Πανεπιστήμιο Αιγαίου
URL: http://www.aegean.gr

# Αναλυτική Γεωμετρία

Χαράλαμπος Κορνάρος
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
832 00 Καρλόβασι
Σάμος

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ
ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

# Κεφάλαιο 1

# Διανύσματα στο Επίπεδο

## Η Γεωμετρία των Διατεταγμένων Ζευγαριών

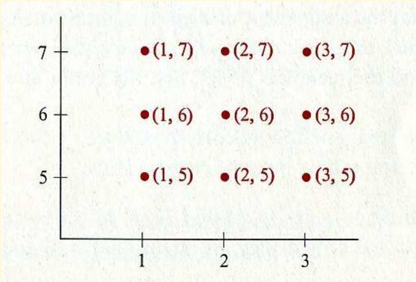
### 1.1. Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Απο τις πρώτες σπουδές στα μαθηματικά μάθατε οτι το Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$(διαβάζεται '$A$ επί $B$') των συνόλων $A$ και $B$ ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγαριών $(x, y)$ στα οποία η πρώτη συντεταγμένη, $x$, είναι στοιχείο του $A$ και η δεύτερη συντεταγμένη, $y$, είναι στοιχείο του $B$. Οπότε, εαν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{5, 6, 7\}$, τότε

$$A \times B = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (3, 7)\}.$$

Ενα συνολο διατεταγμένων ζευγών όπως το $A \times B$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δικτυωτό σημείων, όπως βλέπετε στο Σχήμα 1.1.

*Σχήμα 1.1:*

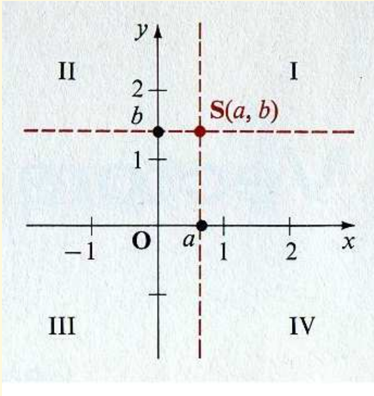



Το Καρτεσιανό γινόμενο που θα συναντήσεις τις περισσότερες φορές σ' αυτό το βιβλίο είναι το $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ή όπως θα το συμβολίζουμε, $\mathbb{R}^2$, όπου $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Απο τον ορισμό του Καρτεσιανού γινομένου,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ και } y \in \mathbb{R}\}.$$

Υπενθυμίζουμε οτι κάθε διατεταγμένο ζεύγος στο $\mathbb{R}$ μπορεί να παρασταθεί με ένα σημείο $S$ του επιπέδου με την χρήση ενός **παραλληλόγραμμου Καρτεσιανού** ή ενός απλά **Καρτεσιανού**, **συστήματος συντεταγμένων**.

Οι κάθετες γραμμές με τους αριθμούς όπως φαίνονται στο Σχήμα 1.2, λέγονται **άξονες** του συστήματος αυτού, και το σημείο τομής των, **O**, καλείται η **αρχή**. (Εκ παραδόσεως οι άξονες κατευθύνονται οριζόντια προς τα δεξιά και κάθετα προς τα πάνω, όπως στο σχήμα· αυτή η επιλογή όμως δεν είναι αναγκαία, και στις εφαρμογές οι κάθετα τεμνόμενοι άξονες θα πρέπει να έχουν κατευθύνσεις οι οποίες φαίνονται οι πιο βολικές.) Τα τέσσερα χωρία στα οποία χωρίζουν το επίπεδο οι άξονες λέγονται **τεταρτημόρια**, και απαριθμούνται με I, II, III, και IV όπως στο Σχήμα.




***Σχήμα 1.2:***

Η αντιστοιχία ενός συγκεκριμμένου διατεταγμένου ζεύγους $(a, b)$ σε ενα σημείο **S** γίνεται ως εξής:

1. Από το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό $a$ στον οριζόντιο άξονα (ο **x**-**άξονας**), κατασκευάστε μια γραμμή παράλληλη προς τον κάθετο άξονα.
2. Από το σημείο που αντιστοιχει στον αριθμό $b$ στον κάθετο άξονα (ο **y**-**άξονας**), κατασκευάστε μια γραμμή παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα.
3. Τότε το σημείο **S** της τομής αυτών των δυο γραμμών έχει συντεταγμένες $(a, b)$. Το **S** καλείται "το **γράφημα** των $(a, b)$" ή μερικές φορές απλά "το σημείο $(a, b)$."

Η πρώτη συντεταγμένη, $a$, του $(a, b)$ καλείται μερικές φορές η **τετμημένη** του **S**, και η δεύτερη συντεταγμένη, $b$, καλείται η **τεταγμένη** του **S**.

Παρατηρείστε οτι για κάθε σημείο **S** του επιπέδου, εαν τραβήξετε απο το **S** ευθείες παράλληλες προς τους άξονες, αυτές θα τέμνουν τους άξονες σε μοναδικά σημεία. Οι πραγματικοί αριθμοί $a$ και $b$ που αντιστοιχούν στα σημεία αυτά σχηματίζουν ενα μονα-

δικό διατεταγμένο ζευγος $(a, b)$, συνεπώς η αντιστοιχία του δοσμένου σημείου $\mathbf{S}$ σε ένα διατεταγμένο ζευγάρι $(a, b)$ είναι επίσης μοναδική. Συνεπώς, υπάρχει μια *ενα-προς-ενα αντιστοιχία* μεταξύ των σημείων του επιπέδου και των στοιχείων του $\mathbb{R}^2$, και το γράφημα του $\mathbb{R}^2$ είναι ολόκληρο το *συντεταγμένο επίπεδο*.
Λόγω αυτής της ενα–προς–ενα αντιστοιχίας, εαν δυο διατεταγμένα ζευγη αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο του επιπέδου, τότε θα πρέπει να είναι ίσα. Οπότε:

□ Δύο διατεταγμένα σημεία $(a, b)$ και $(c, d)$ στο $\mathbb{R}^2$ αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο εαν και μόνο εαν είναι ίσα, δηλαδή, εαν και μονο εάν

$$a = c \text{ και } b = d.$$

***Παράδειγμα 1.*** Για ποιές πραγματικές τιμές των $x$ και $y$ ισχύει $(x + y, x - y) = (5, 3)$;

*Λύση:* Επειδή τα δοθέντα διατεταγμένα ζεύγη είναι ίσα, $x+y = 5$ και $x-y = 3$. Μπορείται να λύσετε το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

για να βρειτε τις ζητούμενες τιμές των $x$ και $y$. Προσθέτοντας τα μέλη των δύο εξισώσεων, παίρνετε

$$2x = 8,$$

ή

$$x = 4.$$

Αντικαθιστώντας το $x$ με 4 στην εξίσωση $x + y = 5$ προκύπτει

$$\begin{aligned} 4 + y &= 5 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

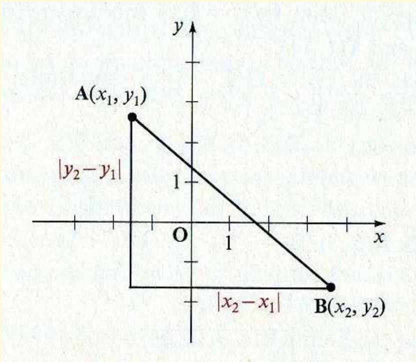
Μπορείτε να ελέγξετε οτι οι τιμές $x = 4$ και $y = 1$ πράγματι ικανοποιούν τις Εξισώσεις (1). Οπότε, οι ζητούμενες τιμές των $x$ και $y$ είναι 4 και 1, αντίστοιχα. □

Μια σπουδαία ιδιότητα που θα πρέπει να θυμάστε για το συντεταγμένο επίπεδο είναι οτι εαν χρησιμοποιείται η ίδια μονάδα μέτησησης και στους δυο άξονες, τότε η απόσταση μεταξύ των οποιονδήποτε σημείων $\mathbf{A}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{B}(x_2, y_2)$ του επιπέδου δίνεται απο τον **τύπο της απόστασης**,

□
$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Αυτή είναι άμμεση συνέπεια του γνωστού Πυθαγορείου θεωρήματος

***Σχήμα 1.3:***




(Σχήμα 1.3). Στην εφαρμογή του τύπου της απόστασης, δεν έχει σημασία ποιό απο τα δύο σημεία θα είναι το $\mathbf{A}(x_1, y_1)$ και ποιό το $\mathbf{B}(x_1, y_1)$, επειδή

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

***Παράδειγμα 2.*** Βρείτε την απόσταση μεταξύ των σημείων $\mathbf{A}(-4, 1)$ και $\mathbf{B}(3, 2)$.

*Λύση:* Θέτοντας $(x_1, y_1) = (-4, 1)$ και $(x_2, y_2) = (3, 2)$, παίρνετε

$$\begin{aligned} d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \sqrt{[3-(-4)]^2 + (2-1)^2} \\ &= \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

□

### Ασκήσεις 1.1

Στις Ασκήσεις 1–8, βρείτε πραγματικές τιμές, εαν υπάρχουν, για τις οποίες η εξίσωση αληθεύει. Εαν δεν υπάρχουν τέτοιες πραγματικές τιμές, να το αναφέρετε.

**1.** $(x+3, 5) = (-1, 9+x)$

**2.** $(x-4, 2) = (3, x-5)$

**3.** $(2x-7, x+2) = (-5, 3)$

**4.** $(3x+2, 2x-3) = (8, 1)$

**5.** $(x-2y, 2x+y) = (-1, 3)$

**6.** $(2x+3y, x+4y) = (3, -1)$

**7.** $(x^2-2x, x^2-x) = (3, 6)$

**8.** $(x^2+2x, 2x^2+3x) = (-1, -1)$

Στις Ασκήσεις 9–14, βρείτε την απόσταση μεταξύ των δοθέντων σημείων $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$. Απλουστεύστε όσο γίνεται τα ριζικά στα αποτελέσματα.

**9.** $\mathbf{S}(1, 3), \mathbf{T}(-2, 6)$

**10.** $\mathbf{S}(1, -6), \mathbf{T}(6, 6)$

**11.** $\mathbf{S}(\sqrt{2}, \sqrt{2}), \mathbf{T}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

**12.** $\mathbf{S}(\sqrt{3}, -\sqrt{3}), \mathbf{T}(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

**13.** $\mathbf{S}(4, \sqrt{3}), \mathbf{T}(2, -1)$

**14.** $\mathbf{S}(\sqrt{2}, -\sqrt{3}), \mathbf{T}(1, 2)$

**15.** Δείξτε οτι το τρίγωνο με κορυφές στα σημεία $\mathbf{R}(0,1), \mathbf{S}(8,-7)$, και $\mathbf{T}(1,-6)$ είναι ισοσκελές.

**16.** Δείξτε οτι τα σημεία $\mathbf{R}(-4,4), \mathbf{S}(-2,-4)$, και $\mathbf{T}(6,-2)$ είναι οι κορυφές ενος ισοσκελούς τριγώνου.

**17.** Δείξτε οτι το σημείο $\mathbf{Q}(1,-2)$ ισαπέχει απο τα σημεία $\mathbf{R}(-11,3), \mathbf{S}(-2,-6)$ και $\mathbf{T}(1,11)$.

**18.** Δείξτε οτι το σημείο $\mathbf{Q}(2,-3)$ ισαπέχει απο τα σημεία $\mathbf{R}(6,0), \mathbf{S}(-2,-6)$, και $\mathbf{T}(-1,1)$.

**19.** Τα σημεία $\mathbf{Q}(1,1), \mathbf{R}(2,5), \mathbf{S}(6,8)$, και $\mathbf{T}(5,4)$ είναι κορυφές ενος τετραπλεύρου. Δείξτε οτι οι απέναντι πλευρές του τετραπλευρου είναι ίσου μήκους.

**20.** Είναι οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου με κορυφές τα σημεία $\mathbf{Q}(-2,3)$, $\mathbf{R}(5,2)$, $\mathbf{S}(7,-4)$, και $\mathbf{T}(0,-2)$ ίσου μήκους;

**21.** Χρησιμοποιήστε τον τύπο της απόστασης για να δείξετε οτι τα σημεία $\mathbf{R}(-2,-5)$, $\mathbf{S}(1,-1)$, και $\mathbf{T}(4,3)$ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

**22.** Δείξτε οτι τα σημεία $\mathbf{R}(-3,3), \mathbf{S}(2,1)$, και $\mathbf{T}(7,-1)$ βρίσκονται στην ίδια γραμμή.

**23.** Δείξτε οτι το $\mathbf{R}(1,5)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα $\mathbf{S}(-2,3)$ και $\mathbf{T}(4,7)$.

**24.** Δείξτε οτι το $\mathbf{M}(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα $\mathbf{S}(a,b)$ και $\mathbf{T}(c,d)$.

**25.** Βρείτε το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $\mathbf{S}(-2,9)$ και $\mathbf{T}(8,-1)$.

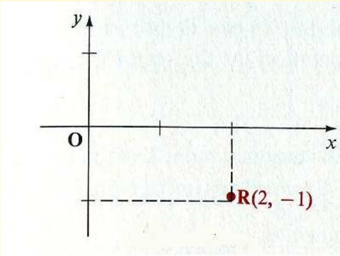
**26.** Βρείτε το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $\mathbf{S}(-3,5)$ και $\mathbf{T}(3,2)$.

**27.** Δείξτε οτι για τα $\mathbf{A}(x_1,0)$ και $\mathbf{B}(x_2,0)$, $d(\mathbf{A},\mathbf{B}) = |x_2 - x_1|$.

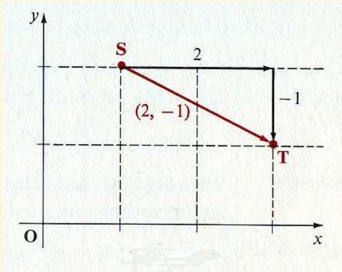
**28.** Δείξτε οτι για τα σημεία $\mathbf{C}(0,y_1)$ και $\mathbf{D}(0,y_2)$, $d(\mathbf{C},\mathbf{D}) = |y_2 - y_1|$.

## 1.2. Σημεία και Διανύσματα

Είδατε οτι μπορείτε να αντιστοιχίσετε κάθε σημείο του συντεταγμένου επιπέδου με ενα διατεταγμένο ζεύγος $(x, y)$. Για παράδειγμα, μπορείτε να αντιστοιχίσετε το σημείο **R** στο Σχήμα 1.4 με το διατεταγμένο ζευγάρι $(2, -1)$. Μπορείτε επίσης να αντιστοιχίσετε μια **μετατόπιση**, ή **μετάθεση**, στο επίπεδο με το ίδιο διατεταγμένο ζευγάρι $(x, y)$. Για παράδειγμα, θεωρείστε οτι ενα σωματίδιο που κινείται απο το σημείο **S** του επιπέδου σε ενα άλλο σημείο, **T**, του επιπέδου κατα μήκος μιας ευθείας γραμμής.




***Σχήμα 1.4:***




***Σχήμα 1.5:***

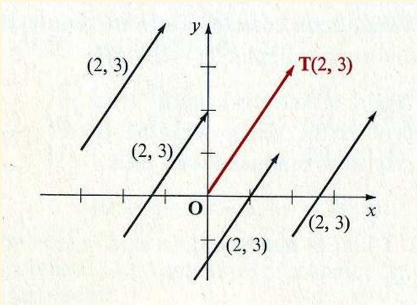
Εαν το σωματίδιο κινιέται 2 μονάδες στα δεξιά και 1 μονάδα προς τα κάτω, τότε αυτή η μετάθεση, ή μετατόπιση, μπορεί να περιγραφεί με το διατεταγμένο ζευγάρι $(-2, -1)$. Τέτοια μετάθεση απεικονίζεται στο Σχήμα 1.5.

Επειδή ενα διατεταγμένο ζευγάρι $(x, y)$ πραγματικών αριθμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δηλώσει μια μετάθεση στο επίπεδο, τέτοιο διατεταγμένο ζευγάρι θα αποκαλείται συχνά ενα **διάνυσμα**(απο την λέξη *διανύω*). Η γεωμετρική απεικόνιση του διανύσματος $(x, y)$ είναι ενα **βέλος**, ή **κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα**, στο επίπεδο· το βέλος λέγεται ενα **γεωμετρικό διάνυσμα**. Επειδή μια μετάθεση μπορεί να απεικονισθεί ετσι ώστε να εχει το **αρχικό σημείο** της σε οποιοδήποτε σημείο **S** του επιπέδου και το **τερ-**

Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πινακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 8 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

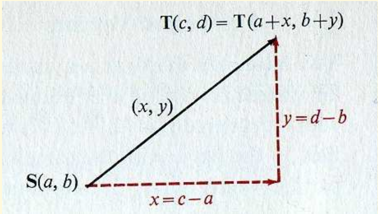
**ματικό σημείο** της σε ενα κατάλληλα συσχετιζόμενο σημείο **T**, κάθε διάνυσμα $(x, y)$ έχει άπειρες διαφορετικές γεωμετρικές παραστάσεις στο επίπεδο. Το συγκεκριμμένο βέλος που αντιστοιχεί στο $(x, y)$ που έχει *αρχικό σημείο στην αρχή των αξόνων* καλείται η **κανονική παράσταση** του $(x, y)$, και το βέλος $(x, y)$ λέγεται να βρίσκεται στην **κανονική θέση**. Είναι φανερό οτι η κανονική παράσταση του διανύσματος $(x, y)$ έχει ως τερματικό σημείο το σημείο **T** που αντιστοιχεί στο $(x, y)$. Το Σχήμα 1.6 δείχνει αρκετές γεωμετρικές παραστάσεις του $(2, 3)$· το χρωματισμένο βέλος είναι η κανονική παράστασή του.

