ἴσα τὰ ΑΗ, ΗΒ, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα τὰ ΓΘ, ΘΔ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΓΘ, ΘΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ, ἴσον ἄρα τὸ ΑΗ τῷ Ε, καὶ τὰ ΑΗ, ΓΘ τοῖς Ε, Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τῷ Ε, καὶ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ ἴσα τῷ Ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ ἴσα τοῖς Ε, Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 2 (128) *Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.*

Ἀπόδειξις. Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ τετάρτου τοῦ Ζ, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ τετάρτου τοῦ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ ΒΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΕΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ ΑΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΗ τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ. καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 3 (129) *Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου, καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.*

Ἀπόδειξις. Πρῶτον γὰρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω, ὅτι ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. διῃρήσθω τὸ μὲν ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη ἴσα τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ, ΛΘ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ τῷ πλήθει τῶν ΗΛ, ΛΘ. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ. ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ, ἔστι δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΗΘ τετάρτου τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ δι᾽ ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 4 (129) *Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.*

Ἀπόδειξις. Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Η, Θ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

[Καὶ] ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν Ε τοῦ Α, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ, καὶ εἴληπται τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Κ τοῦ Α καὶ τὸ Λ τοῦ Γ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Μ τοῦ Β καὶ τὸ Ν τοῦ Λ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ

ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Κ, Λ τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Η, Θ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ληφθέντα κατάλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 5 (130) *Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.*

Ἀπόδειξις. Μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ μεγέθους τοῦ ΓΔ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ὁσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ. κεῖται δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἴσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσον δὲ τὸ ΗΓ τῷ ΔΖ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ὅλον τοῦ ὅλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 6 (130) *Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ ΑΗ, ΓΘ τῶν αὐτῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις

ἔστω πολλαπλάσια· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ ἴσον ἐστίν.

Κείσθω γὰρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ. ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΚΓ τῷ Ζ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν ΚΘ, ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ Ζ τῷ ΚΓ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἴσον ἐστίν. ὥστε εἰ τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἔσται τῷ Ζ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι, κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 7 (131) *Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δέ τι, ὃ ἔτυχεν, μέγεθος τὸ Γ· λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β, ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ Ε. ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, τὸ Ζ. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Δ, Ε τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ.

Λέγω [δή], ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ Ε· ἄλλο δέ τι τὸ Ζ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ζ τοῦ Δ, ὑπερέχει καὶ τοῦ Ε, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὸ μὲν Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ, Ε τῶν Α, Β ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β.

Τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν μεγέθη τινὰ ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 8 (131) *Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον. καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἄνισα μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ, ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ ΒΕ· τὸ δὴ ἔλασσον τῶν ΑΕ, ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. ἔστω πρότερον τὸ ΑΕ ἔλαττον τοῦ ΕΒ, καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ ΑΕ, καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ, καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ. εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ τοῦ Ν πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ Κ ἄρα τοῦ Μ οὐκ ἐστιν ἔλαττον. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ. τὰ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τῷ Κ· τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὐκ ἐστιν ἔλαττον· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἔλαττόν ἐστιν. μεῖζον δὲ τὸ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, Μ μεῖζόν ἐστιν. ἀλλὰ συναμφότερα τὰ Δ, Μ τῷ Ν ἐστιν ἴσα, ἐπειδήπερ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλάσιόν ἐστιν, συναμφότερα δὲ τὰ Μ, Δ τοῦ Δ ἐστι τετραπλάσια, ἔστι δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετραπλάσιον· συναμφότερα ἄρα τὰ Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Μ, Δ μεῖζόν ἐστιν· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει· τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. καί ἐστι τὰ μὲν ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ οὐχ ὑπερέχει. καί ἐστι τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολ-

λαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΕ τοῦ ΕΒ μεῖζον ἔστω. τὸ δὴ ἔλαττον τὸ ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΗΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μεῖζον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΖΗ τοῦ ΑΕ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὰ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ Ν πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ ΖΗ· ὥστε πάλιν τὸ ΖΗ τοῦ Μ οὐκ ἐστιν ἔλασσον. μεῖζον δὲ τὸ ΗΘ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ, τουτέστι τοῦ Ν, ὑπερέχει. τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδήπερ καὶ τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ ΗΘ, τουτέστι τοῦ Κ, τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. καὶ ὡσαύτως κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν.

Τῶν ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 9 (132) *Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 10 (132) *Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστιν· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.*

Ἀπόδειξις. Ἐχέτω γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ· λέγω, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β ἢ ἔλασσον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστι τὸ Α τῷ Β· ἑκάτερον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστι τὸ Α

τοῦ Β· τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. ἐδείχθη δὲ οὐδὲ ἴσον· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α· λέγω, ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ μεῖζον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστι τὸ Β τῷ Α· τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α· τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ πρὸς τὸ Α. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴσον· ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α.

Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστιν· καὶ πρὸς ὃ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 11 (133) *Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ εἰ ἴσον ἐστίν, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ἀλλὰ εἰ ὑπερεῖχε τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερεῖχε καὶ τὸ Η τοῦ Λ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Β, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 12 (133) *Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Λ, Μ, Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσα, καὶ εἰ ἔλαττον, ἐλάττονα. καί ἐστι τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, ἐπειδήπερ ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Λ καὶ τὰ Λ, Μ, Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β, Δ, Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 13 (134) *Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤ πέμπτον πρὸς ἕκτον.*

Ἀπόδειξις. Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ. λέγω, ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ ἔστι τινὰ τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου ὑπερέχει, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει, εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η τοῦ Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ

ὁσαπλάσιον μέν ἐστι τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α, ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καί ἐστι τὰ μὲν Μ, Θ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Ν, Λ τῶν Β, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα Α πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤ πέμπτον πρὸς ἕκτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 14 (134) *Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.*

Ἀπόδειξις. Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, μεῖζον δὲ ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Β τοῦ Δ μεῖζόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζόν ἐστιν, ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, [μέγεθος] τὸ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα τὸ Δ τοῦ Β· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Δ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Β τῷ Δ, κἂν ἔλασσον ᾖ τὸ Α τοῦ Γ, ἔλασσον ἔσται καὶ τὸ Β τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 15 (134) *Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα

τῷ Ζ. διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα ἀλλήλοις, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Τὰ ἄρα μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 16 (134) *Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ [ἀνάλογον] ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, [οὕτως] τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 17 (135) *Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· λέγω, ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΔΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΚΞ, ΝΠ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. ἰσάκις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. τὰ ΗΚ, ΛΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ, καὶ συντεθὲν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΛΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΘΞ, ΜΠ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΚ ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. ἀλλὰ εἰ ὑπερεῖχε τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερεῖχε καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΝΠ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν ΗΘ, ΛΜ τῶν ΑΕ, ΓΖ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ ΚΞ, ΝΠ τῶν ΕΒ, ΖΔ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 18 (135) *Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω, ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, ἔσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΔΖ ἢ πρὸς μεῖζον.

Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ ΔΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. μεῖζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΖΔ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα.

Ἐὰν ἄρα διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 19 (136) *Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ, οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ, οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

[Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ, συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ· καί ἐστιν ἀναστρέψαντι].

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 20 (136) *Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, δι᾽ ἴσου δὲ μεῖζον ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β, τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, [οὕτως] τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστιν. μεῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 21 (137) *Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον*.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Δ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Δ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 22 (137) *Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Κ πρὸς τὸ Μ, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Ν. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ Η, Κ, Μ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Θ, Λ, Ν, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι᾽ ἴσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Η, Θ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Γ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 23 (137) *Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, Ε, Ζ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ Η, Θ τῶν Α, Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· καί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ

ὡς ἄρα τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ τὰ Θ, Κ τῶν Β, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. πάλιν, ἐπεὶ τὰ Λ, Μ τῶν Γ, Ε ἰσάκις ἐστι πολλαπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ, τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ Η, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Κ, Μ, Ν σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καί ἐστιν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία, δι᾽ ἴσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Γ, Ζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 24 (138) *Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.*

Ἀπόδειξις. Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ, ἐχέτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ, ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. καὶ ἐπεὶ διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΒ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΘΕ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον

πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 25 (I38) *Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον* [*αὐτῶν*] *καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστω δὲ μέγιστον μὲν αὐτῶν τὸ ΑΒ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Ζ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒ, Ζ τῶν ΓΔ, Ε μείζονά ἐστιν.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν Ε ἴσον τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ ἴσον τὸ ΓΘ.

Ἐπεὶ [οὖν] ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν Ε τῷ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ τῷ ΓΘ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΘΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. μεῖζον δὲ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΘΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ, τὰ ἄρα ΑΗ, Ζ ἴσα ἐστὶ τοῖς ΓΘ, Ε. Καὶ [ἐπεὶ] ἐὰν [ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἄνισά ἐστιν, ἐὰν ἄρα] τῶν ΗΒ, ΘΔ ἀνίσων ὄντων καὶ μείζονος τοῦ ΗΒ τῷ μὲν ΗΒ προστεθῇ τὰ ΑΗ, Ζ, τῷ δὲ ΘΔ προστεθῇ τὰ ΓΘ, Ε, συνάγεται τὰ ΑΒ, Ζ μείζονα τῶν ΓΔ, Ε.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον αὐτῶν καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Βιβλίο 6ο

Ὁρισμοί

Ὁρισμοί 1 (141)

(ὁρ. 1) Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

(ὁρ. 2) [Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.]

(ὁρ. 3) Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον.

(ὁρ. 4) Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

(ὁρ. 5) [Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ᾽ ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα.]

Πρότασις 1 (142) *Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Θ, Λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ βάσει ἴσαι [ὁσαιδηποτοῦν] αἱ ΒΗ, ΗΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρίγωνα ἀλλήλοις. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΒΓ βάσεως,

τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΛΓ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΛ τριγώνῳ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΛ τριγώνου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΔ, δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἥ τε ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον, τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια ἥ τε ΛΓ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον· καὶ δέδεικται, ὅτι, εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου, καὶ εἰ ἴση, ἴσον, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον.

Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 2 (142) *Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.*

Ἀπόδειξις. Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ ΒΓ ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΔ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ, ΒΓ· ἄλλο δέ τι τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ [τρίγωνον], οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τὴν ἀπὸ τοῦ

Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἀγομένην πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΒΔΕ, ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καί εἰσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 3 (143) *Ἐὰν τριγώνου ἡ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ ΔΑ παράλληλος ἡ ΓΕ καὶ διαχθεῖσα ἡ ΒΑ συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΒΑΕ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· τριγώνου γὰρ τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΑΕ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστιν ἴση. ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ [ἐστιν] ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστιν ἴση. ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἡ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 4 (144) *Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΓΕΔ· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΔΓΕ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

Κείσθω γὰρ ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν· αἱ ΒΑ, ΕΔ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΖ τῇ ΓΔ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΕ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑΓΔ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΖΑ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τὴν ΖΕ ἦκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ. ἴση δὲ ἡ ΖΔ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ,

ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ.

Τῶν ἄρα ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 5 (145) *Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἔτι ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ. λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ καὶ ἴσας ἕξουσι τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Ε, Ζ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Α λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἐστιν ἴση.

ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΗΖ [τριγώνῳ]. τῶν ἄρα ΑΒΓ, ΕΗΖ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, [οὕτως] ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ὑπόκειται ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΔΕ, ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΗΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΗΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΗ [ἐστιν] ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΖΕΔ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστιν ἴση, ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 6 (146) *Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ καὶ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΔΖ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, Ζ ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση ἐστίν.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ· καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὴ αἱ ΕΔ, ΔΖ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΖ [ἐστιν] ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΔΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 7 (147) *Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, [οὕτως] ὑπόκειται ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΓ, ΒΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἐστιν ἴση. ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ Γ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ· ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΗΒ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ· καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ὀρθῆς· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστίν. οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ· οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ. τριγώνου δὴ τοῦ ΒΗΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσιν ἐλάττονες· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἐλάττονα ἢ μὴ ἐλάττονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 8 (148) *Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἔτι ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β, λοιπὴ

ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν κοινὴν τῶν δύο τριγώνων. τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ [τριγώνων] ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ τρίγωνα.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ ἐστιν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Γ ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν πρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ἴσην τῇ πρὸς τῷ Β, καὶ ἔτι ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθάς· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι [καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποιουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστιν]. *Δ*

Πρότασις 9 (149) *Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τῆς ΑΒ τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον. [καὶ] διήχθω τις ἀπὸ τοῦ Α εὐθεῖα ἡ ΑΓ γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς ΑΒ τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΖ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΖΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

διπλῆ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΑΖ.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῄρηται τὸ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρότασις 10 (149) *Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ τετμημένη ἡ ΑΓ κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ, καὶ διὰ τῶν Δ, Ε τῇ ΒΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΗ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘΚ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΘΒ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΘ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΚΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΚΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΘΕ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΔ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ τῇ ΗΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΗΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΗΕ ἦκται ἡ ΖΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ τῇ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρότασις 11 (150) *Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.*

Ὑλοποίησις: Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι [δύο εὐθεῖαι] αἱ ΒΑ, ΑΓ καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν. δεῖ δὴ τῶν ΒΑ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΕ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΔΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἦκται ἡ ΒΓ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΑΓ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΑΓ τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρηται ἡ ΓΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρότασις 12 (150) *Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.*

Ὑλοποίησις: Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ γωνίαν περιέχουσαι [τυχοῦσαν] τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΗ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΘ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρὰ μίαν τὴν ΕΖ ἦκται ἡ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘΖ.

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ τετάρτη ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΘΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 13 (151) *Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.*

Ὑλοποίησις: Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Κείσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

Ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΔΒ, ἡ ΔΒ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΔΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 14 (151) *Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΒΓ ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ. λέγω, ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΖΕ,

ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΓ παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 15 (152) *Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΕ· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΓΑ τῇ ΑΔ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΒΑΔ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΑΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΓΑΒ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ. τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς ΒΔ, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ

τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ [τρίγωνον] τῷ ΕΑΔ τριγώνῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 16 (153) *Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἤχθωσαν [γὰρ] ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ταῖς ΑΒ, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΗ, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Ζ ἴση ἡ ΑΓ, τῇ δὲ Ε ἴση ἡ ΓΘ. καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΒΗ, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση δὲ ἡ μὲν Ε τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Ζ τῇ ΑΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ΒΗ, ΔΘ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ· ἴση γὰρ ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε· ἴση γὰρ ἡ Ε τῇ ΓΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· λέγω, ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε, καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ τὸ ΒΗ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε τὸ ΔΘ· ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ. καί ἐστιν ἰσογώνια. τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ Ε, ἡ δὲ ΑΗ τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 17 (154) *Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον [ὀρθογώνιον] ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ τὸ ἀπὸ τῆς Β ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς Β· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 18 (154) *Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Α, Β τῇ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΔ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΓΔ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ. πάλιν συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Β, Η τῇ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΒΘ. λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΘΒ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΘ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ· καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ εὐθύγραμμον τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΓΕ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ ΑΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 19 (155) *Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε, ὡς δὲ τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς ΒΗ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΒΗ· τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον

ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον [ἐπείπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΔΕΖ]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 20 (156) *Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΛ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ· ὥστε καὶ ὅμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΛΗΘ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΒΓ, ΛΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν

εἰσιν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ· ὥστε καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ. τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διῄρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω, ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, καὶ ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΖΘ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΘ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ τῇ ὑπὸ ΖΗΝ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ ΒΜΓ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΗΝΘ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς ΜΒ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΗΝ πρὸς ΝΘ· ὥστε καὶ δι᾽ ἴσου, ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΜ [τρίγωνον] πρὸς τὸ ΜΒΓ, καὶ τὸ ΑΜΕ πρὸς τὸ ΕΜΓ· πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ΑΜΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΕ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ, οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον, καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΘ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, καὶ ἔτι τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ, καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον. ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν.

Τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα

Ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν [ὁμοίων] τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Πόρισμα β′

Καὶ ἐὰν τῶν ΑΒ, ΖΗ τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Ξ, ἡ ΒΑ πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ. ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον ἢ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ· ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου φανερόν, ὅτι, ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.] Δ

Πρότασις 21 (I58) *Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων τῷ Γ ὅμοιον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστιν ὅμοιον.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ἑκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει [ὥστε καὶ τὸ Α τῷ Β ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει]. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 22 (I58) *Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ

μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΜΖ, ΝΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ƶ, τῶν δὲ ΕΖ, ΗΘ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Ƶ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν Ο, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ƶ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ƶ, οὕτως [καὶ] τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠΡ ὁποτέρῳ τῶν ΜΖ, ΝΘ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΠΡ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΜΖ, ΣΡ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ. τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΝΘ, ΣΡ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἡ ΗΘ τῇ ΠΡ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Λῆμμα]

[Ὅτι δέ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα ᾖ καὶ ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, δείξομεν οὕτως.

Ἔστω ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

Εἰ γὰρ ἄνισοί εἰσιν, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς ΠΣ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ, οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ, μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΘΝ. ἀλλὰ καὶ ἴσον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ· ἴση ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.] *Δ*

Πρότασις 23 (159) *Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.

Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἀλλ᾽ ὁ τῆς Κ πρὸς Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς Λ λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς Μ· ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 24 (160) *Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὅμοιόν ἐστι ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως, ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τὴν ΓΔ ἦκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΓΖ πρὸς

τὴν ΖΑ, οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΗ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΑ· καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΓΒ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΑΖΕ τριγώνῳ, καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιόν ἐστιν. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων τῷ ΑΒΓΔ [παραλληλογράμμῳ] ὅμοιόν ἐστιν. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 25 (161) *Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ δεῖ ἴσον, τὸ Δ· δεῖ δὴ τῷ μὲν ΑΒΓ ὅμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν ΓΕ τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΒΛ. ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΛΕ τῇ ΕΜ. καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως

ἀναγραφόμενον, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμμῳ. ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἐστιν ἴσον. ἔστι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ ΚΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 26 (161) *Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.*

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ παραλληλογράμμου τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφῃρήσθω τὸ ΑΖ ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω, ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΖ.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστω [αὐτῶν] διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ.

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ καὶ ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐκ ἐστι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΖ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΖ παραλληλογράμμῳ.

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 27 (162) *Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον* [*παραλληλόγραμμον*] *ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΔΒ ἀναγραφέντι ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, τουτέστι τῆς ΓΒ· λέγω, ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι [παραλληλογράμμοις] ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ΔΒ μέγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΖΒ ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΔΒ· λέγω, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΔΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΒ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν δὲ τὸ ΖΒ, ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ ΚΕ ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ. καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ ΕΚ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΛΜΝ γνώμονί ἐστιν ἴσον· ὥστε τὸ ΔΒ παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ ΑΔ, τοῦ ΑΖ παραλληλογράμμου μεῖζόν ἐστιν.

Πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθέν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 28 (163) *Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι· δεῖ δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον* [*ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν*] *μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι* [*τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν*].

Ὑλοποίησις: Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ μὴ μεῖζον [ὂν] τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.

Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΕΒΖΗ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον.

Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ

τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΗ ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΗΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. εἰ δὲ οὔ, μεῖζον ἔστω τὸ ΘΕ τοῦ Γ. ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΗΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ. ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΒ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΚΛΜΝ. ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΗΒ [ἐστιν] ὅμοιον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΗΒ ἐστιν ὅμοιον. ἔστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῖς Γ, ΚΜ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΚΜ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΚΛ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΛΜ. κείσθω τῇ μὲν ΚΛ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΛΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι [τὸ ΗΠ] τῷ ΚΜ [ἀλλὰ τὸ ΚΜ τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστιν]. καὶ τὸ ΗΠ ἄρα τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστιν· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΗΠ τῷ ΗΒ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΗ τοῖς Γ, ΚΜ, ὧν τὸ ΗΠ τῷ ΚΜ ἐστιν ἴσον, λοιπὸς ἄρα ὁ ΥΧΦ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ ΖΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΠΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλῳ τῷ ΖΒ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΖΒ τῷ ΤΕ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστιν ἴση· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΖΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΦΧΥ γνώμονί ἐστιν ἴσον. ἀλλ᾽ ὁ ΦΧΥ γνώμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος· καὶ τὸ ΤΣ ἄρα τῷ Γ ἐστιν ἴσον.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΣΤ ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ [ἐπειδήπερ τὸ ΠΒ τῷ ΗΠ ὅμοιόν ἐστιν]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 29 (164) *Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβάλλειν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τῷ Γ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ.

Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ, καὶ συναμφοτέροις μὲν τοῖς ΒΖ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΗΘ. ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΖΒ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΛΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἐστιν ὅμοιον· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΛ ὅμοιόν

ἐστιν· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ, Γ, ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον ἐστίν. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ γνώμων τῷ Γ ἐστιν ἴσος. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΝ τῷ ΝΒ, τουτέστι τῷ ΛΟ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμονι. ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ γνώμων τῷ Γ ἴσος ἐστίν· καὶ τὸ ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστίν.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΞ ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΟ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπεὶ καὶ τῷ ΕΛ ἐστιν ὅμοιον τὸ ΟΠ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρότασις 30 (165) *Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.*

Ὑλοποίησις: Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΒΓ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΓ τῇ ΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ ὑπερβάλλον εἴδει τῷ ΑΔ ὁμοίῳ τῷ ΒΓ.

Τετράγωνον δέ ἐστι τὸ ΒΓ· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΓ τῷ ΓΔ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΖ λοιπῷ τῷ ΑΔ ἐστιν ἴσον. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΒΖ, ΑΔ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΕ τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΑΕ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. μείζων δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ.

Ἡ ἄρα ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ε, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστι τὸ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρότασις 31 (169) *Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ. ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἴση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 32 (170) *Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΓ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω, ὅτι ἐπ᾽ εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΓΒΑ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρός δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΓ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΕ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 33 (I70) *Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ᾽ ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς Η, Θ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν, οὕτως ἥ τε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

Κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν ΒΓ περιφερείᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἑξῆς ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΓΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΖ περιφερείᾳ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΖΜ, ΜΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ γωνίαι ἀλλήλαις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΒΓ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΗΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΕ περιφέρεια τῆς ΕΖ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΝΘΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΖ. εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΛ τῇ ὑπὸ ΕΘΝ, καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, εἴληπται τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΒΗΓ γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίων ἥ τε ΒΛ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΕΘΖ γωνίας ἥ τε ΕΝ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία. καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ γωνίας, καὶ εἰ ἴση, ἴση, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν, οὕτως ἥ τε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ᾽ ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Βιβλίο 7ο

Ὅρισμοί

Ὅρισμοί 1 (173)

(ὁρ. 1) Μονάς ἐστιν, καθ᾽ ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

(ὁρ. 2) Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

(ὁρ. 3) Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.

(ὁρ. 4) Μέρη δέ, ὅταν μὴ καταμετρῇ.

(ὁρ. 5) Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

(ὁρ. 6) Ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος.

(ὁρ. 7) Περισσὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ [ὁ] μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.

(ὁρ. 8) Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.

(ὁρ. 9) Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

(ὁρ. 10) [Περισσάκις ἀρτιός ἐστιν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν].

(ὁρ. 11) Περισσάκις δὲ περισσὸς ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

(ὁρ. 12) Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

(ὁρ. 13) Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

(ὁρ. 14) Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

(ὁρ. 15) Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

(ὁρ. 16) Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν, ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις.

(ὁρ. 17) Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

(ὁρ. 18) Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

(ὁρ. 19) Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ [ὁ] ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

(ὁρ. 20) Κύβος δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις ἢ [ὁ] ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

(ὁρ. 21) Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.

(ὁρ. 22) Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

(ὁρ. 23) Τέλειος ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν.

Πρότασις 34 (175) *Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δὲ ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ [ἀνίσων] ἀριθμῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρείτω τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς· λέγω, ὅτι οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, τουτέστιν ὅτι τοὺς ΑΒ, ΓΔ μονὰς μόνη μετρεῖ.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε· καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΒΖ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΑ, ὁ δὲ ΑΖ τὸν ΔΗ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΗΓ, ὁ δὲ ΗΓ τὸν ΖΘ μετρῶν λειπέτω μονάδα τὴν ΘΑ.

Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΖ μετρεῖ καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΒΖ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΖ μετρήσει. ὁ δὲ ΑΖ τὸν ΔΗ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΔΗ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΗ μετρήσει. ὁ δὲ ΓΗ τὸν ΖΘ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΖΘ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΖΑ· καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν ΑΘ μονάδα μετρήσει ἀριθμὸς ὤν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς μετρήσει τις ἀριθμός· οἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 35 (176) *Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΓΔ. δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ ΓΔ ἄρα τῶν ΓΔ, ΑΒ κοινὸν μέτρον ἐστίν. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον· οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει.

Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ, τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος λειφθήσεταί τις ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. μονὰς μὲν γὰρ οὐ λειφθήσεται· εἰ δὲ μή, ἔσονται οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. λειφθήσεταί τις ἄρα ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΒΕ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΕΑ, ὁ δὲ ΕΑ τὸν ΔΖ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΓ, ὁ δὲ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖ, ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ, καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ· καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΒΑ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓΖ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ. ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ ΓΖ τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓΖ. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Η. καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ, καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΕ μετρήσει. ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσει ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ ΓΖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 36 (177) *Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ· ὁ δὴ Δ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον· μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς Α, Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Δ. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β ἄρα μετρήσει· καὶ τὸ τῶν Α, Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Δ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ Δ τὸν Γ· λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ Γ, Δ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. ὁ δὴ τοὺς Α, Β, Γ μετρῶν καὶ τοὺς Α, Β μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸν Δ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· τοὺς Δ, Γ ἄρα ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Δ, Γ ἄρα οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Ε. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, ὁ δὲ Δ τοὺς Α, Β μετρεῖ, καὶ ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν ἐστι μέτρον. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ Ε τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Ε. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ζ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Α, Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ζ ἄρα τοὺς Δ, Γ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Δ, Γ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Δ, Γ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Ε· ὁ Ζ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 37 (178) *Ἅπας ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, ΒΓ, καὶ ἔστω ἐλάσσων ὁ ΒΓ· λέγω, ὅτι ὁ ΒΓ τοῦ Α ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

Οἱ Α, ΒΓ γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὔ. ἔστωσαν πρότερον οἱ Α, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. διαιρεθέντος δὴ τοῦ ΒΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας ἔσται ἑκάστη μονὰς τῶν ἐν τῷ ΒΓ μέρος τι τοῦ Α· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὁ δὴ ΒΓ τὸν Α ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. εἰ μὲν οὖν ὁ ΒΓ τὸν Α μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α. εἰ δὲ οὔ, εἰλήφθω τῶν Α, ΒΓ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ διῃρήσθω ὁ ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ Δ τοῦ Α· ἴσος δὲ ὁ Δ ἑκάστῳ τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ τοῦ Α μέρος ἐστίν· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α.

Ἅπας ἄρα ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 38 (178) *Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.*

Ἀπόδειξις. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α [ἀριθμοῦ] τοῦ ΒΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ.

Ἐπεὶ γάρ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ ΕΖ, ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Α ἴσους τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ, ΘΖ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν ΒΗ τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ, καὶ οἱ ΒΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΗΓ, ΘΖ τοῖς Α, Δ. ὅσοι ἄρα [εἰσὶν] ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΓ, ΕΖ ἴσοι τοῖς Α, Δ. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΒΓ, ΕΖ συναμφοτέρου τοῦ Α, Δ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 39 (178) *Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.*

Ἀπόδειξις. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ.

Ἐπεὶ γάρ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΑΗ, ΔΘ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΗΒ, ΘΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 40 (179) *Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.*

Ἀπόδειξις. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρος ἔστω, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ὅ γὰρ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔστω καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ. ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ὑπόκειται καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τοῦ ΓΔ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΓΖ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἐστιν ἴσος. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος [ἐστὶ] καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσος δὲ ὁ ΗΓ τῷ ΖΔ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ. ἀλλὰ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 41 (179) *Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.*

Ἀπόδειξις. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρη ἔστω, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Κείσθω γὰρ τῷ ΑΒ ἴσος ὁ ΗΘ. ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΗΘ τοῦ ΓΔ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΗΘ εἰς τὰ τοῦ ΓΔ μέρη τὰ ΗΚ, ΚΘ, ὁ δὲ ΑΕ εἰς τὰ τοῦ ΓΖ μέρη τὰ ΑΛ, ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΗΚ, ΚΘ τῷ πλήθει τῶν ΑΛ, ΛΕ. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ, τὸ

αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΛ τοῦ ΓΖ, μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ, μείζων ἄρα καὶ ὁ ΗΚ τοῦ ΑΛ. κείσθω τῷ ΑΛ ἴσος ὁ ΗΜ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΜ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ. πάλιν ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΛ τοῦ ΓΖ, μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ, μείζων ἄρα καὶ ὁ ΘΚ τοῦ ΕΛ. κείσθω τῷ ΕΛ ἴσος ὁ ΚΝ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΚΝ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΝΘ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὅλος ὁ ΚΘ ὅλου τοῦ ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ λοιπὸς ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ὢν, ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ· καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ ΜΚ, ΝΘ τοῦ ΔΖ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὅλος ὁ ΘΗ ὅλου τοῦ ΓΔ. ἴσος δὲ συναμφότερος μὲν ὁ ΜΚ, ΝΘ τῷ ΕΒ, ὁ δὲ ΘΗ τῷ ΒΑ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 42 (180) *Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ᾖ, καὶ ἐναλλάξ, ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται ἢ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.*

Ἀπόδειξις. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ τοῦ ΒΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ ἢ μέρη.

Ἐπεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ ΕΖ, ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Α ἴσους τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ, ΘΖ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΗ, ΗΓ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΓ τοῦ ΘΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΒΓ συναμφοτέρου τοῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἴσος δὲ ὁ μὲν ΒΗ τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 43 (180) *Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ ἐναλλάξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου ἢ τὸ αὐτὸ μέρος.*

Ἀπόδειξις. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτὸ μέρος.

Ἐπεὶ γάρ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ, καὶ ἐναλλάξ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καί [ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἀλλ᾽ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐδείχθη καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ] ἃ [ἄρα] μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτὸ μέρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 44 (181) *Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὡς ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν ΓΖ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸν ΖΔ ἐστιν, ὡς ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ.

Ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως ὁ ΑΕ πρὸς τὸν ΓΖ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ πρὸς τὸν ΖΔ, οὕτως ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 45 (181) *Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ μέρη. καὶ

συναμφότερος ἄρα ὁ Α, Γ συναμφοτέρου τοῦ Β, Δ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ Α τοῦ Β. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 46 (182) *Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἐναλλὰξ ἄρα, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 47 (182) *Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ Δ, Ε, Ζ, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 48 (182) *Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει καὶ ὁ δεύτερος τὸν τέταρτον.*

Ἀπόδειξις. Μονὰς γὰρ ἡ Α ἀριθμόν τινα τὸν ΒΓ μετρείτω, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν τὸν ΕΖ μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν ΒΓ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ μονάδες, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς ἐν ἑαυτῷ μονάδας τὰς ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδες ἀλλήλαις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδων τῷ πλήθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμῶν, ἔσται ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμόν, οὕτως ἡ ΗΘ μονὰς πρὸς τὸν ΚΛ ἀριθμὸν καὶ ἡ ΘΓ μονὰς πρὸς τὸν ΛΖ ἀριθμόν. ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμόν, οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΒΗ μονὰς τῇ Α μονάδι, ὁ δὲ ΕΚ ἀριθμὸς τῷ Δ ἀριθμῷ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν, οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. ἰσάκις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 49 (183) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ. ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Β μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Β κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Δ. ἰσάκις δὲ ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν ἐμέτρει καὶ ὁ Α τὸν Γ· ἰσάκις ἄρα ὁ Α ἑκάτερον τῶν Γ, Δ μετρεῖ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 50 (183) *Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν.*

Ἀπόδειξις. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Γ πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε ποιείτω· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ Β ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν

κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Δ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμόν, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμόν, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 51 (183) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασιν.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε ποιείτωσαν· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν. ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 52 (184) *Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου γενομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ὁ γὰρ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Ζ πεποιήκασιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ὁ Η ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ἔστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ Ε τῷ Ζ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ὁ Η πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 53 (184) *Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β οἱ ΓΔ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἰσάκις ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β.

Ὁ ΓΔ γὰρ τοῦ Α οὐκ ἐστι μέρη. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ὁ ΕΖ ἄρα τοῦ Β τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΓΔ μέρη τοῦ Α, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΕΖ μέρη τοῦ Β. διῃρήσθω ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ τοῦ Α μέρη τὰ ΓΗ, ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ τοῦ Β μέρη τὰ ΕΘ, ΘΖ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΓΗ, ΗΔ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ, οὕτως ὁ ΗΔ πρὸς τὸν ΘΖ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ, οὕτως ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΕΖ· οἱ ΓΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς ΓΔ, ΕΖ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὑπόκεινται γὰρ οἱ ΓΔ, ΕΖ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. οὐκ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΓΔ τοῦ Α· μέρος ἄρα. καὶ ὁ ΕΖ τοῦ Β τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ἰσάκις ἄρα ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 54 (185) *Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ γὰρ μή, ἔσονταί τινες τῶν Α, Β ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β. ἔστωσαν οἱ Γ, Δ.

Ἐπεὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων [αὐτοῖς] μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ

ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ἰσάκις ἄρα ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Β. ὁσάκις δὴ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε. καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁ Ε καὶ τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας. ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Α, Β ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β. οἱ Α, Β ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 55 (185) *Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

Ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, ὁ Γ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Α, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Δ, Ε ἄρα τοῖς Α, Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 56 (186) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὸν ἕνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, τὸν δὲ Α μετρείτω τις ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω, ὅτι καὶ οἱ Γ, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Γ, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει [τις] τοὺς Γ, Β ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, ὁ δὲ Γ τὸν Α μετρεῖ, καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Γ, Β ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 57 (186) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Γ πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει [τις] τοὺς Γ, Δ ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, τὸν δὲ Γ μετρεῖ τις ἀριθμὸς ὁ Ε, οἱ Α, Ε ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὁσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας. ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Ζ τῷ ἐκ τῶν Α, Β. ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Β, Γ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Γ, Δ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 58 (186) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Κείσθω γὰρ τῷ Α ἴσος ὁ Δ. ἐπεὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἴσος δὲ ὁ Α τῷ Δ, καὶ οἱ Δ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἑκάτερος ἄρα τῶν Δ, Α πρὸς τὸν Β πρῶτός ἐστιν· καὶ ὁ ἐκ τῶν Δ, Α ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Β πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Δ, Α γενόμενος ἀριθμός ἐστιν ὁ Γ. οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 59 (187) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ὦσιν, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γενόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ Ε, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Α, Β πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστιν, καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Β ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Α, Β γενόμενός ἐστιν ὁ Ε· οἱ Ε, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ Δ, Ε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἑκάτερος ἄρα τῶν Γ, Δ πρὸς τὸν Ε πρῶτός ἐστιν. καὶ ὁ ἐκ τῶν Γ, Δ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Ε πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ γενόμενός ἐστιν ὁ Ζ. οἱ Ε, Ζ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 60 (187) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, κἂν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, κἀκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται* [*καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει*].

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω, ὅτι οἵ τε Γ, Ε καὶ οἱ Δ, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ οὖν οἱ Γ, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, οἱ Γ, Ε ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, οἱ Α, Ε ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Γ πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Ε ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοί εἰσιν, καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν Β, Ε πρῶτός ἐστιν. καί ἐστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν Α, Γ ὁ Δ, ὁ δὲ ἐκ τῶν Β, Ε ὁ Ζ. οἱ Δ, Ζ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 61 (187) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται· καὶ ἐὰν συναμφότερος πρός ἕνα τινὰ αὐτῶν πρῶτος ᾖ, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.*

Ἀπόδειξις. Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ ΑΓ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ πρῶτός ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΓΑ, ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις τοὺς ΓΑ, ΑΒ ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τοὺς ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΒΑ· ὁ Δ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς ΓΑ, ΑΒ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ ΓΑ, ΑΒ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὁ ΓΑ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ πρῶτός ἐστιν.

Ἔστωσαν δὴ πάλιν οἱ ΓΑ, ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω, ὅτι καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΑΒ, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΒΓ ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΑ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΑΒ· ὁ Δ ἄρα τοὺς ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΒΓ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 62 (188) *Ἅπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμόν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Α καὶ τὸν Β μὴ μετρείτω· λέγω, ὅτι οἱ Β, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Β, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω ὁ Γ. ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Α τὸν Β οὐ μετρεῖ, ὁ Γ ἄρα τῷ Α οὐκ ἐστιν ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τοὺς Β, Α μετρεῖ, καὶ τὸν Α ἄρα μετρεῖ πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Β, Α μετρήσει τις ἀριθμός. οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 63 (188) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός, καί ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν Γ ποιείτωσαν, τὸν δὲ Γ μετρείτω τις πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Δ· λέγω, ὅτι ὁ Δ ἕνα τῶν Α, Β μετρεῖ.

Τὸν γὰρ Α μὴ μετρείτω· καί ἐστι πρῶτος ὁ Δ· οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ὁσάκις ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν

ἐν τῷ Ε. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε τῷ ἐκ τῶν Α, Β. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Δ, Α πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐὰν τὸν Β μὴ μετρῇ, τὸν Α μετρήσει. ὁ Δ ἄρα ἕνα τῶν Α, Β μετρεῖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 64 (189) *Ἅπας σύνθετος ἀριθμὸς ὑπό πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω, ὅτι ὁ Α ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Β. καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Β, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Β τὸν Α μετρεῖ, καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. τοιαύτης δὴ γινομένης ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τις πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει. εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν Α ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοί, ὧν ἕτερος ἑτέρου ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς. ληφθήσεταί τις ἄρα πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει.

Ἅπας ἄρα σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 65 (189) *Ἅπας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω, ὅτι ὁ Α ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ Α, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός.

Ἅπας ἄρα ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 66 (189) *Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ.

Οἱ Α, Β, Γ γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ δὲ οὔ, εἰλήφθω τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ ὁσάκις ὁ Δ ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν ἑκάστῳ τῶν Ε, Ζ, Η. καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν Ε, Ζ, Η ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας. οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοῖς Α, Β, Γ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ, ἔσονται [τινες] τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ. ἔστωσαν οἱ Θ, Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ καὶ ἑκάτερος τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ. ὁσάκις δὲ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Μ· καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας, καὶ ὁ Μ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Θ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁ Μ καὶ ἑκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν Κ, Λ μονάδας· ὁ Μ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας, ὁ Θ ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ τῷ ἐκ τῶν Θ, Μ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Δ. μείζων δὲ ὁ Ε τοῦ Θ· μείζων ἄρα καὶ ὁ Μ τοῦ Δ. καὶ μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον. οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ. οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 67 (190) *Δύο ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· δεῖ δὴ εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Οἱ Α, Β γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὔ. ἔστωσαν πρότερον οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. οἱ Α, Β ἄρα τὸν Γ μετροῦσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. μετρείτωσαν τὸν Δ. καὶ ὁσάκις

ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε, ὁσάκις δὲ ὁ Β τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῷ ἐκ τῶν Β, Ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὡς ἑπόμενος ἑπόμενον. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Β, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Ε· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετροῦσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β οἱ Ζ, Ε· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῷ ἐκ τῶν Β, Ζ. καὶ ὁ Α τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ Α, Β ἄρα τὸν Γ μετροῦσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. μετρείτωσαν τὸν Δ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Η, ὁσάκις δὲ ὁ Β τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Θ. ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Η τῷ ἐκ τῶν Β, Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. οἱ δὲ Ζ, Ε ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Ε ἄρα τὸν Η μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Ε, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὁ δὲ Ε τὸν Η μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 68 (191) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσιν, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ᾽ αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσει.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν ΓΔ μετρείτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν Ε· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ.

Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, ὁ Ε τὸν ΔΖ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΓΖ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε μετροῦσιν, ὁ δὲ Ε τὸν ΔΖ μετρεῖ, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσουσιν. μετροῦσι δὲ καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· καὶ λοιπὸν

ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσουσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ· μετρεῖ ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 69 (192) *Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Εἰλήφθω γὰρ ὑπὸ δύο τῶν Α, Β ἐλάχιστος μετρούμενος ὁ Δ. ὁ δὴ Γ τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. μετροῦσι δὲ καὶ οἱ Α, Β τὸν Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Δ μετροῦσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσιν [τινα] ἀριθμὸν οἱ Α, Β, Γ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ. μετρείτωσαν τὸν Ε. ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ τὸν Ε μετροῦσιν, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε μετροῦσιν. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος [τὸν Ε] μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε μετρήσει ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα ἐλάχιστον τὸν Δ μετροῦσιν.

Μὴ μετρείτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ, καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Ε. ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Δ μετροῦσιν, ὁ δὲ Δ τὸν Ε μετρεῖ, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε μετροῦσιν. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ [τὸν Ε· καὶ] οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Ε μετροῦσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα οἱ Α, Β, Γ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε. μετρείτωσαν τὸν Ζ. ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ τὸν Ζ μετροῦσιν, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ζ μετροῦσιν· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος τὸν Ζ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ζ· οἱ Δ, Γ ἄρα τὸν Ζ μετροῦσιν· ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενος τὸν Ζ μετρήσει. ὁ δὲ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Γ, Δ μετρούμενός ἐστιν ὁ Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε. ὁ Ε ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 70 (193) *Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρῆται, ὁ μετρούμενος ὁμώνυμον μέρος ἕξει τῷ μετροῦντι.*

Ἀπόδειξις. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ὑπό τινος ἀριθμοῦ τοῦ Β μετρείσθω· λέγω, ὅτι ὁ Α ὁμώνυμον μέρος ἔχει τῷ Β.

Ὁσάκις γὰρ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Γ. ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν

μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α. ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Α. ἡ δὲ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον αὐτῷ· καὶ ὁ Γ ἄρα τοῦ Α μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ Β. ὥστε ὁ Α μέρος ἔχει τὸν Γ ὁμώνυμον ὄντα τῷ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 71 (193) *Ἐὰν ἀριθμὸς μέρος ἔχῃ ὁτιοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.*

Ἀπόδειξις. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α μέρος ἐχέτω ὁτιοῦν τὸν Β, καὶ τῷ Β μέρει ὁμώνυμος ἔστω [ἀριθμὸς] ὁ Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Α μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ Γ, ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ μέρος ὁμώνυμον αὐτῷ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Α· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α. ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α. ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 72 (193) *Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ δοθέντα μέρη.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ Α, Β, Γ μέρη.

Ἔστωσαν γὰρ τοῖς Α, Β, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ οἱ Δ, Ε, Ζ, καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Η.

Ὁ Η ἄρα ὁμώνυμα μέρη ἔχει τοῖς Δ, Ε, Ζ. τοῖς δὲ Δ, Ε, Ζ ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ Α, Β, Γ· ὁ Η ἄρα ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστος ὤν. εἰ γὰρ μή, ἔσται τις τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμός, ὃς ἕξει τὰ Α, Β, Γ μέρη. ἔστω ὁ Θ. ἐπεὶ ὁ Θ ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη, ὁ Θ ἄρα ὑπὸ ὁμωνύμων ἀριθμῶν μετρηθήσεται τοῖς Α, Β, Γ μέρεσιν. τοῖς δὲ Α, Β, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί εἰσιν οἱ Δ, Ε, Ζ· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ μετρεῖται. καί ἐστιν ἐλάσσων τοῦ Η· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσται τις τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμός, ὃς ἕξει τὰ Α, Β, Γ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Βιβλίο 8ο

Ὁρισμοί

Πρότασις 1 (195) *Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ γὰρ μή, ἔστωσαν ἐλάττονες τῶν Α, Β, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Ε, Ζ, Η, Θ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος [τῶν Α, Β, Γ, Δ] τῷ πλήθει [τῶν Ε, Ζ, Η, Θ], δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Ε ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐλάσσονες ὄντες τῶν Α, Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς. οἱ Α, Β, Γ, Δ ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 2 (195) *Ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἂν ἐπιτάξῃ τις, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἄν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ.

Ἐπιτετάχθωσαν δὴ τέσσαρες, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Β ἑαυτὸν

πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Α τοὺς Γ, Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η, Θ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιείτω.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, [οὕτως] ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, ἑκάτερος ἄρα τῶν Α, Β τὸν Β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Δ, Ε πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, [οὕτως] ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ἦν ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Θ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὁ Η πρὸς τὸν Θ. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὁ Α πρὸς τὸν Β. καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Θ, Κ πεποιήκασιν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὅ τε Ζ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Η πρὸς τὸν Θ. καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὅ τε Η πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἑκάτερος μὲν τῶν Α, Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, Ε πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Γ, Ε πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ζ, Κ πεποίηκεν· οἱ Γ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Κ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ὦσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν, ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι. *Δ*

Πρότασις 3 (196) *Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω, ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Β, Γ, Δ λόγῳ οἱ Ε, Ζ, τρεῖς δὲ οἱ Η, Θ, Κ, καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως τὸ λαμβανόμενον πλῆθος ἴσον γένηται τῷ πλήθει τῶν Α, Β, Γ, Δ. εἰλήφθωσαν καὶ ἔστωσαν οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ.

Καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Ζ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Η, Κ πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Η, Κ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Λ, Ξ πεποίηκεν, καὶ οἱ Η, Κ ἄρα καὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ, Δ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ, ἕκαστος ἄρα τῶν Α, Β, Γ, Δ ἑκάστῳ τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Α τῷ Λ, ὁ δὲ Δ τῷ Ξ. καί εἰσιν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. καὶ οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 4 (196) *Λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ὅ τε τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Η. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Β τὸν Η μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Α τὸν Θ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Η μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Δ τὸν Κ μετρείτω. ὁ δὲ Ε τὸν Κ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. καὶ ὁσάκις ὁ Ε τὸν Κ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Λ μετρείτω. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Α τὸν Θ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Η, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ, καὶ ἔτι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἔστωσαν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ὁ Β ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ξ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ξ μετροῦσιν· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενος τὸν Ξ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρεῖται ὁ Η·

ὁ Η ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ.

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ Ε τὸν Κ. καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν Ε, Κ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Μ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Κ τὸν Μ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Η ἑκάτερον τῶν Ν, Ζ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Ο μετρείτω. ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Θ τὸν Ν μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Ζ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Μ. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ καὶ ὁ Ζ τὸν Ο, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Ο· οἱ Ν, Ζ, Μ, Ο ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ λόγοις. εἰ γὰρ μή, ἔσονταί τινες τῶν Ν, Ζ, Μ, Ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ λόγοις. ἔστωσαν οἱ Π, Ρ, Σ, Τ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Ρ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ὁ Β ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ρ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ρ μετροῦσιν. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενος τὸν Ρ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. καί ἐστιν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ρ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Σ· καὶ ὁ Κ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Ε τὸν Σ· οἱ Ε, Κ ἄρα τὸν Σ μετροῦσιν. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενος τὸν Σ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενός ἐστιν ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Ν, Ζ, Μ, Ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις· οἱ Ν, Ζ, Μ, Ο ἄρα ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ λόγοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 5 (198) *Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοί, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Λόγων γὰρ δοθέντων τοῦ τε ὃν ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς ΓΕ, ΔΖ λόγοις, οἱ Η, Θ, Κ, ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως τὸν Η πρὸς τὸν Θ, ὡς δὲ τὸν Δ πρὸς

τὸν Ζ, οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ. καὶ ὁ Δ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Κ, [οὕτως] ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ δὲ Η πρὸς τὸν Κ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 6 (198) *Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὁ δὲ Α τὸν Β μὴ μετρείτω· λέγω, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Ὅτι μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε ἑξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσιν, φανερόν· οὐδὲ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω ὁ Α τὸν Γ. καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ Α, Β, Γ, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ οἱ Ζ, Η, Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Α, Β, Γ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ τῷ πλήθει τῶν Ζ, Η, Θ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β, οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ Ζ τὸν Η· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Ζ· ἡ γὰρ μονὰς πάντα ἀριθμὸν μετρεῖ. καί εἰσιν οἱ Ζ, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους [οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ]. καί ἐστιν ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ· οὐδὲ ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 7 (198) *Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ* [*ἑξῆς*] *ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ, καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Δ μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει· μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Δ. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 8 (199) *Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας* [*αὐτοῖς*] *μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω, ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ὅσοι γάρ εἰσι τῷ πλήθει οἱ Α, Β, Γ, Δ, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β οἱ Η, Θ, Κ, Λ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Η, Λ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β τοῖς Η, Θ, Κ, Λ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Δ, Β τῷ πλήθει τῶν Η, Θ, Κ, Λ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. οἱ δὲ Η, Λ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. ἰσάκις ἄρα ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ καὶ ὁ Λ τὸν Ζ. ὁσάκις δὴ ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Κ ἑκάτερον τῶν Μ, Ν μετρείτω· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ ἰσάκις μετροῦσιν. οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. ἀλλὰ οἱ Η, Θ, Κ, Λ τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν· καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. οἱ δὲ Α, Γ, Δ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν· καὶ οἱ Ε, Μ, Ν, Ζ ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 9 (199) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ ἐκκείσθω ἡ Ε μονάς· λέγω, ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς

ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Γ, Δ, Β λόγῳ ὄντες οἱ Ζ, Η, τρεῖς δὲ οἱ Θ, Κ, Λ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ, Β. εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο. φανερὸν δή, ὅτι ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν, τὸν δὲ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν, καὶ ὁ Η ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν, τὸν δὲ Λ πολλαπλασιάσας τὸν Ο πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Ζ, Η, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Ζ, Η, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ, Β, ἕκαστος ἄρα τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο ἑκάστῳ τῶν Α, Γ, Δ, Β ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Μ τῷ Α, ὁ δὲ Ο τῷ Β. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν, ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ζ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Ζ τὸν Θ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν, ὁ Θ ἄρα τὸν Μ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ζ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Θ τὸν Μ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. ἴσος δὲ ὁ Μ τῷ Α· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Η ἀριθμόν, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Ε μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 10 (200) *Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ἑκατέρου καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἵ τε Δ, Ε καὶ οἱ Ζ, Η· λέγω, ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ὁ Δ γὰρ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Λ ποιείτω.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἰσάκις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε. ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Δ ἄρα ἀριθμὸς τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ [μονὰς] πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Α, ἰσάκις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Α. ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. καὶ ὡς ἄρα ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Ε, Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Κ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Λ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἔτι ἐπεὶ ὁ Ζ ἑκάτερον τῶν Θ, Η πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Λ, Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὅ τε Α πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β. οἱ Α, Κ, Λ, Β ἄρα κατὰ τὸ συνεχὲς ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον. ὅσοι ἄρα ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς Γ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεσοῦνται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 11 (200) *Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω. καὶ ἐπεὶ τετράγωνός ἐστιν ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἐστιν ὁ Γ, ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας

τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Ε πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ γὰρ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Ε, Β, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ε. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πλευρὰ πρὸς τὴν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 12 (201) *Δύο κύβων ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν κύβοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιείτω.

Καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Θ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. ὡς δὲ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. ὡς δὲ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὅ τε Α πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Β. τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Θ, Κ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Θ, Κ, Β, ὁ Α

ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Α πρὸς τὸν Θ. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ Α [ἄρα] πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 13 (201) *Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἀνάλογον ἔσονται· καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται* [*καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει*].

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, καὶ οἱ Α, Β, Γ ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε, Ζ ποιείτωσαν, τοὺς δὲ Δ, Ε, Ζ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Θ, Κ ποιείτωσαν· λέγω, ὅτι οἵ τε Δ, Ε, Ζ καὶ οἱ Η, Θ, Κ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν.

Ὁ μὲν γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Α, Β τὸν Λ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Μ, Ν ποιείτω. καὶ πάλιν ὁ μὲν Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Β, Γ τὸν Ξ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ο, Π ποιείτω.

Ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν, ὅτι οἱ Δ, Λ, Ε καὶ οἱ Η, Μ, Ν, Θ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἔτι οἱ Ε, Ξ, Ζ καὶ οἱ Θ, Ο, Π, Κ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Β πρὸς τὸν Γ λόγῳ. καί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ οἱ Δ, Λ, Ε ἄρα τοῖς Ε, Ξ, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ καὶ ἔτι οἱ Η, Μ, Ν, Θ τοῖς Θ, Ο, Π, Κ. καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν τῶν Δ, Λ, Ε πλῆθος τῷ τῶν Ε, Ξ, Ζ πλήθει, τὸ δὲ τῶν Η, Μ, Ν, Θ τῷ τῶν Θ, Ο, Π, Κ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 14 (202) *Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Β μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω· οἱ Α, Ε, Β ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. καί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

Πάλιν δὴ ὁ Γ τὸν Δ μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς

τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. καί εἰσιν οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β.

Ἐὰν ἄρα τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 15 (202) *Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.*

Ἀπόδειξις. Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον τὸν Β μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Ὁ Γ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ [ποιείτω], ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιείτω. φανερὸν δή, ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η καὶ οἱ Α, Θ, Κ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Θ, Κ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν Θ. καί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

Ἀλλὰ δὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οἱ Α, Θ, Κ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ, καί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ, καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Θ μετρεῖ· ὥστε καὶ τὸν Β μετρεῖ ὁ Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 16 (202) *Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Β· λέγω, ὅτι οὐδὲ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, μετρήσει καὶ ὁ Α τὸν Β. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδὲ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Μὴ μετρείτω [δὴ] πάλιν ὁ Γ τὸν Δ· λέγω, ὅτι οὐδὲ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ᾽ ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 17 (203) *Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.*

Ἀπόδειξις. Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μὴ μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι ὁ Γ τὸν Δ οὐ μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ᾽ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω, ὅτι οὐδὲ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ᾽ ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 18 (203) *Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοί, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. λέγω οὖν, ὅτι τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον [πλευράν].

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Γ, Δ, ὁ Δ ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ Δ δὴ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, [οὕτως] ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. οἱ Α, Η, Β ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Η, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸν Η. καί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Η, οὕτως ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β

διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 19 (203) *Δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, Ε, τοῦ δὲ Β οἱ Ζ, Η, Θ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. λέγω, ὅτι τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιείτω, ὁ δὲ Ζ τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ τοῖς Ζ, Η ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καὶ ἐκ μὲν τῶν Γ, Δ ἐστιν ὁ Κ, ἐκ δὲ τῶν Ζ, Η ὁ Λ, οἱ Κ, Λ [ἄρα] ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Κ, Λ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός. ἔστω ὁ Μ. ὁ Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ζ, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι ἐδείχθη. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Κ πεποίηκεν, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, ὁ Μ πρὸς τὸν Λ. οἱ Κ, Μ, Λ ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. οἱ Κ, Μ, Λ ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἔν τε τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ λόγῳ καὶ τῷ τοῦ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Θ. ἑκάτερος δὴ τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ ποιείτω. καὶ ἐπεὶ στερεός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Γ, Δ, Ε, ὁ Ε ἄρα τὸν ἐκ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ ἐστιν ὁ Κ· ὁ Ε ἄρα τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Θ τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ν πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. ὡς δὲ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὅ τε Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Μ

πολλαπλασιάσας τὸν Ξ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Β. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως οὐ μόνον ὁ Ξ πρὸς τὸν Β, ἀλλὰ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. οἱ Α, Ν, Ξ, Β ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς εἰρημένοις τῶν πλευρῶν λόγοις.

Λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Ν, Ξ, Β, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ν. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ν, οὕτως ἐδείχθη ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 20 (204) *Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμός, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπιπτέτω ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Εἰλήφθωσαν [γὰρ] ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ οἱ Δ, Ε· ἴσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ. ὁσάκις δὴ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. ὥστε ὁ Α ἐπίπεδός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Δ, Ζ. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Δ, Ε ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, Β, ἴσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Β. ὁσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Η. ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Η μονάδας· ὁ Η ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ Β ἄρα ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Ε, Η. οἱ Α, Β ἄρα ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. λέγω δή, ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ ὁ Ζ τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Γ πρὸς τὸν Β. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε ἑκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η. οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· αἱ γὰρ πλευραὶ αὐτῶν ἀνάλογόν εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 21 (205) *Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι στερεοί εἰσιν.

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ τρεῖς οἱ Ε, Ζ, Η· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Η πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ τῶν Ε, Η εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπέπτωκεν ἀριθμὸς ὁ Ζ, οἱ Ε, Η ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. ἔστωσαν οὖν τοῦ μὲν Ε πλευραὶ οἱ Θ, Κ, τοῦ δὲ Η οἱ Λ, Μ. φανερὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τοῦ πρὸ τούτου, ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἔν τε τῷ τοῦ Θ πρὸς τὸν Λ λόγῳ καὶ τῷ τοῦ Κ πρὸς τὸν Μ. καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ. οἱ δὲ Ε, Η πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Δ. ὁσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ν. ὁ Ν ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. ὁ δὲ Ε ἐστιν ὁ ἐκ τῶν Θ, Κ· ὁ Ν ἄρα τὸν ἐκ τῶν Θ, Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Θ, Κ, Ν. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, Δ, Β, ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Β. ὁσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ξ. ὁ Η ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ δὲ Η ἐστιν ὁ ἐκ τῶν Λ, Μ· ὁ Ξ ἄρα τὸν ἐκ τῶν Λ, Μ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Β, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Λ, Μ, Ξ· οἱ Α, Β ἄρα στερεοί εἰσιν.

Λέγω [δή], ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ Ν, Ξ τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Α, Γ πεποιήκασιν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὁ Θ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. καί εἰσιν οἱ μὲν Θ, Κ, Ν πλευραὶ τοῦ Α, οἱ δὲ Ξ, Λ, Μ πλευραὶ τοῦ Β. οἱ Α, Β ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι στερεοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 22 (205) *Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὁ δὲ πρῶτος ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Γ εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Β, οἱ Α, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. τετράγωνος δὲ ὁ Α· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 23 (206) *Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α κύβος ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Δ κύβος ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Δ δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, οἱ Α, Δ ἄρα ὅμοιοί εἰσι στερεοὶ ἀριθμοί. κύβος δὲ ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 24 (206) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Δ, ὁ δὲ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Β τετράγωνός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ τετράγωνοί εἰσιν, οἱ Γ, Δ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. τῶν Γ, Δ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστιν ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Β ἄρα τετράγωνός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 25 (206) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν, ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν Δ, κύβος δὲ ἔστω ὁ Α· λέγω [δή], ὅτι καὶ ὁ Β κύβος ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ κύβοι εἰσίν, οἱ Γ, Δ ὅμοιοι στερεοί εἰσιν· τῶν Γ, Δ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ὅσοι δὲ εἰς τοὺς Γ, Δ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς· ὥστε καὶ τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν

ἀριθμοί. ἐμπιπτέτωσαν οἱ Ε, Ζ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Ε, Ζ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καί ἐστι κύβος ὁ Α, κύβος ἄρα καὶ ὁ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 26 (206) *Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν, τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. ἐμπιπτέτω καὶ ἔστω ὁ Γ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Β οἱ Δ, Ε, Ζ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Δ, Ζ τετράγωνοί εἰσιν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, καί εἰσιν οἱ Δ, Ζ τετράγωνοι, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 27 (207) *Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ὅμοιοι στερεοί εἰσιν, τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ἐμπιπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος οἱ Ε, Ζ, Η, Θ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Θ κύβοι εἰσίν. καί ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Βιβλίο 9ο

Ὁρισμοί

Πρότασις 1 (209) *Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω. ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί, τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας· ὥστε καὶ τῶν Δ, Γ εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστι τετράγωνος ὁ Δ· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 2 (209) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τετράγωνός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὁ Γ, οἱ Δ, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. τῶν Δ, Γ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. καί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν [οἱ] ἀριθμοί· οἱ ἄρα Α, Β ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 3 (209) *Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ Β κύβος ἐστίν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ Α πλευρὰ ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω. φανερὸν δή ἐστιν, ὅτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὑτῷ μονάδας. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, ὁ Δ πρὸς τὸν Α. ἀλλ᾽ ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Α. τῆς ἄρα μονάδος καὶ τοῦ Α ἀριθμοῦ δύο μέσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὑτῷ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, ὁ Α πρὸς τὸν Β. τῆς δὲ μονάδος καὶ τοῦ Α δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται. καί ἐστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 4 (210) *Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ Γ κύβος ἐστίν.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β κύβοι εἰσίν, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ Α, Β. τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· ὥστε καὶ τῶν Δ, Γ δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. καί ἐστι κύβος ὁ Δ· κύβος ἄρα καὶ ὁ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 5 (210) *Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἀριθμόν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ Β κύβος ἐστίν.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· κύβος ἄρα ἐστίν ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Δ, Γ κύβοι εἰσίν, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. τῶν Δ, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καί ἐστι κύβος ὁ Α· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 6 (210) *Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β ποιείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α κύβος ἐστίν.

Ὁ γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα κύβος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὑτῷ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ κύβοι εἰσίν, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. τῶν Β, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. καί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Α πρὸς τὸν Β. καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. καί ἐστι κύβος ὁ Β· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 7 (210) *Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἀριθμόν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ Γ στερεός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α σύνθετός ἐστιν, ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος μετρηθήσεται. μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Δ, καὶ ὁσάκις ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, ὁ Ε ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ δὲ Α ἐστιν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε, ὁ ἄρα ἐκ τῶν Δ, Ε τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ὁ Γ ἄρα στερεός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Δ, Ε, Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 8 (213) *Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνος ἔσται καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες, ὁ δὲ τέταρτος κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος ὁ Γ κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος ὁ Ζ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· τετράγωνος ἄρα ἐστὶν ὁ Β. καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Β τετράγωνός ἐστιν, καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ζ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες τετράγωνοί εἰσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ. ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ, Ε, Ζ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Γ κύβος ἐστίν, καὶ ὁ Ζ ἄρα κύβος ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος κύβος τέ ἐστι καὶ τετράγωνος. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες κύβοι τέ εἰσι καὶ τετράγωνοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 9 (213) *Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἑξῆς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες*

τετράγωνοι ἔσονται. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω [δή], ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καί ἐστιν ὁ Α τετράγωνος, καὶ ὁ Γ [ἄρα] τετράγωνός ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ [καὶ] οἱ Β, Γ, Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καί ἐστιν ὁ Β τετράγωνος, καὶ ὁ Δ [ἄρα] τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ Α κύβος· λέγω, ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω [δή], ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὑτῷ μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. καί ἐστιν ὁ Α κύβος. ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἐστίν· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καί ἐστιν ὁ Α κύβος, καὶ ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε κύβος ἐστίν, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 10 (214) *Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ* [*ἑξῆς*] *ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων πάντων. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α μὴ ἔστω τετράγωνος· λέγω, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος [καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων].

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Γ τετράγωνος. ἔστι δὲ καὶ ὁ Β τετράγωνος· οἱ Β, Γ ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Β ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. καί ἐστι τετράγωνος ὁ Β·

τετράγωνος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Α· ὅπερ οὐχ ὑπέκειτο. οὐκ ἄρα ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνός ἐστι χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ Α κύβος. λέγω, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Δ κύβος. ἔστι δὲ καὶ ὁ Γ κύβος· τέταρτος γάρ ἐστιν ἀπὸ τῆς μονάδος. καί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πρὸς τὸν Γ λόγον ἔχει, ὃν κύβος πρὸς κύβον. καί ἐστιν ὁ Γ κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστίν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β πεποίηκεν. ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται. κύβος ἄρα καὶ ὁ Α· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ὁ Δ κύβος ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἐστὶ χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 11 (214) *Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς Α ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Β, Γ, Δ, Ε· λέγω, ὅτι τῶν Β, Γ, Δ, Ε ὁ ἐλάχιστος ὁ Β τὸν Ε μετρεῖ κατά τινα τῶν Γ, Δ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἰσάκις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Ε. ἡ δὲ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὥστε ὁ ἐλάσσων ὁ Β τὸν μείζονα τὸν Ε μετρεῖ κατά τινα ἀριθμὸν τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Πόρισμα Καὶ φανερόν, ὅτι ἣν ἔχει τάξιν ὁ μετρῶν ἀπὸ μονάδος, τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ὁ καθ᾽ ὃν μετρεῖ ἀπὸ τοῦ μετρουμένου ἐπὶ τὸ πρὸ αὐτοῦ. —ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 12 (215) *Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὑφ᾽ ὅσων ἂν ὁ ἔσχατος πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω, ὅτι ὑφ᾽ ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται.

Μετρείσθω γὰρ ὁ Δ ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ τοῦ Ε· λέγω, ὅτι ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ. μὴ γάρ· καί ἐστιν ὁ Ε πρῶτος, ἅπας δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Γ. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η· ὁ Ε ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν διὰ τὸ πρὸ τούτου καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Η. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, ὁ Η πρὸς τὸν Β. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Β. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ· ὁ Ε ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Ε, Θ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Α. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α, ὁ Α πρὸς τὸν Θ. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Α ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. ἀλλὰ μὴν καὶ οὐ μετρεῖ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Ε, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. σύνθετοι ἄρα. οἱ δὲ σύνθετοι ὑπὸ [πρώτου] ἀριθμοῦ τινος μετροῦνται. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρῶτος ὑπόκειται, ὁ δὲ πρῶτος ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται ἢ ὑφ᾽ ἑαυτοῦ, ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Ε μετρεῖ· ὥστε ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Δ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ὑφ᾽ ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 13 (215) *Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ᾖ, ὁ μέγιστος ὑπ᾽ οὐδενὸς [ἄλλου] μετρηθήσεται παρὲξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτος ἔστω· λέγω, ὅτι ὁ μέγιστος αὐτῶν ὁ Δ ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἔστω ὁ αὐτός. φανερὸν δή, ὅτι ὁ Ε πρῶτος οὐκ ἐστιν. εἰ γὰρ ὁ Ε πρῶτός ἐστι καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ Ε πρῶτός ἐστιν. σύνθετος ἄρα. πᾶς δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δή, ὅτι ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου μετρηθήσεται πλὴν τοῦ Α. εἰ γὰρ ὑφ᾽ ἑτέρου μετρεῖται ὁ Ε, ὁ δὲ Ε τὸν Δ μετρεῖ, κἀκεῖνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὁ Α ἄρα τὸν Ε μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ. λέγω, ὅτι ὁ Ζ οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ ὁ Ζ ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτὸς καὶ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε, καὶ εἷς ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ε. ἀλλὰ εἷς τῶν Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατά τινα τῶν Α, Β, Γ· καὶ ὁ Ε ἄρα ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ὁ Ζ ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι μετρεῖται ὁ Ζ ὑπὸ τοῦ Α, δεικνύντες πάλιν, ὅτι ὁ Ζ οὐκ ἐστι πρῶτος. εἰ γάρ, καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πρῶτός ἐστιν ὁ Ζ· σύνθετος ἄρα. ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Ζ ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δή, ὅτι ὑφ᾽ ἑτέρου πρώτου οὐ μετρηθήσεται πλὴν τοῦ Α. εἰ γὰρ ἕτερός τις πρῶτος τὸν Ζ μετρεῖ, ὁ δὲ Ζ τὸν Δ μετρεῖ, κἀκεῖνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὁ Α ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ζ, ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. ὁ δὲ Α τὸν Ε μετρεῖ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β ἐστιν ὁ αὐτός, καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Α. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Η, ὁ Ζ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ζ, Η. ἀνάλογον ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ζ, ὁ Η πρὸς τὸν Β. μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Η τὸν Β. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ὁ Θ τῷ Α οὐκ ἔστιν ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Θ, ὁ Η ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ ἄρα ὑπὸ Θ, Η ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Α τετραγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Α, ὁ Α πρὸς τὸν Η. μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Η· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Θ τὸν Α πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος ὁ Δ ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 14 (216) *Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.*

Ἀπόδειξις. Ἐλάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ μετρείσθω· λέγω, ὅτι ὁ Α ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν Β, Γ, Δ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ἔστω ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. καὶ μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει· οἱ Β, Γ, Δ ἄρα ἕνα τῶν Ε, Ζ μετρήσουσιν. τὸν μὲν οὖν Ε οὐ μετρήσουσιν· ὁ γὰρ Ε πρῶτός ἐστι καὶ οὐδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ὁ αὐτός. τὸν Ζ ἄρα μετροῦσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Α· ὅπερ ἀδύνατον. ὁ γὰρ Α ὑπόκειται ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Β, Γ, Δ μετρούμενος. οὐκ ἄρα τὸν Α μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς παρὲξ τῶν Β, Γ, Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 15 (216) *Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, δύο ὁποιοιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β, Γ δύο ὁποιοιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν, οἱ μὲν Α, Β πρὸς τὸν Γ, οἱ δὲ Β, Γ πρὸς τὸν Α καὶ ἔτι οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β.

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ δύο οἱ ΔΕ, ΕΖ. φανερὸν δή, ὅτι ὁ μὲν ΔΕ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, τὸν δὲ ΕΖ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, καὶ ἔτι ὁ ΕΖ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ ἐλάχιστοί εἰσιν, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστιν· καὶ ὁ ΔΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν· οἱ ΔΖ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτοί εἰσιν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥστε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν· ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. [ἐὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν]. ἀλλ᾽ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΕ ἐστι μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ ΔΕ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. καί ἐστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ

Α, ὁ δὲ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Β ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Γ πρῶτοί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ Β, Γ πρὸς τὸν Α πρῶτοί εἰσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν, καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸν ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δὶς ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί [εἰσι]. διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἅπαξ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσιν. ἔτι διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα πρὸς τὸν ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσιν. καί ἐστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ. οἱ Α, Γ ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 16 (217) *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω, ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς ἄλλον τινά.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Γ. οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 17 (218) *Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον τινά.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω, ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, ὁ Β πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β. καί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Γ. καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ· ὥστε καὶ ὁ Α τὸν Γ μετρεῖ. καὶ ἐπεί

ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Γ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. ἀλλ᾽ ὁ Α τὸν Γ ἐμέτρει· ὥστε ὁ Α καὶ τὸν Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν. ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 18 (218) *Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Οἱ δὴ Α, Β ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὔ. καὶ εἰ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, δέδεικται, ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· ὁ Α δὴ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον κατὰ τὸν Δ· ὁ Α ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Δ· τοῖς Α, Β ἄρα τρίτος ἀριθμὸς ἀνάλογον προσηύρηται ὁ Δ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Γ· λέγω, ὅτι τοῖς Α, Β ἀδύνατόν ἐστι τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσηυρήσθω ὁ Δ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἐστιν ὁ Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ Γ. ὥστε ὁ Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Δ. ἀλλὰ μὴν ὑπόκειται καὶ μὴ μετρῶν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς Α, Β τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν, ὅταν ὁ Α τὸν Γ μὴ μετρῇ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 19 (218) *Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, πότε δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, πότε δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἤτοι οὖν οὐκ εἰσιν ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἢ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οὐκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ οὔτε ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἢ καὶ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, δέδεικται, ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον

ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς ἀνάλογον τῶν ἄκρων πάλιν ὄντων πρώτων πρὸς ἀλλήλους. λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ Δ, ὥστε εἶναι ὡς τὸν Α πρὸς τὸν Β, τὸν Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Α, Γ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Γ ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Γ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοῖς Α, Β, Γ δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ Α, Γ μὴ ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. ὁ γὰρ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Α ἄρα τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω αὐτὸν πρότερον κατὰ τὸν Ε· ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Γ. ἀνάλογον ἄρα [ἐστὶν] ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· τοῖς Α, Β, Γ ἄρα τέταρτος ἀνάλογον προσηύρηται ὁ Ε.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Δ· λέγω, ὅτι ἀδύνατόν ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Γ. ἀλλὰ ὁ ἐκ τῶν Β, Γ ἐστιν ὁ Δ· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ε ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ Δ. ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ε· ὥστε μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ. ἀλλὰ καὶ οὐ μετρεῖ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν, ὅταν ὁ Α τὸν Δ μὴ μετρῇ. ἀλλὰ δὴ οἱ Α, Β, Γ μήτε ἑξῆς ἔστωσαν ἀνάλογον μήτε οἱ ἄκροι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι εἰ μὲν μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ, δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς ἀνάλογον προσευρεῖν, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, ἀδύνατον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 20 (219) *Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β, Γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος καὶ ἔστω ὁ ΔΕ, καὶ προσκείσθω τῷ ΔΕ μονὰς ἡ ΔΖ. ὁ δὴ ΕΖ ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, ΕΖ πλείους τῶν Α, Β, Γ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ ΕΖ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Η· λέγω, ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. οἱ δὲ Α, Β, Γ τὸν ΔΕ μετροῦσιν· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΕ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΖ· καὶ λοιπὴν τὴν ΔΖ μονάδα μετρήσει ὁ Η ἀριθμὸς ὤν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ Η ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρῶτος. εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α, Β, Γ οἱ Α, Β, Γ, Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 21 (219) *Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν.*

Ἀπόδειξις. Συγκείσθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω, ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ ὅλος ὁ ΑΕ ἔχει μέρος ἥμισυ. ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΕ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 22 (220) *Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ, ὁ ὅλος ἄρτιος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Συγκείσθωσαν γὰρ περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁσοιδηποτοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω, ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ περιττός ἐστιν, ἀφαιρεθείσης μονάδος ἀφ᾽ ἑκάστου ἕκαστος τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἔσται· ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἔσται. ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιον. καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 23 (220) *Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, καὶ ὁ ὅλος περισσὸς ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Συγκείσθωσαν γὰρ ὁποσοιοῦν περισσοὶ ἀριθμοί, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστω, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ὅλος ὁ ΑΔ περισσός ἐστιν.

Ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΓΔ μονὰς ἡ ΔΕ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΕ ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΓΑ ἄρτιος· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν. καί ἐστι μονὰς ἡ ΔΕ. περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 24 (220) *Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ ἄρτιος ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΒΓ ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ λοιπὸς [ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἥμισυ] ἄρτιος [ἄρα] ἐστὶν ὁ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 25 (220) *Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν.

Ἀφῃρήσθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ΒΓ μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΒ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστιν. καί ἐστι μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΓΑ ἄρα περισσός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 26 (220) *Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒ περισσός ἐστιν, ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ ΒΔ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 27 (221) *Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ ΑΒ ἄρτιος ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν.

Ἀφῃρήσθω [γὰρ] μονὰς ἡ ΑΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. περισσὸς ἄρα ὁ ΓΑ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 28 (221) *Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ Γ ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. καί ἐστιν ὁ Β ἄρτιος· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐξ ἀρτίων. ἐὰν δὲ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν. ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 29 (221) *Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α περισσὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ Γ περισσός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. καί ἐστιν ἑκάτερος τῶν Α, Β περισσός· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν. ὥστε ὁ Γ περισσός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 30 (221) *Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.*

Ἀπόδειξις. Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Γ· λέγω, ὅτι ὁ Γ οὐκ ἔστι περισσός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Γ, ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ Β ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν. ὁ Β ἄρα περισσός ἐστιν· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἄρτιος. οὐκ ἄρα ὁ Γ περισσός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. ὥστε ὁ Α τὸν Β μετρεῖ ἀρτιάκις. διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 31 (222) *Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτος ᾖ, καὶ πρὸς τὸν διπλασίονα αὐτοῦ πρῶτος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Β πρῶτος ἔστω, τοῦ δὲ Β διπλασίων ἔστω ὁ Γ· λέγω, ὅτι ὁ Α [καὶ] πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν [οἱ Α, Γ] πρῶτοι, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. καί ἐστιν ὁ Α περισσός· περισσὸς ἄρα καὶ ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ περισσὸς ὢν τὸν Γ μετρεῖ, καί ἐστιν ὁ Γ ἄρτιος, καὶ τὸν ἥμισυν ἄρα τοῦ Γ μετρήσει [ὁ Δ]. τοῦ δὲ Γ ἥμισύ ἐστιν ὁ Β· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Α. ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Γ πρῶτος οὔκ ἐστιν. οἱ Α, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 32 (222) *Τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον.*

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ δυάδος τῆς Α δεδιπλασιάσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, Δ· λέγω, ὅτι οἱ Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἄρτιοί εἰσι μόνον.

Ὅτι μὲν οὖν ἕκαστος [τῶν Β, Γ, Δ] ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστιν, φανερόν· ἀπὸ γὰρ δυάδος ἐστὶ διπλασιασθείς. λέγω, ὅτι καὶ μόνον. ἐκκείσθω γὰρ μονάς. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν Α, Β, Γ, Δ ὁ Δ ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ. καί ἐστιν ἕκαστος τῶν Α, Β, Γ ἄρτιος· ὁ Δ ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι [καὶ] ἑκάτερος τῶν Β, Γ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 33 (222) *Ἐὰν ἀριθμὸς τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.*

Ἀπόδειξις. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν· λέγω, ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

Ὅτι μὲν οὖν ἀρτιάκις περισσός ἐστιν, φανερόν· ὁ γὰρ ἥμισυς αὐτοῦ περισσὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν ἀρτιάκις. λέγω δή, ὅτι καὶ μόνον. εἰ γὰρ ἔσται ὁ Α καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος, μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· ὥστε καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ὤν· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 34 (222) *Ἐὰν ἀριθμὸς μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ᾖ μήτε τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισσός.*

Ἀπόδειξις. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἔστω μήτε τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν· λέγω, ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις τέ ἐστιν ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανερόν· τὸν γὰρ ἥμισυν οὐκ ἔχει περισσόν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. ἐὰν γὰρ τὸν Α τέμνωμεν δίχα καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶμεν, καταντήσομεν εἴς τινα ἀριθμὸν περισσόν, ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. εἰ γὰρ οὔ, καταντήσομεν εἰς δυάδα, καὶ ἔσται ὁ Α τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ὥστε ὁ Α ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος. ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισσός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 35 (223) *Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπό τε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου ἴσοι τῷ πρώτῳ, ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ ἀρχόμενοι ἀπὸ ἐλαχίστου τοῦ Α, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΒΓ καὶ τοῦ ΕΖ τῷ Α ἴσος ἑκάτερος τῶν ΒΗ, ΖΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΗΓ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Α, ΒΓ, Δ.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν ΒΓ ἴσος ὁ ΖΚ, τῷ δὲ Δ ἴσος ὁ ΖΛ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΖΚ τῷ ΒΓ ἴσος ἐστίν, ὧν ὁ ΖΘ τῷ ΒΗ ἴσος ἐστίν, λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚ λοιπῷ τῷ ΗΓ ἐστιν ἴσος. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν ΒΓ καὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν Α, ἴσος δὲ ὁ μὲν Δ τῷ ΖΛ, ὁ δὲ ΒΓ τῷ ΖΚ, ὁ δὲ Α τῷ ΖΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν ΖΛ, οὕτως ὁ ΛΖ πρὸς τὸν ΖΚ καὶ ὁ ΖΚ πρὸς τὸν ΖΘ. διελόντι, ὡς ὁ ΕΛ πρὸς τὸν ΛΖ, οὕτως ὁ ΛΚ πρὸς τὸν ΖΚ καὶ ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ, οὕτως οἱ ΕΛ, ΛΚ, ΚΘ πρὸς τοὺς ΛΖ, ΖΚ, ΘΖ. ἴσος δὲ ὁ μὲν ΚΘ τῷ ΓΗ, ὁ δὲ ΖΘ τῷ Α, οἱ δὲ ΛΖ, ΖΚ, ΘΖ τοῖς Δ, ΒΓ, Α· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Δ, ΒΓ, Α. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 36 (223) *Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, οἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῷ σύμπαντι ἴσος ἔστω ὁ Ε, καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ ποιείτω. λέγω, ὅτι ὁ ΖΗ τέλειός ἐστιν.

Ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει, τοσοῦτοι ἀπὸ τοῦ Ε εἰλήφθωσαν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Μ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Ε, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Α, Μ. καί ἐστιν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ ὁ ΖΗ· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ. ὁ Α ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ὁ Μ ἄρα τὸν ΖΗ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. καί ἐστι δυὰς ὁ Α· διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ τοῦ Μ. εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Μ, Λ, ΘΚ, Ε ἑξῆς διπλάσιοι ἀλλήλων· οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ, ΖΗ ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ. ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τοῦ ΘΚ καὶ τοῦ ἐσχάτου τοῦ ΖΗ τῷ πρώτῳ τῷ Ε ἴσος ἑκάτερος τῶν ΘΝ, ΖΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΝΚ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ ΞΗ πρὸς τοὺς Μ, Λ, ΚΘ, Ε. καί ἐστιν ὁ ΝΚ ἴσος τῷ Ε· καὶ ὁ ΞΗ ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Μ, Λ, ΘΚ, Ε. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΖΞ τῷ Ε ἴσος, ὁ δὲ Ε τοῖς Α, Β, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι. ὅλος ἄρα ὁ ΖΗ ἴσος ἐστὶ τοῖς τε Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τοῖς Α, Β, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι· καὶ μετρεῖται ὑπ᾽ αὐτῶν. λέγω, ὅτι καὶ ὁ ΖΗ ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω τις τὸν ΖΗ ὁ Ο, καὶ ὁ Ο μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ ἔστω ὁ αὐτός. καὶ ὁσάκις ὁ Ο τὸν ΖΗ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Π· ὁ Π ἄρα τὸν Ο πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π, ὁ Ο πρὸς τὸν Δ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ Δ ἄρα ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ. καὶ ὑπόκειται ὁ Ο οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα μετρήσει ὁ Ο τὸν Δ. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Ο πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Π· οὐδὲ ὁ Ε ἄρα τὸν Π μετρεῖ. καί ἐστιν ὁ Ε πρῶτος· πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτος [ἐστιν]. οἱ Ε, Π ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· καί ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π, ὁ Ο πρὸς τὸν Δ· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Ο μετρεῖ καὶ ὁ Π τὸν Δ· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Ο μετρεῖ καὶ ὁ Π τὸν Δ. ὁ δὲ Δ ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ· ὁ Π ἄρα ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. ἔστω τῷ Β ὁ αὐτός. καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ Ε οἱ Ε, ΘΚ, Λ. καί εἰσιν οἱ Ε, ΘΚ, Λ τοῖς Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Λ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Β, Λ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Δ, Ε· ἀλλ᾽ ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Π, Ο· καὶ ὁ ἐκ τῶν Π, Ο ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Λ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Β, ὁ Λ πρὸς τὸν Ο. καί ἐστιν ὁ Π τῷ Β ὁ αὐτός· καὶ ὁ Λ ἄρα τῷ Ο ἐστιν ὁ αὐτός· ὅπερ ἀδύνατον· ὁ γὰρ Ο ὑπόκειται μηδενὶ τῶν ἐκκειμένων ὁ αὐτός. οὐκ ἄρα τὸν ΖΗ μετρήσει τις ἀριθμὸς παρὲξ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. καὶ ἐδείχθη ὁ ΖΗ τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ

καὶ τῇ μονάδι ἴσος. τέλειος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν· τέλειος ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Βιβλίο 10ο

Ὁρισμοί

Ὁρισμοί 1 (225)

(ὁρ. 1) Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

(ὁρ. 2) Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

(ὁρ. 3) Τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητή, καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί, αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν.