***Σχήμα 1.6:***



Εαν ενα βέλος με αρχικό σημείο $\mathbf{S}(a, b)$ είναι η γεωμετρική παράσταση για το διάνυσμα $(x, y)$, όπως δείχνει το Σχήμα 1.7, τότε το τερματικό σημείο είναι το σημείο $\mathbf{T}(c, d)$ με τις συντεταγμένες του να ικανοποιούν

$$(c, d) = (a + x, b + y).$$




***Σχήμα 1.7:***

Αντίστροφα, εαν ενα βέλος με αρχικό σημείο $\mathbf{S}(a, b)$ έχει ως τερματικό το $\mathbf{T}(c, d)$, τότε το βέλος είναι η γεωμετρική παράσταση για το διάνυσμα $(x, y)$, όπου

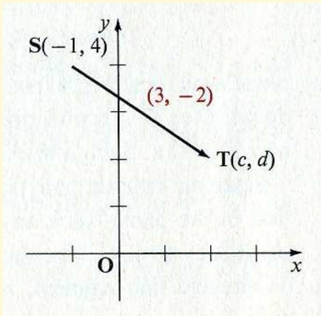
$$(x, y) = (c - a, d - b).$$

***Παράδειγμα 1.*** Ποιές είναι οι συντεταγμένες του τερματικού σημείου $\mathbf{T}$ του γεωμετρικού διανύσματος που αντιστοιχεί στο $(3, -2)$ που έχει αρχικό σημείο το $\mathbf{S}(-1, 4)$;

*Λύση:* Ένα σχεδιάγραμμα όπως αυτό που βλέπετε στα δεξιά σας βοηθάει να αναπαραστήσετε με μια εικόνα τα δεδομένα. Εαν το $(c, d)$ δηλώνει τις συντεταγμένες του τερματικού σημείου $\mathbf{T}$ του βέλους, τότε

$$\begin{aligned}(c, d) &= (-1 + 3, 4 + (-2)) \\ &= (2, 2).\end{aligned}$$

$\square$

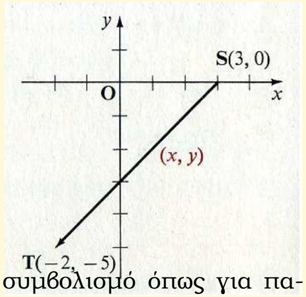




Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πινακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 10 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

***Παράδειγμα 2.*** Ποιό διάνυσμα αντιστοιχεί στο βέλος με αρχικό σημείο $\mathbf{S}(3,0)$ και τερματικό σημείο το $\mathbf{T}(-2,-5)$;

*Λύση:* Ξανά, ένα σχεδιάγραμμα είναι χρήσιμο. Εαν το $(x,y)$ δηλώνει το διάνυσμα με την δοθείσα γεωμετρική παράσταση, τότε




$$\begin{aligned}(x,y) &= (-2-3,-5-0)\\ &= (-5,-5).\end{aligned}$$

□

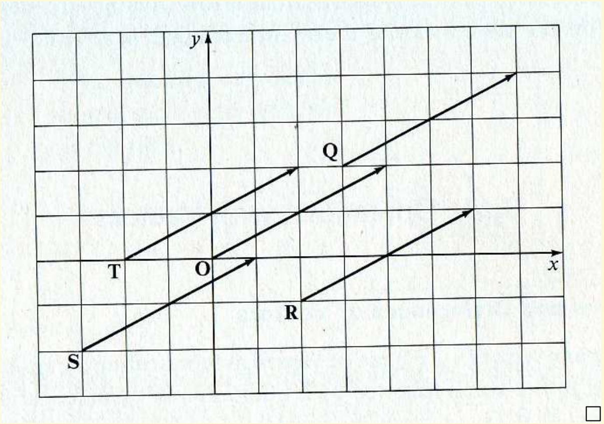
Σημειώστε οτι εδώ συνήθως χρησιμοποιούμε κατάλληλο συμβολισμό όπως για παράδειγμα $\mathbf{S}(x,y)$ για να δηλώσουμε ενα σημείο και τις συντεταγμένες του, και με $(x,y)$ για να δηλώσουμε ενα διάνυσμα ή την γεωμετρική παράστασή του. Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε παχειά γράμματα, όπως τα $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, και $\mathbf{t}$, για να δηλώσουμε διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$. Πλαγιαστά γράμματα, όπως τα $v, u$, και $t$, θα χρησιμοποιούνται γενικά για να αναπαραστήσουν πραγματικούς αριθμούς. Σε τούτο το βιβλίο, οι πραγματικοί αριθμοί θα αναφέρονται συχνά ως **αριθμοί**(μεγέθοι που μπορούν να τροποποιηθούν μόνο ως προς τη ποσότητά τους δηλ. να αυξηθούν ή να ελλατωθούν ή όπως αλλιώς λέμε, έχουν μόνο μια διάσταση). Στα χειρόγραφα, συχνά συμβολίζουμε ενα διάνυσμα με ενα γράμμα με ενα βελάκι πάνω του, όπως $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{t}}$, και $\vec{\mathbf{s}}$. Ένας άλλος τρόπος να δηλώσουμε ενα διάνυσμα είναι να θέσουμε μια παχειά γραμμή κάτω απο το γράμμα, όπως στα $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{t}}$, και $\underline{\mathbf{s}}$.

## Ασκήσεις 1.2

Στις Ασκήσεις 1–10, σχεδιάστε την παράσταση σε βέλος του δοθέντος διανύσματος με αρχικό σημείο (α) στην αρχή $\mathbf{O}(0,0)$· (β) το $\mathbf{Q}(3,2)$· (γ) το $\mathbf{R}(2,-1)$· (δ) το $\mathbf{S}(-3,-2)$· και (ε) $\mathbf{T}(-2,0)$.

***Παράδειγμα.*** $(4, 2)$

*Λύση:*




□

**2.** $(1, 1)$ **4.** $(4, -1)$ **6.** $(-2, 1)$ **8.** $(-6, -1)$ **10.** $(3, 0)$

**3.** $(3, 4)$ **5.** $(2, -2)$ **7.** $(-3, 4)$ **9.** $(-2, -4)$ **11.** $(0, -5)$

Στις Ασκήσεις 11–20, βρείτε τις συντεταγμένες του τερματικού σημείου της γεωμετρικής παράστασης του δοθέντος διανύσματος εαν το αρχικό σημείο είναι (α) $\mathbf{O}(0, 0)$· (β) $\mathbf{Q}(3, 2)$· (γ) $\mathbf{R}(4, -1)$· (δ) $\mathbf{S}(-3, 7)$· και (ε) $\mathbf{T}(-6, -5)$.

**12.** $(1,6)$

**13.** $(2,4$

**14.** $(-3,5)$

**15.** $(-4,1)$

**16.** $(7,-8)$

**17.** $(3,-4)$

**18.** $(-3,-4)$

**19.** $(-5,-9)$

**20.** $(-2,0)$

**21.** $(0,4)$

Στις Ασκήσεις 21–28, δίνονται οι συντεταγμένες δυο σημείων $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$. $\mathbf{S}$ είναι το αρχικό σημείο της γεωμετρικής παράστασης του διανύσματος $(x,y)$, και $\mathbf{T}$ είναι το τερματικό σημείο. Βρείτε το διάνυσμα.

**22.** $\mathbf{S}(1,2), \mathbf{T}(5,4)$

**23.** $\mathbf{S}(3,5), \mathbf{T}(6,8)$

**24.** $\mathbf{S}(2,-1), \mathbf{T}(-3,2)$

**25.** $\mathbf{S}(6,-4), \mathbf{T}(-1,5)$

**26.** $\mathbf{S}(7,12), \mathbf{T}(-8,3)$

**27.** $\mathbf{S}(4,-2), \mathbf{T}(-3,6)$

**28.** $\mathbf{S}(-6,-4), \mathbf{T}(0,-4)$

**29.** $\mathbf{S}(-5,-2), \mathbf{T}(-5,6)$

**30.** Βρείτε το διατεταγμένο ζευγάρι $(x,y)$ τέτοιο που το βέλος απο το $\mathbf{S}(x,y)$ στο $\mathbf{T}(7,3)$ παριστάνει το ίδιο διάνυσμα με το βέλος απο το $\mathbf{O}(0,0)$ στο $\mathbf{S}$.

**31.** Βρείτε το διατεταγμένο ζευγάρι $(x,y)$, τέτοιο που το βέλος απο το $\mathbf{S}(x,y)$ στο $\mathbf{T}(9,-3)$ παριστάνει το ίδιο διάνυσμα με το βέλος απο το $\mathbf{O}(0,0)$ στο $\mathbf{S}$.

**32.** Το βέλος απο το $\mathbf{R}(3,5)$ στο $\mathbf{S}(x,y)$ παριστάνει το ίδιο διάνυσμα με το βέλος απο το $\mathbf{S}(x,y)$ στο $\mathbf{T}(8,1)$. Βρείτε το $(x,y)$.

**33.** Το βέλος απο το $\mathbf{R}(-4,-7)$ στο $\mathbf{S}(x,y)$ παριστάνει το ίδιο διάνυσμα με το βέλος απο το $\mathbf{S}(x,y)$ στο $\mathbf{T}(4,11)$. Βρείτε το $(x,y)$.

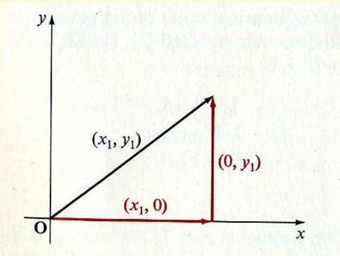
**34.** Βρείτε το διατεταγμένο ζευγάρι $(x,y)$, τέτοιο που το βέλος απο το $\mathbf{S}(x,y)$ στο $\mathbf{T}(6,-2)$ παριστάνει το ίδιο διάνυσμα με το βέλος απο το $\mathbf{Q}(4,-7)$ στο $\mathbf{R}(3,1)$.

**35.** Βρείτε το διατεταγμένο ζευγάρι $(x, y)$, τέτοιο που το βέλος απο το $\mathbf{S}(-1,-2)$ στο $\mathbf{T}(x, y)$ παριστάνει το ίδιο διάνυσμα με το βέλος απο το $\mathbf{Q}(2,4)$ στο $\mathbf{R}(8,-2)$.

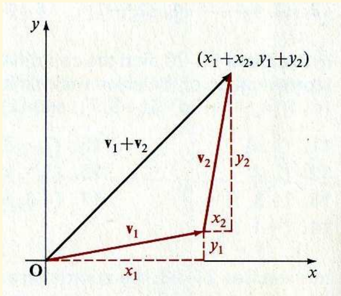
# Οι Βασικές Διανυσματικές Πράξεις

## 1.3. Αθροίσματα και Διαφορές Διανυσμάτων

Το γεγονός οτι οποιοδήποτε διάνυσμα $(x_1, y_1)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια μετατόπιση $x_1$ μονάδων παράλληλα με τον $x$–άξονα που ακολουθείται απο μια μετατόπιση $y_1$ μονάδων παράλληλα με τον $y$–άξονα, μας υποδεικνύει οτι το $(x_1, y_1)$ μπορεί να θεωρηθεί ως το “άθροισμα” των διανυσμάτων $(x_1, 0)$ και $(0, y_1)$. (Δείτε Σχήμα 1.8)




***Σχήμα 1.8:***




***Σχήμα 1.9:***

Γενικότερα (δείτε Σχήμα 1.9), μια μετατόπιση κατά μήκος οποιουδήποτε βέλους που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\mathbf{v_1} = (x_1, y_1)$ που ακολουθείται απο μια μετατόπιση απο το τερματικό σημείο αυτού του βέλους και κατά μήκος του διανύσματος $\mathbf{v_2} = (x_2, y_2)$ έχει αποτέλεσμα μια απλή μετατόπιση που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Αυτό το γεγονός μας οδηγεί να ορίσουμε το **άθροισμα** δυο διανυσμάτων ως εξής:

□ Εαν $\mathbf{v_1} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{v_2} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, τότε $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

***Παράδειγμα 1.*** Βρείτε $r$ και $s$ ώστε

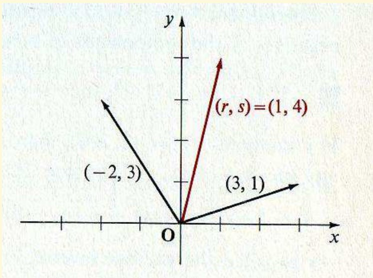
$$(r, s) = (3, 1) + (-2, 3),$$

και σχηματίστε την κανονική παράσταση για κάθε ενα απο τα διανύσματα $(r, s)$, $(3, 1)$, και $(-2, 3)$.

*Λύση:* Παίρνετε

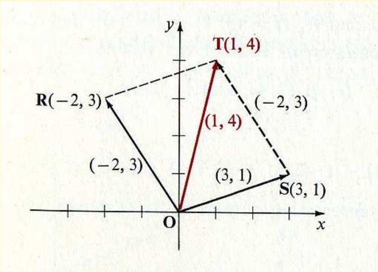
$$\begin{aligned}(r, s) &= (3, 1) + (-2, 3)\\ &= (3 + (-2), 1 + 3)\\ &= (1, 4).\end{aligned}$$

Την κανονική παράσταση κάθε διανύσματος την βλέπετε δεξιά. □

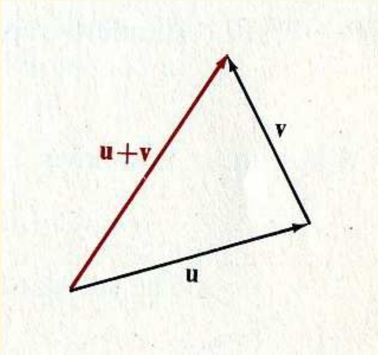



Έαν διακεκομμένες γραμμές χρησιμοποιηθούν στο παραπάνω διάγραμμα για να σχηματίσουν ενα πλήρες παραλληλόγραμμο που εχει τις (κανονικές) γεωμετρικές παραστάσεις των $(-2, 3)$ και $(3, 1)$ ως γειτονικές πλευρές, τότε η διαγώνιος του παραλληλογράμμου ειναι η (κανονική) γεωμετρική παράσταση του αθροίσματος $(1, 4)$, οπως φαίνεται στο Σχήμα 1.10. Γι' αυτό τον λόγο, η διανυσματική πρόσθεση μερικές φορές αναφέρεται ως η πρόσθεση με τον **κανόνα του παραλληλογράμμου**.

*Διανύσματα στο Επίπεδο*
*Το ιστορικό Ξεκίνημα*
*Ευθείες στο Επίπεδο*
*Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη*
*Εφαρμογές των Ευθειών*
*Απαντήσεις*
*Τριγωνομετρικοί Πινακες*
*Τμ. Μαθηματικών*
*Πρώτη Σελίδα*
◀◀ ▶▶
◀ ▶
*Σελίδα 15 από 218*
*Πίσω*
*Όλη η οθόνη*
*Κλείσε*
*Έξοδος*




***Σχήμα 1.10:***




***Σχήμα 1.11:***

Επίσης, όπως δείχνει το Σχήμα 1.10, υπάρχει μια παράσταση του (−2.3) ως βέλος με αρχικό σημείο στο $\mathbf{S}(3, 1)$ και τερματικό σημείο στο $\mathbf{T}(1, 4)$. Αυτό παριστάνει τον **κανόνα του τριγώνου** για την απεικόνιση του αθροίσματος δύο διάνυσμάτων: Εαν ενα βέλος που παριστά ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$ σχεδιάζεται οπότε να εχει αρχικό σημείο το τερματικό σημείο ενος βέλους που παριστά ένα διάνυσμα $\mathbf{u}$, τότε το βέλος που ενώνει το αρχικό σημείο του $\mathbf{u}$ με το τερματικό σημείο του $\mathbf{v}$ παριστά το διανυσματικό άθροισμα $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (Σχήμα 1.11).Επειδή για κάθε διάνυσμα $(x, y) \in \mathbb{R}$, έχετε

$$(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y)$$

και

$$(0, 0) + (x, y) = (0 + x, 0 + y) = (x, y),$$

το διάνυσμα (0,0), που καλείται το **μηδενικό διάνυσμα**, κατέχει το ρόλο του *ταυτοτικού στοιχείου* ως προς την πρόσθεση των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^2$. Το μηδενικό διάνυσμα συνήθως παριστάνεται με το σύμβολο $\mathbf{0}$· η γεωμετρική του παράσταση ειναι απλά σημείο.

Το σύμβολο $-\mathbf{v} = -(x, y)$ παριστάνει ενα διάνυσμα που οι συντεταγμένες του ειναι οι αρνητικές τιμές των συνταγμένο του $\mathbf{v} = (x, y)$. Δηλαδη:

□ Εαν $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, τότε $-\mathbf{v} = -(x, y) = (-x, -y)$.

Για παράδειγμα, εαν, $\mathbf{v} = (2, -4)$ τότε $-\mathbf{v}(-2, -(-4)) = (-2, 4)$. Επειδή για κάθε διάνυσμα, είναι αλήθεια οτι

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (x, y + (-x, -y) = (x + (-x), y + (-y)) = (0, 0) = \mathbf{0},$$

το $-\mathbf{v}$ καλείται **αντίστροφο ως προς την πρόθεση**, ή το **αρνητικό** του $\mathbf{v}$. Αυτο μας οδηγεί σε ενα φυσιολογικό ορισμό της **διαφοράς** δύο διανυσμάτων:

□ Εαν $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, τότε

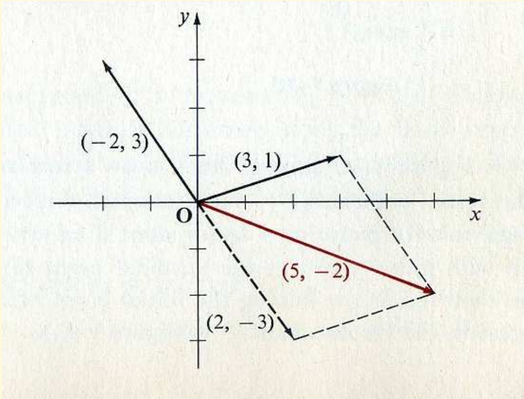
$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2) \\ &= (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) \\ &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2). \end{aligned}$$

***Παράδειγμα 2.*** Βρείτε τα $r$ και $s$ ετσι ώστε $(r, s) = (3, 1) - (-2, 3)$, και σχηματίστε την κανονική παράσταση για κάθε ένα απο τα διανύσματα $(r, s), (3, 1)$ και $(-2, 3)$.

*Λύση:* Έχετε,

$$(r, s) = (3, 1) - (-2, 3) = (3, 1) + (2, -3) = (5, -2).$$

Η κανονική παράσταση για κάθε διάνυσμα εμφανίζεται παρακάτω. □




Στο διάγραμμα του Παραδείγματος 2, παρατηρείστε ότι το $(2, -3)$, ο αντίθετος ως προς την πρόσθεση του $(-2, 3)$, εχει μια κανονική γεωμετρική παράσταση συγραμμική και του ιδίου μήκους με του $(-2, 3)$, αλλά στην αντίθετη κατεύθυνση. Παρατηρείστε επίσης οτι η κανονική γεωμετρική παράσταση της *διαφοράς* του $(3, 1)$ με το $(-2, 3)$ δηλαδή του $(5, -2)$, ειναι η κανονική γεωμετρική παράσταση του *αθροίσματος* των $(3, 1)$ καί $(2, -3)$.

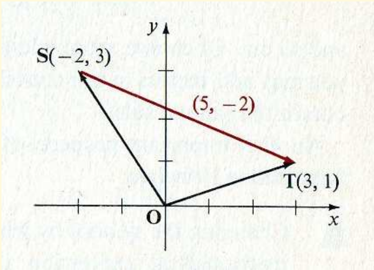
Γενικά, η κανονική γεωμετρική παράσταση του $-\mathbf{v}$ ειναι συγγραμμικη και του ιδίου μήκους με εκείνη του $\mathbf{v}$ αλλά με αντίθετη κατεύθυνση. Μια γεωμετρική παράσταση της διαφοράς $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ μπορεί λοιπον να επιτευχθεί εφαρμόζοντας το νόμο του παραλληλογράμμου ή του τριγώνου στο άθροισμα $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, όπως δείχνεται στο Σχήμα 1.13α′ παρακάτω.

Υπάρχει άλλος ενας βολικός τρόπος για να σχεδιάσουμε την διανυσματική διαφορά. Αν, για παράδειγμα, το διάνυσμα απο την διαφορά $(5, -2) = (3, 1)-(-2, 3)$ του Παραδείγματος 2 παριστάνεται με ενα βέλος με αρχικό σημείο $\mathbf{S}(-2, 3)$, τότε το τερματικό σημείο του $\mathbf{T}$, εχει συντεταγμένες

$$(-2,3)+(5,-2), \text{ ή } (3,1),$$

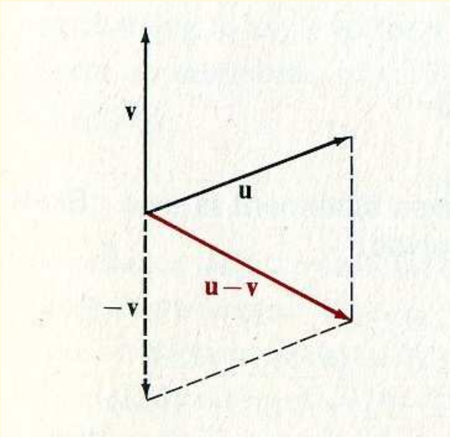
όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.12. Αυτό αποτελεί ενα παράδειγμα για το εξής γεγονός: Εαν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είμαι οποιαδήποτε διανύσματα του $\mathbb{R}^2$, τότε επειδή η διαφορά $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ ικανοποιεί

$$\mathbf{v}+(\mathbf{u}-\mathbf{v})=\mathbf{u},$$

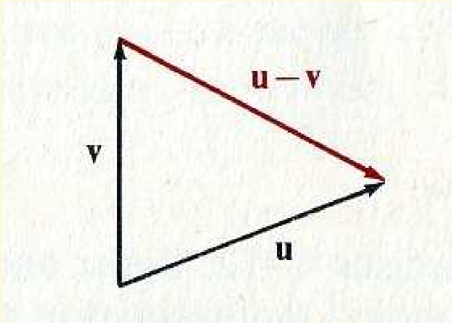



**Σχήμα 1.12:**

υπάρχουν παραστάσεις με βέλη για τα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, και $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ που σχηματίζουν ενα τρίγωνο στο επίπεδο, με βέλη που έχουν κατευθύνσεις όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.13β΄. Αυτό, με την σειρά του, μας εξηγεί τον λόγο γιατί συχνά η διαφορά $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ αναφέρεται ως το "διάνυσμα απο το $\mathbf{v}$ στο $\mathbf{u}$".




*(α΄)*




*(β΄)*

***Σχήμα 1.13:***

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τις βασικές ιδιότητες της διανυσματικής πρόσθεσης. Οι αποδείξεις αυτών των ιδιοτήτων αφήνονται ως ασκήσεις (σελ. 22).

***Ιδιότητες της Διανυσματικής Πρόσθεσης***

Εαν $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, και $\mathbf{s}$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^2$, τότε

| | |
|---|---|
| 1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$ | Κλειστότητα |
| 2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ | Αντιμεταθετικότητα |
| 3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{s}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{s})$ | Προσεταιριστικότητα |
| 4. $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ και $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$ | Ιδιότητα του ταυτοτικού στοιχείου |
| 5. $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$ και $(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$ | Ιδιότητα του αντίθετου στοιχείου |

Παρατηρείστε οτι αυτές οι ιδιότητες έχουν την ίδια τυπική μορφή με τις γνωστές ιδιότητες που έχει και η πρόσθεση πραγματικών αριθμών. Παρατηρείστε συγκεκριμμένα ότι, όπως η πρόσθεση στους πραγματικούς, η πρόσθεση των διανυσμάτων είναι βασικά μια διαδική πράξη· το άθροισμα τριών ή παραπάνω διανυσμάτων ορίζεται αναδρομικά απο τις

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{s} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{s},$$
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{s} + \mathbf{t} = (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{s}) + \mathbf{t},$$

κ.ο.κ. Φυσικά, επειδή η πρόσθεση είναι προσεταιριτική και αντιμεταθετική, μπορείτε να προστείθετε διανύσματα ανα ζεύγη, διαλέγοντας με όποιο τρόπο σας βολεύει τα ζευγάρια και την σειρά που αυτά θα προστεθούν· τελικά θα παίρνετε πάντοτε το ίδιο αποτέλεσμα.

Άλλη μια σπουδαία ιδιότητα των πραγματικών αριθμών αλλά και των διανυσμάτων είναι η γενική **Αρχή της Αντικατάστασης:**

- ☐ Αλλάζοντας το σύμβολο με το οποίο έχουμε ονομάσει μια μαθηματική οντότητα μέσα σε μια μαθηματική έκφραση δεν αλλάζει την ερμηνεία και την ισχύ της έκφρασης.

Σε σχέση με την διανυσματική πρόσθεση, αυτή η αρχή θα μπορούσε να διατυπωθεί και ως εξής:

$$\text{Εαν } \mathbf{u} = \mathbf{v} \text{ και } \mathbf{s} = \mathbf{t}, \text{ τότε } \mathbf{u} + \mathbf{s} = \mathbf{v} + \mathbf{t}.$$

## Ασκήσεις 1.3

Στις Ασκήσεις 1–12, βρείτε $r$ και $s$ οπότε η δοθείσα ισότητα να αληθεύει. Σχεδιάστε την κανονική παράσταση κάθε εμπλεκόμενου διανύσματος.

**2.** $(r, s) = (4, 1) + (2, -3)$

**3.** $(r, s) = (3, 4) + (-1, -5)$

**4.** $(r, s) + (3, -1) = (2, 5)$

**5.** $(r, s) + (6, -2) = (7, 3)$

**6.** $(5, -3) + (0, 0) = (r, s)$

**7.** $(2, -3) + (4, 6) = (r, s)$

**8.** $(r, s) = (7, -2) - (3, -5)$

**9.** $(r, s) = (6, 5) - (2, 3)$

**10.** $(7, -3) - (r, s) = (5, 1)$

**11.** $(-2, 4) - (r, s) = (3, -2)$

**12.** $(r, s) - (1, 0) = (5, 1)$

**13.** $(r, s) - (3, -2) = (4, 5)$

Στις Ασκήσεις 13–18, $\mathbf{s} = (-1, 4), \mathbf{t} = (3, 2)$, και $\mathbf{u} = (-4, -1)$. Βρείτε ενα διάνυσμα $\mathbf{v}$ για το οποίο η δοθείσα εξίσωση αληθεύει.

**14.** $\mathbf{s} - \mathbf{v} = \mathbf{t}$

**15.** $\mathbf{v} - \mathbf{s} = \mathbf{u}$

**16.** $\mathbf{t} + \mathbf{s} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$

**17.** $\mathbf{u} + \mathbf{t} = \mathbf{v} - \mathbf{s}$

**18.** $\mathbf{t} + \mathbf{s} = \mathbf{t} - \mathbf{v}$

**19.** $\mathbf{u} - \mathbf{s} = \mathbf{t} + \mathbf{v}$

Στις Ασκήσεις 19–29, εαν $\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$, και $\mathbf{t}$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^2$, αποδείξτε κάθε μια πρόταση.

***Παράδειγμα.*** $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

*Λύση:* Έστω $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ και $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$. Τότε

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Επειδή η πρόσθεση είναι κλειστή στο $\mathbb{R}$, $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$ και $y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$. Οπότε, $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$. □

**20.** $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

**21.** $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{s} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{s})$

**22.** $\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u}$

**23.** Εαν $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$.

**24.** $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

**25.** $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

**26.** $\mathbf{s} + \mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$

**27.** $-\mathbf{u} - \mathbf{v} = -(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

**28.** Εαν $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{t}$, τότε $\mathbf{u} = \mathbf{t} - \mathbf{v}$.

**29.** Εαν $\mathbf{a} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$, τότε $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (μοναδικότητα του ταυτοτικού στοιχείου ως προς την πράξη της πρόσθεσης).

**30.** Εαν $\mathbf{a} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{a} = -\mathbf{u}$ (μοναδικότητα του αντίστροφου στοιχείου ως προς την πράξη της πρόσθεσης).

## 1.4. Η Νόρμα και η Κατεύθυνση ενός Διανύσματος

Σε κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} = (x, y)$ του $\mathbb{R}^2$ αντιστοιχεί ένας μοναδικός αριθμός που καλείται η **νόρμα**, ή το **μέγεθος**, του $\mathbf{v}$. Η νόρμα συμβολίζεται με το συμβολο $||\mathbf{v}||$ και ορίζεται απο τον τύπο

□ $$||\mathbf{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Σε αναλογία με την συνήθη χρήση του συμβόλου της τετραγωνικής ρίζας $\sqrt{\ }$, *η νόρμα κάθε διανύσματος είναι μή αρνητική.*

Παρατηρείστε οτι, στην περίπτωση που $\mathbf{v} = \mathbf{0} = (0, 0)$, τότε $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{0} = 0$. Αντίστροφα, εαν $\|\mathbf{v}\| = 0$, τότε $\mathbf{v} = (0, 0) = \mathbf{0}$, επειδή $\sqrt{x^2 + y^2}$ είναι 0 αν και μόνο αν και τα $x$ και $y$ είναι συγχρόνως 0. Συνεπώς $\|\mathbf{v}\| = 0$ αν και μόνο αν το $\mathbf{v}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Γεωμετρικά, η νόρμα ενος διανύσματος μπορεί να παρασταθεί ως το μήκος οποιασδήποτε παράστασης του σε βέλος. Για παράδειγμα, εαν η παράσταση σε βέλος του $\mathbf{v} = (x, y)$ έχει αρχικό σημείο $\mathbf{A}(a, b)$, τότε το $\mathbf{v}$ έχει τερματικό σημείο $\mathbf{B}(a + x, b + y)$, και απο τον τύπο της απόστασης,

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt{[(a + x) - a]^2 + [(b + y) - b]^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\mathbf{v}\|.$$

***Παράδειγμα 1.*** Βρείτε τη νόρμα του $(3, -2)$.

*Λύση:* $\|(3, -2)\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$. □

Σε κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v}$ του $\mathbb{R}^2$ μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μια **κατεύθυνση** με τον εξής τρόπο:

□ Εαν $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, τότε η κατεύθυνση του $\mathbf{v}$ είναι το μέτρο της γωνίας $\vartheta$ για την οποία

$$\sin\vartheta = \frac{y}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{και} \quad \cos\vartheta = \frac{x}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{1}$$

και $0 \leq m^o(\vartheta) < 360$ εαν η $\vartheta$ μετριέται σε μοίρες, ή $0 \leq m^R(\vartheta) < 2\pi$ εαν η $\vartheta$ μετριέται σε ακτίνια.

Στο υπόλοιπο κεφάλαιο, οι γωνίες κατεύθυνσης θα μετριούνται σε μοίρες.

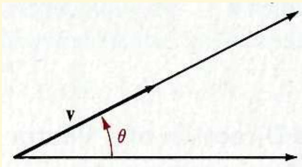
Απο τις εξισώσεις (1) προκύπτει άμμεσα οτι

$$\mathbf{v} = (x, y) = (\|\mathbf{v}\| \cos\vartheta, \|\mathbf{v}\| \sin\vartheta). \tag{2}$$

Οπότε βλέπετε οτι ενα διάνυσμα ορίζεται μοναδικά απο το μέγεθος του και την κατεύθυνση του.

Επειδή η κατεύθυνση του διανύσματος **v** ορίζεται απο το μέγεθος μιας γωνίας $\vartheta$, θα καλούμε την γωνία $\vartheta$ ως την **γωνία κατεύθυνσης** του **v**. Γεωμετρικά, η $\vartheta$ ορίζεται απο την παράσταση σε βέλος του **v** και την ακτίνα που έχει το ίδιο αρχικό σημείο με αυτό το βέλος και είναι παράλληλη με τον $x$-άξονα και κατεύθυνση του θετικού $x$-άξονα(Σχήμα 1.14).

***Σχήμα 1.14:***



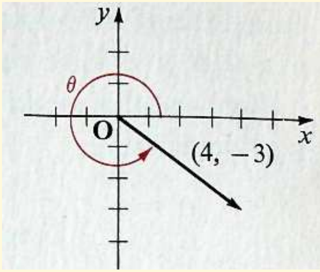

Την παράλληλη ακτίνα στο $x$-άξονα θεωρούμε οτι είναι η αρχική πλευρά της $\vartheta$. Η ακτίνα που περιέχει το βέλος **v**, και που έχει το ίδιο αρχικό σημείο με αυτό το βέλος, είναι η τερματική πλευρά της $\vartheta$.

***Παράδειγμα 2.*** Βρείτε την νόρμα και την κατεύθυνση του διανύσματος $(4, -3)$.

*Λύση:* Κατ΄ αρχήν παρατηρείστε οτι $\|(4,-3)\| = \sqrt{16+9} = 5$. Οπότε, απο τον ορισμό, η κατεύθυνση $m^\circ(\vartheta)$ του $(4,-3)$ ορίζεται απο

$$\sin\vartheta = \frac{-3}{5} = -0.6 \text{ και } \cos\vartheta = \frac{4}{5} = 0.8.$$

Παρατηρείστε απο το διπλανό σκίτσο ή απο το γεγονός οτι $\sin\vartheta < 0$ και $\cos\vartheta > 0$, οτι η τερματική πλευρά της $\vartheta$ βρίσκεται στο *IV* τεταρτημόριο. Οπότε η τιμή $m^\circ(\vartheta)$ της $\vartheta$ σε μοίρες είναι μεγαλύτερη των $270^\circ$. Με την βοήθεια κατάλληλου λογισμικού ή απο τον Πίνακα στη σελίδα 213, παίρνεται $m^\circ(\vartheta) = 323^\circ 10'$ περίπου. □




Εαν, για $x \neq 0$, προσέξουμε το πρόσημο του $x$ δηλ. εαν $x > 0$ ή $x < 0$, και του $y$ δηλ. εαν $y \geq 0$ ή $y < 0$, τότε η τριγωνομετρική ταυτότητα

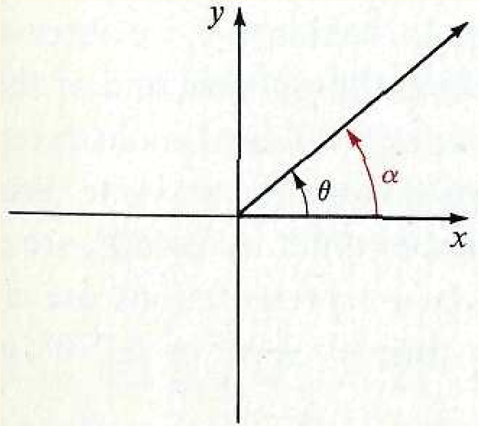
$$\tan\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{y}{x} \tag{3}$$

μας δίνει ενα διαφορετικό τρόπο υπολογισμού της κατεύθυνσης $m^\circ(\vartheta)$ του $\mathbf{v} = (x, y)$. Πράγματι· αν $y = 0$, τότε $m^\circ(\vartheta) = 0$ ή $m^\circ(\vartheta) = 180$ ανάλογα εαν $x > 0$ ή $x < 0$, αντίστοιχα. Αν $y \neq 0$, τότε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Εξίσωση 3 για να βρείτε μια **γωνία αναφοράς** $a$, με τιμή $0 < m^\circ(a) < 90$, για την οποία ισχύει

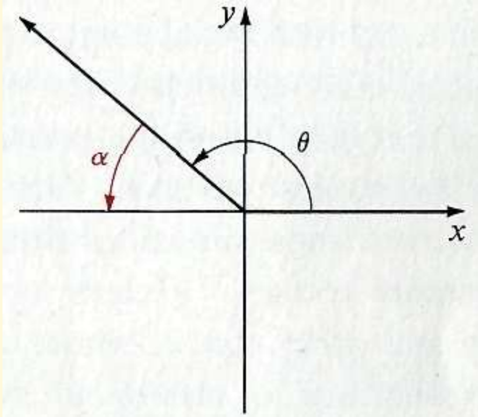
$$\tan a = |\frac{y}{x}|.$$

τότε παίρνοντας υπόψη τα τερτατημόρια (δείτε Σχήμα 1.15), έχετε

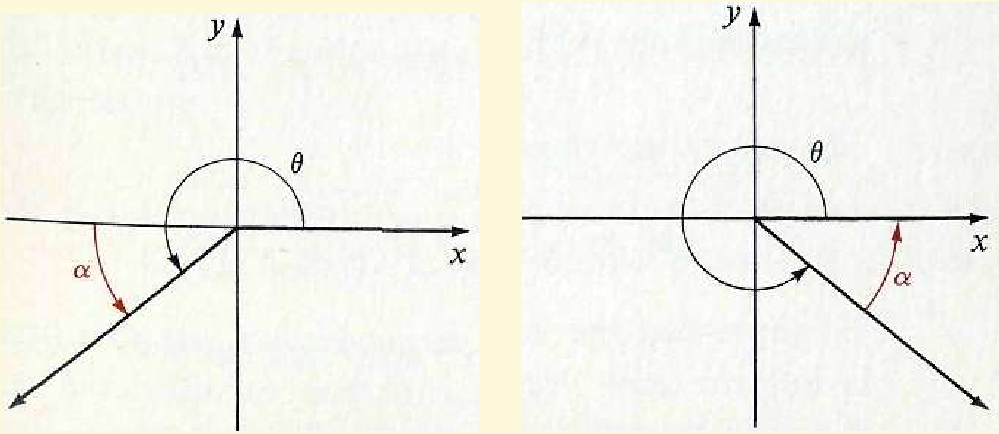
$$\begin{array}{lll} m^\circ(\vartheta) = m^\circ(a) & \text{εάν } x > 0, y > 0 & (\text{Τερτατημόριο I}), \\ m^\circ(\vartheta) = 180 - m^\circ(a) & \text{εάν } x < 0, y > 0 & (\text{Τερτατημόριο II}), \\ m^\circ(\vartheta) = 180 + m^\circ(a) & \text{εάν } x < 0, y < 0 & (\text{Τερτατημόριο III}), \\ m^\circ(\vartheta) = 360 - m^\circ(a) & \text{εάν } x > 0, y < 0 & (\text{Τερτατημόριο IV}). \end{array}$$




$m^\circ(\vartheta) = m^\circ(a)$




$m^\circ(\vartheta) = 180 - m^\circ(a)$




$m^\circ(\vartheta) = 180 + m^\circ(\alpha)$ $\qquad$ $m^\circ(\vartheta) = 360 - m^\circ(\alpha)$

***Σχήμα 1.15:***

Φυσικά, εάν $x = 0$ αλλά $y \neq 0$, τότε $m^\circ(\vartheta) = 90$ ή $m^\circ(\vartheta) = 270$ ανάλογα εαν $y > 0$ ή $y < 0$, αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας αυτή την μέθοδο για το διάνυσμα $(4, -3)$ στο Παράδειγμα 2 παραπάνω, για παράδειγμα, θα πάρετε

$$\tan\vartheta = \frac{-3}{4} \text{ και } \tan\alpha = |\frac{-3}{4}| = \frac{3}{4}.$$

Τότε, απο τον πίνακα στη σελίδα 213, έχετε $m^\circ(\alpha) \approx 323^\circ 50'$. Επειδή $x > 0$ και $y < 0$,

$$m^\circ(\vartheta) = 360 - m^\circ(\alpha) \approx 323^\circ 10'.$$

Σημειώστε οτι για το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$, οι Εξισώσεις 1 στη σελίδα 24 θα σας δώσουν

$$\sin\vartheta = \frac{0}{\|\mathbf{0}\|} = \frac{0}{0} \text{ και } \cos\vartheta = \frac{0}{\|\mathbf{0}\|} = \frac{0}{0}.$$

Επειδή αυτές οι εκφράσεις δεν έχουν κάποιο νόημα, η κατεύθυνση του $\mathbf{0}$ δεν ορίζεται. Ομως, σε κάποιες περιπτώσεις, είναι χρήσιμο να σκεφτόμαστε ότι το μηδενικό διάνυσμα μορεί να έχει μια συγκεκριμμένη κατεύθυνση (δείτε Παράδειγμα 3 παρακάτω). Οπότε, θα συμφωνήσουμε οτι μπορούμε να δωσουμε οποιαδήποτε κατεύθυνση επιθυμούμε στο μηδενικό διάνυσμα. Αυτή η συμφωνία φάινεται γεωμετρικά αποδεκτή εαν σκεφτείται οτι η κανονική παράσταση του μηδενικού διανύσματος (η αρχή των αξόνων) βρίσκεται πάνω σε *κάθε* ακτίνα που έχει ως αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων.