(ὁρ. 4) Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον ῥητόν, καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα ῥητά, τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα ἄλογα καλείσθω, καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτὰ ἄλογοι, εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί, εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.

Πρότασις 1 (229) *Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ, ὧν μεῖζον τὸ ΑΒ· λέγω, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου

μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ Γ μεγέθους.

Τὸ Γ γὰρ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ ΑΒ μεῖζον, καὶ διῃρήσθω τὸ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ ΑΒ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΔΕ διαιρέσεσιν.

Ἔστωσαν οὖν αἱ ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὖσαι ταῖς ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ· καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΔΕ τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφῄρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ἔλασσον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοιποῦ τοῦ ΘΑ μεῖζόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφῄρηται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, τοῦ δὲ ΘΑ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ λοιποῦ τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. ἔλασσον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ.

Καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΚ μέγεθος ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.—ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίση ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα. *Δ*

Πρότασις 2 (230) *Ἐὰν δύο μεγεθῶν* [*ἐκκειμένων*] *ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων τῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐλάσσονος τοῦ ΑΒ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρείτω τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Ε· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΖΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέγεθος, ὅ ἐστιν ἔλασσον τοῦ Ε. γεγονέτω, καὶ λελείφθω τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΖΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἀνίσων, καὶ τὰ ἑξῆς. *Δ*

Πρότασις 3 (230) *Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ ΑΒ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Τὸ ΑΒ γὰρ μέγεθος ἤτοι μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό, τὸ ΑΒ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν· καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον. μεῖζον γὰρ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΒ οὐ μετρήσει.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ. καὶ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΕΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΕΓ, τὸ δὲ ΕΓ τὸ ΖΒ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΖ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρείτω.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ, καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μετρήσει τὸ ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΕ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ ΑΖ, ὃ μετρήσει τὰ ΑΒ, ΓΔ. ἔστω τὸ Η. ἐπεὶ οὖν τὸ Η τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΕΔ μετρεῖ, καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΕ μετρήσει τὸ Η. ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ, καὶ λοιπὸν τὸ ΑΖ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ, ΓΔ μετρήσει· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ηὕρηται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει. Δ

Πρότασις 4 (231) *Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὔ [μετρεῖ]. μετρείτω πρότερον. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β, τὸ Δ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστίν. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον· μεῖζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ Α, Β οὐ μετρεῖ.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ Δ τὸ Γ. λέγω πρῶτον, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ, Δ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· ὥστε καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Γ, Δ. εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α, Β μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν ἐστι μέτρον. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ Ε μεῖζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρείτω τὰ Α, Β, Γ. καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β ἄρα μετρήσει καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ, Δ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. ἔστι δὲ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μεῖζόν τι τοῦ Ε μεγέθους [μέγεθος] τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν, ἐὰν μὴ μετρῇ τὸ Δ τὸ Γ, ἐὰν δὲ μετρῇ, αὐτὸ τὸ Δ.

Τριῶν ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ηὕρηται [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος τρία μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 5 (232) *Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Γ. καὶ ὁσάκις τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Δ μετρεῖ ἀριθμὸν καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν ἐπεὶ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Ε μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς

τὸν Ε. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε.

Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 6 (232) *Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· λέγω, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Ὅσαι γὰρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ· ὅσαι δέ εἰσιν ἐν τῷ Ε μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συγκείσθω τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Δ μονάδες, τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Α μεγέθη ἴσα τῷ Γ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ Δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ τοῦ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ. μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ [ἀριθμόν], ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν ἐπεί, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες, τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Ζ ἴσα τῷ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε [ἀριθμόν]. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ἐστὶ τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως καὶ πρὸς τὸ Ζ. τὸ Α ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Β, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τῷ Ζ. μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοί, ὡς οἱ Δ, Ε, καὶ εὐθεῖα, ὡς ἡ Α, δύνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν, οὕτως τὴν εὐθεῖαν πρὸς εὐθεῖαν. ἐὰν δὲ καὶ τῶν Α, Ζ μέση ἀνάλογον ληφθῇ, ὡς ἡ Β, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἀλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν· γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 7 (233) *Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρον ἔσται τὸ Α τῷ Β. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, καὶ τὰ ἑξῆς. Δ

Πρότασις 8 (233) *Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρα, τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἕξει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Α, Β μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς. Δ

Πρότασις 9 (233) *Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν γὰρ αἱ Α, Β μήκει σύμμετροι· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει, ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον· τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦ δὲ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν] λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον· δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ

τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον [ἀριθμὸν] διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος [ἀριθμὸς] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμόν].

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [τετράγωνον]· λέγω, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον], οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [τετράγωνον], ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] τετραγώνου [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμὸν] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν] λόγου, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Γ [ἀριθμὸς] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμόν]. ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Ἀλλὰ δὴ ἀσύμμετρος ἔστω ἡ Α τῇ Β μήκει· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, σύμμετρος ἔσται ἡ Α τῇ Β. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Πάλιν δὴ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρος ἡ Α τῇ Β, ἕξει τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πόρισμα

Καὶ φανερὸν ἐκ τῶν δεδειγμένων ἔσται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει [εἴπερ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρά ἐστιν. ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον [εἰσὶ] μήκει σύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

πάλιν ἐπεί, ὅσα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, μήκει ἐδείχθη σύμμετρα καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα τῷ τὰ τετράγωνα λόγον ἔχειν, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν,

ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλὰ ἁπλῶς, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα πάντως καὶ δυνάμει, τὰ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχοιεν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

λέγω δή, ὅτι [καὶ] αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὖσαι σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ὥστε οὐχ αἱ τῷ μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ δύνανται μήκει οὖσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει ἀσύμμετροι· εἰ γὰρ [εἰσι] μήκει σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. ὑπόκεινται δὲ καὶ ἀσύμμετροι· ὅπερ ἄτοπον. αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει].

Λῆμμα

Δέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ὅτι, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, τουτέστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. εἰ γὰρ ἔξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Δ

Πρότασις 10 (235) *Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ Α· δεῖ δὴ τῇ Α προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τουτέστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ τετράγωνον· ἐμάθομεν γάρ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Β πρὸς τὸν Γ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει. εἰλήφθω τῶν Α, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. ἀσύμμετρος δέ ἐστιν ἡ Α τῇ Δ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ

καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς Ε τετραγώνῳ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Ε δυνάμει.

Τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Α προσεύρηνται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, Ε, μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ Ε [ὅπερ ἔδει δεῖξαι]. Δ

Πρότασις 11 (236) *Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ πρῶτον τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ Α δὲ τῷ Β σύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ σύμμετρον ἔσται.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ ἀσύμμετρον ἔσται. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς. Δ

Πρότασις 12 (236) *Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα.*

Ἀπόδειξις. Ἑκάτερον γὰρ τῶν Α, Β τῷ Γ ἔστω σύμμετρον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστι σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ Γ τῷ Β, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν τοῦ τε, ὃν ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις οἱ Θ, Κ, Λ· ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ, ὡς δὲ τὸν Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως τὸν Κ πρὸς τὸν Λ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἀλλ᾽ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ,

οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ᾽ ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, [οὕτως] ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ. τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Λ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 13 (237) *᾽Εὰν ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται.*

Ἀπόδειξις. ῞Εστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ Α ἄλλῳ τινὶ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῷ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Β τῷ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν, καὶ τὸ Α ἄρα τῷ Γ σύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.

᾽Εὰν ἄρα ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λῆμμα

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων εὑρεῖν, τίνι μεῖζον δύναται ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος.

῞Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ εὑρεῖν, τίνι μεῖζον δύναται ἡ ΑΒ τῆς Γ.

Γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ Γ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. φανερὸν δή, ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία, καὶ ὅτι ἡ ΑΒ τῆς ΑΔ, τουτέστι τῆς Γ, μεῖζον δύναται τῇ ΔΒ.

῾Ομοίως δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἡ δυναμένη αὐτὰς εὑρίσκεται οὕτως.

῞Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ δέον ἔστω εὑρεῖν τὴν δυναμένην αὐτάς. κείσθωσαν γάρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 14 (237) *᾽Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ* [*μήκει*]*, καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ* [*μήκει*]*. καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ* [*μήκει*]*, καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ* [*μήκει*]*.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ἡ Α μὲν τῆς Β μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ε, ἡ δὲ Γ τῆς Δ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ζ· λέγω, ὅτι, εἴτε σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Ε, Β, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Δ, Ζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Ε, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν Δ, Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ζ. εἴτε οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς. Δ

Πρότασις 15 (238) *Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν σύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστι σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ. τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἔστω σύμμετρον τῷ ΑΒ· λέγω δή, ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ σύμμετρά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΓ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς. Δ

Πρότασις 16 (238) *Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἑνί αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, μετρήσει τι [αὐτὰ] μέγεθος. μετρείτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ· ὑπέκειντο δὲ καὶ ἀσύμμετρα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὰ ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρά ἐστιν. τὸ ΑΓ ἄρα ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρον ἔστω. ἔστω δὴ πρότερον τῷ ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστιν. εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ· ὑπέκειτο δὲ καὶ ἀσύμμετρα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λῆμμα

Ἐὰν παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ παραβληθὲν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

Παρὰ γὰρ εὐθεῖαν τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ΔΒ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Καί ἐστιν αὐτόθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΒ, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ, καί ἐστι τὸ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς. *Δ*

Πρότασις 17 (239) *Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει]. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Α, ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ, σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ. λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΖ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ· καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μέν τετραπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον, τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον· διπλασίων γάρ ἐστιν ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ. τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον· διπλασίων γάρ ἐστι πάλιν ἡ ΒΓ τῆς ΓΕ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Α, ΔΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς Α μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῇ ΔΖ. δεικτέον, ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΓΔ ταῖς ΓΔ, ΒΖ ἐστι σύμμετρος μήκει· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ. καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρός ἐστι ταῖς ΒΖ, ΓΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. δεικτέον, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. δύναται δὲ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΓ [μήκει]. ὥστε καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ διελόντι ἄρα ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἐστι σύμμετρος μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἑξῆς. *Δ*

Πρότασις 18 (240) *Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ [μήκει], ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ*

τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ [*μήκει*].

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ [μέρει] τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔΓ, ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρότερον ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. δεικτέον [οὖν], ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΔΓ σύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ. ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. καὶ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Δυνάσθω δὴ πάλιν ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. δεικτέον, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. ἀλλὰ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ, ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λῆμμα

Ἐπεὶ δέδεικται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει [εἰσὶ σύμμετροι], αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δὴ δύνανται μήκει καὶ σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι, φανερόν, ὅτι, ἐὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπεὶ αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει· εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις οὖσα δυνάμει μήκει αὐτῇ ᾗ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος. *Δ*

Πρότασις 19 (242) *Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων κατά τινα τῶν προειρημένων τρόπων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ῥητόν ἐστιν.*

Ἀπόδειξις. Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ ΑΓ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δέ ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μήκει. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΓ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς. Δ

Πρότασις 20 (242) *Ἐὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ σύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παράκειται, μήκει.*

Ἀπόδειξις. Ῥητὸν γὰρ τὸ ΑΓ παρὰ ῥητὴν κατά τινα πάλιν τῶν προειρημένων τρόπων τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΒΓ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΑ μήκει.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. ῥητὸν δὲ καὶ τὸ ΑΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. καί ἐστιν ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ· ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.

Ἐὰν ἄρα ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς. Δ

Πρότασις 21 (245) *Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση.*

Ἀπόδειξις. Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι· ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει. καί ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΓ· ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ ΑΓ [τουτέστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον δυναμένη] ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΕ, ΕΗ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΗΔ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ, καί ἐστι τὸ μὲν ΖΔ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. ὁμοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τουτέστιν ὡς τὸ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 22 (246) *Τὸ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ᾽ ἣν παράκειται, μήκει.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΔ· λέγω, ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει.

Ἐπεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ Α, δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων. δυνάσθω τὸ ΗΖ. δύναται δὲ καὶ τὸ ΒΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔ τῷ ΗΖ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν δὲ ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ· ῥητὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ, ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΖ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ σύμμετρόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἴσα γάρ ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς Α· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ μήκει. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 23 (247) *Ἡ τῇ μέσῃ σύμμετρος μέση ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω μέση ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ Β· λέγω, ὅτι καὶ ἡ Β μέση ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΓ τῷ ΓΖ. καί ἐστιν ὡς τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ μήκει. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΕΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· αἱ ΓΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων δυναμένη μέση ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ δυναμένη μέση ἐστίν· καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ ἡ Β· μέση ἄρα ἐστὶν ἡ Β.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τὸ τῷ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστίν. [δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι, αἵ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν.]

Ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἐξακολουθεῖ, τὴν τῇ μέσῃ μήκει σύμμετρον λέγεσθαι μέσην καὶ σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ μέσῃ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει, εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Δ

Πρότασις 24 (247) *Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν κατά τινα τῶν εἰρημένων τρόπων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ὑπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχέσθω ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ μέσον ἐστίν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ σύμμετρόν ἐστιν. μέσον δὲ τὸ ΔΑ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 25 (248) *Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ὑπὸ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τὰ ΑΔ, ΒΕ· μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ, ΒΕ. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΑΔ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΘΜ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΜΚ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ, καὶ ἔτι τῷ ΒΕ ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν ΚΝ παραβεβλήσθω τὸ ΝΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ, ΒΕ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΕ τῷ ΝΛ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΗΘ, ΝΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΚΛ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΔ τῷ ΒΕ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΗΘ τῷ ΝΛ. καί ἐστιν ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΚΛ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΚΛ μήκει. αἱ ΖΘ, ΚΛ ἄρα ῥηταί εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΖ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ· ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΖ. ἴσον δέ ἐστι τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΜΚ, τὸ δὲ ΓΖ τῷ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΜΚ, οὕτως τὸ ΜΚ πρὸς τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΚ. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΘΝ· εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, αἱ ΚΘ, ΘΜ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΘΝ. τὸ ΘΝ ἄρα ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν. ἴσον δὲ τὸ ΘΝ τῷ ΑΓ· τὸ ΑΓ ἄρα ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς. *Δ*

Πρότασις 26 (249) *Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.*

Ἀπόδειξις. Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ ΑΒ μέσου τοῦ ΑΓ ὑπερεχέτω ῥητῷ τῷ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΖΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΔ λοιπῷ τῷ ΚΘ ἐστιν ἴσον. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ΔΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΑΓ, καί ἐστι τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΖΘ ἴσον, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΖΗ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΖΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΘΕ, ΕΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔΒ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΚΘ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ

ΕΗ τῇ ΗΘ μήκει. καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τετράγωνα· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· διπλάσιον γάρ ἐστιν αὐτοῦ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· καὶ συναμφότερα ἄρα τά τε ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. ἀλλὰ καὶ ῥητή· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Μέσον ἄρα μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 27 (250) *Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας.*

Ὑλοποίησις: Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Γ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ.

Καὶ ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ, μέσον ἐστίν. μέση ἄρα ἡ Γ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, [οὕτως] ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, αἱ δὲ Α, Β δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι, καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καί ἐστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. αἱ Γ, Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω, ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἡ Β πρὸς τὴν Δ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἡ Γ πρὸς τὴν Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 28 (250) *Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας.*

Ὑλοποίησις: Ἐκκείσθωσαν [τρεῖς] ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε.

Ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Δ, μέσον ἐστίν. μέση ἄρα ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ αἱ Β, Γ δυνάμει

μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καί ἐστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, καὶ αἱ Δ, Ε ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δή, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Δ, ἡ Γ πρὸς τὴν Ε. ὡς δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ, ἡ Δ πρὸς τὴν Α· καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν Α, ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ, ἔστωσαν δὲ ἤτοι ἄρτιοι ἢ περιττοί. καὶ ἐπεί, ἐάν τε ἀπὸ ἀρτίου ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ἐάν τε ἀπὸ περισσοῦ περισσός, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν, ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΓ ἄρτιός ἐστιν. τετμήσθω ὁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ. ἔστωσαν δὲ καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ ἤτοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, οἳ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνῳ. καί ἐστι τετράγωνος ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπειδήπερ ἐδείχθη, ὅτι, ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνός ἐστιν. εὕρηνται ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ ὅ τε ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, οἳ συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετράγωνον.

Καὶ φανερόν, ὅτι εὕρηνται πάλιν δύο τετράγωνοι ὅ τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ ΑΒ, ΒΓ ὅμοιοι ὦσιν ἐπίπεδοι. ὅταν δὲ μὴ ὦσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὕρηνται δύο τετράγωνοι ὅ τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΓ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ οὐκ ἔστι τετράγωνος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Ἔστω γὰρ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἔφαμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ τετμήσθω ὁ ΓΑ δίχα τῷ Δ. φανερὸν δή, ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ]

ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ [τοῦ] ΒΔ τετραγώνῳ. ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ ΔΕ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΕ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΒΔ τετραγώνου. λέγω οὖν, ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΕ οὐκ ἔσται τετράγωνος.

Εἰ γὰρ ἔσται τετράγωνος, ἤτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ [τοῦ] ΒΕ ἢ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΒΕ, οὐκέτι δὲ καὶ μείζων, ἵνα μὴ τμηθῇ ἡ μονάς. ἔστω, εἰ δυνατόν, πρότερον ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ ΒΕ,

καὶ ἔστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίων ὁ ΗΑ. ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστι διπλασίων, ὧν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΕ ἐστι διπλασίων, καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιποῦ τοῦ ΕΓ ἐστι διπλασίων· δίχα ἄρα τέτμηται ὁ ΗΓ τῷ Ε. ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος ὑπόκειται τῷ ἀπὸ [τοῦ] ΒΕ τετραγώνῳ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ. καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ ΓΕ συνάγεται ὁ ΑΒ ἴσος τῷ ΗΒ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ ΒΕ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῷ ἀπὸ ΒΖ ἴσος, καὶ τοῦ ΔΖ διπλασίων ὁ ΘΑ. καὶ συναχθήσεται πάλιν διπλασίων ὁ ΘΓ τοῦ ΓΖ· ὥστε καὶ τὸν ΓΘ δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΓ ἴσον γίνεσθαι τῷ ἀπὸ ΒΖ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ ΒΖ. ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος ἐστὶ [τῷ] ἐλάσσονι τοῦ ἀπὸ ΒΕ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ [αὐτῷ] τῷ ἀπὸ ΒΕ. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ τετράγωνός ἐστιν. [δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ πλείονας τρόπους τοὺς εἰρημένους ἀριθμοὺς ἐπιδεικνύειν, ἀρκείσθωσαν ἡμῖν οἱ εἰρημένοι, ἵνα μὴ μακροτέρας οὔσης τῆς πραγματείας ἐπὶ πλέον αὐτὴν μηκύνωμεν.] ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 29 (254) *Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔΕ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν ΓΕ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ.

Ἐπεὶ [οὖν] ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ΓΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΖ μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί [ἐστιν] ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ

τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καί ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῇ ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ.

Εὕρηνται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ, ΑΖ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΑΖ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 30 (255) *Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΕ, ΕΔ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΓΔ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι αἱ ΒΑ, ΑΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Αἱ ΑΒ, ΑΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 31 (255) *Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, ὥστε τὴν Α μείζονα οὖσαν τῆς ἐλάσσονος τῆς Β μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· μέσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Γ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ, ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β,

οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Β δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Γ τῇ Δ δυνάμει μόνον. καί ἐστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ Α τῆς Β μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Β μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. *Δ*

Πρότασις 32 (256) *Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, ὥστε τὴν Α τῆς Γ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ. μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· καὶ ἡ Δ ἄρα μέση ἐστίν. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Γ δυνάμει [μόνον]. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῇ Ε δυνάμει μόνον. μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ Α τῆς Γ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς Ε μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. λέγω δή, ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ [αἱ γὰρ Β, Γ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι], μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Ὁμοίως δὴ πάλιν δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Γ μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Λῆμμα

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν Α, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ δὲ

ὑπὸ τῶν ΒΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, καὶ ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.

Καὶ πρῶτον, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒΔ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

Καὶ ἐπεί, ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἔφαμεν, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. [ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων.] τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 33 (257) *Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ τῷ ἀφ᾽ ὁποτέρας τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ.

Καὶ ἐπεὶ [δύο] εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· αἱ ΑΖ, ΖΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ῥητή ἐστιν, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ ῥητόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ

τῶν ΑΕ, ΕΒ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ ἴσον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ τῇ ΒΔ· διπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΖΕ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΖ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΖ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΖ, ΖΒ ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 34 (258) *Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔΒ ἡμικύκλιον, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσον παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖΒ· ἀσύμμετρος ἄρα [ἐστὶν] ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

Ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΓ τῆς ΔΖ, διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν ἐστιν.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΔ, ΔΒ ποιοῦσαι τὸ [μὲν] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 35 (259) *Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνῳ.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμ-

μέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ τὰ λοιπὰ γεγονέτω τοῖς ἐπάνω ὁμοίως.

Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ δυνάμει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΒΕ, ΔΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΔΖ· διπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. καί ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ, ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 36 (259) *Ἐὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.*

Ἀπόδειξις. Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· αἱ γὰρ ΑΒ, ΒΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ συνθέντι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 37 (260) *Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.*

Ἀπόδειξις. Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι· λέγω, ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ συνθέντι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὑπόκεινται γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 38 (260) *Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι μέσον περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.*

Ἀπόδειξις. Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσον περιέχουσαι· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, παραβεβλήσθω δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ παρὰ τὴν ΔΕ ἴσον τὸ ΕΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐπεὶ μέση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. μέσον δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΖΘ· μέσον ἄρα ἑκάτερον τῶν ΕΘ, ΘΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΘ, ΘΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΖ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΘ τῷ ΘΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΗ ἐστιν ἀσύμμετρος μήκει. αἱ ΔΘ, ΘΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὥστε ἡ ΔΗ ἄλογός ἐστιν. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ· τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖ χωρίον, καὶ ἡ δυναμένη [αὐτὸ] ἄλογός ἐστιν. δύναται δὲ τὸ ΔΖ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 39 (262) *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μείζων.*

Ἀπόδειξις. Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστίν, καὶ τὸ δὶς [ἄρα] ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστίν. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ [ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ]· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μείζων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 40 (262) *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.*

Ἀπόδειξις. Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 41 (263) *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.*

Ἀπόδειξις. Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΔΖ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΗΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΖ, μέσον ἄρα

ἐστὶ καὶ τὸ ΔΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΚ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΗΖ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΔΖ τῷ ΗΘ· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΗΚ ἀσύμμετρός ἐστιν. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΗ, ΗΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΚ ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΘ καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δύναται δὲ τὸ ΘΔ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται εἰς τὰς εὐθείας, ἐξ ὧν σύγκεινται ποιουσῶν τὰ προκείμενα εἴδη, δείξομεν ἤδη προεκθέμενοι λημμάτιον τοιοῦτον·

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ' ἑκάτερον τῶν Γ, Δ, ὑποκείσθω δὲ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΔΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ λοιπῆς τῆς ΓΒ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΔΕ τῆς ΕΓ· τὰ Γ, Δ ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ· ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλασσόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 42 (272) *Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατὰ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ ῥητὰς εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους. φανερὸν δή, ὅτι ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. ἔσται δὴ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ ἡ αὐτή· καὶ ἔσται ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, καὶ ἔσται ἡ ΑΒ κατὰ τὸ αὐτὸ τῇ κατὰ τὸ Γ διαιρέσει διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ Δ· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

οὐκ ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἐστιν ἡ αὐτή. διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. ᾧ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ διαφέρει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διαφέρει ῥητῷ μέσα ὄντα· ὅπερ ἄτοπον· μέσον γὰρ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 43 (273) *Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. ἐπεὶ οὖν, ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ῥητῷ δὲ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· ῥητῷ ἄρα διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσα ὄντα· ὅπερ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα· καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 44 (273) *Ἡ ἐκ μέσων δευτέρα καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας· φανερὸν δή, ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τῆς διχοτομίας, ὅτι οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ᾽ ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ· δῆλον δή, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν, ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον παραβεβλήσθω τὸ ΕΚ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ,

ΓΒ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἅπερ ἐλάσσονα ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΜΚ ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσον ἄρα [καὶ] τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· δυνάμει γάρ εἰσι σύμμετροι αἱ ΑΓ, ΓΒ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ ΕΜ, ΜΝ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἔσται ἡ ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο διῃρημένη τό τε Θ καὶ τὸ Μ, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ· πολλῷ ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΕΗ, μεῖζόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τουτέστι τοῦ ΜΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν. ἡ ἄρα ΕΘ τῇ ΜΝ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 45 (274) *Η μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαιρεῖται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον. καὶ ἐπεί, ᾧ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ μέσα ὄντα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ ἄρα μόνον διαιρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 46 (274) *Ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν. ἐπεὶ οὖν, ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ μέσα ὄντα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται. κατὰ ἓν ἄρα σημεῖον διαιρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 47 (275) *Ἡ δύο μέσα δυναμένη καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.*

Ἔστω [δύο μέσα δυναμένη] ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται ποιοῦσα τὰ προκείμενα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε πάλιν δηλονότι τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ᾽ ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. πάλιν δὴ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ λοιπῷ τῷ ΜΚ ἴσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ τὸ ΕΗ ἄρα τῷ ΗΝ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστιν. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ κατὰ τὸ Μ διῄρηται. καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή· ἡ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διῄρηται· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ

ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον [σημεῖον] διαιρεῖται.
Ἀπόδειξις.

Δ

Ὁρισμοί 2 (276)

(ὁρ. 1) Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω [ἡ ὅλη] ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.

(ὁρ. 2) Ἐὰν δὲ τὸ ἔλασσον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα.

(ὁρ. 3) Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.

(ὁρ. 4) Πάλιν δὴ ἐὰν τὸ μεῖζον ὄνομα [τοῦ ἐλάσσονος] μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

(ὁρ. 5) Ἐὰν δὲ τὸ ἔλασσον, πέμπτη.

(ὁρ. 6) Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη.

Πρότασις 48 (278) *Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην*.

Ὑλοποίησις: Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. καί ἐστι ῥητὴ ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον

ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει. αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.

Λέγω, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΕΖ τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 49 (278) *Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.*

Ὑλοποίησις: Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω ἡ ΕΖ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. γεγονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ, μεῖζον ἄρα [καὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἀλλ᾽ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΖΗ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΖΗ, ΖΕ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΕΖ ἔλασσον ὄνομα τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρόν ἐστι τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 50 (279) *Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.*

Ὑλοποίησις: Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἐκκείσθω δέ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. καί ἐστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα [ἐστὶν] ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα [ἐστὶν] ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει.

Ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 51 (280) *Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν μήτε μὴν πρὸς τὸν ΑΓ, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει. αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΕΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ [μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ], μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΗΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΕΖ τῇ Δ σύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 52 (280) *Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητή τις εὐθεῖα ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω [μήκει] ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ὁ δὲ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἀνάπαλιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΖΗ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΗΖ, ΖΕ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ ΕΖ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 53 (281) *Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὢν μηδὲ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον ἔχων, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. καί ἐστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΗ. ῥητὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΖΘ.

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ΖΗ ἀσύμμετρος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει. καὶ

ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ [τῆς] ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Ε.

Ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Ἔστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ, ΒΓ καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΔΒ τῇ ΒΕ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΒΗ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· λέγω, ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ, καὶ ἔτι τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΒΗ, ὅλη ἄρα ἡ ΔΕ ὅλῃ τῇ ΖΗ ἐστιν ἴση. ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΔΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΘ, ΚΓ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΘ, ΚΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστιν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· ἔστι δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ. τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν [ἐστι] τὸ ΔΓ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΓ· ἴση γάρ [ἐστιν] ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς ΓΗ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΚΓ πρὸς ΓΗ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς ΓΒ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς ΔΓ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΒΓ. τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ· ἃ προέκειτο δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 54 (282) *Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.*

Ἀπόδειξις. Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω τὸ μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ. φανερὸν δή, ὅτι αἱ ΑΕ, ΕΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΒ μήκει. τετμήσθω δὴ ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΑΕ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Ε, Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ· καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ παραλληλόγραμμον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς ΕΛ, τὸ ΕΛ πρὸς ΚΗ· τῶν ΑΘ, ΗΚ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ, τὸ δὲ ΗΚ ἴσον τῷ ΝΠ· τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἔστι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ τῷ ΜΡ· ὥστε καὶ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ ἄρα δύναται ἡ ΜΞ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσιν. καί ἐστι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καί ἐστι σύμμετρον τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστι σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΣΝ πρὸς ΜΡ, ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΝΡ τῇ ΝΞ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ. καί ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ σύμμετρον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ δύναται τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δ

Πρότασις 55 (284) *Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.*

Ἀπόδειξις. Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒΓΔ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἔλαττον ὄνομα ἡ ΕΔ σύμμετρόν ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. τετμήσθω ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. καὶ διὰ τῶν Η, Ε, Ζ παράλληλοι ἤχθωσαν ταῖς ΑΒ, ΓΔ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τετράγωνον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ τετράγωνον· φανερὸν δὴ ἐκ τοῦ προδεδειγμένου, ὅτι τὸ ΜΡ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΣΝ, ΝΠ, καὶ ἴσον τῷ ΕΛ, καὶ ὅτι τὸ ΑΓ χωρίον δύναται ἡ ΜΞ. δεικτέον δή, ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ. ἀλλὰ ἡ ΑΕ ἀσύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ. αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ. ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἐστίν. καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσίν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ [ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ]. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΖ σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΜΡ, τουτέστιν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ἐδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ, ΝΞ καὶ μέσαι οὖσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δή, ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΕ ὑπόκειται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ σύμμετρος, σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ. καὶ ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· ῥητὸν ἄρα τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ· τὸ δὲ ΜΡ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ. ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Ἡ ἄρα ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 56 (286) *Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.*

Ἀπόδειξις. Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη ἡ ΑΔ, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΔ σύμμετρός [ἐστι] τῇ ΑΒ μήκει. ὁμοίως δὴ τοῖς προδεδειγμένοις δείξομεν, ὅτι ἡ ΜΞ ἐστιν ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστίν.

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

[Καὶ] ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, σύμμετρος δὲ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. μέσον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ· καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ.

Ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 57 (287) *Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων.*

Ἀπόδειξις. Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρός [ἐστι] μήκει. τετμήσθω ἡ ΔΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ ΑΒ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γεγονέτω· φανερὸν δή, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. δεικτέον δή, ὅτι ἡ ΜΞ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων. ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ· καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν

ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός [ἐστιν] ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΕΖ, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. αἱ ΕΚ, ΕΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΛΕ, τουτέστι τὸ ΜΡ. καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ῥητὸν τὸ [συγκείμενον] ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, καί εἰσιν ἀσύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ δυνάμει. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μείζων.

Ἡ ΜΞ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 58 (289) *Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.*

Ἀπόδειξις. Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω [δή], ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις· φανερὸν δή, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. δεικτέον δή, ὅτι ἡ ΜΞ ἐστιν ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΘΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καί [ἐστιν] ἔλασσον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΕΔ, σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐστιν ἀσύμμετρος· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐστιν ἀσύμμετρος μήκει. [αἱ ΒΑ, ΑΕ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.] μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρός ἐστιν, καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστιν. καὶ ῥητὴ ἡ ΕΚ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν.

Ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶ καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 59 (290) *Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.*

Ἀπόδειξις. Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Κατεσκευάσθω [γὰρ] τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. φανερὸν δή, ὅτι [ἡ] τὸ ΑΓ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΖ, καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστι ἡ ΜΝ τῇ ΝΖ δυνάμει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ μήκει, αἱ ΕΑ, ΑΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΚ· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΖ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἡ ΑΕ τῇ ΕΖ, καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΚ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΖ, τὸ δὲ ΕΛ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΜΝΖ. καί ἐστι μέσον ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΖ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι.

Ἡ ΜΖ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ καὶ δύναται τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Λῆμμα

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΔ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διπλάσιά [ἐστι] τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.] *Δ*

Πρότασις 60 (292) *Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον τὸ ΚΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ

τῷ ΜΖ. τετμήσθω ἡ ΜΗ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ [ἑκατέρᾳ τῶν ΜΛ, ΗΖ]. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΜΞ, ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ [σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ]. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΜΗ ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητὴ καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ, καὶ τῶν ΔΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΜΞ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ, οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ, ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστίν. καί ἐστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἡ ΔΜ μεῖζον ὄνομα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 61 (293) *Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὧν μείζων ἡ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσα ἐστίν. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παραβέβληται· ῥητὴ ἄρα ἐστίν ἡ ΜΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητόν ἐστι καὶ τὸ ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ ΜΗ καὶ μήκει σύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστιν. καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. *Δ*

Πρότασις 62 (295) *Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον τμῆμα εἶναι τὸ ΑΓ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.

Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστίν. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΛ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ. καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΜΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστιν, τουτέστι τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρός ἐστιν. καί εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον [δή], ὅτι καὶ τρίτη.

Ὁμοίως δὴ τοῖς προτέροις ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 63 (296) *Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.

Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον. ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΔΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν ἐστι τὴν ΜΛ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον [δή], ὅτι καὶ τετάρτη.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ ΔΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ ἐστιν. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΜ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 64 (297) *Τὸ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ

ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.

Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ· ὥστε ῥητή ἐστιν ἡ ΔΜ καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ, ῥητὴ ἄρα ἡ ΜΗ καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὁμοίως γὰρ δειχθήσεται, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ἀσύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ [ῥηταὶ] δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάσσων ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 65 (298) *Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ῥητὴ δὲ ἔστω ἡ ΔΕ. καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων συγκείμενον τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν· ὥστε κατὰ τὰ προδεδειγμένα μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΔΛ, ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ. ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ὁμοίως δὴ πάλιν δείξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ὅτι ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 66 (299) *Ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει. σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ῥηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ [ἐπεί] ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΓΖ, ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ. αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καί εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Λέγω δή, ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἡ γὰρ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται ἤτοι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ διὰ τοῦτο ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, τουτέστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. εἰ δὲ ἡ ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ΑΒ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἔσται ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καί ἐστιν ἑκατέρα τρίτη. εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καί ἐστιν ἑκατέρα τετάρτη. εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΖΔ, καὶ ἔσται ἑκατέρα πέμπτη. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ οὐδετέρα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἔσται ἑκατέρα ἕκτη.

Ὥστε ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 67 (300) *Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ, ἡ ΑΕ πρὸς ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ, ΖΔ. μέσαι δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ· μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ [ἄρα] δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστίν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή ἐστι τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ· ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ ῥητόν ἐστιν [καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ἐκ δύο μέσων πρώτη]. εἴτε μέσον, μέσον, καί ἐστιν ἑκατέρα δευτέρα.

Καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ἡ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 68 (301) *Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ μείζων ἐστίν.

Διῃρήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον· καὶ γεγονέτω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἥ τε ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καί ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν

ΑΕ, ΕΒ ἅμα ῥητόν, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ἅμα ῥητόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καί ἐστι μέσον τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον· ὅλη ἄρα ἡ ΓΔ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων.

Ἡ ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 69 (302) *Ἡ τῇ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένῃ σύμμετρος* [*καὶ αὐτὴ*] *ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· δεικτέον, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

Διῃρήσθω ἡ ΑΒ εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν· καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ [μὲν] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων ἐστὶ μέσον, τὸ δ᾽ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ῥητόν.

Ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 70 (302) *Ἡ τῇ δύο μέσα δυναμένῃ σύμμετρος δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· δεικτέον, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν [τετραγώνων] μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.

Ἡ ἄρα ΓΔ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 71 (303) *Ῥητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ, μέσον δὲ τὸ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μεῖζον· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ΑΒ ἴσον τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· τῷ δὲ ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΒ καί ἐστιν ῥητόν ἐστι τὸ ΑΒ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΕΗ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ [ῥητὴν] τὴν ΕΖ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· ἡ ΕΘ ἄρα ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΘΙ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΘΙ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ, ῥητὸν δὲ τὸ ΑΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· ὥστε καὶ τὸ ΕΗ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ τοῦ ΘΙ· καὶ ἡ ΕΘ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἤτοι οὖν ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ μείζων ἡ ΘΕ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἀλλὰ δὴ δυνάσθω ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· καί ἐστιν ἡ μείζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη μείζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἤτοι δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΕΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καί ἐστιν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ

τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἀλλὰ δὴ ἡ ΘΚ τῆς ΘΕ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

Ῥητοῦ ἄρα καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 72 (304) *Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ* [*ἡ*] *δύο μέσα δυναμένη.*

Ἀπόδειξις. Συγκείσθω γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἤτοι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω, εἰ τύχοι, πρότερον μεῖζον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΓΔ ἴσον τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΓΔ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΙ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὰς ΕΘ, ΘΚ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΘ, ΘΚ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει. αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ. ἤτοι δὲ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ οὐδετέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ΕΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ, τουτέστι τὸ ΑΔ, δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ἀλλὰ δὴ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

[Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν ἤτοι δύο μέσα δυναμένη].

Δύο ἄρα μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ᾽ αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ᾽ ἣν παράκειται μήκει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. τὰ δ᾽ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δέ, ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί· ὥστε καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. *Δ*

Πρότασις 73 (308) *Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἀποτομή.*

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ ῥητῆς τῆς ΑΒ ῥητὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΑ, καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἀποτομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 74 (308) *Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.*

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ΑΒ ῥητὸν ποιοῦσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσαι εἰσίν, μέσα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπεὶ κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη. *Δ*

Πρότασις 75 (308) *Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.*

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΓΒ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ μέσον περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ μέσα καὶ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστίν. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἴσον δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΔΕ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΔΘ· ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΔ τῇ

ΔΖ. καί εἰσιν ἀμφότεραι ρηταί· αἱ ἄρα ΗΔ, ΔΖ ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΗ ἄρα ἀποτομή ἐστιν. ρητὴ δὲ ἡ ΔΙ· τὸ δὲ ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 76 (309) *Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ μὲν ἀπ᾽ αὐτῶν ἅμα ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἐλάσσων.*

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ ποιοῦσα τὰ προκείμενα. λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων ῥητόν ἐστιν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ ἀναστρέψαντι λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἐλάσσων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 77 (310) *Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.*

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ προειρημένη.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καί ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 78 (310) *Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον τό τε δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα*

ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΔΘ [πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ]. λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε ἡ ΑΓ δύναται τὸ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστὶ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΕ, μέσον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔΕ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστὶ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΘ, τὸ ἄρα ΔΘ μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ, οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΗΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ· ῥητὴ δὲ ἡ ΖΘ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον [ὀρθογώνιον] ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 79 (311) *Τῇ ἀποτομῇ μία [μόνον] προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀμφότερα ὑπερέχει· ἐναλλὰξ ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει [καὶ] τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα. καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γὰρ ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ. τῇ ἄρα ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Μία ἄρα μόνη τῇ ἀποτομῇ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 80 (311) *Τῇ μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμοζέτω ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ ΔΒ. αἱ ἄρα ΑΔ, ΔΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεί, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ [πάλιν] ὑπερέχουσι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ἐναλλὰξ ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα. καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ [τετραγώνων] ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 81 (312) *Τῇ μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΘΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥστε ἡ ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΛ

ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΙ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν αἱ ΑΓ, ΓΒ, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καί ἐστιν ἴσα τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστίν. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΘΗ· καὶ τὸ ΘΗ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΜ πρὸς τὴν ΘΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΜ, ΜΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΘΝ αὐτῇ προσαρμόζει· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 82 (313) *Τῇ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἔστω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προειρημένα. καὶ ἐπεί, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα.

Τῇ ἄρα ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ καὶ ποιοῦσα τὰ μὲν ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 83 (313) *Τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμοζέτω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προκείμενα. ἐπεὶ οὖν, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀκολούθως τοῖς πρὸ αὐτοῦ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα. οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προειρημένα· μία ἄρα μόνον προσαρμόσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 84 (314) *Τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνη προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον τό τε δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προειρημένα. λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει ποιοῦσα τὰ προειρημένα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τά τε ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα ἅμα μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΘΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΛ· ἡ ἄρα ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. πάλιν τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω

τὸ ΕΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ΘΙ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΕΗ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΘΗ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ΘΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΕΜ, ΜΘ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ ΕΘ πάλιν ἀποτομή ἐστιν, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΝ. τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα.

Τῇ ἄρα ΑΒ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τά τε ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἅμα μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Ὁρισμοὶ 3 (315)

(ὁρ. 1) Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ πρώτη.

(ὁρ. 2) Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ δευτέρα.

(ὁρ. 3) Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ τρίτη.

(ὁρ. 4) Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], ἐὰν μὲν ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη.

(ὁρ. 5) Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, πέμπτη.

(ὁρ. 6) Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

Πρότασις 85 (316) *Εὑρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΖΔ μὴ ἔστω τετράγωνος· οὐδ᾽ ἄρα ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ τετράγωνον· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πρώτη.

Ὅτι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἑκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστιν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α. ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν. *Δ*

Πρότασις 86 (316) *Εὑρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τῇ Α σύμμετρος μήκει ἡ ΗΓ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετράγωνον. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετραγώνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΗΒ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΗ, ΗΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμόν, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ, οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ. καί ἐστιν ἑκάτερος τῶν ΔΕ, ΕΖ τετράγωνος· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρος τῇ Α. ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Εὕρηται ἄρα δευτέρα ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 87 (317) *Εὑρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετραγώνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ [τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ. ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν

τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει. οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει. ᾧ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΒΓ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει, καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 88 (318) *Εὑρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ ὅλον πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΕΖ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ.

[Λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη].

Ὧι οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α. ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τετάρτη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 89 (318) *Εὑρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΗ· ῥητὴ ἄρα [ἐστὶν] ἡ ΓΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΕ πρὸς τὸν ΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΗΒ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 90 (318) *Εὑρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔτι δὲ καὶ ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν,

οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ Α ῥητῇ μήκει. ᾧ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α. ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 91 (319) *Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.*

Ἀπόδειξις. Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστι πρώτη ἡ ΑΔ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ὅλη ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, καὶ ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον

παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ. καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ.

Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ἀλλὰ ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει. καί ἐστι ῥητὴ ἡ ΑΓ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΖΗ· ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ ῥητόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστίν.

Κείσθω δὴ τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΛΟΜ τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΚΖ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΚΖ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, καί ἐστι τὸ [μὲν] ΑΙ τῷ ΛΜ τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ ΚΖ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ τῷ ΔΘ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΜΝ τῷ ΛΞ· τὸ ἄρα ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΛΜ, ΝΞ τετραγώνοις· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ. τὸ δὲ ΣΤ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΝ ἐστι τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΝ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ.

Λέγω δή, ὅτι ἡ ΛΝ ἀποτομή ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ, καί ἐστιν ἴσον τοῖς ΛΜ, ΝΞ, καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΛΜ, ΝΞ ῥητόν ἐστιν, τουτέστι τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ΛΟ, ΟΝ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητή ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΔΘ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΛΞ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΞ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΛΞ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ ΝΞ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΝ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΟ τῇ ΟΝ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΝ. καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τὰ ἑξῆς. *Δ*

Πρότασις 92 (320) *Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.*

Ἀπόδειξις. Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε· καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστιν. ἀλλ᾽ ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει. [ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει.] ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ ῥητόν ἐστιν.

Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὃν τῷ ΛΜ τὴν ὑπὸ τῶν ΛΟΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὰ ΑΙ, ΖΚ μέσα ἐστὶ καί ἐστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ [ἄρα] μέσα ἐστίν· καὶ αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ· ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως [ἐστὶ] τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ· καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΚ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον [ἐστὶ] τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον τὸ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛΜ, ΝΞ, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΤΣ. τὸ δὲ ΤΣ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΛΝ· τὸ ἀπὸ τῆς ΛΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ χωρίῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω [δή], ὅτι ἡ ΛΝ μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΕΚ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΛΞ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ. μέσον δὲ ἐδείχθη τὸ ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΟ πρὸς ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει. αἱ ἄρα ΛΟ, ΟΝ μέσαι εἰσὶ

δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ ΛΝ ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 93 (322) *Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.*

Ἀπόδειξις. Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΗ, ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ· σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ὥστε καὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΗΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΑΖ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἡ δὲ ΔΗ τῇ ΕΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΕΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ.

Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ· καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. ἀλλὰ

τὸ μὲν ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ, τὸ δὲ ΕΚ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ΔΘ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΛΜ, ΝΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛΝ τετραγώνῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσα ἐδείχθη τὰ ΑΙ, ΖΚ καί ἐστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· μέση ἄρα ἑκατέρα τῶν ΛΟ, ΟΝ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΜΝ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· ὥστε καὶ ἡ ΛΟ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Λέγω δή, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΕΚ καί ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· ὥστε αἱ ΛΟ, ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. ἡ ΛΝ ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 94 (323) *Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ. ἤχθωσαν οὖν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η παράλληλοι ταῖς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. ἐπεὶ οὖν ῥητή ἐστιν ἡ ΑΗ καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει, ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΗ τῇ ΑΓ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν

ὑπὸ τῶν ΛΟΜ τὸ ΝΞ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛΜ, ΝΞ τετραγώνοις, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ τετραγώνῳ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛΝ τετραγώνῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ τετραγώνοις, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΚ μέσον ἐστίν, καί ἐστιν ἴσον τὸ ΔΚ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ τετραγώνῳ. αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον. ἡ ΛΝ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 95 (324) *Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη* [*ἡ*] *μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.*

Ἀπόδειξις. Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΓΑ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ ΔΗ καὶ σύμμετρος τῇ

ΑΓ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΔΚ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΛΟΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ ΛΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔΚ καί ἐστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, καὶ αὐτὸ ῥητόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν. ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ τὸ ΑΒ ἄρα χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 96 (325) *Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.*

Ἀπόδειξις. Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς ἕκτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε [σημεῖον], καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΖΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΑΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἐστὶ τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΔΗ ῥηταί εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΔ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΚΔ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΚΔ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ

καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν, ὅτι ἡ ΛΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ [ἡ] μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ ΔΚ καί ἐστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΚ τῷ ΔΚ, ἀσύμμετρα [ἄρα] ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ τετράγωνα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον ἔτι τε τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν. ἡ ἄρα ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 97 (326) *Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ. ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστιν, καί ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΔΜ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ, μέσον ἄρα τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστιν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΔΜ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί·

αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ, καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ· ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν [ἐστι] καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καί ἐστι σύμμετρος ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ ΓΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ μήκει· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 98 (327) *Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΕ, λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΛ. ῥητὸν δὲ [ἐστι] τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ῥητὸν ἄρα τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΓΛ, μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΖΛ, ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν

ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ ΝΛ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ΚΛ, καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΜΚ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. [καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΗ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ.] ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 99 (328) *Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλήσθω τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ [καί ἐστι μέσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ]· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΖ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ

παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα [ἐστὶ] μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ, καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ [ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ] τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ΓΜ ἄρα τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΜ, ΜΖ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 100 (330) *Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον

ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καί ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἐστὶ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΖΛ, καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστιν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρα [ἄρα] ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἴσον δέ [ἐστι] τὸ ΓΛ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω [δή], ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ ΝΛ, τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος καὶ τὰ ἑξῆς. *Δ*

Πρότασις 101 (331) *Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἅμα μέσον ἐστίν· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστι καί [ἐστιν] ἴσον τῷ ΖΛ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΛ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ ΖΛ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὁμοίως γὰρ δείξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ, ἀσύμμετρον ἄρα τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δ

Πρότασις 102 (332) *Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον καὶ ἀσύμμετρον τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΓΔ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καί ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον· καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ, ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ΓΜ, ΜΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τετμήσθω δίχα ἡ ΖΜ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ, καὶ τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 103 (332) *Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν

ΓΔ λόγῳ ὁ αὐτὸς γεγονέτω ὁ τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἓν ἄρα πρὸς ἕν, πάντα [ἐστὶ] πρὸς πάντα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ ΑΕ πρὸς ὅλην τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΕ μὲν τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. καὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. [ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.]

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. ἤτοι δὴ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ, εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΔΖ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἰ δὲ ἡ ΑΕ [τῆς ΕΒ] μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ, εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΔΖ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ.

Ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 104 (333) *Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω μέσης ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΒ. αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ [γάρ] ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ [ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ], ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ [καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ]. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ

ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, εἴτε μέσον [ἐστὶ] τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον [ἐστὶ] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.

Μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 105 (334) *Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ ἐλάσσων ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστίν.

Γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτά· καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ. συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ [καὶ ἐναλλάξ]· σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ τετραγώνῳ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον.

Ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 106 (335) *Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν. καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ ΓΖ, ΖΔ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς ΑΕ, ΕΒ, καὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων

τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δ

Πρότασις 107 (335) *Ἡ τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ, καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν. καί εἰσιν, ὡς ἐδείχθη, αἱ ΑΕ, ΕΒ σύμμετροι ταῖς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν [τετραγώνων] τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δ

Πρότασις 108 (335) *Ἀπὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.*

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ μέσον ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν δυναμένη τὸ ΕΓ μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, τῷ δὲ ΔΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΘ. ἐπεὶ οὖν ῥητόν μέν ἐστι τὸ ΒΓ, μέσον δὲ τὸ ΒΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΒΓ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ τῷ ΗΚ, ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ, μέσον δὲ τὸ ΗΚ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ μὲν ἄρα ἡ ΖΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΖΚ μήκει. αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα

δὲ αὐτῇ ἡ ΚΖ. ἤτοι δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἢ οὔ.

Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΘΖ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ᾽ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καί ἐστιν ὅλη ἡ ΖΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ τετάρτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ᾽ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 109 (336) *Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου ἄλλαι δύο ἄλογοι γίνονται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.*

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ. λέγω, ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ παραβεβλήσθω ὁμοίως τὰ χωρία. ἔστι δὴ ἀκολούθως ῥητὴ μὲν ἡ ΖΘ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΚΖ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ ταύτῃ ἡ ΖΚ. ἤτοι δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ δευτέρα ἐστὶν ἡ ΚΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἐστίν.

Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ πέμπτη ἐστὶν ἡ ΚΘ· ὥστε ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 110 (337) *Ἀπὸ μέσου μέσου ἀφαιρουμένου ἀσυμμέτρου τῷ ὅλῳ αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.*

Ἀπόδειξις. Ἀφῃρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων καταγραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ ἀσύμμετρον τῷ ὅλῳ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλόγων ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρον τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἔσται ἀκολούθως ῥητὴ ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΘΖ τῇ ΖΚ· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ [προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΖΚ. ἤτοι δὴ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ].

Εἰ μὲν δὴ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐθετέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ τρίτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΚΛ, τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Εἰ δὲ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ οὐθετέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, ἀποτομὴ ἕκτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη ἐστὶ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ἡ τὸ ΛΘ ἄρα, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 111 (337) *Ἡ ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἀποτομὴ πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΖ· αἱ ΔΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΖ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΔΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΗΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ μεῖζον ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΖ μήκει. [ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ, ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΔΖ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΖ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ μήκει] ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΕΖ μήκει. αἱ ΗΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί [εἰσι] δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ. ἀλλὰ καὶ ῥητή· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Ἡ ἄρα ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Πόρισμα]

Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ᾽ αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί.

Τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ᾽ ἣν παράκειται, μήκει, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην, τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν, τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην, τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δέ, ἐπεὶ τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, δῆλον, ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὖσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων, ποιοῦσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμεναι αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς ἀκολούθως ἑκάστη τῇ τάξει τῇ καθ᾽ αὑτήν, αἱ δὲ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αὐταὶ τῇ τάξει ἀκολούθως, ἕτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους ι□γ□,

Μέσην,
Ἐκ δύο ὀνομάτων,
Ἐκ δύο μέσων πρώτην,
Ἐκ δύο μέσων δευτέραν,
Μείζονα,
Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην,
Δύο μέσα δυναμένην,
Ἀποτομήν,
Μέσης ἀποτομὴν πρώτην,
Μέσης ἀποτομὴν δευτέραν,
Ἐλάσσονα,
Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν,
Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

Δ

Πρότασις 112 (339) *Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἐκ δύο ὀνομάτων δὲ ἡ ΒΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτομή ἐστιν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΕΖ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν τῇ ΒΓ.

Ἔστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν ΕΖ. μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Η τῆς ΕΖ. ἔστω τῇ Η ἴση ἡ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ὅλην τὴν ΚΖ ἐστιν, ὡς ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ· ὡς γὰρ ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ΚΖ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. καί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ ἀνάλογόν εἰσιν. σύμμετρος ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ μήκει· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΒΔ, ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς Α, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΒΔ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΚ. αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα ῥηταὶ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ.

Ἤτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου [ἑαυτῇ], καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ· εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ.

Εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ· εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ· ὥστε ἀποτομή ἐστιν ἡ ΖΕ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΖΚ, ΚΕ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΔ, ΔΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 113 (341) *Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔτι δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς Α ῥητῆς παρὰ τὴν ΒΔ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΚΘ· λέγω, ὅτι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ΒΔ ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΔ.

Ἔστω γὰρ τῇ ΒΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΓ· αἱ ΒΓ, ΓΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΓ παραβέβληται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς Η. μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΚΘ τῆς Η. κείσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ΚΕ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ ἐστιν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, τουτέστιν [ὡς] ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ. αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ· ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ· αἱ γὰρ ΚΖ, ΖΘ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΚΖ τῇ ΖΕ μήκει· ὥστε ἡ ΚΖ καὶ τῇ ΚΕ σύμμετρός [ἐστι] μήκει. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΚΖ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΚΖ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΖΘ. σύμμετρος δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΚΖ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΓΔ μήκει. αἱ ΒΓ, ΓΔ δὲ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἄρα ἡ ΚΘ.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ, εἰ δὲ ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ.

Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός

ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ, εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ.

Ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σύμμετρά [ἐστι] τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 114 (342) *Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τέ ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστιν.*

Ἀπόδειξις. Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς ΓΔ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω τὸ ΓΕ, καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρά τε τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔστω ἡ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ δυναμένη ἡ Η· λέγω, ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ Η.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Θ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ, ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ ΚΜ, ΜΛ σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΕ, ΕΔ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ σύμμετροί τέ εἰσι ταῖς ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως ἡ ΚΜ πρὸς ΜΛ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΛΜ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΚΛ ἐστιν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΚΜ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΚΛ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΚΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ τῷ ἀπὸ τῆς Θ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς Θ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η τῷ ἀπὸ τῆς Θ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η. καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστιν.

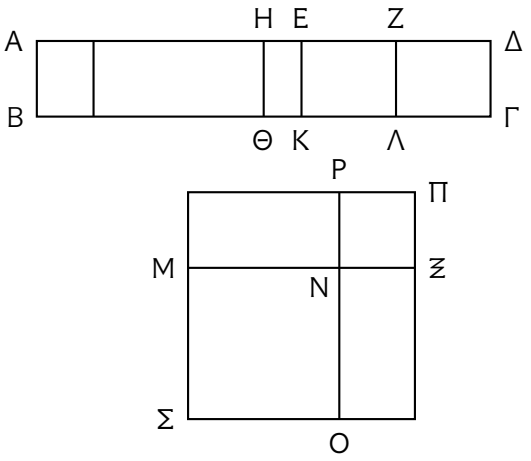
Πόρισμα

Καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτου φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεσθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 115 (342) *Ἀπὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω μέση ἡ Α· λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς Α ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Α ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ· τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς ἄλογόν ἐστιν. καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ᾽ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν δὴ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ· καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ᾽ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν Γ. ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ᾽ ἄπειρον προβαινούσης φανερόν, ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι]. *Δ*



Βιβλίο 11ο

Ὅρισμοί

Ὅρισμοί 1 (345)

(όρ. 1) Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

(όρ. 2) Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

(όρ. 3) Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ [ὑποκειμένῳ] ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

(όρ. 4) Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν.