Εαν δυο διανύσματα έχουν την ίδια κατεύθυνση, τότε οι κανονικές παραστάσεις τους βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα με αρχικό σημείο στην αρχή των αξόνων. Στην Ενότητα 1.3, παρατηρήσαμε οτι η κανονική παράσταση του $-\mathbf{v}$ είναι συγραμμική και του ιδίου μήκους με εκείνης του $\mathbf{v}$, αλλά με *αντίθετη* κατεύθυνση· αυτό θα το δούμε πιο αυστηρά στο Παράδειγμα 4 παρακάτω. Διανύσματα που εχουν ίδιες ή αντίθετες κατευθύνσεις, δηλαδή διανύσματα που οι κατευθύνσεις τους είναι ίσες ή διαφέρουν κατά $\pm 180°$, λέγονται **παράλληλα διανύσματα**. Διανύσματα που οι κανονικές τους παραστάσεις είναι κάθετες μεταξύ τους, δηλαδή, που οι κατευθύνσεις τους διαφέρουν κατά $\pm 90°$ ή $\pm 270°$, λέγονται οτι είναι **κάθετα** ή **ορθογώνια, διανύσματα**.

***Παράδειγμα 3.*** Αποδείξτε οτι τα διανύσματα $\mathbf{v} = (a, b)$, και $\mathbf{u} = (-b, a)$ έχουν ίσες νόρμες και είναι κάθετα διανύσματα.

*Λύση:* Οι νόρμες είναι ίσες, επειδή

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-b)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \|\mathbf{v}\|.$$

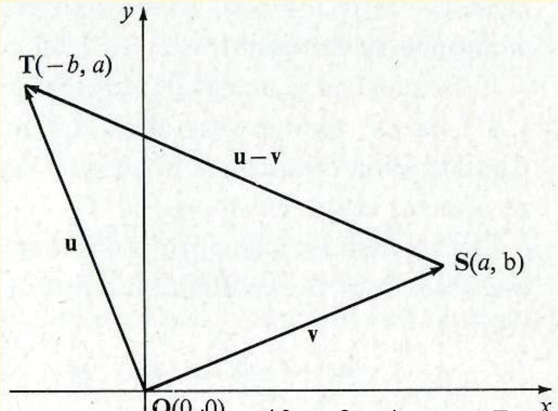
Για να δείξουμε οτι τα διανύσματα είναι κάθετα, ας υποθέσουμε κατ' αρχήν ότι το $\mathbf{v}$ δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα. Τότε μπορείται να αποδείξετε το ζητούμενο, δείχνοντας οτι τα σημεία $\mathbf{O}(0,0), \mathbf{S}(a,b)$, και $\mathbf{T}(-b,a)$ είναι οι κορυφές ενός ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα την $\overline{\mathbf{ST}}$ (δείτε το διάγραμμα παρακάτω). Εχετε,

$$\begin{aligned}
[d(\mathbf{S},\mathbf{T})]^2 &= (-b-a)^2 + (a-b)^2 \\
&= (-b)^2 + 2ab + a^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\
&= [(-b)^2 + a^2] + [a^2 + b^2] \\
&= [d(\mathbf{O},\mathbf{T})]^2 + [d(\mathbf{O},\mathbf{S})]^2,
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Οπότε, απο το αντίστροφο του Πυθαγόριου Θεωρήματος, η $\angle\mathbf{TOS}$ είναι




ορθή γωνία και τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι κάθετα διανύσματα. Εαν το $\mathbf{v}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι κάθετα διανύσματα, αφού, λόγω της συμφωνίας, το μηδενικό διάνυσμα μπορεί να πάρει οποιαδήποτε κατεύθυνση. Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Εαν $\mathbf{v} = (a, b)$ και $\mathbf{u} = (-b, a)$, τότε η μελέτη των πιθανών προσήμων των $a$ και $b$ δείχνει οτι(δείτε Ασκηση 39, σελίδα 34) εαν η κανονική παράσταση του $\mathbf{v}$ βρίσκεται στο Τεταρτημόριο I, II, III, ή IV, τότε η κανονική παράσταση του $\mathbf{u}$ βρίσκεται στο Τεταρτημόριο II, III, IV, ή I, αντίστοιχα. Δηλαδή, η κανονική παράσταση του $\mathbf{u}$ είναι ενα τεταρτημόριο μπροστά απο την κανονική παράσταση του $\mathbf{v}$, με στροφή δεξιόστροφη.

***Παράδειγμα 4.*** Αποδείξτε οτι τα διανύσματα $\mathbf{v}(a, b)$ και $\mathbf{w} = (-a, -b)$ έχουν ίσες νόρμες και είναι παράλληλα διανύσματα με αντίθετες κατευθύνσεις.

*Λύση:* Σημειώστε πρώτα οτι

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \|\mathbf{v}\|.$$

τότε παρατηρείστε οτι εαν $\vartheta_{\mathbf{v}}$ και $\vartheta_{\mathbf{w}}$ είναι γωνίες κατευθυνσης των $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$, αντίστοιχα, και εαν $a \neq 0$, τότε

$$\tan\vartheta_{\mathbf{v}} = \frac{b}{a} \text{ και } \tan\vartheta_{\mathbf{w}} = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}.$$

Οπότε η μέθοδος που συζητήθηκε στη σελίδα 26 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε τις κατευθύνσεις των $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$. Για παράδειγμα, υποθέστε οτι η κανονική παράσταση του $\mathbf{v}$ βρίσκεται στο Τεταρτημόριο II. Τότε $a < 0$ και $b > 0$. Οπότε, $-a > 0$ και $-b < 0$, και η κανονική παράσταση του $\mathbf{w}$ βρίσκεται στο Τεταρτημόριο IV. Επειδή $\tan\vartheta_{\mathbf{v}} = \tan\vartheta_{\mathbf{w}}$, οι $\vartheta_{\mathbf{v}}$ και $\vartheta_{\mathbf{w}}$ έχουν την ίδια γωνία αναφοράς $\alpha$. Οπότε παιρνετε, $m^\circ(\vartheta_{\mathbf{v}}) = 180 - m^\circ(\alpha)$ και $m^\circ(\vartheta_{\mathbf{w}}) = 360 - m^\circ(\alpha)$, οπότε $m^\circ(\vartheta_{\mathbf{w}}) - m^\circ(\vartheta_{\mathbf{v}}) = 180$. Οπότε τα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι παράλληλα διανύσματα με αντίθετες κατευθύνσεις.

Εαν η κανονική γεωμετρική παράσταση του $\mathbf{v}$ βρίσκεται στα Τεταρτημόρια I, III ή IV, η απόδειξη είναι η όμοια και αφήνεται σε σας. Η μελέτη των περιπτώσεων στις οποίες το $\mathbf{v}$ βρίσκεται πάνω σε κάποιο άξονα ή εαν το $\mathbf{v}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα επίσης αφήνεται σε σας.

(Μια ενδιαφέρουσα διαφορετική απόδειξη οτι τα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$έχουν αντίθετες κατευθύνσεις χρησιμοποιεί το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 3 και το γεγονός οτι τα διανύσματα

$$\mathbf{v} = (a, b) \text{ και } \mathbf{u} = (-b, a),$$

συσχετίζονται μεταξύ τους όπως τα διανύσματα

$$\mathbf{v} = (a, b) \text{ και } \mathbf{u} = (-b, a),$$

με το $-b$ και $a$ στη θέση των $a$ και $b$, αντίστοιχα. Οπότε, εαν $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, τότε το $\mathbf{u}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{v}$ και ένα τεταρτημόριο μπροστά απο το $\mathbf{v}$, και το $\mathbf{w}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{u}$ και ένα τεταρτημόριο μπροστά απο το $\mathbf{u}$.) □

## Ασκήσεις 1.4

Στις Ασκήσεις 1-16, βρείτε την νόρμα και τη κατεύθυνση του δεδομένου διανύσματος . Χρησιμοποιήστε τον Πίνακα, σελίδα 213, για να προσεγγίσετε μέτρα γωνιών με ακρίβεια δέκα λεπτών της μοίρας.

**2.** $(3, 3)$
**3.** $(-5, -5)$
**4.** $(\sqrt{3}, 1)$
**5.** $(-1, \sqrt{3})$
**6.** $(-3, 4)$
**7.** $(5, -12)$
**8.** $(-2, 0)$
**9.** $(0, -4)$
**10.** $(-6, -8)$
**11.** $(12, -5)$
**12.** $(3, 2) + (0, -6)$
**13.** $(-2, 4) + (-3, 8)$
**14.** $(6, 5) + (-2, -3)$
**15.** $(-3, 4) + (6, -1)$
**16.** $(5, 1) - (2, -2)$
**17.** $(7, -3) - (-5, 2)$

Στις Ασκήσεις 17–24, προσσεγίστε κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$\mathbf{v} = (x, y) = (\|\mathbf{v}\| \cos\vartheta, \|\mathbf{v}\| \sin\vartheta).$$

Χρησιμοποιήστε τον Πίνακα, σελίδα 213, για να βρείτε τις τιμές των $\cos\vartheta$ και $\sin\vartheta$ με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

**18.** $\|\mathbf{v}\| = 5; m^\circ(\vartheta) = 30$

**19.** $\|\mathbf{v}\| = 3; m^\circ(\vartheta) = 45$

**20.** $\|\mathbf{v}\| = 6; m^\circ(\vartheta) = 90$

**21.** $\|\mathbf{v}\| = 10; m^\circ(\vartheta) = 120$

**22.** $\|\mathbf{v}\| = 2; m^\circ(\vartheta) = 300$

**23.** $\|\mathbf{v}\| = 4; m^\circ(\vartheta) = 285$

**24.** $\|\mathbf{v}\| = 7; m^\circ(\vartheta) = 210$

**25.** $\|\mathbf{v}\| = 8; m^\circ(\vartheta) = 180$

Στις Ασκήσεις 25-30, βρείτε την τιμή του $x$ ή του $y$ έτσι ώστε το πρώτο διάνυσμα να είναι (α) παράλληλο και (β) κάθετο προς το δεύτερο διάνυσμα.

***Παράδειγμα.*** $(x, 3), (2, 5)$

*Λύση:* (**α**) Έστω $\alpha$ είναι η γωνία κατεύθυνσης για το $(x, 3)$ και $\vartheta$ είναι η γωνία κατεύθυνσης για το $(2, 5)$. Οπότε

$$\tan\alpha = \frac{3}{x} \text{ και } \tan\vartheta = \frac{5}{2}.$$

Αν οι εφαπτόμενες γωνίες κατεύθυνσης δύο διανυσμάτων είναι ίσες, τότε τα διανύσματα έχουν την ίδια ή την αντίθετη κατεύθυνση και, ως εκ τούτου, είναι παράλληλα. Έτσι τα $(x, 3)$ και $(2, 5)$ είναι παράλληλα αν

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{2}, \text{ ή } x = \frac{6}{5}.$$

(**β**) Από το Παράδειγμα 3, σελίδα 29, γνωρίζετε ότι το $(-5, 2)$ είναι κάθετο στο $(2, 5)$. Έτσι τα $(x, 3)$ και $(2, 5)$ είναι κάθετα αν τα $(x, 3)$ και $(-5, 2)$ είναι παράλληλα, δηλαδή, άν

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{-5}, \text{ ή } x = -\frac{15}{2}.$$

$\square$

**26.** $(x, 4), (6, 8)$

**27.** $(x, 5), (2, 9)$

**28.** $(3, y), (-2, 3)$

**29.** $(5, y), (7, -1)$

**30.** $(x, -2), (-3, 5)$

**31.** $(-3, y), (4, -1)$

Στις Ασκήσεις 31-36, βρείτε τα ζητούμενα διανύσματα, δίνοντας απαντήσεις που περιέχουν ριζικά. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις Εξισώσεις (1) και (2), σελίδα 24.)

**32.** Το διάνυσμα $(x, y)$ με νόρμα 5 που έχει την ίδια κατεύθυνση όπως το $(3, 7)$.

**33.** Το διάνυσμα $(x, y)$ με νόρμα 2 που έχει την ίδια κατεύθυνση όπως το $(2, -3)$.

**34.** Ένα διάνυσμα $(x, y)$ με νόρμα 3 που είναι κάθετο στο $(5, 2)$.

**35.** Ενα διάνυσμα $(x, y)$ με νόρμα 6 που είναι κάθετο προς το $(-3, 4)$.

**36.** Το διάνυσμα $(x, y)$ με νόρμα ίση με εκείνη του $(4, -3)$ και την ίδια κατεύθυνση με εκείνη του $(1, \sqrt{3})$.

**37.** Το διάνυσμα $(x, y)$ με νόρμα ίση με εκείνη του $(-5, 12)$ και την ίδια κατεύθυνση με εκείνη του $(-2, 2)$.

***38.** Αποδείξτε ότι για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| < \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

***39.** Αποδείξτε ότι για όλα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

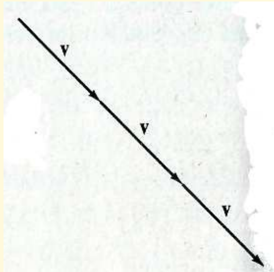
***40.** Αποδείξτε ότι αν τα $x$ και $y$ είναι και τα δυο διαφορετικά από το 0, και το $(x, y)$ βρίσκεται στο Τερτατημόριο I, II, III, ή IV, τότε το $(-y, x)$ βρίσκεται στο Τερτατημόριο II, III,IV, ή I, αντίστοιχα.

***41.** Αποδείξτε ότι αν τα $x$ και $y$ είναι και τα δυο διαφορετικά από το 0, και το $(x, y)$ βρίσκεται στο Τερτατημόριο I, II, III, ή IV, τότε το $(y, -x)$ βρίσκεται στο Τερτατημόριο IV, I, II, ή III , αντίστοιχα.

# 1.5. Γινόμενο ενός Αριθμού με ένα Διάνυσμα

Εαν $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{v}+\mathbf{v}+\mathbf{v} &= (\mathbf{v}+\mathbf{v})+\mathbf{v} \\ &= (x+x, y+y)+(x, y) \\ &= (x+x+x, y+y+y) \\ &= (3x, 3y). \end{aligned}$$




***Σχήμα 1.16:***

Κατ' αναλογία με τους πραγματικούς αριθμούς, το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι το $3\mathbf{v}$ μπορεί να οριστεί από το

$$3\mathbf{v} = 3(x, y) = (3x, 3y).$$

Η γεωμετρική παράσταση του διανύσματος $\mathbf{v}+\mathbf{v}+\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$ παρουσιάζεται στον Σχήμα 1.16. Γενικά, ας συμφωνήσουμε ότι:

☐ Αν $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ και αν $r \in \mathbb{R}$, τότε

$$r\mathbf{v} = r(x, y) = (rx, ry).$$

Το διάνυσμα $r\mathbf{v}$ ονομάζεται **αριθμητικό πολλαπλάσιο** του $\mathbf{v}$. Παρατηρήστε ότι το *γινόμενο ενος αριθμού με ένα διάνυσμα είναι διάνυσμα.* Αν $\mathbf{v} = (x, y)$, τότε η νόρμα του διανύσματος $r\mathbf{v}$ είναι

$$\|r(x, y)\| = \|(rx, ry)\| = \sqrt{r^2x^2 + r^2y^2} = \sqrt{r^2(x^2 + y^2)} = |r|\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Έτσι:

□ $$\|r\mathbf{v}\| = |r|\|\mathbf{v}\|.$$

Η κατεύθυνση του διανύσματος $r\mathbf{v}$ είναι είτε η ίδια είτε η αντίθετη από εκείνη του $\mathbf{v}$. Δηλαδή,

τα διανύσματα $\mathbf{v}$ και $r\mathbf{v}$ είναι παράλληλα.

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι η $\vartheta$ είναι η γωνία κατεύθυνσης του $\mathbf{v} = (x, y)$ και $\alpha$ είναι η γωνία κατεύθυνσης του $r\mathbf{v} = (rx, ry)$. Τότε, αν $r \neq 0$ και $x \neq 0$, έχετε $\tan\vartheta = \frac{y}{x}$ και

$$\tan\alpha = \frac{ry}{rx} = \frac{y}{x}.$$

Επειδή $\tan\vartheta = \tan\alpha$, τα $\mathbf{v}$ και $r\mathbf{v}$ είναι παράλληλα.

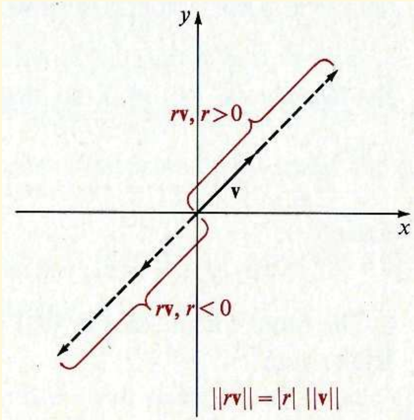
Αν $r \neq 0$ και $y \neq 0$, αλλά $x = 0$, τότε $rx = 0$ και $ry \neq 0$. Οπότε $m^\circ(\vartheta) = 90$ ή $270$ και $m^\circ(\alpha) = 90$ ή $270$. Πάλι, $\mathbf{v}$ και $r\mathbf{v}$ είναι παράλληλα.

Τέλος, εάν είτε $r = 0$ είτε $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, τότε $r\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Επειδή έχουμε συμφωνήσει να δώσουμε οποιαδήποτε κατεύθυνση στο $\mathbf{0}$, μπορούμε να θεωρήσουμε οτι το $r\mathbf{v}$ είναι παράλληλο προς το $\mathbf{v}$ και στις δύο περιπτώσεις.

Μάλιστα, εξετάζοντας τα πρόσημα, μπορεί να αποδειχθεί ότι εάν $r > 0$, τότε το $r\mathbf{v}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{v}$, και αν $r < 0$, τότε $r\mathbf{v}$ έχει την αντίθετη κατεύθυνση. Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.17. Έχετε δει ότι για κάθε $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ και κάθε $r \in \mathbb{R}$, τα διανύσματα $\mathbf{v}$ και $r\mathbf{v}$ είναι παράλληλα. Αν $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, τότε το αντίστροφο αποτέλεσμα επίσης ισχύει, όπως δείχνει το Παράδειγμα 1 που ακολουθεί. Οπότε:

□ Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, και, τότε τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι παράλληλα, αν και μόνο αν υπάρχει ένας αριθμός $r$ για τον οποίο $\mathbf{u} = r\mathbf{v}$.

**Σχήμα 1.17:**




***Παράδειγμα 1.*** Αποδείξτε ότι, αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι παράλληλα διανύσματα και $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, τότε υπάρχει ένας αριθμός $r$ για τον οποίο $\mathbf{u} = r\mathbf{v}$.

*Λύση:* Εάν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{u} = 0\mathbf{v}$ και $r = 0$. Διαφορετικά, έστω $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ και $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, και έστω $\vartheta_\mathbf{u}$ και $\vartheta_\mathbf{v}$ είναι οι γωνίες κατεύθυνσεις των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, αντιστοίχως. Τότε, έχετε

$$\sin\vartheta_\mathbf{u} = \frac{y_1}{||\mathbf{u}||}, \quad \cos\vartheta_\mathbf{u} = \frac{x_1}{\mathbf{u}},$$

και

$$\sin\vartheta_\mathbf{v} = \frac{y_2}{||\mathbf{v}||}, \quad \cos\vartheta_\mathbf{v} = \frac{x_2}{\mathbf{v}},$$

Επειδή, από την υπόθεση, τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ και είναι παράλληλα, είτε

$$m^\circ(\vartheta_\mathbf{u}) = m^\circ(\vartheta_\mathbf{v}) \text{ ή } m^\circ(\vartheta_\mathbf{u}) = m^\circ(\vartheta_\mathbf{v}) \pm 180.$$

Αν $m^\circ(\vartheta_{\mathbf{u}}) = m^\circ(\vartheta_{\mathbf{v}}) \pm 180$, για παράδειγμα, τότε προκύπτει ότι

$$\frac{y_1}{||\mathbf{u}||} = \frac{-y_2}{||\mathbf{v}||} \text{ και } \frac{x_1}{||\mathbf{u}||} = \frac{-x_2}{||\mathbf{v}||}.$$

Αυτές οι εξισώσεις οδηγούν, αντίστοιχα, στις

$$y_1 = -\frac{||\mathbf{u}||}{||\mathbf{v}||} y_2 \text{ και } x_1 = -\frac{||\mathbf{u}||}{||\mathbf{v}||} x_2.$$

Απο την υπόθεση, $||\mathbf{v}|| \neq 0$, οπότε ο $-\frac{||\mathbf{u}||}{||\mathbf{v}||}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός $r$. Οπότε,

$$y_1 = ry_2 \text{ και } x_1 = rx_2,$$

και

$$(x_1, y_1) = r(x_2, y_2), \text{ ή διαφορετικά } \mathbf{u} = r\mathbf{v},$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Η απόδειξη για την περίπτωση $m^\circ(\vartheta_{\mathbf{u}}) = m^\circ(\vartheta_{\mathbf{v}})$ είναι παρόμοια και αφήνεται σε εσάς. □

Με τη χρήση των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών (σελίδα ), μαζί με τους ορισμούς στο κεφάλαιο αυτό, μπορείτε να αποδείξετε ότι τα γινόμενα των αριθμών με διανύσματα ακολουθούν τους παρακάτω νόμους:

### ***Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού ενός Διανύσματος με ένα Αριθμό***

Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ δυο διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$ και $r$ και $s$ είναι αριθμοί, τότε

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $r\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ | Κλειστότητα |
| 2. | $(rs)\mathbf{u} = r(s\mathbf{u})$ | Προσεταιριστικότητα |
| 3. | $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ | Πολλαπλασιαστική ταυτότητα |
| 4. | $r\mathbf{u} = \mathbf{0}$ αν και μόνο αν $r = 0$ ή $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. | Γινόμενο με το μηδέν |
| 5. | $-1\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ | Αντίθετο ως προς την πρόσθεση |
| 6. | $r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v}$ και $(r + s)\mathbf{u} = r\mathbf{u} + s\mathbf{u}$ | Επιμεριστικότητα |
| 7. | $\|r\mathbf{v}\| = |r|\|\mathbf{v}\|$ | Ιδιότητα της νόρμας ως προς τα πολλαπλάσια με αριθμό |

Το πρώτο μέρος της ιδιοτητας 6, αποδεικνύεται στο Παράδειγμα 2 παρακάτω. Η ιδιότητα 7 αποδείχθηκε στην αρχή της ενότητας. Οι αποδείξεις για τις άλλες ιδιότητες αφήνονται ως ασκήσεις (Ασκήσεις 35-41, σελίδα 44).

***Παράδειγμα 2.*** Αποδείξτε ότι αν $r \in \mathbb{R}, \mathbf{v} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, και $\mathbf{t} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, τότε

$$r(\mathbf{v} + \mathbf{t}) = r\mathbf{v} + r\mathbf{t}.$$

*Λύση:* Έχετε

$$r(\mathbf{v} + \mathbf{t}) = r[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = r(x_1 + x_2, y_1 + y - 2).$$

Από τον ορισμό του αριθμητικού πολλαπλάσιου,

$$r(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (r(x_1 + x_2), r(y_1 + y_2)).$$

Με το επιμεριστικό νόμο στους πραγματικούς αριθμούς,

$$(r(x_1 + x_2), r(y_1 + y_2)) = (rx_1 + rx_2, ry_1 + ry_2).$$

Από τον ορισμό του αθροίσματος των δύο διανυσμάτων,

$$(rx_1 + rx_2, ry_1 + ry_2) = (rx_1, ry_1) + (rx_2, ry_2).$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του γινομένου ενός διανύσματος με ενα αριθμό ξανά, έχετε

$$(rx_1, ry_1) + (rx_2, ry_2) = r(x_1, y_1) + r(x_2, y_2) = r\mathbf{v} + r\mathbf{t},$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Ένα διάνυσμα του οποίου η νόρμα είναι ίση με 1 καλείται **διανυσματική μονάδα**. Για παράδειγμα, το $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ είναι μια διανυσματική μονάδα διότι

$$\|(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})\| = \sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1.$$

Μπορείτε να αναπαραστήσετε κάθε διάνυσμα $(x, y)$ με τη μορφή ενός γινομένου ενος αριθμού και μιας διανυσματικής μονάδας με την ίδια κατεύθυνση όπως $(x, y)$. Για το μηδενικό διάνυσμα αυτό είναι τετριμμένο, φυσικά, επειδή για κάθε διανυσματική μονάδα $\mathbf{u}, 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Για ενα μη μηδενικό διάνυσμα $(x, y)$, κατάρχήν παρατηρείστε ότι

$$\sqrt{x^2 + y^2}(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}) = (x, y). \tag{1}$$

Η νόρμα του $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ δίνεται από το

$$\left\|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right\| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = 1.$$

Επειδή το $(x, y)$ είναι ένα αριθμητικό πολλαπλάσιο του $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$, και η ρίζα $\sqrt{x^2 + y^2}$ είναι θετική, το $(x, y)$ έχει την ίδια κατεύθυνση με το $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$. Έτσι το

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

) είναι μια διανυσματική μονάδα με την ίδια κατεύθυνση όπως το $(x, y)$, και το επιθυμητό γινόμενο εμφανίζεται στο αριστερό μέλος της Εξίσωσης 1. Μια συντομότερη εκδοχή της εξίσωσης δίνεται απο το τύπο

$$\|\mathbf{v}\|\left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) = \mathbf{v}. \tag{2}$$

***Παράδειγμα 3.*** Βρείτε τη διανυσματική μονάδα με την ίδια κατεύθυνση όπως το $(-4, 1)$.

*Λύση:* Έχετε

$$\|(-4, 1)\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}.$$

Έτσι, η διανυσματική μονάδα με την ίδια κατεύθυνση όπως το $(-4, 1)$ είναι η $(\frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}})$. □

Επειδή οι συντεταγμένες του $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ είναι απλά $cos\vartheta$ και $\sin\vartheta$ αντίστοιχα, όπου $\vartheta$ είναι η γωνία κατεύθυνσης του $(x, y)$, η Εξίσωση (1), σελίδα 40, μπορεί επίσης να γραφτεί ως

$$\|\mathbf{v}\|(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = \mathbf{v}. \tag{3}$$

Αυτή είναι η μορφή σε γινόμενο της Εξίσωσης 2, σελίδα 41, δίνοντας το $\mathbf{v}$ ως συνάρτηση της νόρμας του και της γωνίας κατεύθυνσης του.

***Παράδειγμα 4.*** Εκφράστε το διάνυσμα $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ως συνάρτηση της νόρμας του και της γωνίας κατεύθυνσης του $\vartheta$.

*Λύση:* Έχετε

$$\|(\sqrt{2}, \sqrt{2})\| = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2.$$

Στη συνέχεια, παίρνετε

$$\cos\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

από τις οποίες έχετε $m^\circ(\vartheta) = 45$. Οπότε, από την Εξίσωση 3,

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2(\cos 45^\circ, \sin 45^\circ).$$

$\square$

## Ασκήσεις 1.5

Στις Ασκήσεις 1–8, θέτουμε $r = 3, s = -2, \mathbf{u} = (1,3), \mathbf{v} = (-2,5), \mathbf{m} = (-1,-3)$, και $\mathbf{n} = (0,-1)$. Εκφράστε κάθε ένα από τα ακόλουθα είτε ως διατεταγμένο ζεύγος είτε με την μορφή ενος κατάλληλου αριθμού.

**1.** $r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$

**2.** $r(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

**3.** $(r + s)\mathbf{m}$

**4.** $(r + s)(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

**5.** $\|r\mathbf{m} - s\mathbf{v}\|$

**6.** $\|r\mathbf{m}\| - \|s\mathbf{v}\|$

**7.** $\|s^2\mathbf{v}\| - \|s^2\mathbf{n}\|$

**8.** $\|rs\mathbf{u}\| + \|rs\mathbf{v}\|$

Στις Ασκήσεις 9-14, βρείτε τη διανυσματική μονάδα με την ίδια κατεύθυνση με το συγκεκριμένο διάνυσμα.

**9.** $(-1,2)$

**10.** $(2,5)$

**11.** $(3,6)$

**12.** $(4,-1)$

**13.** $(-4,-2)$

**14.** $(-3,5)$

Στις Ασκήσεις 15-20, αποφασίσετε αν τα δύο διανύσματα κάθε ζεύγους είναι παράλληλα ή όχι.

**15.** $(3, 4), (15, 20)$

**16.** $(-9, 6), (3, -2)$

**17.** $(2, -3), (18, -24)$

**18.** $(9, 7), (-81, -56)$

**19.** $(4, -1), (-12, 3)$

**20.** $(5, 3), (-1, -0.6)$

Στις Ασκήσεις 21-26, εκφράσετε κάθε διάνυσμα χρησιμοποιώντας την νόρμα και η γωνία κατεύθυνσης του σύμφωνα με τις εξισώσεις 3, σελίδα 41. Χρησιμοποιήστε τον Πίνακα 2, σελίδα , για να βρείτε προσέγγιση του $m^\circ(\vartheta)$ με ακρίβεια 10 λεπτών της μοίρας.

**21.** $(\sqrt{3}, 1)$

**22.** $(1, -2\sqrt{2})$

**23.** $(3, -5)$

**24.** $(\sqrt{7}, 3)$

**25.** $(-2, -7)$

**26.** $(\sqrt{10}, -\sqrt{15})$

Στις Ασκήσεις 27-34, βρείτε μια διανυσματική μονάδα κάθετη στο δεδομένο διάνυσμα.

***Παράδειγμα.*** $(3, -2)$

*Λύση:* Από το Παράδειγμα 3 της σελίδας 29, ένα διάνυσμα κάθετο προς $(3, -2)$ είναι το $(2, 3)$. Η διανυσματική μονάδα στην κατεύθυνση του $(2, 3)$ είναι η

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}}, \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}}\right), \text{ ή } \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right).$$

□

**27.** $(2, 2)$

**28.** $(-3, 3)$

**29.** $(3, 7)$

**30.** $(2, -2\sqrt{3})$

**31.** $(3, 0)$

**32.** $(0, -4)$

**33.** $(a, b)$

**34.** $(a, 2a)$

Για $r$ και $s \in \mathbb{R}, \mathbf{u} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, και $\mathbf{v} = (x2, y2) \in \mathbb{R}^2$, δείξτε ότι κάθε πρόταση στις Ασκήσεις 35-41 αληθεύει.

**35.** $r\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$

**36.** $(rs)\mathbf{v} = r(s\mathbf{v})$

**37.** $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

**38.** $-1\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

**39.** $(r + s)\mathbf{v} = r\mathbf{v} + s\mathbf{v}$

**40.** $r\mathbf{u} = \mathbf{0}$ εαν και μόνο εάν $r = 0$ ή $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

**41.** $(r + s)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v} + s\mathbf{u} + s\mathbf{v}$

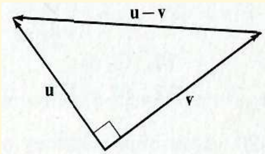
***42.** Δείξτε οτι εαν $||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$, τότε τα **u** και **v** έχουν την ίδια κατεύθυνση.

***43.** Δείξτε το αντίστροφο, δηλαδή, δείξτε ότι εάν τα **u** και **v** έχουν την ίδια κατεύθυνση τότε $||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$.

## 1.6. Εσωτερικά Γινόμενα Διανυσμάτων

Αν **u** και **v** είναι δυο μη μηδενικά διανύσματα και το **u** είναι κάθετο στο **v**, τότε τα **u**, **v**, και $\mathbf{u} - \mathbf{v}$(το διάνυσμα από το **v** προς το **u**) έχουν γεωμετρική παράσταση ενος ορθογωνίου τριγώνου(Σχήμα 1.18).

***Σχήμα 1.18:***



Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα σε αυτό το τρίγωνο, έχετε

$$||\mathbf{u} - \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2. \tag{1}$$

Τώρα, εαν $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ και $\mathbf{v} = (x_2, y2)$, η Εξίσωση 1 ισοδυναμεί με

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1^2 + y_1)^2 + (x_2^2 + y_2)^2. \tag{2}$$

Αν το αριστερό μέλος της Εξίσωσης 2 αναπτυχθεί, θα βρείτε ότι

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2),$$

ή, μετά την ανακατάταξη των όρων στο αριστερό μέλος, ότι

$$(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2) = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2). \tag{3}$$

Προσθέτοντας το $-(x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)$ σε κάθε μέλος της εξίσωσης 3, έχετε

$$-2(x_1x_2 + y_1y_2) = 0,$$

από τον οποίο θα πάρετε

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \tag{4}$$

Κάθε βήμα στη διαδικασία αυτή είναι αναστρέψιμη, οπότε η Εξίσωση 4 συνεπάγεται την Εξίσωση 1· και από το αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, η Εξίσωση 1 σημαίνει ότι το $\mathbf{u}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{v}$. Ακόμα, εάν είτε το $\mathbf{u}$ είτε το $\mathbf{v}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ μπορεί να θεωρηθούν κάθετα, και φυσικά η Εξίσωση 4 ικανοποιείται. Οπότε οδηγούμαστε στο παρακάτω συμπέρασμα οτι τα

$$\begin{gathered}\mathbf{u} = (x_1, y_1) \text{ και } \mathbf{v} = (x_2, y_2) \text{ είναι κάθετα διανύσματα,}\\ \text{αν και μόνο αν } \; x_1x_2 + y_1y_2 = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Η έκφραση $x_1x_2 + y_1y_2$ εμφανίζεται τόσο συχνά όταν εργαζόμαστε με διανύσματα (οχι μόνο με κάθετα διανύσματα) ώστε της έχει δοθεί ένα όνομα και ένα ειδικό σύμβολο. Ονομάζεται το **εσωτερικό γινόμενο**,ή, μερικές φορές, το **αριθμητικό γινόμενο**, των διανυσμάτων $(x_1, y_1)$ και $(x_2, y_2)$, και το γινόμενο αυτό παριστάνεται από το σύμβολο $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$. Δηλαδή, έχετε την ορισμό:

□ Αν $\mathbf{u} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, τότε

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Παρατηρήστε ότι *το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων είναι ένας αριθμός*, ο πραγματικός αριθμός $x_1x_2 + y_1y_2$. Για παράδειγμα,

$$(1, 3) \cdot (-1, 2) = (1)(-1) + (3)(2) = -1 + 6 = 5,$$
$$(2, 3) \cdot (7, -5) = (2)(7) + (3)(-5) = 14 + (-15) = -1,$$

και

$$(0, 0) \cdot (1, 3) = (0)(1) + (0)(3) = 0 + 0 = 0.$$

Το αποτέλεσμα 4 στη σελίδα 45 μπορεί να αναδιατυπωθεί με τη χρήση του εσωτερικού γινομενου των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ ως εξής:

□ Αν και το $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, τότε τα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{u}$ είναι κάθετα διανύσματα, αν και μόνο αν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

***Παράδειγμα 1.*** Αποδείξτε ότι τα $(3, 6)$ και $(-2, 1)$ είναι κάθετα διανύσματα.

*Λύση:* Έχετε

$$(3, 6) \cdot (-2, 1) = (3)(-2) + (6)(1) = -6 + 6 = 0.$$

Οπότε, τα $(3, 6)$ και $(-2, 1)$ είναι κάθετα διανύσματα. □

Είδατε στο Παράδειγμα 3, σελίδα 29, ότι τα διανύσματα της μορφής $(x, y)$ και $(-y, x)$ είναι κάθετα. Μπορείτε τώρα να το επιβεβαιώσετε εύκολα παρατηρώντας ότι

$$(x, y) \cdot (-y, x) = (x)(-y) + (y)(x) = -xy + xy = 0.$$

Επειδή το $(-y, x)$ χρησιμοποιείται τόσο οταν εργαζόμαστε με διανύσματα, θα του δώσουμε ένα όνομα. Έτσι, ορίζουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{v_p}$, ως εξής:

□ Αν $\mathbf{v} = (x, y)$, τότε $\mathbf{v_p} = (-y, x)$.

Σαφώς, λοιπόν, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v_p} = (x, y) \cdot (-y, x) = 0$.