(όρ. 5) Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρας τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.

(όρ. 6) Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

(όρ. 7) Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν.

(όρ. 8) Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα.

(όρ. 9) Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος.

(ὁρ. 10) Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

(ὁρ. 11) Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. Ἄλλως· στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γωνιῶν ἐπιπέδων περιεχομένη μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

(ὁρ. 12) Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς.

(ὁρ. 13) Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

(ὁρ. 14) Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

(ὁρ. 15) Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

(ὁρ. 16) Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

(ὁρ. 17) Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

(ὁρ. 18) Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. κἂν μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ [τῇ] περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος, ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

(ὁρ. 19) Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

(ὁρ. 20) Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος.

(ὁρ. 21) Κύλινδρός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

(ὁρ. 22) Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

(όρ. 23) Βάσεις δὲ οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

(όρ. 24) Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἵ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.

(όρ. 25) Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

(όρ. 26) Ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

(όρ. 27) Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

(όρ. 28) Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

Πρότασις 1 (349) *Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ, ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ.*

Ἀπόδειξις. Εἰ γὰρ δυνατόν, εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒΓ μέρος μέν τι τὸ ΑΒ ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ.

Ἔσται δή τις τῇ ΑΒ συνεχὴς εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ἔστω ἡ ΒΔ· δύο ἄρα εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ κοινὸν τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ἐπειδήπερ ἐὰν κέντρῳ τῷ Β καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ κύκλον γράψωμεν, αἱ διάμετροι ἀνίσους ἀπολήψονται τοῦ κύκλου περιφερείας.

Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν μετεωροτέρῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 2 (349) *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν ΕΓ, ΕΒ τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΖΗ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΖΘ, ΗΚ· λέγω πρῶτον, ὅτι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. εἰ γάρ ἐστι τοῦ ΕΓΒ τριγώνου μέρος ἤτοι τὸ ΖΘΓ ἢ τὸ ΗΒΚ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ [ἐπιπέδῳ], τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ μιᾶς τῶν ΕΓ, ΕΒ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. εἰ δὲ τοῦ ΕΓΒ τριγώνου τὸ ΖΓΒΗ μέρος ᾖ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ

δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν ΕΓ, ΕΒ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. τὸ ἄρα ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δέ ἐστι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον, ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΕΒ, ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΕΒ, ἐν τούτῳ καὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ. αἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 3 (350) *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστιν.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τεμνέτω ἄλληλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΒ γραμμή· λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ γραμμὴ εὐθεῖά ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΕΒ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΖΒ. ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν ΔΕΒ, ΔΖΒ τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσι δηλαδὴ χωρίον· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα αἱ ΔΕΒ, ΔΖΒ εὐθεῖαί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἔσται πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 4 (350) *Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΕΖ δύο εὐθείαις ταῖς ΑΒ, ΓΔ τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον ἀπὸ τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΗΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΒ, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ Ζ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΒ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΓΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΕΔ τρίγωνον τῷ ΓΕΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΓ ἴση [ἐστίν]. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΕΘ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΗΕ, ΒΕΘ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΑΕ τῇ ΕΒ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν. ἴση ἄρα ἡ μὲν ΗΕ τῇ ΕΘ, ἡ δὲ ΑΗ τῇ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΕ, βάσις ἄρα ἡ ΖΑ βάσει τῇ ΖΒ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ

δὴ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΔ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΔ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΖΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐδείχθη ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΗ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΘ ἴσαι εἰσίν. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΑΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΖΒΘ· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐδείχθη ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση ἐστίν. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΗΕΖ, ΘΕΖ γωνιῶν. ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς τὴν ΗΘ τυχόντως διὰ τοῦ Ε ἀχθεῖσαν ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ ΖΕ καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας· ἡ ΖΕ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ εὐθειῶν. ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι᾽ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 5 (351) *Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Β ἁφῆς ἐφεστάτω· λέγω, ὅτι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν ΒΔ, ΒΕ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπίπεδον· κοινὴν δὴ τομὴν ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν ΒΖ. ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΒΕ, καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΒΕ ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ. τὸ δὲ διὰ τῶν ΒΔ, ΒΕ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ ΑΒ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΑΒ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστιν. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τῆς ἁφῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 6 (352) *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ εὐθεῖα, καὶ ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας [ἄρα] τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ τῆς ΑΒ ἑκατέρα τῶν ΒΔ, ΒΕ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΒ, ΓΔΕ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΑ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΑ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΔΓ ὀρθή. ἡ ΕΔ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ἁφῆς ἐφέστηκεν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔΒ, ΔΑ, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΑΒ· πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καί ἐστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΒΔΓ γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 7 (353) *Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστω ἐν μετεωροτέρῳ ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ διήχθω διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω ὡς τὴν ΕΖ· δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΗΖ, ΕΖ χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ᾽ ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 8 (353) *Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθάς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΓΔ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΒΔ ἄρα ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΒ· ὀρθὴ ἄρα [ἐστὶν] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, ΓΔΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΒ· ἡ ΓΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΔ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΒ ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΑΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΑ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΑΔ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν ΔΒ ὀρθή· ἡ ΕΔ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν. καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΕΔ. ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΒΔΑ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ ΔΓ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΔΑ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΔ, ἐν ᾧ δὲ αἱ ΑΒ, ΒΔ, ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ. ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΔΓ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθάς. ἡ ΓΔ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς ΔΕ, ΔΒ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Δ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ὥστε ἡ ΓΔ καὶ τῷ διὰ

τῶν ΔΕ, ΔΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΔΕ, ΔΒ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ ΓΔ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 9 (354) *Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ τῇ ΕΖ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν ΕΖ, ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΘ, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΖΕ, ΓΔ τῇ ΕΖ πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΗΚ ὀρθή ἐστιν, ἡ ΕΖ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καί ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ παράλληλος· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΘΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῷ διὰ τῶν ΘΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῷ διὰ τῶν ΘΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 10 (354) *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἅπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΕ, ΕΖ ἁπτομένας ἀλλήλων ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΕΔ, ΕΖ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ, ΔΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑ τῇ ΕΔ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ, ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΖ καὶ ἴση. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΑΓ, ΔΖ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὥσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 11 (357) *Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΔ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΒΓ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΑ, ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ ΒΓ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΕΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καί ἐστιν αὐτῇ παράλληλος ἡ ΗΘ· ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΗΘ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΑΖ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ· ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΖΑ· ὥστε καὶ ἡ ΖΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΘΗ. ἔστι δὲ ἡ ΑΖ καὶ πρὸς τὴν ΔΕ ὀρθή· ἡ ΑΖ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΔΕ ὀρθή ἐστιν. ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ἡ ΖΑ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον· ἡ ΑΖ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου μετεώρου τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Δ

Πρότασις 12 (358) *Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ Α· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Νενοήσθω τι σημεῖον μετέωρον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΑΔ, ΓΒ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἀνέσταται ἡ ΑΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 13 (358) *Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.*

Ἀπόδειξις. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Α τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ Α ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν ΔΑΕ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ γωνία ὀρθή ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ. καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 14 (358) *Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ, ΕΖ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν· ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν. ποιείτωσαν τὴν ΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΘ τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΒΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν ΒΚ ἄρα εὐθεῖαν οὖσαν ἐν τῷ ΕΖ ἐκβληθέντι ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΚ γωνία ὀρθή ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΚ ὀρθή ἐστιν. τριγώνου δὴ τοῦ ΑΒΚ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΚ, ΒΑΚ δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 15 (359) *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὧσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, παράλληλά ἐστι τὰ δι᾽ αὐτῶν ἐπίπεδα.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΑΒ, ΒΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ, ΕΖ ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΒΗ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ μὲν ΕΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, τῇ δὲ ΕΖ ἡ ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΗ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΒΗΚ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΑ τῇ ΗΘ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΗΒΑ, ΒΗΘ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΒΑ· ἡ ΗΒ ἄρα τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΗΒ καὶ τῇ ΒΓ ἐστι πρὸς ὀρθάς. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΗΒ δυσὶν εὐθείαις ταῖς ΒΑ, ΒΓ τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ ΗΒ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΑ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. [διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ἡ ΒΗ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐδείχθη δὲ ἡ ΗΒ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς]. πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὧσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, παράλληλά ἐστι τὰ δι᾽ αὐτῶν ἐπίπεδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 16 (360) *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπό ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ τεμνέσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΕΖ, ΗΘ ἤτοι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ Ε, Η συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη καὶ συμπιπτέτωσαν πρότερον κατὰ τὸ Κ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖΚ ἐν τῷ ΑΒ ἐστιν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ΕΖΚ σημεῖα ἐν τῷ ΑΒ ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἓν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ΕΖΚ εὐθείας σημείων ἐστὶ τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΑΒ ἐστιν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ Κ καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἐστιν ἐπιπέδῳ· τὰ ΑΒ, ΓΔ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη συμπεσοῦνται. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Ε, Η μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 17 (361) *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Ε, Β, Γ, Ζ, Δ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ΑΔ, καὶ συμβαλλέτω ἡ ΑΔ τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ, ΞΖ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΚΛ, ΜΝ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΒΔΞ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΕΞ, ΒΔ παράλληλοί εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΗΘ, ΚΛ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΞΖΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΑΓ, ΞΖ παράλληλοί εἰσιν. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΔ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΕΞ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΞΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 18 (362) *Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον τὸ ΔΕ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ΔΕ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἡ ΓΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔΕ ἐπιπέδῳ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΓΕ ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ ὀρθή· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ. ἡ δὲ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν. καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ ΓΕ ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΖΗ ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· τὸ ἄρα ΔΕ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι᾽ αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 19 (362) *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.*

Ἀπόδειξις. Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῇ ΑΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ ΔΕ, ἡ ΔΕ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ Δ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἀνασταθήσεται πρὸς ὀρθὰς πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 20 (363) *Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.*

Ἀπόδειξις. Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ περιεχέσθω· λέγω, ὅτι τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ γωνιῶν δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, φανερόν, ὅτι δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου διαχθεῖσα ἡ ΒΕΓ τεμνέτω τὰς ΑΒ, ΑΓ εὐθείας κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, δύο δυσὶν ἴσαι· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΒ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΔ, ΔΓ τῆς ΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ ἐδείχθη ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ λοιπῆς τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσεως τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΑΓ μείζων ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 21 (364) *Ἅπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων* [*ἢ*] *τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΓΒΔ μείζονές εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ, ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΓΔ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ὑπὸ ΓΔΑ, ΑΔΒ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ μείζονές εἰσιν· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ τριῶν τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΔΓ, ΒΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἓξ ἄρα αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ἑκάστου τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΓΒ,

ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΓΑΔ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσι μείζονες· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τρεῖς [γωνίαι] περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Ἅπασα ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἢ] τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 22 (364) *Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΗΘΚ, αἱ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστιν ὅτι τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, φανερόν, ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἴσων γινομένων δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘΚ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΘΛ· καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἡ ΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΗΛ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΛ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΚΛ ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΗΘΛ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΗΘ, ΘΛ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΘΛ γωνίας τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων, βάσις ἄρα ἡ ΗΛ βάσεως τῆς ΔΖ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΗΛ μείζονές εἰσιν. πολλῷ ἄρα αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΑΓ· αἱ ΑΓ, ΗΚ ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΖ τῆς ΗΚ μείζονές εἰσιν, καὶ ἔτι αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσιν. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 23 (365) *Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τὸ ΛΜΝ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΓ τῇ ΛΜ, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ΜΝ, καὶ ἔτι τὴν ΗΚ τῇ ΝΛ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον κύκλος ὁ ΛΜΝ καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΞΛ τῇ ΞΜ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΛΞ, ΞΜ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΛΜ ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΞΜ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΜΞΝ ἐστιν ἴση, καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΝΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ εἰσιν ἴσαι. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ τέτταρσιν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἴση ἐστίν. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΛΟ τῇ ΠΜ ἐστιν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΟΠ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛΜΞ τῷ ΟΠΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς ΛΜ, οὕτως ἡ ΞΟ πρὸς ΟΠ· ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΛΞ πρὸς ΞΟ, οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς ΟΠ. μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῆς ΟΠ. ἀλλὰ ἡ ΛΜ κεῖται τῇ ΑΓ ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΟΠ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΜΞΝ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΝΞΛ. αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τριῶν τῶν ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ ἴσαι· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΛΞ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῷ τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ, καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΡΞ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ ὀρθή ἐστιν ἡ ΡΞ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ, βάσις

ἄρα ἡ ΡΛ βάσει τῇ ΡΜ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΡΝ ἑκατέρᾳ τῶν ΡΛ, ΡΜ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΞ, ΞΡ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΛΞ, ΞΡ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΡ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΛΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΡΛ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΡΛ. ἀλλὰ τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, τῇ δὲ ΡΛ ἴση ἑκατέρα τῶν ΡΜ, ΡΝ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἑκάστῃ τῶν ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΡ, ΡΜ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΛΜ βάσει τῇ ΑΓ ὑπόκειται ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΡΜ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΜΡΝ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΡΝ τῇ ὑπὸ ΗΘΚ.

Ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, στερεὰ γωνία συνέσταται ἡ πρὸς τῷ Ρ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ γωνιῶν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λῆμμα

Ὅν δὲ τρόπον, ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, δείξομεν οὕτως. ἐκκείσθωσαν αἱ ΑΒ, ΛΞ εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ γεγράφθω ἐπ᾽ αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰς τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον ἐνηρμόσθω τῇ ΛΞ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς ΑΒ διαμέτρου ἴση ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ. ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΓΒ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΛΞ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἐὰν οὖν τῇ ΒΓ ἴσην τὴν ΞΡ ἀπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΡ· ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι. Δ

Πρότασις 24 (367) *Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.*

Ἀπόδειξις. Στερεὸν γὰρ τὸ ΓΔΘΗ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω τῶν ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΗ, ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΑΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΑΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ παράλληλος· παραλλη-

λόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΒ, ΒΖ, ΑΕ παραλληλόγραμμόν ἐστιν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΔΖ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΓ, ΓΖ ἁπτομένας ἀλλήλων εἰσὶν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας ἄρα γωνίας περιέξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τοῦ μὲν ΑΒΘ διπλάσιον τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΔΓΖ διπλάσιον τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΕ παραλληλογράμμῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ μὲν ΑΓ τῷ ΗΖ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΑΕ τῷ ΒΖ.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 25 (368) *Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.*

Ἀπόδειξις. Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΖΗ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΡΑ, ΔΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕΖΦ βάσις πρὸς τὴν ΕΘΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΖΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΗΓΔ στερεόν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΘ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΑΕ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΑΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΘ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΘΜ, ΜΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα καὶ τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ στερεά. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΛΚ, ΚΑ, ΑΕ εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ ἀλλήλοις καὶ ἔτι τὰ ΛΨ, ΚΠ, ΑΡ ἀλλήλοις· ἀπεναντίον γάρ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ μὲν ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν ἴσα. ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα· τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΑΖ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΑΥ στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΖ βάσις τῆς ΖΘ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΝΥ στερεὸν τοῦ ΘΥ στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΖ βάσις τῇ ΝΖ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τῷ ΝΥ στερεῷ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ στερεοῦ, καὶ εἰ

ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΑΖ, ΖΘ, δύο δὲ στερεῶν τῶν ΑΥ, ΥΘ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΑΖ βάσεως καὶ τοῦ ΑΥ στερεοῦ ἥ τε ΛΖ βάσις καὶ τὸ ΛΥ στερεόν, τῆς δὲ ΘΖ βάσεως καὶ τοῦ ΘΥ στερεοῦ ἥ τε ΝΖ βάσις καὶ τὸ ΝΥ στερεόν, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΖΝ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ [στερεοῦ], καὶ εἰ ἴση, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ βάσις πρὸς τὴν ΖΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΥΘ στερεόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 26 (370) *Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὑπὸ ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὴ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΔΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΓ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΖΗ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ μὲν ὑπὸ ΕΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΛ, τῇ δὲ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΚ, καὶ κείσθω τῇ ΔΗ ἴση ἡ ΑΚ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ διὰ τῶν ΒΑΛ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΘ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΗΖ ἡ ΚΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ· λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ Α στερεὰ γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΛ, ΒΑΘ, ΘΑΛ γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ ΑΒ, ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ, ΚΒ, ΖΕ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΖΗΔ, ΖΗΕ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΘΚΑ, ΘΚΒ γωνιῶν ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΗΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΚΒ βάσει τῇ ΗΕ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΒ τῇ ΖΕ. πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ΑΚ, ΚΘ δυσὶ ταῖς ΔΗ, ΗΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΖΔ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΘΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΔΖ, ΔΕ ἴσαι εἰσίν. καὶ βάσις ἡ ΘΒ βάσει τῇ ΖΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΛ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστιν ἴση [ἐπειδήπερ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς ΑΛ, ΔΓ καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΚΛ, ΘΛ, ΗΓ, ΖΓ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΒΑΛ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ

ὑπὸ ΕΔΗ ὑπόκειται ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΑΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΔΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΛ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΚΛ βάσει τῇ ΗΓ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΛΚ, ΚΘ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΖ εἰσιν ἴσαι· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΛ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΓ εἰσιν ἴσαι, καὶ βάσις ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστιν ἴση]. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΛ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση συνέσταται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 27 (371) *Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾷ γωνίᾳ ἴση ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΘ, ΘΑΚ, ΚΑΒ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΘ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΓΗ, τὴν δὲ ὑπὸ ΚΑΘ τῇ ὑπὸ ΗΓΖ· καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὡς δὲ ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΘ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΘΒ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΑΛ στερεόν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΓΗ, ΒΑΚ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΒ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΘ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι καὶ ἔτι τὸ ΖΕ τῷ ΘΒ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΓΔ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΑΛ στερεοῦ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΑΛ στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἀναγέγραπται τὸ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 28 (372) *Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.*

Ἀπόδειξις. Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τὰς ΓΖ, ΔΕ· λέγω, ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ ΑΒ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΓΖΒ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΔΕ τῷ ΔΕΘ, ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΒ ἴσον· ἀπεναντίον γάρ· τὸ δὲ ΗΕ τῷ ΓΘ, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ· ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ τε πλήθει καὶ τῷ μεγέθει. ὥστε ὅλον τὸ ΑΒ στερεὸν δίχα τέτμηται ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 29 (372) *Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΗ, ΑΖ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἑστωσαν τῶν ΖΝ, ΔΚ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΓΘ, ΓΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΘ, ΕΚ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΕΚ ἐστιν ἴση. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ λοιπῇ τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση. ὥστε καὶ τὸ μὲν ΔΓΕ τρίγωνον τῷ ΘΒΚ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΔΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΝ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΖΗ τρίγωνον τῷ ΜΛΝ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΜ παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓΗ τῷ ΒΝ· ἀπεναντίον γάρ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΑΖΗ, ΔΓΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΑΔ, ΔΗ, ΓΗ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΜΛΝ, ΘΒΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΒΜ, ΘΝ, ΒΝ. κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΘΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΓΝ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστίν.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 30 (373) *Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΝΚ, ΔΘ καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἔτι ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΜ, ΗΕ ἐπὶ τὰ Ο, Π, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΞ, ΛΟ, ΓΠ, ΒΡ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΓΜ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΖΔΘΜ, τῷ ΓΟ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΛ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΖΟ, ΔΡ. ἀλλὰ τὸ ΓΟ στερεόν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΚΝ· ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΛ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΗΠ, ΝΡ. ὥστε καὶ τὸ ΓΜ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 31 (374) *Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ.

Ἔστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσιν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας τῇ ΓΡ εὐθεῖα ἡ ΡΤ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΡΤ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ρ τῇ ὑπὸ ΑΛΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΤΡΥ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΛ ἴση ἡ ΡΤ, τῇ δὲ ΛΒ ἴση ἡ ΡΥ, καὶ συμπεπληρώσθω ἥ τε ΡΧ βάσις καὶ τὸ ΨΥ στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΤΡ, ΡΥ δυσὶ ταῖς ΑΛ, ΛΒ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ΡΧ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΛ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση μὲν ἡ ΑΛ τῇ ΡΤ, ἡ δὲ ΛΜ

τῇ ΡΣ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΜ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΛΕ τῷ ΣΥ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΑΕ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΨΥ στερεοῦ ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΨΥ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστίν. διήχθωσαν αἱ ΔΡ, ΧΥ καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ω, καὶ διὰ τοῦ Τ τῇ ΔΩ παράλληλος ἤχθω ἡ ⸀ΑΤϡ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΟΔ κατὰ τὸ ⸀α, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΩΨ, ΡΙ στερεά. ἴσον δή ἐστι τὸ ΨΩ στερεόν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΩϘ, τῷ ΨΥ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΥΦ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΨ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΡΩ, ΡΥ, ΤϡΛ, ΤΧ, ΣΖ, Σο˜, ΨϘ, ΨΦ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΩΧ, ΖΦ. ἀλλὰ τὸ ΨΥ στερεὸν τῷ ΑΕ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΨΩ ἄρα στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἐστιν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΡΥΧΤ παραλληλόγραμμον τῷ ΩΤ παραλληλογράμμῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΤ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΡΤ, ΩΧ· ἀλλὰ τὸ ΡΥΧΤ τῷ ΓΔ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ ΑΒ, καὶ τὸ ΩΤ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔ ἐστιν ἴσον. ἄλλο δὲ τὸ ΔΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ πρὸς τὴν ΔΤ. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΖ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ βάσιν, οὕτως τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν. διὰ τὰ αὐτὰ δή, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΩΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΨ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΩΤ βάσις πρὸς τὴν ΤΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ πρὸς τὴν ΔΤ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν, οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΓΖ, ΩΨ στερεῶν πρὸς τὸ ΡΙ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΖ στερεὸν τῷ ΩΨ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ ΩΨ τῷ ΑΕ ἐδείχθη ἴσον· καὶ τὸ ΑΕ ἄρα τῷ ΓΖ ἐστιν ἴσον.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΛΜ, ΓΝ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσιν· λέγω πάλιν, ὅτι ἴσον τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ν, Σ σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετοι αἱ ΚϠ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΝΩ, ΣΙ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Ϡ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ϠΤ, ϠΥ, ΥΦ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΙΨ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΚΦ στερεὸν τῷ ΠΙ στερεῷ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΚΜ, ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΦ στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΠΙ τῷ ΓΖ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. καὶ τὸ ΑΕ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ ἐστιν ἴσον.

Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 32 (376) *Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΖΗ τῷ ΑΕ ἴσον τὸ ΖΘ, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΖΘ, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΓΔ στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τὸ ΗΚ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΗΚ στερεῷ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΑΕ, ΖΘ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ ἐπιπέδῳ τῷ ΔΗ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΖ βάσις πρὸς τὴν ΖΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΔΘ στερεόν. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΘ βάσις τῇ ΑΕ βάσει, τὸ δὲ ΗΚ στερεὸν τῷ ΑΒ στερεῷ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

Τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 33 (377) *Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ αἱ ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓΖ ἴση ἡ ΕΚ, τῇ δὲ ΖΝ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ ἔτι τῇ ΖΡ ἴση ἡ ΕΜ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΚΟ στερεόν.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΕ, ΕΛ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΕΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστιν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστιν ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν, ἴσον ἄρα ἐστὶ [καὶ ὅμοιον] τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΝ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΜ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ ΓΡ [παραλληλογράμμῳ] καὶ ἔτι τὸ ΕΟ τῷ ΔΖ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΚΟ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΓΔ στερεοῦ ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ

τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΚΟ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. συμπεπληρώσθω τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν ΗΚ, ΚΛ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΑΒ στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ ΕΖ, ΛΠ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΝ, καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΡ, ἴση δὲ ἡ μέν ΓΖ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΖΝ τῇ ΕΛ, ἡ δὲ ΖΡ τῇ ΕΜ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ καὶ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως τὸ ΑΗ [παραλληλόγραμμον] πρὸς τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ, οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΜ, οὕτως τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ καὶ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΖ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως τὸ ΖΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΠΛ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ, οὕτως τὸ ΠΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΖ, οὕτως τὸ ΕΖ πρὸς τὸ ΠΛ καὶ τὸ ΠΛ πρὸς τὸ ΚΟ. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΖ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΖ, οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ καὶ ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΚ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ. ἴσον δὲ τὸ [μὲν] ΚΟ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἡ δὲ ΕΚ εὐθεῖα τῇ ΓΖ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΓΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἐπείπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν. *Δ*

Πρότασις 34 (378) *Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

Ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ, ΕΖ, ΛΒ, ΘΚ, ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστιν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον, ἔσται καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΑΗ ἴση. τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις [εἰ γὰρ τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἴσων οὐσῶν μὴ εἴη τὰ ΑΗ, ΓΜ ὕψη ἴσα, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ΓΔ. ὑπόκειται δὲ ἴσον· οὐκ ἄρα ἄνισόν ἐστι τὸ ΓΜ ὕψος τῷ ΑΗ ὕψει· ἴσον ἄρα]. καὶ ἔσται ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ φανερόν, ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἀλλ᾽ ἔστω μείζων ἡ ΕΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ [εἰ γὰρ μή, οὐδ᾽ ἄρα πάλιν τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ ἴσα ἔσται· ὑπόκειται δὲ ἴσα]. κείσθω οὖν τῇ ΑΗ ἴση ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΝΠ, ὕψους δὲ τοῦ ΓΤ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΦΓ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἔξωθεν δὲ τὸ ΓΦ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν· ἰσοϋψῆ γὰρ τὰ ΑΒ, ΓΦ στερεά· ὡς δὲ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως ἡ ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΤΠ βάσιν καὶ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. ἴση δὲ ἡ ΓΤ τῇ ΑΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Ἔστωσαν [γὰρ] πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν, καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψει. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ [βάσει] ἴση, ἀλλ᾽ ἔστω μείζων ἡ ΕΘ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τοῦ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψους, τουτέστιν ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. κείσθω τῇ ΑΗ ἴση πάλιν ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ ΓΦ στερεόν. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ, ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΓΤ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΕΘ [βάσις] πρὸς τὴν ΝΠ

βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἰσοϋψῆ γάρ ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΦ στερεά· ὡς δὲ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ, οὕτως ἥ τε ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν καὶ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ, ΘΚ, Ⱬ Ν, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ, Η, Β, Κ, Ⱬ, Μ, Δ, Ρ σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΕΘ, ΝΠ ἐπίπεδα κάθετοι καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ϛ, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΖΦ, Ⱬ Ω στερεά· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

Ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΒΤ ἐστιν ἴσον· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]· τὸ δὲ ΓΔ στερεὸν τῷ ΔΨ ἐστιν ἴσον· ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς Ρⱬ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]· καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ ἴσον ἐστίν [τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ⱭΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΚ βάσις τῇ ΕΘ βάσει, ἡ δὲ ⱭΡ βάσις τῇ ΝΠ βάσει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ᾽ αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΔΨ, ΒΤ στερεῶν καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΓ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΘ βάσις τῇ ΖΚ βάσει, ἡ δὲ ΝΠ τῇ ⱭΡ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ⱭΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ᾽ αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν καὶ τῶν ΒΤ, ΔΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ⱭΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. τῶν ΒΤ, ΔΨ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν [ὧν δὲ

στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασι δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα]· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΤ στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΤ τῷ ΒΑ ἴσον ἐστίν· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως [εἰσι] τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]. τὸ δὲ ΔΨ στερεὸν τῷ ΔΓ στερεῷ ἴσον ἐστίν [ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΖΡ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις]. καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἐστιν ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 35 (38I) *Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἀπὸ δὲ τῶν Α, Δ σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ ΑΗ, ΔΜ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΜΔΕ τῇ ὑπὸ ΗΑΒ, τὴν δὲ ὑπὸ ΜΔΖ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῶν ΑΗ, ΔΜ τυχόντα σημεῖα τὰ Η, Μ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Μ σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ ἐπίπεδα κάθετοι αἱ ΗΛ, ΜΝ, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Ν, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΑ, ΝΔ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΑΛ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΔΝ γωνίᾳ.