***Παράδειγμα 1.*** Βρείτε μια διανυσματική μονάδα κάθετη προς το διάνυσμα $(-2, 4)$.

*Λύση:* Εάν $\mathbf{v} = (-2, 4)$, τότε η $\mathbf{v_p} = (-4, -2)$ είναι κάθετη προς το $\mathbf{v}$. Κατά συνέπεια, μια διανυσματική μονάδα κάθετη προς το $\mathbf{v}$ είναι η

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{v_p}}{\|\mathbf{v_p}\|} &= \frac{(-4, -2)}{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{(-4, -2)}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{(-4, -2)}{\sqrt{20}} = \frac{(-4, -2)}{2\sqrt{5}} \\ &= \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right).\end{aligned}$$

□

Δεν είναι δύσκολο να εξακριβωθεί ότι τα εσωτερικά γιν;μενα των διανυσμάτων έχουν τις εξής ιδιότητες:

### *Ιδιότητες του Εσωτερικού Γινομένου των Διανυσμάτων*

Αν $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και, $\mathbf{s}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$ και $r$ είναι ένας αριθμός, τότε

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ | Αντιμεταθετικότητα |
| 2. | $r(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (r\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$ | Προσεταιριστικότητα με ένα αριθμό |
| 3. | $\mathbf{s}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{s}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{s}\cdot\mathbf{v}$, και $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{s} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{s}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{s}$ | Επιμεριστικότητα |
| 4. | $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ | Ιδιότητα της νόρμας των εσωτερικών γινομένων |

Η ιδιότητα 4, θα δειχθεί στο Παράδειγμα 3 παρακάτω. Οι αποδείξεις για τις άλλες ιδιότητες αφήνονται ως ασκήσεις (Ασκήσεις 31-34, σελίδα 50.

***Παράδειγμα 2.*** Δείξτε οτι $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$.

*Λύση:* Έστω $\mathbf{v} = (x, y)$. Τότε

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = (x, y)\cdot(x, y) = x^2 + y^2 = \|\mathbf{v}\|^2.$$

$\square$

***Παράδειγμα 3.*** Αποδείξτε ότι $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

*Λύση:* Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των των εσωτερικών γινομένων, έχετε:

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && \text{Ιδιότητα της νόρμας}\\
&= \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && \text{Επιμεριστικότητα}\\
&= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} && \text{Επιμεριστικότητα}\\
&= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} && \text{Αντιμεταθετικότητα και}\\
& && \text{Προσεταιριστικότητα}\\
&= \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} && \text{Ιδιότητα της νόρμας}
\end{aligned}
\qquad \square
$$

Παρατηρώντας ότι $\mathbf{u}-\mathbf{v} = \mathbf{u}+(-\mathbf{v})$, και ότι $\mathbf{u}\cdot(-\mathbf{v}) = -(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$, καθώς και ότι $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 4 για να αποδείξετε ότι

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

Από αυτή την εξίσωση, προκύπτει ότι

$$2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2. \tag{6}$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2}{2}.$$

Έτσι, το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων **u** και **v** μπορεί να εκφράζεται χρησιμοποιώντας τις νόρμες τους και την νόρμα του διανύσματος από το **v** στο **u**.

## Ασκήσεις 1.6

Στις Ασκήσεις 1-8, βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των δεδομένων διανυσμάτων.

**1.** $(-1,2),(3,1)$

**2.** $(2,4),(-4,2)$

**3.** $(0,4),(-2,0)$

**4.** $(2,0),(-3,0)$

**5.** $(\sqrt{2},3),(-1,5)$

**6.** $(4,\ \sqrt{3}),(-3,2\sqrt{3})$

**7.** $(\sqrt{3},2),(2\sqrt{3},5)$

**8.** $(-\sqrt{3},\ \sqrt{5}),(\sqrt{2},\ \sqrt{6})$

Στις Ασκήσεις 9-16, βρείτε μια διανυσματική μονάδα κάθετη με το δοσμένο διάνυσμα.

**9.** $(3, 4)$

**10.** $(2, -\sqrt{5})$

**11.** $(-3, \sqrt{7})$

**12.** $(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

**13.** $(3, -1)$

**14.** $(-5, -4)$

**15.** $(-3, 0)$

**16.** $(0, 5)$

Στις Ασκήσεις 17-24, να βρείτε μια τιμή για το $x$ ή το $y$ έτσι ώστε το πρώτο διάνυσμα να είναι κάθετο στο δεύτερο.

**17.** $(x, 5), (3, 1)$

**18.** $(x, -2), (3, -4)$

**19.** $(-4, y), (3, 2)$

**20.** $(3, y), (0, 2)$

**21.** $(-x, 2), (2, 3)$

**22.** $(-x, -2), (-1, -5)$

**23.** $(-4, -y), (-3, -8)$

**24.** $(7, -y), (3, -21)$

Στις Ασκήσεις 25-30, βρείτε το $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, εάν $\partial_1$, είναι η γωνία κατεύθυνσης του $\mathbf{u}$ και $\partial_2$ είναι η γωνία κατεύθυνσης του $\mathbf{v}$. Χρησιμοποιείστε ακριβές τιμές για $\cos \partial$ και $\sin \partial$.

**25.** $\|\mathbf{u}\| = 2, m^\circ(\partial_1) = 30; \|\mathbf{v}\| = 4, m^\circ(\partial_2) = 60$

**26.** $\|\mathbf{u}\| = 3, m^\circ(\partial_1) = 45; \|\mathbf{v}\| = 5, m^\circ(\partial_2) = 30$

**27.** $\|\mathbf{u}\| = 4, m^\circ(\partial_1) = 60; \|\mathbf{v}\| = 4, m^\circ(\partial_2) = 150$

**28.** $\|\mathbf{u}\| = 7, m^\circ(\partial_1) = 120; \|\mathbf{v}\| = 2, m^\circ(\partial_2) = 135$

**29.** $\|\mathbf{u}\| = 3, m^\circ(\partial_1) = 0; \|\mathbf{v}\| = 4, m^\circ(\partial_2) = 330$

**30.** $\|\mathbf{u}\| = 6, m^\circ(\partial_1) = 180; \|\mathbf{v}\| = 6, m^\circ(\partial_2) = 270$

Στις Ασκήσεις 31-34, για $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, και $\mathbf{s} = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, δείξτε ότι η κάθε μια πρόταση είναι αληθής.

**31.** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ .

**32.** $r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (r\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

**33.** $\mathbf{s} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}$

**34.** $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{s} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}$

**35.** Αποδείξτε ότι αν το $\mathbf{u}$ είναι κάθετο προς το $\mathbf{v}$, τότε το $-\mathbf{u}$ είναι κάθετο προς το $\mathbf{v}$.

**36.** Αποδείξτε ότι αν το $\mathbf{u}$ είναι κάθετο προς το $\mathbf{v}$, τότε το $r\mathbf{u}$ είναι κάθετο προς το $\mathbf{v}$.

**37.** Αποδείξτε ότι $\|\mathbf{u_p}\| = \|\mathbf{u}\|$.

**38.** Αποδείξτε ότι $(\mathbf{u_p})_\mathbf{p} = -\mathbf{u}$.

**39.** Δείξτε με ένα αντιπαράδειγμα ότι το $\mathbf{u}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{y}$ δεν συνεπάγεται το $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ή το $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

**40.** Δείξτε με ένα αντιπαράδειγμα ότι το $\mathbf{u}\cdot\mathbf{x} = 0$ δεν συνεπάγεται το $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ή το $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

***41.** Αποδείξτε ότι αν $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$, τότε τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι κάθετα.

***42.** Αποδείξτε ότι $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$.

# Σχέσεις μεταξύ των Διανυσμάτων

## 1.7. Η Γωνία μεταξύ των δύο Διανυσμάτων

Στη Ενότητα 1.5, είδατε ότι μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την έννοια του *αριθμητικού πολλαπλάσιου* για να αποφασίσετε αν δυο διανύσματα είναι παράλληλα ή όχι. Υπάρχει και μια άλλη μέθοδος για να αποφασίσετε αν δυο διανύσματα είναι παράλληλα, η οποία είναι απλή και ισχύει για όλα τα διανύσματα(και για το μηδενικό διάνυσμα). Αυτή η μέθοδος περιλαμβάνει το εσωτερικό γινόμενο.

Έστω $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ και $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ είναι οποιαδήποτε δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^2$. Παρατηρήστε ότι

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v_p} = (x_1, y_1)\cdot(-y_2, x_2) = -x_1y_2 + y_1x_2,$$

και (απο Άσκηση 23, σελίδα 57), ότι $-x_1y_2 + y_1x_2 = 0$ αν και μόνο αν ένα απο τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι ένας αριθμητικό πολλαπλάσιο του άλλου, δηλαδή, αν και μόνο αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι


Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πινακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 51 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

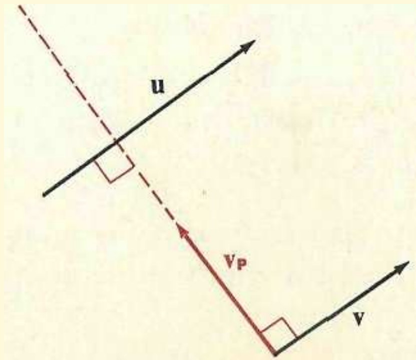
παράλληλα. Οπότε:

□ Αν $\mathbf{u} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ τότε $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι παράλληλα διανύσματα αν και μόνο αν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v_p} = 0$, δηλαδή, αν και μόνο αν

$$(x_1, y_1) \cdot (-y_2, x_2) = 0.$$

Το Σχήμα 1.19 απεικονίζει τη γεωμετρική ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος για μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$.

***Σχήμα 1.19:***

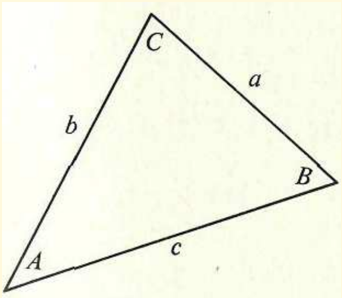



***Παράδειγμα 1.*** Αποδείξτε ότι τα διανύσματα $(-1, 4)$ και $(3, -12)$ είναι παράλληλα.

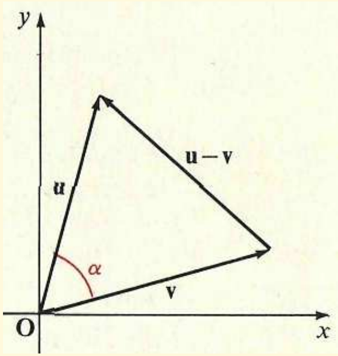
*Λύση:* Έστω $\mathbf{u} = (-1, 4)$ και $\mathbf{v} = (3, -12)$. τότε $\mathbf{v_p} = (12, 3)$, και $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v_p} = (-1, 4) \cdot (12, 3) = (-1)(12) + (4)(3) = -12 + 12 = 0$. Οπότε, τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ και είναι παράλληλα. □

Θυμηθήτε οτι από την τριγωνομετρία ο Νόμος των Συνημιτόνων εγγυάται ότι σε ένα τρίγωνο $\triangle\mathbf{ABC}$, όπου τα $a, b$ και $c$ είναι τα μήκη των πλευρών απέναντι απο τις γωνίες $A, B,$ και $C$, αντιστοίχως, ισχύει

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \tag{1}$$




**Σχήμα 1.20:**




**Σχήμα 1.21:**

Τώρα έστω τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ να είναι μη μηδενικά, μη παράλληλα διανύσματα, και συγρίνετε το τρίγωνο $\triangle\mathbf{ABC}$ στο Σχήμα 1.20 με το τρίγωνο που σχηματίζεται από τις γεωμετρικές παραστάσεις των διανυσμάτων του $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, και του $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ στο Σχήμα 1.21. Σε αυτό το σχήμα, η $a$ είναι η γωνία μεταξύ των κανονικών γεωμετρικών παραστάσεων των διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$· η $a$ ονομάζεται η **γωνία μεταξύ** των διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Επειδή η $a$ είναι μια γωνία ενός τριγώνου, η $m^\circ(a)$ βρίσκεται μεταξύ 0 και 180. Εάν, στην Εξίσωση 1, αντικαταστήσετε την $a$ με το $||\mathbf{u}-\mathbf{v}||$, το $b$ με $||\mathbf{u}||$, το $c$ με το $||\mathbf{v}||$, και $A$ με $a$, θα έχετε

$$||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 - 2||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos a, \tag{2}$$

το οποίο μπορείτε να γράψετε ισοδύναμα ως

$$2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos a = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2. \tag{3}$$

Τότε, από την Εξίσωση 6 στη σελίδα 49, μπορείτε να αντικαταστήσετε το δεξί μέλος της εξίσωσης 3 με $2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ και να πάρετε

$$2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos a = 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}, \tag{4}$$

από την οποία έχετε

□

$$\cos a = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \tag{5}$$

Η Εξίσωση 5 επίσης ισχύει(Ασκήσεις 21 και 22, σελίδα 57) αν τα μη μηδενικά διανύσματα **u** και **v** είναι παράλληλα. Έτσι, έχοντας δυο μη μηδενικά διανύσματα υυ και **v**, μπορείτε πάντα να χρησιμοποιήσετε την Εξίσωση 5 για τον προσδιορισμό του μέτρου της γωνίας $a$, με $0 \leq m^\circ(a) \leq 180$, που σχηματίζεται μεταξύ των γεωμετρικών παραστάσεων των διανυσμάτων. (Αν το **u** ή το **v** ή και τα δύο διανύσματα είναι το μηδενικό, τότε μια οπιαδήποτε γωνία $a$ μπορεί να θεωρηθεί ως η γωνία μεταξύ των **u** και **v**· ωστόσο, για λόγους συντομίας, θα αναφερόμαστε στη *γωνία* $a$ μεταξύ των **u** και **v** ακόμη και στη περίπτωση αυτή, εννοώντας "τη συγκεκριμμένη γωνία $a$.")

***Παράδειγμα 2.*** Βρείτε μια προσέγγιση για το μέτρο της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων $(2, 3)$ και $(-1, 4)$.

*Λύση:* Έστω $\mathbf{u} = (2, 3)$ και $\mathbf{v} = (-1, 4)$, έχετε $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ και $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-1)^2+4^2} = \sqrt{17}$, οπότε από Εξίσωση 5,

$$\cos a = \frac{(2,3)\cdot(-1,4)}{\sqrt{13}\sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{221}}.$$

Όμως $\sqrt{221} \approx 15$. Συνεπώς,

$$\cos a \approx \frac{10}{15} \approx 0,67.$$

Από τον Πίνακα 2, σελίδα , μπορείτε τότε να πάρετε

$$m^\circ(a) = 48.$$

□

Αν $m^\circ(a) = 90$, τότε η Εξίσωση 5 γίνεται

$$\cos 90^\circ = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||},$$

ή, εφόσον $cos 90^\circ = 0$,

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||} = 0. \tag{6}$$

Επειδή $||\mathbf{u}|| \neq 0$ και $||\mathbf{v}|| \neq 0$, η Εξίσωση 6 ισοδυναμεί με

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι συνεπές με το τέστ (σελίδα 46) για τα διανύσματα **u** και **v** για να είναι κάθετα.

Μπορείτε επίσης να χρησιμοποιήσετε την Εξίσωση (5) στη σελίδα 54 για να διαπιστωθεί εάν δυο μη μηδενικά διανύσματα **u** και **v** είναι παράλληλα. Έχετε μάθει ότι τα μέτρα για τις γωνίες κατεύθυνσης δύο παράλληλων διανυσμάτων, είτε είναι ίσα ή διαφέρουν κατά $\pm 180^\circ$. Οπότε, το μέτρο της γωνίας μεταξύ των δύο παράλληλων διανυσμάτων είναι είτε $0^\circ$ ή $180^\circ$. Οπότε, επειδή $\cos 0 = 1^\circ$ και $\cos 180^\circ = -1$, τα διανύσματα **u** και **v** είναι παράλληλα, αν και μόνο αν

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||} = 1 \text{ ή } -1. \tag{7}$$

## Ασκήσεις 1.7

Στις Ασκήσεις 1-12, διαπιστώσετε αν τα δεδομένα ζεύγη διανυσμάτων είναι παράλληλα, κάθετα, ή κανένα απ᾽ αυτά. Αν αυτά δεν είναι ούτε παράλληλα ούτε κάθετα, βρείτε το μέτρο της μεταξύ τους γωνίας στη πλησιέστερη μοίρα.

**1.** $(-1, 2), (2, 1)$

**2.** $2, 3), (6, -4)$

**3.** $(-3, 7), (6, -14)$

**4.** $(1, 5), (-2, -10)$

**5.** $(-4, 3), (1, 0)$

**6.** $(0, 1), (12, 5)$

**7.** $(\sqrt{3}, 1), (1, \sqrt{3})$

**8.** $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 5)$

**9.** $(4, -1), (-1, -4)$

**10.** $(\sqrt{2}, \sqrt{3}), (-\sqrt{15}, -\sqrt{10})$

**11.** $(\sqrt{3}, 3), (2, \sqrt{2})$

**12.** $(-2, \sqrt{5}), (\sqrt{2}, -5)$

Στις Ασκήσεις 13-16, να βρείτε, στην πλησιέστερη δυνατή μοίρα, τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου που έχει τα δοσμένα σημεία $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$, ως κορυφές.

**13.** $\mathbf{A}(0, 0), \mathbf{B}(6, 0), \mathbf{C}(3, -3\sqrt{3})$

**14.** $\mathbf{A}(0, 0), \mathbf{B}(-3, 4), \mathbf{C}(4, 0)$

**15.** $\mathbf{A}(1, 1), \mathbf{B}(1, 4), \mathbf{C}(5, 1)$

**16.** $\mathbf{A}(-1, 2), \mathbf{B}(3, 2), \mathbf{C}(1, 5)$

Στις Ασκήσεις 17-22, για μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ και $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$, δείξτε ότι οι προτάσεις είναι αληθής.

***17.** Αν $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ και $\mathbf{v} \parallel \mathbf{t}$, τότε $\mathbf{u} \parallel \mathbf{t}$.

***18.** Αν $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ και $\mathbf{v} \perp \mathbf{t}$, τότε $\mathbf{u} \parallel \mathbf{t}$.

***19.** Αν $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, τότε και $\mathbf{u} \perp -\mathbf{v}$.

***20.** Αν $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, τότε η γωνία μεταξύ των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{t}$ είναι είτε ίση προς τη γωνία μεταξύ των $\mathbf{v}$ και $\mathbf{t}$ ή το συμπλήρωμα αυτής της γωνίας.

***21.** Εαν $\mathbf{u} = r\mathbf{v}$, $r > 0$, τότε

$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = 1.$$

***22.** Αν $\mathbf{u} = r\mathbf{v}$, $r < 0$, τότε

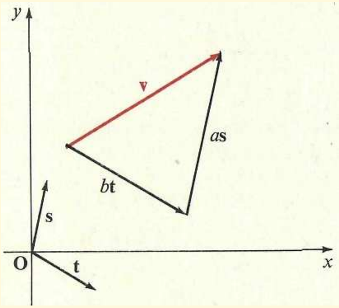
$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = -1.$$

***23.** Αποδείξτε ότι αν $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ και $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, τότε $-x_1y_2 + y_1x_2 = 0$ αν και μόνο αν ένα απο τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι ένα αριθμητικό πολλαπλάσιο του άλλου(δηλ. πολλαπλάσιο με ένα αριθμό). Υπόδειξη: Για το ¨μόνο αν¨ μέρος της απόδειξης, θα εξετάσετε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

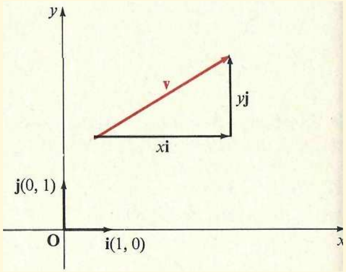
$$(1)\ x_2 \neq 0,\ \ (2)\ x_2 = 0 \text{ αλλά } y_2 \neq 0,\ \ (3)\ (x_2, y_2) = (0, 0).$$

## 1.8. Ανάλυση ενός Διανύσματος

Το άθροισμα $\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{v}$ δύο διανυσμάτων $\mathbf{s}$ και $\mathbf{t}$ συχνά ονομάζεται η **συνισταμένη** των $\mathbf{s}$ και $\mathbf{t}$, και τα $\mathbf{s}$ και $\mathbf{t}$ ονομάζονται τα **διανυσματικές συνιστώσες** του διανύσματος $\mathbf{v}$. Πολλές φορές είναι χρήσιμο να είμαστε σε θέση να εκφράσουμε ένα συγκεκριμένο διάνυσμα $\mathbf{v}$ ως το άθροισμα δύο διανυσματικών συνιστωσών με συγκεκριμένες μη παράλληλες κατευθύνσεις. Εκφράζοντας ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$ ως το άθροισμα διανυσματικών συνιστωσών που είναι αριθμητικά πολλαπλάσια δυο δοθέντων μή παράλληλων διανυσμάτων $\mathbf{s}$ και $\mathbf{t}$ ονομάζεται **ανάλυση** του διανύσματος $\mathbf{v}$ σε συνιστώσες παράλληλες με τα $\mathbf{s}$ και $\mathbf{t}$, ή να το πούμε διαφορετικά, εκφράζοντας το $\mathbf{v}$ ως ένα **γραμμικό συνδυασμό** των $\mathbf{s}$ και $\mathbf{t}$ (Σχήμα 1.22).




**Σχήμα 1.22:**




**Σχήμα 1.23:**

Είναι δυνατόν να αναλύσουμε τυχόν δοθέντο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ σε συνιστώσες που είναι αριθμητικά πολλαπλάσια *οποιουνδήποτε* μη μηδενικών, παράλληλων διανυσμάτων $\mathbf{s}$ και $\mathbf{t}$· Πράγματι, αυτό μπορεί πάντοτε να γίνει απλά με την επίλυση ενός συστήματος δυο γραμμικών εξισώσεων. Τα διανύσματα $\mathbf{s}$ και $\mathbf{t}$ ονομάζονται τότε μια **βάση** για το σύνολο, ή το **διανυσματικό χώρο**, των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^2$.

Στην παρούσα ενότητα, η οποία θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση κατά την οποία τα διανύσματα της βάση είναι κάθετα (ορθογώνια) μεταξύ τους. Ένα ιδιαίτερα σημαντικό ζεύγος ορθογώνιων μοναδιαίων διανυσμάτων είναι το ζεύγος $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, όπου

$$\mathbf{i} = (1, 0) \;\text{ και }\; \mathbf{j} = (0, 1).$$

Το Σχήμα 1.23 δείχνει τις κανονικές γεωμετρικές παραστάσεις των $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$.

Είναι εύκολο να εκφράσουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{v} = (x, y)$ ως το άθροισμα αριθμητικών πολλαπλασίων των $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$. Από

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y),$$

και επειδή

$$(x, 0) = x(1, 0) \text{ και } (0, y) = y(0, 1),$$

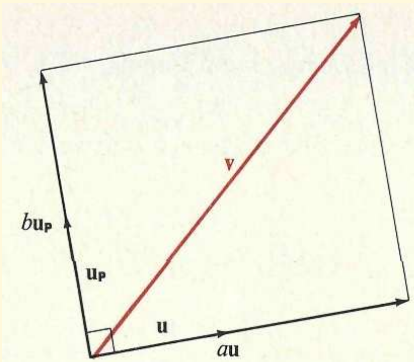
έχετε

$$(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \tag{1}$$

Σε αυτήν την έκφραση του $(x, y)$ ως ένα γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$, οι αριθμοί $x$ και $y$ λέγονται **αριθμητικές συνιστώσες** του $(x, y)$ παράλληλα με τα $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$, και τα διανύσματα $x\mathbf{i}$ και $y\mathbf{j}$ είναι οι συνιστώσες του διανύσματος $(x, y)$ παράλληλα προς τα $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$ ( βλ. Σχήμα 1.23).

Κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}$ του $\mathbb{R}^2$ μπορεί να γραφεί με ένα και μόνο ένα τρόπος ως γραμμικό συνδυασμό δυο δοσμένων ορθογώνιων μοναδιαίων διανσμάτων $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και $\mathbf{u_p} = (-u_2, u_1)$.

**Σχήμα 1.24:**



Δηλαδή, (βλ. Σχήμα 1.24), υπάρχει ένα και μόνο ένα ζεύγος αριθμών, $a$ και $b$, τέτοιο ώστε

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u_p}. \tag{2}$$

Για να καθορίσετε τα $a$ και $b$, πρώτα θα πάρετε το εσωτερικό γινόμενο του κάθε μέλους της Εξίσωσης 2 με το $\mathbf{u}$. θα λάβετε

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u}(a\mathbf{u} + b\mathbf{u_p} \\ &= a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u_p}). \end{aligned} \tag{3}$$

Από $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 = 1$ και $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u_p} = 0$, η Εξίσωση 2 ισοδυναμεί με

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a. \tag{4}$$

Στη συνέχεια, παίρνετε το εσωτερικό γινόμενο του κάθε μέλους της Εξίσωση ;; με το $\mathbf{u_p}$. Παίρνετε,

$$\begin{aligned} \mathbf{u_p} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u_p}(a\mathbf{u} + b\mathbf{u_p} \\ &= a(\mathbf{u_p} \cdot \mathbf{u}) + b(\mathbf{u_p} \cdot \mathbf{u_p}). \\ &= a(0) = b(1), \end{aligned}$$

ή

$$\mathbf{u_p} \cdot \mathbf{v} = b. \tag{5}$$

Έτσι οι μόνοι πραγματικοί αριθμοί που μπορούν να παίξουν τους ρόλους των $a$ και $b$ είναι οι $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ και $\mathbf{u_p} \cdot \mathbf{v}$.

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι οι τιμές $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a$ και $\mathbf{u_p} \cdot \mathbf{v} = b$ πληρούν πράγματι την Εξίσωση 2 αναπτύσοντας την παράσταση $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{u_p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u_p}$ (βλ. Άσκηση 30, σελ. 67).

Έτσι η εξίσωση

□

$$\mathbf{v} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{u_p}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u_p} \qquad (6)$$

μας δίνει τη μοναδική ανάλυση του οποιουδήποτε διανύσματος $\check{\mathrm{v}}$ του $\mathbb{R}^2$ σε συνιστώσες που είναι αριθμητικά πολλαπλάσια των μοναδιαίων ορθογώνιων διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{u_p}$.

Θα συμβολίζουμε τις διανυσματικές συνιστώσες του $\mathbf{v}$ παράλληλες προς τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{u_p}$ με $\mathbf{Comp_u v}$ και $\mathbf{Comp_{u_p} v}$, αντίστοιχα(το Comp ειναι απο το component=συνιστώσα). Έτσι,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{Comp_u v} + \mathbf{Comp_{u_p} v},\\ &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{u_p}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u_p}.\end{aligned}$$

***Παράδειγμα 1.*** Βρείτε τα $\mathbf{Comp_u v}$ και $\mathbf{Comp_{u_p} v}$ εαν $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ και $\mathbf{v} = (2, 1)$.

*Λύση:* Παρατηρήστε πρώτα ότι το $\mathbf{u}$ είναι μια διανυσματική μονάδα:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1.$$

Από $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, έχετε $\mathbf{u_p} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Εξίσωση 6, σελίδα 61, για να εκφράσετε το $\mathbf{v}$ ως άθροισμα συνιστωσών παράλληλων προς τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{u_p}$. Έχετε

$$\begin{aligned}(2,1) &= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(2,1)\right]\mathbf{u} + \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(2,1)\right]\mathbf{u_p}\\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{u} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u_p}.\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\mathbf{Comp_u v} = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

και

$$\mathbf{Comp_{u_p} v} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

□

Έλεγχος: $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (2, 1).$

Μπορείτε να εκφράσετε ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$ ως άθροισμα αριθμητικών πολλαπλασίων (μη μηδενικών) ορθογώνιων διανυσμάτων που *δεν* είναι μοναδιαία διανύσματα τροποποιώντας την Εξίσωσης 6, σελίδα 61. Υποθέστε, για παράδειγμα, ότι επιθυμείτε να εκφράσετε ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$ ως το άθροισμα ενός αριθμητικού πολλαπλασίου ενός μη μηδενικού διανύσματος $\mathbf{t}$ και ενός αριθμητικού πολλαπλασίου του $\mathbf{t_p}$. Θημηθείτε (δες την παράγραφο πριν την Εξίσωση 2, σελίδα 41) οτι η $\frac{\mathbf{t}}{||\mathbf{t}||}$ είναι διανυσματική μονάδα με την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{t_p}$. Κατόπιν παρατηρείστε (Ασκήσεις 27 και 28, σελίδα 66,) ότι $\left(\frac{\mathbf{t}}{||\mathbf{t}||}\right)_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{t_p}}{||\mathbf{t}||}$ και ότι το $\frac{\mathbf{t_p}}{||\mathbf{t}||}$ είναι διανυσματική μονάδα με την ίδια κατεύθυνση με το $\mathbf{t_p}$. Κατά συνέπεια το $\frac{\mathbf{t}}{||\mathbf{t}||}$ μπορεί να αντικαταστήσει το $\mathbf{u}$ και το $\frac{\mathbf{t_p}}{||\mathbf{t}||}$ το $\mathbf{u_p}$ στην εξίσωση 6, σελίδα 61, για να πάρουμε

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{t}}{||\mathbf{t}||} \cdot \mathbf{v}\right)\frac{\mathbf{t}}{||\mathbf{t}||} + \left(\frac{\mathbf{t_p}}{||\mathbf{t}||} \cdot \mathbf{v}\right)\frac{\mathbf{t_p}}{||\mathbf{t}||}, \tag{7}$$

ή

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{t}||^2}\right)\mathbf{t} + \left(\frac{\mathbf{t_p} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{t}||^2}\right)\mathbf{t_p}, \tag{8}$$

που είναι το ζητούμενο άθροισμα.

Οι αριθμητικοί συντελεστές $\frac{\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{t}\|}$ και $\frac{\mathbf{t_p}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{t}\|}$ των διανυσματικών μονάδων $\frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|}$ και $\frac{\mathbf{t_p}}{\|\mathbf{t}\|}$ στη Εξίσωση 7 είναι οι αριθμητικές συνιστώσες του $\mathbf{v}$ παράλληλες προς τα $\mathbf{t}$ και $\mathbf{t_p}$, αντίστοιχα. γράφουμε $Comp_{\mathbf{t}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{t}\|}$ και $Comp_{\mathbf{t_p}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{t_p}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{t}\|}$. (Σημειώστε ότι όταν έχουμε *διανυσματικές* συνιστώσες(δηλ. συνιστώσες που είναι διανύσματα) τότε σημειώνουμε το **"Comp"** με έντονα γράμματα, ενώ όταν έχουμε *αριθμητικές* συνιστώσες(δηλ. συνιστώσες που είναι αριθμοί) τότε σημειώνουμε το "Comp" με κανονικά γράμματα.)

***Παράδειγμα 2.*** Βρείτε τις αριθμητικές συνιστώσες του $\mathbf{v} = (-2,3)$ που είναι παράλληλες με το $\mathbf{t} = (1,1)$ και το $\mathbf{t_p}$.

*Λύση:* Πρώτα θα βρείτε οτι $\|\mathbf{t}\| = \sqrt{2}$ και ότι $\mathbf{t_p} = (-1,1)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση 7 παραπάνω, έχετε

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \left(\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}\cdot(-2,3)\right)\frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} + \left(\frac{(-1,1)}{\sqrt{2}}\cdot(-2,3)\right)\frac{\mathbf{t_p}}{\|\mathbf{t}\|}\\ &= \left(\frac{-2+3}{\sqrt{2}}\right)\frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} + \left(\frac{2+3}{\sqrt{2}}\right)\frac{\mathbf{t_p}}{\|\mathbf{t}\|},\end{aligned}$$

ή

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} + \frac{5}{\sqrt{2}}\frac{\mathbf{t_p}}{\|\mathbf{t}\|}.$$

Συνεπώς,

$$Comp_{\mathbf{t}}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ και } Comp_{\mathbf{t_p}}\mathbf{v} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

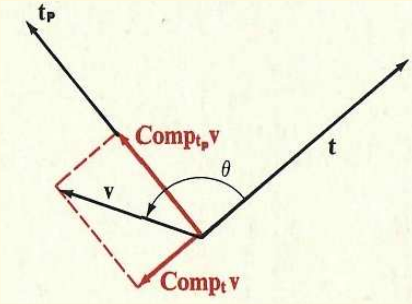
□

Το Σχήμα 1.25 απεικονίζει το γεγονός ότι τα

$$\mathbf{Comp_t v} = \left(\frac{\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{t}||^2}\right)\mathbf{t} \text{ και } \mathbf{Comp_{t_p} v} = \left(\frac{\mathbf{t_p}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{t}||^2}\right)\mathbf{t_p}$$

είναι *διανύσματα* παράλληλα προς (αλλά οχι απαραίτητα στην ίδια κατεύθυνση με) τα $\mathbf{t}$ και $\mathbf{t_p}$, αντίστοιχα, και ότι το άθροισμα αυτών των διανυσμάτων είναι το $\mathbf{v}$.

***Σχήμα 1.25:***




Ο *αριθμός*

$$\begin{aligned} Comp_{\mathbf{t}}\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{t}||} \\ &= \frac{\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{t}||||\mathbf{v}||}||\mathbf{v}|| \\ &= ||\mathbf{v}||\cos\alpha (\text{απο Εξίσωση 5, σελ. 54}) \end{aligned}$$

είναι είτε η νόρμα ή η νόρμα με αντίθετο πρόσημο απο το $\mathbf{Comp_t v}$,

$$Comp_{\mathbf{t}}\mathbf{v} = \pm||\mathbf{Comp_t v}||,$$

ανάλογα με το αν τα $\mathbf{t}$ και $\mathbf{Comp_t v}$ έχουν την ίδια ή αντίθετη κατεύθυνση ( Άσκηση 29, σελίδα 66). Ομοίως,

$$Comp_{\mathbf{t_p}}\mathbf{v} = \pm\|\mathbf{Comp_{t_p} v}\|.$$

Για τα διανύσματα που απεικονίζονται στο Σχήμα 1.25, έχετε $Comp_{\mathbf{t}}\mathbf{v} = -\mathbf{Comp_t v}$ και $Comp_{\mathbf{t_p}}\mathbf{v} = \|\mathbf{Comp_{t_p} v}.\|$

Παρατηρήστε στην Εικόνα 1.25 ότι η γεωμετρική παράσταση του διανύσματος $\mathbf{Comp_t v}$ είναι η *κάθετη προβολή* της γεωμετρικής παράστασης του $\mathbf{v}$ στη γραμμή που περιέχει τη γεωμετρική παράσταση του $\mathbf{t}$. Για το λόγο αυτό, το $\mathbf{Comp_t v}$ μερικές φορές αποκαλείται το **διάνυσμα προβολής** του $\mathbf{v}$ στο $\mathbf{t}$, και το $Comp_{\mathbf{t}}\mathbf{v}$ ονομάζεται η **αριθμητική προβολή** του $\mathbf{v}$ στο $\mathbf{t}$.

## Ασκήσεις 1.8

Στις Ασκήσεις 1-8, εκφράσετε κάθε διάνυσμα ως ένα γραμμικό συνδυασμό των (α) $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$· β) των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{u_p}$, όπου $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$· και (γ) των $\mathbf{t}$ και $\mathbf{t_p}$, όπου $\mathbf{t} = (3, 4)$.

**1.** $(1, 2)$ **3.** $(-1, 0)$ **5.** $(-3, -4)$ **7.** $(5, -6)$

**2.** $(3, 5)$ **4.** $(-2, 3)$ **6.** $(-5, -12)$ **8.** $(4, -3)$

Στις Ασκήσεις 9-12, βρείτε το μέτρο της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων στο πλησιέστερο βαθμό. Χρησιμοποιήστε τον Πίνακα σελίδα 213, εαν απαιτείται.

**9.** $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}; \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **11.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}; \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$

**10.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}; \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **12.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}; \mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

Στις Ασκήσεις 13-16, βρείτε το διάνυσμα προβολής και τη αριθμητική προβολή του $\mathbf{v}$ στο $\mathbf{u}$.

**13.** $\mathbf{u} = (3, 2), \mathbf{v} = (1, -2)$

**14.** $\mathbf{u} = (-4, 3), \mathbf{v} = (2, -1)$

**15.** $\mathbf{u} = (4, -2), \mathbf{v} = (-3, -4)$

**16.** $\mathbf{u} = (-2, -7), \mathbf{v} - (-5, -12)$

**17.** Βρείτε τη αριθμητική προβολή του $\mathbf{v}$ στο $\mathbf{u}$ εαν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι κάθετα.

**18.** Βρείτε τη αριθμητική προβολή του $\mathbf{v}$ στο $\mathbf{u}$ αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ (α) έχουν την ίδια κατεύθυνση, και (β) έχουν αντίθετη κατευθύνσεις.

Στις Ασκήσεις 19-22, βρείτε τη διανυσματική μονάδα $\mathbf{u}$ για την οποία αληθεύει η δοθείσα ισότητα.

**19.** $(-5, 10) = 5\mathbf{u} + 10\mathbf{u}_\mathbf{p}$

**20.** $(-\sqrt{2}, 5\sqrt{2}) = 4\mathbf{u} + 6\mathbf{u}_\mathbf{p}$

**21.** $(0, 2\sqrt{5}) = 4\mathbf{u} + 2\mathbf{u}_\mathbf{p}$

**22.** $(-31, 27) = 13\mathbf{u} + 39\mathbf{u}_\mathbf{p}$

Στις Ασκήσεις 23-26, δείξτε ότι η δοθείσα ισότητα είναι αληθής.

**23.** $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$

**24.** $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$

**25.** $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$

**26.** $(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}).(x_2\mathrm{J}'i + y_2\mathbf{j}) = x_1x_2 + y_1y_2$

***27.** Αποδείξτε ότι για κάθε διάνυσμα μη μηδενικό $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$,

$$\left(\frac{\mathbf{t}}{||t||}\right)_\mathbf{p} = \frac{\mathbf{t}}{||t||}.$$

***28.** Αποδείξτε ότι το $\dfrac{\mathbf{t}_\mathbf{p}}{||t||}$ είναι η διανυσματική μονάδα με την ίδια κατεύθυνση όπως το $\mathbf{t}_\mathbf{p}$.

***29.** Αποδείξτε ότι για κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}$ και για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{Comp_t v} = -\frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} Comp_{\mathbf{t}}\mathbf{v},$$

και, συνεπώς, ότι $Comp_{\mathbf{t}}\mathbf{v} = \pm\|\mathbf{Comp_t v}\|$ ανάλογα με το αν τα $\mathbf{t}$ και $\mathbf{Comp_t v}$ έχουν την ίδια ή την αντίθετη κατεύθυνση.