Κείσθω τῇ ΔΜ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ ΗΛ παράλληλος ἡ ΘΚ. ἡ δὲ ΗΛ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπίπεδον. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Κ, Ν σημείων ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ, ΔΖ, ΔΕ εὐθείας κάθετοι αἱ ΚΓ, ΝΖ, ΚΒ, ΝΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΓ, ΓΒ, ΜΖ, ΖΕ. ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΚΓ, ΓΑ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ, ΓΑ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΓ, ΓΑ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΑ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΜ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΜ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΜΔΖ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΜΔΖ, ΘΑΓ δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν ΘΑ τῇ ΜΔ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἐστιν ἴση [οὕτως· ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ, ΜΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν

ΑΒ, ΒΚ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΘ. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΚ, ΚΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΘ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΘΚΒ γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν ΘΚ κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΜ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΜ ἴση· ὑπόκεινται γάρ· καὶ ἔστιν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ]. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΓΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστὶ καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΚ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΝ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΚ τῇ ὑπὸ ΖΕΝ ἐστιν ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΒΓΚ, ΕΖΝ [τὰς] δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΖΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΚ δυσὶ ταῖς ΔΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσίν· καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν. βάσις ἄρα ἡ ΑΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΚΘ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΜ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΝ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ· ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΚ δυσὶ ταῖς ΜΔ, ΔΝ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΘΚ βάσει τῇ ΜΝ ἐδείχθη ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΔΝ ἐστιν ἴση.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἐπ᾽ αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἀπ᾽ αὐτῶν κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 36 (383) *Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω, ὅτι τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Ε περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὑπὸ ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΕΚ στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ Α ἴση ἡ ΛΜ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΛΜ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ πρὸς τῷ Ε στερεᾷ γωνίᾳ ἴση στερεὰ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΝΛΞ, ΞΛΜ, ΜΛΝ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἡ ΛΞ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΛΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν Α τῇ ΛΜ, ἡ δὲ Β ἑκατέρᾳ τῶν ΛΞ, ΕΔ, ἡ δὲ Γ τῇ ΛΝ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΛΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΝΛΜ, ΔΕΖ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΜΝ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΖ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΔΕΖ, ΝΛΜ, καὶ ἐπ᾽ αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστᾶσιν αἱ ΛΞ, ΕΗ ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν Η, Ξ σημείων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΝΛΜ, ΔΕΖ ἐπίπεδα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε τὰ ΛΘ, ΕΚ στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστίν. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛ στερεὸν τῷ ΕΚ στερεῷ. καί ἐστι τὸ μὲν ΛΘ τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεόν, τὸ δὲ ΕΚ τὸ ἀπὸ τῆς Β στερεόν· τὸ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 37 (384) *Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΚΑ, ΛΓ, ΜΕ, ΝΗ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΑ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΛΓ, τὸ ΚΑ ἄρα πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΛΓ στερεόν, οὕτως τὸ ΜΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΝΗ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καί ἐστιν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 38 (385) *Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.*

Ἀπόδειξις. Κύβου γὰρ τοῦ ΑΖ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓΖ, ΑΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ ΚΝ, ΞΡ, κοινὴ δὲ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ ΥΣ, τοῦ δὲ ΑΖ κύβου διαγώνιος ἡ ΔΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΥΤ τῇ ΤΣ, ἡ δὲ ΔΤ τῇ ΤΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΞ τῇ ΟΕ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΞΥ, ΥΟΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΞ τῇ ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ τῇ ΥΟ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΔΥ τῇ ΥΕ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΞΥ τρίγωνον τῷ ΟΥΕ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΥΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΥΕ γωνίᾳ. διὰ δὴ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΔΥΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθεῖά ἐστιν, καὶ ἴση ἡ ΒΣ τῇ ΣΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ἡ ΓΑ καὶ τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος, καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΒΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ. ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΕΔΤ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΤ· ἐναλλὰξ γάρ· ἡ δὲ ὑπὸ ΔΤΥ τῇ ὑπὸ ΗΤΣ. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΔΤΥ, ΗΤΣ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν ΔΥ τῇ ΗΣ· ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν ΔΕ, ΒΗ· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει. ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΗ, ἡ δὲ ΥΤ τῇ ΤΣ.

Ἐὰν ἄρα κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 39 (386) *Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛ ΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ ΗΘΚ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΑΞ, ΗΟ στερεά. ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΞ στερεὸν τῷ ΗΟ στερεῷ. καί ἐστι τοῦ μὲν ΑΞ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ ΗΟ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΗΘΚΛΜΝ πρίσμα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.

Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Βιβλίο 12ο

Ὁρισμοί

Πρότασις 1 (389) *Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΖΗΘ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΜ, ΗΝ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΛ. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΒΑΕ, ΗΖΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΗ. ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΜΒ ἐστιν ἴση· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν· ἡ δὲ ὑπὸ ΖΛΗ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΑΜ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΗΖΝ ἴση· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ. ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, τοῦ δὲ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου πρὸς τὸ ΖΗ ΘΚΛ πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 2 (390) *Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν [ἔστωσαν] αἱ ΒΔ, ΖΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Σ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων ἐφαπτομένας [εὐθείας] τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον, τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάττων ἐστὶν ὁ κύκλος· ὥστε τὸ ΕΖΗΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα, ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου, ἀλλὰ τὸ καθ' ἑαυτὸ τμῆμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τμήματα τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗ ΜΘΝ πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ Σ χωρίου. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛ ΗΜΘΝ πολύγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ

κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. μείζων δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Σ. ἀνάπαλιν ἄρα [ἐστὶν] ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ἀλλ᾽ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Λέγω δή, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

Γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. λέγω, ὅτι ἔλαττόν ἐστι τὸ Τ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον, ἐναλλὰξ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. μεῖζον δὲ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Τ χωρίου. ὥστε ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 3 (392) *Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ [ὁμοίας] τῇ ὅλῃ τριγώνους ἐχούσας βάσεις καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΕ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΚΖ, ΖΗ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΑΘ τῇ ΔΘ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΑΒ παράλληλός ἐστιν. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΕ ΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΕΒ. ἀλλὰ ἡ ΕΒ τῇ ΕΑ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΑΕ ἄρα τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΔ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΘ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΘ βάσει τῇ ΚΔ ἐστιν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΕΘ τρίγωνον τῷ ΘΚΔ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΘΗ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἅπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΘ, ΘΗ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΔ, ΔΛ εἰσιν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΛ γωνίᾳ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΘ, ΘΗ δυσὶ ταῖς ΚΔ, ΔΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΔΛ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΚΛ [ἐστιν] ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΘΗ τρίγωνον τῷ ΚΔΛ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΒ ἦκται ἡ ΘΚ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΚΛ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστιν, τὸ δὲ ΑΔΓ τῷ ΔΛΘ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἅπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΒΑ, ΑΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΘ, ΘΛ εἰσιν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΘΛ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΛ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἀλλὰ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν [ἐστι] τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον [ὥστε καὶ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον]. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ πυραμίδων

ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι. —Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΖΓ τριγώνου. καὶ ἐπεί, ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ, ΕΘΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ, ΘΚΛ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ. καὶ φανερόν, ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις τὸ ΗΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα, ἐπειδήπερ [καὶ] ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΕΖ, ΕΚ εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις τὸ ΕΒΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον. ἀλλ᾽ ἡ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΕΒΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται. ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον. ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ ΗΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον· ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα.

Ἡ ἄρα ὅλη πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, διῄρηται εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις [καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ] καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 4 (394) *Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως

τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα ἰσοπληθῆ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΖ τῇ ΖΓ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΖ τῇ ΑΒ καὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΖΓ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῆς ΓΖ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΦ. καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ, ΓΖ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ, ΛΖΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΖΦ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα [εὐθύγραμμα] τὰ ΔΕΖ, ΡΦΖ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΖΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ [τρίγωνον], οὕτως τὸ ΛΖΓ [τρίγωνον] πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΛΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν [ἐστι] τὸ ΛΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. ὡς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΒΖΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΠΕΦΡ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα. καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ ΚΒΖΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΖΓ, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὰ πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ ΠΕΦΡ, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα.

Καὶ ὁμοίως, ἐὰν διαιρεθῶσιν αἱ ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ πυραμίδες εἴς τε δύο πρίσματα καὶ δύο πυραμίδας, ἔσται ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜ ΝΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν ΟΜΝ, ΣΤΥ τριγώνων ἑκατέρῳ τῶν ΛΖΓ, ΡΦΖ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα. ὁμοίως δὲ κἂν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν εἴς τε δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒ ΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Ὅτι δέ ἐστιν ὡς τὸ ΛΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΛΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ

πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ [τρίγωνον], ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ, οὕτω δεικτέον.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδὴ τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοϋψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἥ τε ΗΓ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΟΜΝ τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. καὶ τέτμηται ἡ ΗΓ δίχα ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου κατὰ τὸ Ν· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒΓ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ΔΕΖ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΣΤΥ ἐπιπέδου. καί εἰσιν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ΟΜΝ, ΣΤΥ τριγώνων ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ κάθετοι. ἰσοϋψῆ ἄρα [ἐστὶ] τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΛΞΓ, ΡΦΖ τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ ΟΜΝ, ΣΤΥ. ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων ἀναγραφόμενα ἰσοϋψῆ καὶ πρὸς ἄλληλα [εἰσὶν] ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 5 (396) *Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Χ, καὶ διῃρήσθω ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι πυραμίδες ὁμοίως διῃρήσθωσαν, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος, αἵ εἰσιν ἐλάττονες τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ ΔΕ ΖΘ πυραμὶς τοῦ Χ στερεοῦ. λελείφθωσαν καὶ ἔστωσαν λόγου ἕνεκεν αἱ ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ· λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΔΕ ΖΘ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Χ στερεοῦ. διῃρήσθω καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα·

ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα, οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Χ στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρισμάτων. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος στερεόν.

Λέγω δή, ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδὲ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 6 (399) *Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν [αἱ] βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Μ, Ν σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ. ἐπεὶ οὖν δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς ἡ ΖΗΘΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘ βάσιν, οὕτως καὶ ἡ ΖΗΘΚΛΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΝ πυραμίδα. καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΔ ΕΜ, ΖΗΘΝ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς

τὴν ΖΗΘ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΝ πυραμίδα. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕ βάσιν, οὕτως ἦν ἡ ΑΔ ΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕΜ πυραμίδα. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΝ πυραμίδα. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΖΗΘ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἦν καὶ ἡ ΖΗΘΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 7 (400) *Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΕΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΒΔ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΔ τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΔΕΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. ἀλλὰ ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΔΕΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΖΓΒΕ, διάμετρος δέ ἐστιν αὐτοῦ ἡ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΕΖ τρίγωνον τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΓΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΕΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν [ἐστι] τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· διῄρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.

Καὶ ἐπεὶ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ ΓΑΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχονται· ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς

βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ καὶ ὕψος ἴσον [ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, τοιοῦτο καὶ τὸ ἀπεναντίον, καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπεναντίον, καὶ ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 8 (401) *Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΠ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΒΝ τῷ ΕΡ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΒΚ τῷ ΕΣ· τὰ τρία ἄρα τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τρισὶ τοῖς ΕΠ, ΕΣ, ΕΡ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν, τὰ δὲ τρία τὰ ΕΠ, ΕΣ, ΕΡ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν. τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περιέχεται. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ ΒΗΜΛ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΕΖ. ὡς δὲ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεόν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος. καὶ ἡ ΑΒΓΗ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι καὶ ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις ἔσται ὡς [ἡ] ἐν τῇ ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν, οὕτως καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα. ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίαν βάσιν ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν. *Δ*

Πρότασις 9 (403) *Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν γὰρ ἴσαι πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΒΓΗ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΗ ΜΛ στερεόν, τῆς δὲ ΔΕΖΘ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΕΘΠΟ στερεόν, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ ἄρα πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. ἀλλὰ τὸ [μὲν] τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδου ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδου ὕψος. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΕΘ ΠΟ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ. καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΗΜΛ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓΗ πυραμίς, τοῦ δὲ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἡ ΔΕΖΘ πυραμίς· ἴση ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δ

Πρότασις 10 (404) *Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.*

Ἀπόδειξις. Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἤτοι μείζων ἢ τριπλασίων ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. ἔστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ δὴ ΑΒΓΔ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσουψὲς τῷ κυλίνδρῳ. τὸ δὴ ἀνιστάμενον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ κἂν περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου· καί ἐστι τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν ἀνιστάμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοϋψῆ· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ ἄρα τετραγώνου ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· καί ἐστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· τὸ ἄρα πρίσμα τὸ

ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν. ἀνεστάτω ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσουψῆ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀναστα-θέντων πρισμάτων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων παραλλήλους ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλ-ληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασταθέντων ἡμίση ἐστὶ τὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων· καί ἐστι τὰ τοῦ κυλίνδρου τμήματα ἐλάττονα τῶν ἀνασταθέντων στερεῶν παραλληλεπι-πέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ᾽ ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων. τέμνο-ντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΕΒΖ ΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγω-νον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν [ἐστι] τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν ΑΒ ΓΔ κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ἐμπεριέχε-ται γὰρ ὑπ᾽ αὐτοῦ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. ἐγ-γεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ ΑΒΓΔ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπει-δήπερ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, ἔσται τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ πα-ραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα,

ἔσται τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἥμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. καί ἐστι μείζων ἡ πυραμὶς ἡ ἀνασταθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτωσαν ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πυραμίδες τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓ ΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓ ΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 11 (408) *Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν [εἰσιν] οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΑΓ, ΕΗ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον.

Εἰ γὰρ μή, ἔσται ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Ξ, καὶ ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ Ξ στερεὸν τοῦ ΕΝ κώνου, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ Ψ στερεόν· ὁ ΕΝ κῶνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Ξ, Ψ στερεοῖς. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖ ΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης· πρὸς ἀλλήλας γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· ἐλάττων δὲ ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ. ἕκαστον ἄρα τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς τῷ κώνῳ καὶ ἀεὶ τοῦτο ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Ψ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΔΤΑΥΒ ΦΓΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπ᾽ αὐτοῦ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ ΑΛ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕ ΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον. ὡς δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖ ΡΗΣ πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδα. μείζων δὲ ὁ ΑΛ κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδος. ἀλλὰ καὶ ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ

ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν.

Λέγω δή, ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Ƶ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως τὸ Ƶ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον. ἀλλ᾽ ὡς τὸ Ƶ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον.

Ἀλλ᾽ ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ᾽ αὐτῶν ἰσοϋψεῖς [τοῖς κώνοις] κύλινδροι.

Οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 12 (411) *Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΒΔ, ΖΘ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων καὶ κυλίνδρων οἱ ΚΛ, ΜΝ· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν [ἐστιν] ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μὲν [ἐστιν] ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἕξει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος ἢ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μεῖζον. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Ƶ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα ΕΖΗΘ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν δὴ αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ. καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων

μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ᾽ ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος τοῦ Ƶ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ Ƶ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολυγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΤΒΥ ΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΛΒΤ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΖΟ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΤ, ΜΟ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος τῷ ΕΖΗΘΝ κώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ὁ ΚΛ ἄξων πρὸς τὸν ΜΝ ἄξονα. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΛ, ΖΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΛ τρίγωνον τῷ ΖΜΝ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΟ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΤ, ΖΜΟ, ἐπειδήπερ, ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΚΤ γωνία τῶν πρὸς τῷ Κ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΜΟ γωνία τῶν πρὸς τῷ Μ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν· ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΤ τρίγωνον τῷ ΖΜΟ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΚ τῇ ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΟΜ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΤΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΤΚΛ, ΟΜΝ· ὀρθαὶ γάρ· αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΚΤ τρίγωνον τῷ ΝΜΟ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΚΒ, ΝΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΤ, ΖΜΟ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΟ, δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΟ. πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΤΚ, ΝΟΜ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΚ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΤΚΒ, ΟΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΜΟ πρὸς τὴν ΟΖ, δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ

ΝΟ πρὸς τὴν ΟΖ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΤΒ πρὸς τὴν ΒΛ, οὕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΝ. δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΤΛ πρὸς τὴν ΛΒ, οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΖ. τῶν ΛΤΒ, ΝΟΖ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΛΤΒ, ΝΟΖ τρίγωνα· ὥστε καὶ ὅμοια. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΒΚΤ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΖΜΟ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται ἴσων τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῶν Α, Χ, Δ, Φ, Γ, Υ ἐπὶ τὸ Κ εὐθείας καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Σ, Θ, Ρ, Η, Π ἐπὶ τὸ Μ καὶ ἀνιστάντες ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τοῖς κώνοις δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἕξει ἥπερ ἡ ΒΚ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΜ ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα, οὕτως ἡ ὅλη πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις [μὲν] τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ κῶνος, οὗ βάσις [μὲν] ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸ Ƶ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχων ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὸ Ƶ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ [πολύγωνον], κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν· ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, οὕτως τὸ Ƶ [στερεὸν] πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ƶ στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ [σημεῖον], πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου στερεόν, οὗ βάσις μὲν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ. ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. ὡς δὲ τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν. καὶ ὁ ΕΖΗΘΝ ἄρα κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ὁ ΑΒΓΔΛ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ καὶ ἰσοϋψὴς αὐτῷ. καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 13 (416) *Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.*

Ἀπόδειξις. Κύλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἄξονι τὸ ΗΘ ἐπίπεδον κατὰ τὸ Κ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΕΖ ἄξων ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ ΕΚ ἄξονι ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΕΝ, ΝΛ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΖΞ, ΞΜ, καὶ νοείσθω ὁ ἐπὶ τοῦ ΛΜ ἄξονος κύλινδρος ὁ ΟΧ, οὗ βάσεις οἱ ΟΠ, ΦΧ κύκλοι. καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν Ν, Ξ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ καὶ ταῖς βάσεσι τοῦ ΟΧ κυλίνδρου καὶ ποιείτωσαν τοὺς ΡΣ, ΤΥ κύκλους περὶ τὰ Ν, Ξ κέντρα. καὶ ἐπεὶ οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, οἱ ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις· ἴσοι ἄρα καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἀλλήλοις. ἐπεὶ οὖν οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῷ πλήθει, ὁσαπλασίων ἄρα ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΒ κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ, εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, μείζων

καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ τοῦ ΒΗ κυλίνδρου ὅ τε ΛΚ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου ὅ τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ ΗΧ κύλινδρος, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα, οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 14 (417) *Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ κύκλων κύλινδροι οἱ ΕΒ, ΖΔ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΚΛ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξονι ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΛΝ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις ἀλλήλαις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΓΔ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΛΝ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΛΝ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξονι· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. ὡς δὲ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 15 (418) *Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, οἵτινες καὶ ὕψη εἰσὶ τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπεπληρώσθωσαν οἱ ΑΞ, ΕΟ κύλινδροι. λέγω, ὅτι τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος.

Τὸ γὰρ ΛΚ ὕψος τῷ ΜΝ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΖ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ ἴσος. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓΔ βάσις τῇ ΕΖΗΘ βάσει. ὥστε καὶ ἀντιπέπονθεν, ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ ΛΚ ὕψος τῷ ΜΝ ἴσον, ἀλλ᾽ ἔστω μεῖζον τὸ ΜΝ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΜΝ ὕψους τῷ ΚΛ ἴσον τὸ ΠΝ, καὶ διὰ τοῦ Π σημείου τετμήσθω ὁ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ ΤΥΣ παραλλήλῳ τοῖς τῶν ΕΖΗΘ, ΡΟ κύκλων ἐπιπέδοις, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ ΝΠ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΕΣ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΖ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΖ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ὁ ΑΖ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ ΑΖ, ΕΣ κύλινδροι· ὡς δὲ ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΠΝ ὕψος· ὁ γὰρ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΠΝ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ ΠΝ ὕψος τῷ ΚΛ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος. τῶν ἄρα ΑΖ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΖ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΖ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος, ἴσον δὲ τὸ ΚΛ ὕψος τῷ ΠΝ ὕψει, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΠΝ ὕψος. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΖ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν· ὡς δὲ τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΠΝ [ὕψος], οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΖ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ. ἴσος ἄρα ὁ ΑΖ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 16 (420) *Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Κ κέντρου εὐθεῖα ἡ ΒΚΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου τῇ ΒΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΑ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάσσονα τῆς ΑΔ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΛΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΛΜ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΔ, ΔΝ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΔ τῇ ΔΝ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΛΝ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΑΓ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἡ ΛΝ ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· πολλῷ ἄρα αἱ ΛΔ, ΔΝ οὐκ ἐφάπτονται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. ἐὰν δὴ τῇ ΛΔ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΕΖΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Δ*

Πρότασις 17 (420) *Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.*

Ἀπόδειξις. Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Α· δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγίγνετο ἡ σφαῖρα· ὥστε καὶ καθ᾽ οἵας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι᾽ αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων [εὐθειῶν]. ἔστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΒΓΔΕ, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΖΗΘ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΔ, ΓΕ, καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν ΒΓΔΕ, ΖΗΘ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΖΗΘ, οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΑ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΞ καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΚΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω· ποιήσουσι δὴ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστω ἐπὶ τῶν ΒΔ, ΚΝ διαμέτρων τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞΑ ἐπίπεδά ἐστιν ὀρθὰ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ

ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΒΕΔ, ΒΖΔ, ΚΖΝ ἡμικύκλια· ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν ΒΔ, ΚΝ· ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΒΕ, ΒΖ, ΚΖ τεταρτημόρια ἀλλήλοις. ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΖ, ΚΖ τεταρτημορίοις ἴσαι ταῖς ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ εὐθείαις. ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΖ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο, Σ ἐπὶ τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς ΒΔ, ΚΝ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ τῶν ΒΖΔ, ΚΖΝ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ ΟΦ, ΣΧ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΧΦ. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις τοῖς ΒΖΔ, ΚΖΝ ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΒΟ, ΚΣ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΟΦ, ΣΧ, ἴση [ἄρα] ἐστὶν ἡ μὲν ΟΦ τῇ ΣΧ, ἡ δὲ ΒΦ τῇ ΚΧ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΑ ὅλῃ τῇ ΚΑ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΦΑ λοιπῇ τῇ ΧΑ ἐστιν ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΦ πρὸς τὴν ΦΑ, οὕτως ἡ ΚΧ πρὸς τὴν ΧΑ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΟΦ, ΣΧ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ τῇ ΣΧ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· καὶ αἱ ΧΦ, ΣΟ ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, ἀλλὰ ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ ἐστι παράλληλος, καὶ ἡ ΣΟ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστι παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΟ, ΚΣ· τὸ ΚΒΟΣ ἄρα τετράπλευρον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐπειδήπερ, ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ᾽ ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΥΡΖ τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ σημείων ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν πολύεδρον μεταξὺ τῶν ΒΖ, ΚΖ περιφερειῶν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον. ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ πλευρῶν καθάπερ ἐπὶ τῆς ΒΚ τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, συσταθήσεταί τι σχῆμα πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν πυραμίσι περιεχόμενον, ὧν βάσεις [μὲν] τὰ εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΖ τρίγωνον καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον.

Λέγω, ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάψεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ᾽ ἧς ἐστιν ὁ ΖΗΘ κύκλος.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΑΨ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΨΒ, ΨΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΨ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν. ἡ ΑΨ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΨ, ΨΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ

καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ψ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΚ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΚ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΨΚ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΒΨ τῇ ΨΚ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ Ο, Σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ΒΨ, ΨΚ. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ψ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΨΒ, ΨΚ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ο, Σ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον.

Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΚΒ τῆς ΧΦ, ἴση δὲ ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, μείζων ἄρα ἡ ΚΒ τῆς ΣΟ. ἴση δὲ ἡ ΚΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΣ, ΒΟ τῆς ΣΟ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ, καὶ ἴσαι αἱ ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ, καὶ ἐλάττων ἡ ΟΣ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ ΒΨ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΒΦ κάθετος ἡ ΚΩ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΔ τῆς ΔΩ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΩ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΩ πρὸς τὸ ὑπὸ [τῶν] ΔΩ, ΩΒ, ἀναγραφομένου ἀπὸ τῆς ΒΩ τετραγώνου καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ΩΔ παραλληλογράμμου καὶ τὸ ὑπὸ ΔΒ, ΒΩ ἄρα τοῦ ὑπὸ ΔΩ, ΩΒ ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καί ἐστι τῆς ΚΔ ἐπιζευγνυμένης τὸ μὲν ὑπὸ ΔΒ, ΒΩ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΩ ἔλασσόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΚΑ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΨΑ. μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΩ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΨ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΗ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ ΑΗ ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν· ὥστε τὸ πολύεδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγέγραπται μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ τῆς ΒΓΔΕ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοιοπληθεῖς καὶ ὁμοιοταγεῖς πυραμίδας ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα πυραμίς,

ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοιοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἥπερ ἡ ΑΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ κέντρον τὸ Α πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὁμοίως καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὥστε ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ [σφαίρᾳ] στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἥπερ ἡ ΒΔ διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 18 (424) *Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.*

Ἀπόδειξις. Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΓ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰ γὰρ μὴ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, ἕξει ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μείζονα ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ΗΘΚ, καὶ νενοήσθω ἡ ΔΕΖ τῇ ΗΘΚ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον· τὸ ἄρα ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔχει δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλὰξ [ἄρα] ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ᾽ αὐτοῦ. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν ΛΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ διάμετρος πρὸς τὴν ΒΓ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν, οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας, ἐπειδήπερ μείζων ἐστὶν ἡ ΛΜΝ τῆς ΔΕΖ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. ἡ ἄρα ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Βιβλίο 13ο

Ὁρισμοί

Πρότασις 1 (427) *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας τῇ ΓΑ εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῆς ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΔΓ τετράγωνα τὰ ΑΕ, ΔΖ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΔΖ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ΖΓ ἐπὶ τὸ Η. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΖΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΖΘ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΑ τῇ ΚΑ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΑΘ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΑ τῆς ΑΘ. ὡς δὲ ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ, οὕτως τὸ ΓΚ πρὸς τὸ ΓΘ· διπλάσιον ἄρα τὸ ΓΚ τοῦ ΓΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ, ΘΓ διπλάσια τοῦ ΓΘ. ἴσον ἄρα τὸ ΚΓ τοῖς ΛΘ, ΘΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ΓΕ τῷ ΘΖ ἴσον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τὸ ΑΕ τοῦ ΔΘ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕ τῷ ΜΝΞ γνώμονι· καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΑΟ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΟ. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, τὸ δὲ ΑΟ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 2 (428) *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ ΑΓ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΑΓ διπλῆ ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι τῆς ΓΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΓΔ τετράγωνα τὰ ΑΖ, ΓΗ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΑΖ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ τοῦ ΑΘ. τετραπλάσιος ἄρα ὁ ΜΝΞ *γνώμων* τοῦ ΑΘ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔΓ τοῦ ἀπὸ ΓΑ, τουτέστι τὸ ΓΗ τοῦ ΑΘ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ΜΝΞ *γνώμων* τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ· ἴσος ἄρα ὁ ΜΝΞ *γνώμων* τῷ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΓΘ [διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΓ τῆς ΓΘ], διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΚΒ τοῦ ΒΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ, ΘΒ τοῦ ΘΒ διπλάσια· ἴσον ἄρα τὸ ΚΒ τοῖς ΛΘ, ΘΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ ΜΝΞ *γνώμων* ὅλῳ τῷ ΓΗ ἴσος· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ τῷ ΒΗ ἐστιν ἴσον. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔΒ· ἴση γὰρ ἡ ΓΔ τῇ ΔΗ· τὸ δὲ ΘΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ. μείζων δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ. τῆς ΓΔ ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς ΑΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΓ, οὕτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ διπλῆ τῆς ΓΑ. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ· πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ. ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΓΒ διπλασία ἐστὶ τῆς ΑΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ἐλάττων τῆς ΓΒ διπλασίων ἐστὶ τῆς ΓΑ· πολλῷ γὰρ [μεῖζον] τὸ ἄτοπον.

Ἡ ἄρα τῆς ΑΓ διπλῆ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 3 (429) *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα. ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΔΓ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ, τουτέστι τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ ἄρα ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΡΣ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΓΕ τοῦ ΖΗ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΖ. ὥστε καὶ τὸ ΗΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΛ τετραγώνῳ. ἴση ἄρα ἡ ΗΚ τῇ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΕ· ὥστε καὶ τὸ ΜΖ τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΜΖ τῷ ΓΗ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΝ· ὁ ἄρα ϟΟΠ *γνώμων* ἴσος ἐστὶ τῷ ΓΕ. ἀλλὰ τὸ ΓΕ τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ΗΖ· καὶ ὁ ϟΟΠ ἄρα *γνώμων* τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΖΗ τετραγώνου. ὁ ϟΟΠ ἄρα *γνώμων* καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνον πενταπλάσιός ἐστι τοῦ ΖΗ. ἀλλὰ ὁ ϟΟΠ *γνώμων* καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΝ. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τὸ δὲ ΗΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 4 (430) *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒΓ τὸ ΑΚ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΘΗ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΚ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἐστιν ἴσον· τὰ ἄρα ΑΚ, ΓΕ τοῦ ΑΚ ἐστι διπλάσια. ἀλλὰ τὰ ΑΚ, ΓΕ ὁ ΛΜΝ *γνώμων* ἐστὶ καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΛΜΝ *γνώμων* καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ ἐδείχθη ἴσον· ὁ ἄρα ΛΜΝ *γνώμων* καὶ [τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ· ὥστε ὁ ΛΜΝ *γνώμων* καὶ] τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ τετραγώνου. καί ἐστιν ὁ [μὲν] ΛΜΝ *γνώμων* καὶ τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα ὅλον τὸ ΑΕ καὶ τὸ ΓΚ, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τὸ δὲ ΗΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγω-

νον. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 5 (431) *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ αὐτῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.*

Ἀπόδειξις. Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση [κείσθω] ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΓΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΘΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΕ, τῷ δὲ ΘΓ ἴσον τὸ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΕ [κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘΒ]. ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ὅλῳ τῷ ΑΕ ἐστιν ἴσον. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ· ἴση γὰρ ἡ ΑΔ τῇ ΔΛ· τὸ δὲ ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. μείζων δὲ ἡ ΔΒ τῆς ΒΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ.

Ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 6 (432) *Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΑ, καὶ κείσθω τῆς ΒΑ ἡμίσεια ἡ ΑΔ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τῷ μείζονι τμήματι τῷ ΑΓ πρόσκειται ἡ ΑΔ ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΔ τοῦ ἀπὸ ΔΑ πενταπλάσιόν ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΔ τῷ ἀπὸ ΔΑ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ ΔΑ· ῥητὴ γὰρ [ἐστιν] ἡ ΔΑ ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ ῥητῆς οὔσης· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα

ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστίν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀποτομῆς παρὰ τὴν ΑΒ ῥητὴν παραβληθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν ΒΓ. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΓΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ ἀποτομή.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 7 (433) *Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.*

Ἀπόδειξις. Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ ΑΒΓΔΕ αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΓΒ, ΒΑ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΕ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΒΕΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΖ πλευρᾷ τῇ ΒΖ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΓ ὅλῃ τῇ ΒΕ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΓ λοιπῇ τῇ ΖΕ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ ἴση. δύο δὴ αἱ ΖΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἴση. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β, Γ γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι, ἀλλ᾽ ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ σημείοις· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΑ, ΑΕ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ ἐστιν ἴση. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ γωνίαις ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ,

Δ γωνίαις. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 8 (434) *Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.*

Ἀπόδειξις. Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ ΑΒΓ ΔΕ δύο γωνίας τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς τὰς πρὸς τοῖς Α, Β ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΕ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Θ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΑΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΕ· διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΘΕ τῆς ὑπὸ ΒΑΘ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ περιφέρεια ἡ ΕΔΓ περιφερείας τῆς ΓΒ ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΘΕ· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ, τουτέστι τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ εὐθεῖα τῇ ΑΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΕ καὶ τοῦ ΑΒΘ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΘ. ἴση δὲ ἡ ΒΑ τῇ ΕΘ· ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΘ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΕ τῆς ΕΘ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΘΒ. ἡ ΒΕ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ ΘΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ ΓΘ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 9 (435) *Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τῶν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ ΒΓ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΓΔ, καὶ

ἔστωσαν ἐπ᾽ εὐθείας· λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ ΒΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΔ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ ἐπὶ τὸ Α. ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά ἐστιν ἡ ΒΓ, πενταπλασίων ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας· τετραπλασίων ἄρα ἡ ΑΓ περιφέρεια τῆς ΓΒ. ὡς δὲ ἡ ΑΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΓΕΒ· τετραπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΕΓ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ εὐθεῖα τῇ ΓΔ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον [ἐγγραφομένου]· ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ γωνίᾳ· διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΓ τετραπλασία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ τῇ ὑπὸ ΒΕΓ. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΒΕΓ καὶ τοῦ ΒΕΔ, ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΔ τῇ ὑπὸ ΕΓΒ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ. ἴση δὲ ἡ ΕΒ τῇ ΓΔ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΔΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ. ἡ ΒΔ ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται [κατὰ τὸ Γ], καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἐστιν ἡ ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 10 (436) *Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓΔΕ. λέγω, ὅτι ἡ τοῦ ΑΒΓΔΕ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου πλευρὰν τῶν εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον ἐγγραφομένων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Η σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΚΒ, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΝ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΕΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΗΔ ἐστιν ἴση. πενταγώνου δὲ ἡ ΓΔ· δεκαγώνου ἄρα ἡ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ, καὶ κάθετος ἡ ΖΘ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΒ. ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ ἐστιν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας· δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΑΚ εὐθεῖα.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΚ τῆς ΚΜ ἐστι διπλῆ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας, ἴση δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας. ἔστι δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια καὶ τῆς ΓΗ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια τῇ ΒΚ περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἡ ΒΚ τῆς ΚΜ ἐστι διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΚΑ· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῆς ΚΜ ἐστι διπλῆ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας ἐστὶ διπλῆ· ἴση γὰρ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῇ ΒΑ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΗΒ περιφέρεια τῆς ΒΜ ἐστι διπλῆ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΖΒ γωνίας τῆς ὑπὸ ΒΖΜ [ἐστι] διπλῆ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ καὶ τῆς ὑπὸ ΖΑΒ διπλῆ· ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΖ. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΑΒ ἐστιν ἴση. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΒΖ καὶ τοῦ ΒΖΝ, ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΝΖ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΖ τρίγωνον τῷ ΒΖΝ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΖ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΛΚ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΛΝ, βάσις ἄρα ἡ ΚΝ βάσει τῇ ΑΝ ἐστιν ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΚΝ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΑΝ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΛΑΝ τῇ ὑπὸ ΚΒΝ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΛΚΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΒΝ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΚΒ καὶ τοῦ ΑΚΝ ἡ πρὸς τῷ Α. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΚΝΑ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΒΑ τρίγωνον τῷ ΚΝΑ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΑΚ, οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΝ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑΝ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΒΑ πενταγώνου πλευρά, ἡ δὲ ΒΖ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΑΚ δεκαγώνου.

Ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 11 (437) *Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.*

Ἀπόδειξις. Εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔΕ ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω, ὅτι ἡ τοῦ [ΑΒΓΔΕ] πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῆς ΑΖ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΚ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΖ ῥητή· ὅλη ἄρα ἡ ΒΚ ῥητή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα

ἡ ΓΗ λοιπῇ τῇ ΗΔ ἐστιν ἴση. καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΑΔ, συνάγονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Λ γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ ΓΔ τῆς ΓΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ Μ ὀρθαί εἰσιν, καὶ διπλῆ ἡ ΑΓ τῆς ΓΜ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΛΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΜΖ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΓΛ καὶ τοῦ ΑΜΖ ἡ ὑπὸ ΛΑΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΜΖΑ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓΛ τρίγωνον τῷ ΑΜΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΛΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς ΖΑ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΑ. ὡς δὲ ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ. καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίσεα· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ΖΑ. καί ἐστι τῆς μὲν ΛΓ διπλῆ ἡ ΔΓ, τῆς δὲ ΓΑ ἡμίσεια ἡ ΓΜ, τῆς δὲ ΖΑ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΚ. συνθέντι καὶ ὡς συναμφότερος ἡ ΔΓΜ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΚΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΓΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΜ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ. καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τῆς ΑΓ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τουτέστι τῇ ΔΓ, τὸ δὲ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, καί ἐστιν ὅλης τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΜ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΜ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ· ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΚ [δυνάμει μόνον]. καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ ΒΖ τῆς ΖΚ, πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῆς ΚΖ· εἰκοσιπενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΜ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΜ μήκει. καί ἐστι ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν. αἱ ΒΚ, ΚΜ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν ἀποτομή· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΜΚ. λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη. ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Ν· ἡ ΒΚ ἄρα τῆς ΚΜ μεῖζον δύναται τῇ Ν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΚΖ τῇ ΖΒ, καὶ συνθέντι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΚΒ τῇ ΖΒ. ἀλλὰ ἡ ΒΖ τῇ ΒΘ σύμμετρός ἐστιν· καὶ ἡ ΒΚ ἄρα τῇ ΒΘ σύμμετρός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ λόγον ἔχει, ὃν ε□ πρὸς ἕν. ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ν λόγον

ἔχει, ὃν ε□ πρὸς δ□, οὐχ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ Ν· ἡ ΒΚ ἄρα τῆς ΚΜ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ΒΚ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΚΜ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ὅλη ἡ ΒΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΒΘ, ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ ΜΒ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐλάττων. δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΒΜ ἡ ΑΒ διὰ τὸ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΑΘ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΑΒΜ τριγώνῳ καὶ εἶναι ὡς τὴν ΘΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΜ.

Ἡ ἄρα ΑΒ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 12 (439) *Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ ΒΕΓ ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ ΑΒΓ κύκλου περιφερείας. ἡ ἄρα ΒΕ περιφέρεια ἕκτον ἐστὶ μέρος τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἑξαγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ εὐθεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΕ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΕ τῆς ΔΕ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΒΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΔΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ.

Ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου [τοῦ κύκλου]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 13 (440) *Πυραμίδα συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ· καὶ γεγράφθω

ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΑ· καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗ κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΕΖΗ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΘΖ, ΘΗ· καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΘΚ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΘΚ τῇ ΑΓ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΘ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ· ἡ ΘΚ ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΚΕ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ, ΚΗ τῇ ΔΑ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὡς ἐξῆς δειχθήσεται. τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ τριπλάσιον, καί ἐστιν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΕΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΑ τῇ ΕΖ. ἀλλὰ ἡ ΔΑ ἑκάστῃ τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ ἑκάστῃ τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ, ΚΕΗ. πυραμὶς ἄρα συνέσταται ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΖΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον.

Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ᾽ εὐθείας τῇ ΚΘ εὐθεῖα ἡ ΘΛ, καὶ κείσθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΘΛ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΒ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΚΘ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΘΛ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ. καί ἐστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΚΘΕ, ΕΘΛ γωνιῶν· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΛ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε [ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΛ, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ ΛΕΚ γωνία διὰ τὸ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν ΕΛΘ, ΕΘΚ τριγώνων]. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΛ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η σημείων ἐπιζευγνυμένων τῶν ΖΛ, ΛΗ καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς Ζ, Η γωνιῶν· καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ. ἡ γὰρ ΚΛ τῆς σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ ΑΒ, ἐπειδήπερ τῇ μὲν ΑΓ ἴση κεῖται ἡ ΚΘ, τῇ δὲ ΓΒ ἡ ΘΛ.

Λέγω δή, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ· ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ. ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ [ἐπειδήπερ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΔΒ ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΔΑΒ, ΔΑΓ τριγώνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας]. ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΒΑ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΑΔ ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

Δεικτέον, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφή, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον τὸ ΕΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΔΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΑΓ τριγώνῳ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΒΖ, καί ἐστι τὸ μὲν ΕΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· ἴση γὰρ ἡ ΕΑ τῇ ΑΓ· τὸ δὲ ΒΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ἡ γὰρ ΔΓ κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΓ, ΓΒ μέση ἀνάλογόν ἐστι διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΔΒ. ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 14 (442) *Ὀκτάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΖ, ΕΗ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΚΛ καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ ΚΜ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΚΛ, ΚΜ μιᾷ τῶν ΕΚ, ΖΚ, ΗΚ, ΘΚ ἴση ἑκατέρα τῶν ΚΛ, ΚΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΚΘ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΕΚΘ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῇ ΚΕ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΛΚΕ γωνία,

τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΕΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΕ τῇ ΕΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΘΕ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΕΘ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πλευραί, κορυφαὶ δὲ τὰ Λ, Μ σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὀκτάεδρον ἄρα συνέσταται ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ ΛΚ, ΚΜ, ΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΛΜ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε. καὶ διὰ τὰ αὐτά, ἐὰν μενούσης τῆς ΛΜ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η, Θ σημείων, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῇ ΚΜ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΛΕ βάσει τῇ ΕΜ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΕΜ γωνία· ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, διπλασία ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ. καί ἐστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΕ· ἴση γὰρ κεῖται ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΛΜ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΛΜ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Περιείληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 15 (444) *Κύβον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον τὴν πλευρὰν τῇ ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ἑκάστης τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ μιᾷ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ ἴση ἑκάστη τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ· κύβος ἄρα συνέσταται ὁ ΖΝ ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος. δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ

δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΚΗ, ΕΗ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΚΕΗ γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν ΚΕ ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ ΕΗ ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν ΕΗ εὐθεῖαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΗ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΗΖ ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΖΛ, ΖΕ, καὶ πρὸς τὸ ΖΚ ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν ἡ ΗΖ· ὥστε καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΖΚ, ἡ ΗΖ ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς τὴν ΖΚ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ΗΚ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ζ. ὁμοίως καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΗ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαῖρα περιειλημμένος ὁ κύβος. λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΕΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. καὶ ἐπεὶ τριπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΕ τριπλάσιον. καὶ κεῖται ἴση ἡ ΚΕ τῇ ΔΒ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΗ τῇ ΑΒ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος· καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Πρότασις 16 (445) *Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗΘΚ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΔΒ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΕΖΗΘΚ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, ΕΟ. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΜΝΞΟ πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ ΕΟ εὐθεῖα. καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ, Κ σημείων τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ,

ΝΤ, ΤΖ, ΖΥ, ΥΟ, ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΕΠ, ΚΥ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΠ τῇ ΚΥ. ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἡ ΠΥ ἄρα τῇ ΕΚ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν. πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΕΚ· πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἡ ΠΥ τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ πενταγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου· ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΠΡΣΤΥ πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΕ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΕΟ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΠΕΟ, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΟ· ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΟΥ πενταγώνου ἐστὶ πλευρά. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΟΥ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΖΥ ἰσόπλευρόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν ΠΛ, ΠΟ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΟ πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΛΟ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΖ, ΖΥΟ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΕΖΗ ΘΚ κύκλου τὸ Φ σημεῖον· καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΦΩ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἀφῃρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν ΦΨ, ΧΩ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΦΧ, ΠΕ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΠΕ. εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ ΕΦ, ΠΧ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἑξαγώνου δὲ ἡ ΕΦ· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΠΧ. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΠΧΩ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΩ πενταγώνου ἐστίν, ἐπειδήπερ, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΦΚ, ΧΥ, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καί ἐστιν ἡ ΦΚ ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα ἑξαγώνου· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΧΥ. δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΥΧΩ· πενταγώνου ἄρα ἡ ΥΩ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΥΩ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ Ω σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΛ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΦΨ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΦΨ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΨ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΜΦ οὖσαν ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ ΜΨ πενταγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΜ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΜΨ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΜΝ, ΝΖ, ΖΟ, ΟΛ, κορυφὴ δὲ τὸ Ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. συνέσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ἑξαγώνου ἐστὶν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, ἡ ΦΩ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΦΧ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΦΧ τῇ ΦΕ, ἡ δὲ ΧΩ τῇ ΦΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΕ, οὕτως ἡ ΕΦ πρὸς τὴν ΦΨ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΩΦΕ, ΕΦΨ γωνίαι· ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΩ εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ ΨΕΩ γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΨΕΩ, ΦΕΩ τριγώνων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΩΦ τῇ ΨΧ, ἡ δὲ ΦΧ τῇ ΧΠ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΨΧ πρὸς τὴν ΧΠ, οὕτως ἡ ΠΧ πρὸς τὴν ΧΩ. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΠΨ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π. καὶ ἐὰν μενούσης τῆς ΨΩ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον. λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. τετμήσθω γὰρ ἡ ΦΧ δίχα κατὰ τὸ Α′. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΦΩ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ ἔλασσον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΩΧ, ἡ ἄρα ΩΧ προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν ΧΑ′ πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ′ τοῦ ἀπὸ τῆς Α′Χ. καί ἐστι τῆς μὲν ΩΑ′ διπλῆ ἡ ΩΨ, τῆς δὲ Α′Χ διπλῆ ἡ ΦΧ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ τοῦ ἀπὸ τῆς ΧΦ. καὶ ἐπεὶ τετραπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, πενταπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΦΧ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΨΩ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΨΩ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον.

Λέγω δή, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καί ἐστι δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἡ δὲ τοῦ ΕΖΗΘΚ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν. ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ᾽ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ

ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 17 (449) *Δωδεκάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ Ρ, Σ, Τ σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ρ, Σ, Τ σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ, καὶ κείσθωσαν ἴσαι ταῖς ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ. λέγω, ὅτι τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ καὶ ἔτι ἰσογώνιόν ἐστιν. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΟ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΟΝ, ΝΡ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΡ τῇ ΡΥ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΝ, ΝΡ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΝ, ΝΡ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΡ ἐστιν ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΡ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΒΡ, ΡΥ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΡ, ΡΥ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΥ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΥ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΥΡ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΥ τῆς ΡΥ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΦΥ τῆς ΥΡ διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ΣΡ τῆς ΟΡ, τουτέστι τῆς ΡΥ, ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΒΥ τῇ ΥΦ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ ἑκατέρᾳ τῶν ΒΥ, ΥΦ ἐστιν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ο ἑκατέρᾳ τῶν ΡΥ, ΣΦ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς τοῦ κύβου μέρη ἡ ΟΨ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΨΘ, ΘΧ· λέγω, ὅτι ἡ ΨΘΧ εὐθεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Τ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΠΤ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΠ πρὸς τὴν ΠΤ, οὕτως ἡ ΠΤ πρὸς τὴν ΤΘ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΘΠ τῇ ΘΟ, ἡ δὲ ΠΤ ἑκατέρᾳ τῶν ΤΧ, ΟΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΟ πρὸς τὴν ΟΨ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς τὴν ΤΘ. καί ἐστι παράλληλος ἡ μὲν ΘΟ τῇ ΤΧ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ δὲ ΤΘ τῇ ΟΨ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΖ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ΨΟΘ, ΘΤΧ, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶν ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΨΘ τῇ ΘΧ. πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ἐν ἑνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΡ [ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΝΟ, ΟΡ πρὸς τὴν ΟΝ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ], ἴση δὲ ἡ ΟΡ τῇ ΟΣ [ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΣΝ πρὸς τὴν ΝΟ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΣ], ἡ ΝΣ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΣ τῇ ΣΦ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΦ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΦΣ, ΣΝ, ΝΒ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΣΝ, ΝΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΣΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΣ, ΣΦ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΦ (ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΦΣΒ γωνία), τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΒ τῆς ΒΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΒΝ διπλῆ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΦ τῇ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΥ, ΥΦ δυσὶ ταῖς ΒΧ, ΧΓ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΒΦ βάσει τῇ ΒΓ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΥΦ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΥΦΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ ἄρα ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστι καὶ ἰσογώνιον, καί ἐστιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρᾶς τῆς ΒΓ. ἐὰν ἄρα ἐφ᾽ ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον, ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω ἡ ΨΩ· συμβάλλει ἄρα ἡ ΟΩ τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΩΟ ἡμίσεια τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΥΩ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΣ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΣ τῇ ΨΩ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΟΩ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΨΟ τῇ ΟΣ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΟΣ τῇ ΨΥ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΡΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΥΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΥΩ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ [ἡ] ἡμίσεια τῆς ἡμισείας· καί ἐστιν ἡ ΝΟ ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς·

ἡ ἄρα ΥΩ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. καί ἐστι τὸ Ω κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ Υ ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ.

Λέγω δή, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΟ, τῆς δὲ ΟΖ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΣ, ὅλης ἄρα τῆς ΝΖ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΣ. οἷον ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ, ἡ ΟΡ πρὸς τὴν ΡΝ, καὶ τὰ διπλάσια· τὰ γὰρ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΡΣ, οὕτως ἡ ΡΣ πρὸς συναμφότερον τὴν ΝΡ, ΣΖ. μείζων δὲ ἡ ΝΖ τῆς ΡΣ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΡΣ συναμφοτέρου τῆς ΝΡ, ΣΖ· ἡ ΝΖ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΣ. ἴση δὲ ἡ ΡΣ τῇ ΥΦ· τῆς ἄρα ΝΖ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΥΦ. καὶ ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος καί ἐστι δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΖ πλευρὰ οὖσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

Ἡ ΥΦ ἄρα πλευρὰ οὖσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δ

Πρότασις 18 (452) *Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.*

Ἀπόδειξις. Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΓΒ, κατὰ δὲ τὸ Δ ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν ΑΔ τῆς ΔΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΕΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΓΕ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ, ΕΒ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ. ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ ΑΖΒ τρίγωνον τῷ ΑΖΔ τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΑΖ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Πάλιν, ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΒΖ ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΒΕ ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά.

Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΗ, καὶ κείσθω ἡ ΑΗ ἴση τῇ ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΗΑ τῆς ΑΓ· ἴση γὰρ ἡ ΗΑ τῇ ΑΒ· ὡς δὲ ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΓ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΚΓ. τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ. ἴση δὲ ἡ ΘΓ τῇ ΓΒ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς ΓΒ, ὧν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ ἐστι διπλῆ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ λοιπῆς τῆς ΔΓ ἐστι διπλῆ. τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ· ἐνναπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῆς ΓΔ. κείσθω τῇ ΓΚ ἴση ἡ ΓΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΛΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΒ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ, καί ἐστι τῆς μὲν ΒΓ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΚ διπλῆ ἡ ΚΛ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΛ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ᾽ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΚΛ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου, ἀφ᾽ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται· ἡ ΚΛ ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καί ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΚΛ ἑξαγώνου πλευρά, καὶ ἴση ἡ ΑΚ τῇ ΛΒ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΚ, ΛΒ δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ᾽ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ ΛΒ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΜΛ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΘΚ· ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου· καί ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΘΚ, ΚΛ διπλασίων τῆς ΚΓ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ. ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΒ κύβου ἐστὶ πλευρά, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΝΒ· ἡ ΝΒ ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν ΑΖ πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς ΒΕ δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς ΖΒ δυνάμει τριπλασίων, οἵων ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἕξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο. ἡ μὲν ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία. αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραί, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς. αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ ἥ τε τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς· ἄλογοι γάρ εἰσιν, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή.

Ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ ΜΒ τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς ΝΒ, δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΖΔΒ τρίγωνον τῷ ΖΑΒ τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΒΑ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ. τριπλῆ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραπλάσιον· διπλῆ γὰρ ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΖΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΛ τῆς ΖΒ μείζων ἐστίν. καὶ τῆς μὲν ΑΛ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΚΛ, ἐπειδήπερ ἡ μὲν ΛΚ ἑξαγώνου ἐστίν, ἡ δὲ ΚΑ δεκαγώνου· τῆς δὲ ΖΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΒ· μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΛΜ· μείζων ἄρα ἡ ΛΜ τῆς ΝΒ [τῆς δὲ ΛΜ μείζων ἐστὶν ἡ ΜΒ]. πολλῷ ἄρα ἡ ΜΒ πλευρὰ οὖσα τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς ΝΒ πλευρᾶς οὔσης τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λέγω δή, ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Ὑπὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων ἢ ὅλως ἐπιπέδων στερεὰ γωνία οὐ συνίσταται. ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία· οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς ἔσονται αἱ ἓξ τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι· ὅπερ ἀδύνατον· ἅπασα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ ἓξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἡ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται· ὑπὸ δὲ τεσ-

σάρων ἀδύνατον· ἔσονται γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· οὔσης γὰρ τῆς τοῦ πενταγώνου ἰσοπλεύρου γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους· ὅπερ ἀδύνατον. οὐδὲ μὴν ὑπὸ πολυγώνων ἑτέρων σχημάτων περισχεθήσεται στερεὰ γωνία διὰ τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα ἕτερον σχῆμα στερεὸν συσταθήσεται ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα

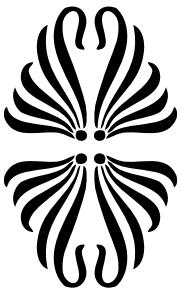
Ὅτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτου, οὕτω δεικτέον.

Ἔστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ ΑΒΓ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ. δίχα ἄρα τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε τοῦ πενταγώνου γωνίας. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ πέντε γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καί εἰσιν ἴσαι, μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ ΑΖΒ, μιᾶς ὀρθῆς ἐστι παρὰ πέμπτον· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΖΑΒ, ΑΒΖ μιᾶς εἰσιν ὀρθῆς καὶ πέμπτου. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ἐστιν ὀρθῆς καὶ πέμπτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Δ*

Γραμματοσειρές:

GFSNeohellenic, ΑΘΗΕΝΑΪΣ

και ΠΑΠΥΡΟΣ ΤΟΥ ΔΕΡΒΕΝΙΟΥ

Γραφικά: PStricks

Στοιχειοθετήθηκε με το XΕLATEX