***30.** Αποδείξτε ότι για κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ και κάθε διανυσματική μονάδα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{u}_{pp} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}_{pp}.$$

[Υπόδειξη: Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.]

***31.** Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα και $\mathbf{v}$ και $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$,

$$\|\mathbf{t}\|^2\mathbf{v} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v})\mathbf{t} + (\mathbf{t_p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{t}_{pp}.$$

***32.** Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα και $\mathbf{v}$ και $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$,

$$\|\mathbf{t}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v})^2 + (\mathbf{t_p} \cdot \mathbf{v})^2$$

***33.** Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα στην Άσκηση 32 για να αποδείξετε ότι $\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \geq (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$.

## Περίληψη Κεφαλαίου

1. Υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των σημείων του επιπέδου και του συνόλου $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ή $\mathbb{R}^2$, των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών.

**2.** Ως συνέπεια της ένα προς ένα αντιστοιχίας που αναφέρθηκε παραπάνω, δυο διατεταγμένα ζεύγη $(a, b)$ και $(c, d)$ αντιπροσωπεύουν το ίδιο σημείο στο επίπεδο αν και μόνο αν τα δύο ζεύγη είναι ίσα, δηλαδή, αν και μόνο αν $a = c$ και $b = d$.

**3.** Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων $\mathbf{A}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{B}(x_2, y_2)$ σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο χρησιμοποιείται και στις δύο άξονες η ίδια κλίμακα δίνεται από τον **τύπο της απόστασης**,

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**4.** Ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^2$ μπορεί να ερμηνευθεί ως μια μετάθεση, ή μετατόπιση, που περιγράφεται από ενα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών. Το πρώτο στοιχείο του ζεύγους δηλώνει μια μετατόπιση παράλληλη προς το $x$-άξονα· Το δεύτερο στοιχείο δηλώνει μια μετατόπιση παράλληλη προς το $y$-άξονα.

**5.** Μια γεωμετρική παράσταση ενός διανύσματος $\mathbf{v}$ στο $\mathbb{R}^2$, που ονομάζεται ένα **γεωμετρικό διάνυσμα**, είναι ένα βέλος ή κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα, στο επίπεδο. Κάθε διάνυσμα έχει άπειρα το πλήθος γεωμετρικές παραστάσεις, σε κάθε σημείο του επιπέδου ξεκινάει μια τέτοια. Η γεωμετρική παράσταση του $\mathbf{v}$ που έχει το αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων λέγεται η **κανονική παράσταση** του $\mathbf{v}$ και τότε λέγεται ότι το βέλος βρίσκεται στη **κανονική θέση**.

**6.** Εάν τα $(a, b)$ και $(c, d)$ είναι τα αρχικές και τελικά σημεία, αντιστοίχως, του γεωμετρικού διάνυσματος που παριστά το $(x, y)$, τότε

$$(c, d) = (a + x, b + y) \text{ και } (x, y) = (c - a, d - b).$$

**7.** Αν $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ και $\sqrt{2} = (x_2, y_2)$, τότε, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

**8.** Είτε ο **νόμος του παραλληλογράμμου** ή **ο νόμος του τριγώνου** μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βρείτε μια γεωμετρική παράσταση του αθροίσματος δυο διανυσμάτων.

**9.** Το διάνυσμα $(0, 0)$, που συμβολίζεται με $\mathbf{0}$, ονομάζεται **μηδενικό διάνυσμα**· η γεωμετρική παράστασή του είναι ένα σημείο.

**10.** Εαν $\mathbf{v} = (x, y)$, το διάνυσμα $-\mathbf{v} = (-x, -y)$ ονομάζεται το **αντίστροφο ως προς την πρόσθεση**,ή το **αρνητικό** του $\mathbf{v}$. Η **διαφορά** των διανυσμάτων $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$ είναι

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2).$$

Η κανονική γεωμετρική παράσταση του $-\mathbf{v}$ είναι συγραμμική με αυτή του $\mathbf{v}$, αλλά έχει την αντίθετη κατεύθυνση. Υπάρχουν παραστάσεις των διανυσμάτων $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ που σχηματίζουν ένα τρίγωνο απο βέλη. Το βέλος που αντιστοιχεί στο $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ σε αυτό το τρίγωνο μπορεί να περιγραφεί ως "το διάνυσμα από το $\mathbf{v}$ στο $\mathbf{u}$"· μπορούμε να το βρούμε εφαρμόζοντας μια μορφή κανόνα του τριγώνου.

**11.** Η **νόρμα** $\|\mathbf{v}\|$ ενός διάνυσματος $\mathbf{v} = (x, y)$ είναι ένα μοναδικός αριθμός που ορίζεται από τον τύπο

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Η νόρμα του κάθε διανύσματος είναι μη αρνητική και μπορεί να ερμηνευθεί ως το μήκος της αντίστοιχης γεωμετρικής παράστασής του.

**12.** Η **κατεύθυνση** ενός μη μηδενικού διανύσματος $\mathbf{v} = (x, y)$ είναι το μέτρο της γωνίας $\vartheta$ για την οποία

$$\sin\vartheta = \frac{y}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{και} \quad \cos\vartheta = \frac{x}{\|\mathbf{v}\|}$$

και $0 \leq m^{\circ}(\vartheta) < 360$ αν το $\vartheta$ μετριέται σε μοίρες, ή $0 < m^{R}(\vartheta) < 2\pi$ αν $\vartheta$ μετριέται σε ακτίνια. Με $m^{\circ}(\vartheta)$ ή $m^{R}(\vartheta)$ συμβολίζουμε το μέτρο της $\vartheta$ σε μοίρες ή ακτίνια αντίστοιχα. Γεωμετρικά, η $\vartheta$ καθορίζεται από μια ακτίνα $R_2$ που περιέχει μια γεωμετρική παράσταση του $\mathbf{v}$ και έχει το ίδιο αρχικό σημείο $\mathbf{S}$, με το $\mathbf{v}$ καθώς και μια ακτίνα $R_1$, που έχει επίσης το ίδιο αρχικό σημείο $\mathbf{S}$, και έχει την ίδια κατεύθυνση με το θετικό άξονα του $x$-άξονα. Η $R_1$ είναι η αρχική πλευρά της $\vartheta$ και η $R_2$ είναι η τελική πλευρά της. Αν τα πρόσημα του $x$ και $y$ λαμβάνονται υπόψη, και $x \neq 0$, τότε το μέτρο της $\vartheta$ μπορεί να βρεθεί από τον τύπο $\tan\vartheta = -\frac{y}{x}$.

**13.** Συμφωνούμε ότι στο μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ μπορεί να αποδοθεί οποιαδήποτε κατεύθυνση.

**14.** Δύο διανύσματα είναι **παράλληλα**, αν και μόνο αν έχουν την ίδια ή τις αντίθετες κατευθύνσεις. Δύο διανύσματα μη μηδενικά είναι **κάθετα** (**ορθογώνια**), αν και μόνο αν οι κανονικές γεωμετρικές παραστάσεις τους είναι μεταξύ τους σε ορθή γωνία.

**15.** Τα διανύσματα $(x, y)$ και $(-y, x)$ είναι κάθετα.

**16.** Εάν $r$ είναι ένας αριθμός και $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, τότε

$$r\mathbf{v} = (rx, ry).$$

Το διάνυσμα $r\mathbf{v}$ ονομάζεται **αριθμητικό πολλαπλάσιο** του $\mathbf{v}$. Αν $r > 0$, τότε τα $r\mathbf{v}$ και $\mathbf{v}$έχουν την ίδια κατεύθυνση· αν $r < 0$, τότε έχουν αντίθετες κατευθύνσεις. Τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, είναι παράλληλα, αν και μόνο αν το $\mathbf{u}$ είναι ένας αριθμητικό πολλαπλάσιο του $\mathbf{v}$.

**17.** Ενα διάνυσμα του οποίου η νόρμα είναι 1 καλείται **διανυσματική μονάδα**.

**18.** Κάθε διάνυσμα μπορεί να παρασταθεί ως γινόμενο ενος αριθμού και μια διανυσματικής μονάδας που έχει την ίδια κατεύθυνση με το συγκεκριμένο διάνυσμα.

**19.** Κάθε διάνυσμα μπορεί να παρασταθεί με την βοήθεια της νόρμας του και της γωνίας κατεύθυνσης του. (Για το μηδενικό διάνυσμα, η παράσταση αυτή δεν είναι μοναδική.)

**20.** Αν $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ και $\mathbf{v} = (x{-}2, y_2)$, τότε ο αριθμός $x_1x2+y_1y_2$ ονομάζεται το **εσωτερικό γινόμενο** ή το **αριθμητικό γινόμενο** των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Αυτό το γινόμενο συμβολίζεται με $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

**21.** Τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι κάθετα αν και μόνο αν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

**22.** Αν $a$ είναι η γωνία μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, τότε

$$\cos a = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$

**23.** Ένα διάνυσμα μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο διανυσματικών συνιστωσών, οι οποίες είναι αριθμητικά πολλαπλάσια δύο οποιοδήποτε δοθέντων μη μηδενικών και μη παράλληλων διανυσμάτων. Σε αυτό το κεφάλαιο, τα δοθέντα διανύσματα λαμβάνονται να είναι κάθετα μεταξύ τους. Τα διανύσματα $\mathbf{i} = (1, 0)$ και $\mathbf{j} = (0, 1)$ χρησιμοποιούνται συχνά. Έτσι, αν $\mathbf{v} = (x, y)$, τότε το $\mathbf{v}$ αναλύεται ως $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Αν το $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ είναι μια διανυσματική μονάδα, τότε το $\mathbf{u_p} = (-u_2, u_1)$ είναι μια διανυσματική μονάδα κάθετη προς το $\mathbf{u}$, και το $\mathbf{v}$ αναλύεται ως

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u_p},$$

όπου $a$ και $b$ είναι αριθμοί που καθορίζεται από τους τύπους $a = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ και $b = \mathbf{u_p} \cdot \mathbf{v}$.

**24.** Η **αριθμητική προβολή** του διανύσματος $\mathbf{v}$ στο διάνυσμα $\mathbf{u}$ είναι η

$$Comp_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|} = \|\mathbf{v}\| \cos a,$$

όπου $a$ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων.

## Επαναληπτικές Ασκήσεις

**1.** Βρείτε τις τιμές των $x$ και $y$ ώστε $(x + y, 2x - y) = (6, 3)$.

**2.** Βρείτε την απόσταση μεταξύ των σημείων $\mathbf{A}(7, -5)$ και $\mathbf{B}(3, -2)$.

**3.** Ποιες είναι οι συντεταγμένες του τερματικό σημείο $\mathbf{T}$ της γεωμετρικής παράστασης του διανύσματος $(2, -4)$ με αρχικό σημείο το $\mathbf{S}(0, 5)$?

**4.** Αν $\mathbf{u} = (1, 2)$ και $\mathbf{v} = (5, 4)$, βρείτε τα (α) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ και (β) $2\mathbf{v} - 3\mathbf{u}$.

**5.** Βρείτε την νόρμα και την εφαπτομένη της γωνίας κατεύθυνσης του διανύσματος $(\sqrt{5}, 3) + (0, -2)$.

**6.** Βρείτε τη διανυσματική μονάδα με την ίδια κατεύθυνση όπως το $(-1, \sqrt{3})$.

**7.** Βρείτε μια τιμή για το $a$ ώστε τα $(3, 4)$ και $(8, a)$ να είναι κάθετα διανύσματα.

8. Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων (3, - 4) και (12, 5).
9. Εκφράστε το $\mathbf{v} = (2, 5)$ στη μορφή $a\mathbf{u} + b\mathbf{u_p}$, όπου το $\mathbf{u}$ είναι η διανυσματική μονάδα στη κατεύθυνση του (3, 4).
10. Βρείτε την αριθμητική προβολή του $\mathbf{v}$ στο $\mathbf{u}$, όπου $\mathbf{v} = (2, 3)$ και $\mathbf{u} = (3, -1)$.

## 1.9. Το ιστορικό Ξεκίνημα

Τα αποφασιστικά βήματα στην απαρχή της αναλυτικής γεωμετρίας ξεκίνησαν δύο Γάλλοι μαθηματικοί: ο Pierre de Fermat (1601-1655) το 1629, και ο René Descartes (1596-1650) το 1637.

Ο Descartes(Καρτέσιος) ήταν ιδιαίτερα σεβαστός φιλόσοφος και μαθηματικός, και οι εργασίες του διαβάστηκαν ευρέως και συζητήθηκαν πολύ. Δημόσιευσε την τεξλατιν Λα Γέομέτριε (Η Γεωμετρία) υπό μορφή τριών βιβλίων, ως ένα παράρτημα σε μια άλλη ερ-

René Descartes

Pierre de Fermat

γασία. Στο δεύτερο αυτών των τριών βιβλίων, που τιτλοφορήθηκαν De la nature des lignes courbes (Στη φύση των κυρτών γραμμών), ασχολήθηκε με τις μεθόδους αναλυτικής γεωμετρίας. Οι μέθοδοι αυτοί χρησιμοποιούν συστηματικά τους αριθμούς για να παραστήσουν τα σημεία και να μειώσουν τη μελέτη των γεωμετρικών ιδιοτήτων των επιπέδων καμπυλών σε μια ανάλυση των εξισώσεων που αντιπροσωπεύουν τις καμπύλες αυτές· αντίστροφα, ανοίγουν το δρόμο σε μια γεωμετρική ερμηνεία της μαθηματικής ανάλυσης των εξισώσεων.

Ο Καρτέσιος γνώριζε καλά την σπουδαιότητα αυτού που είχε κάνει. Στο ίδιο χρόνο, το 1637, έγραψε εκείνο το ¨ Ότι έχω δώσει στο δεύτερο βιβλίο για τη φύση και τις ιδιότητες των κυρτών γραμμών, και τη μέθοδο εξέτασης τους, μου φαίνεται, να είναι αρκετά ανώτερη από την μεταχείρησή τους στη συνηθισμένη γεωμετρία όπως και η ρητορική του Κικέρωνα είναι αρκετά ανώτερη από το α, β, γ των παιδιών.¨ Αυτή η υπερβολική αξιολόγηση, τυχαία, επρόκειτο αργότερα να επαναληφθεί από το μεγάλο γάλλο μαθηματικό Jacques Hadamard (1865-1963).

Ο Fermat , αντίθετα από το Καρτέσιο, ενδιαφέρθηκε ελάχιστα για την έκδοση των αποτελεσμάτων του. Σαν δικηγόρος και ερασιτέχνης μαθηματικός, έκανε την επιστημονική εργασία του για διασκέδαση. Ευτυχώς για μας, εν τούτοις, έγραφε συχνά επιστολές για αυτά που είχε κάνει. Η μέγαλύτερη εργασία του ήταν στη Θεωρία Αριθμών, αν και μοιράστηκε τη δημιουργία της θεωρίας πιθανότητας με τον δημιουργία της θεωρίας πιθανότητας με τον Blaise Pascal(1623-1662) με τον Sir Isaac Newton (1642-1727) και Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) τη δημιουργία του διαφορικού υπολογισμού, και με το Καρτέσιο τη δημιουργία της αναλυτικής γεωμετρίας.

Η εργασία του Fermat ήταν πραγματικά συστηματικότερη από αυτή Καρτεσίου, αλλά δεν ήταν γνωστή σε άλλους μέχρι το 1636, και δεν είχε καμία επίδραση σε γεωμετρικές έρευνες του Καρτέσιου. Από το 1629, ο Fermat είχε βρεί τη γενική εξίσωση μιας ευθείας γραμμής, και επίσης τις εξισώσεις για τους κύκλους, τις παραβολές, τις ελλείψεις και τις παραβολές.

Επιπλέον, ο Fermat είχε αναπτύξει μια αναλυτική μέθοδο για την εξίσωση της εφαπτομένης γραμμών σε μια δοσμένη καμπύλη και σε ένα δοσμένο σημείο πάνω στην καμπύλη. Το 1638 έγραψε στο Καρτέσιο περιγράφοντας αυτήν την μέθοδο, επειδή ήταν αρκετά ανώτερη από αυτήν που ο Καρτέσιος είχε δώσει το 1637. Αν και ο Καρτέσιος δεν δέχτηκε την ανωτερότητα της μεθόδου του Fermat , ο Newton, που δεν είχε γεννηθεί ακόμα, αργότερα αναγνώρισε ότι ο ίδιος επηρεάστηκε στη ανάπτυξη του διαφορικού υπολογισμού από το τρόπο ¨που ο Fermat σχεδίαζε εφαπτομένες.¨

Ο Fermat και Καρτέσιος με κανένα τρόπο δεν ήταν οι πρώτοι που χρησιμοποιήσαν τα συστήματα συντεταγμένων. Οι αστρονόμοι, παραδείγματος χάριν, είχαν χρησιμοποιήσει το γεωγραφικό μήκος και το γεωγραφικό πλάτος για αιώνες, τουλάχιστον πίσω απο την εποχή του Ίππαρχου (2ος αιώνας π.χ.) ή και πιθανόν νωρίτερα.

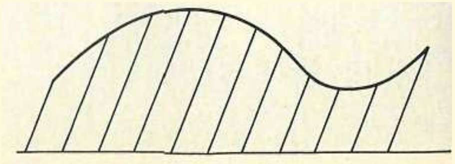
Ούτε ήταν οι πρώτοι που χρησιμοποίησαν αναλυτικές μεθόδους για να μελετήσουν τις καμπύλες. Ο γεωμετρικός τόπος ενός σημείου που κινείται με σταθερή ταχύτητα εξωτερικά κατά μήκος μιας ακτίνας, ενώ η ακτίνα περιστρέφεται με σταθερό ρυθμό γύρω απο το τέλους της, καλείται τώρα η σπείρα του Αρχιμήδη. Ο Αρχιμήδης (287-212 π.χ.), ο μεγαλύτερος μαθηματικός και επιστήμονας του αρχαίου κόσμου, βρήκε πώς να καθορίσει τη εφαπτομένη γραμμή σε αυτή τη καμπύλη και σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης με τη χρησιμοποίηση γεωμετρικών μεθόδων ισοδύναμων των συντεταγμενικών εξισώσεων . Ο Αρχιμήδης επινόησε επίσης μια μέθοδο για το εμβαδό που περικλείεται από μια καμπύλη, όπως ένας κύκλος. Επειδή, μεταξύ άλλων, ο διαφορικός υπολογισμός ασχολείται με τις εφαπτομένες, και ο ολοκληρωτικός λογισμός με τα εμβαδά, ο Αρχιμήδης μπορεί να ειπωθεί οτι πρόβλεψε την ανάπτυξη του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού πριν απο περίπου 2000 έτη.

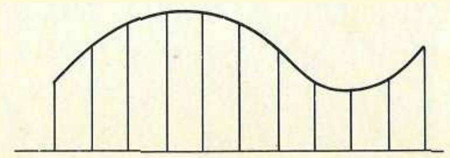
Ο όρος Καρτεσιανή συντεταγμένη προέρχεται από τη λατινοποιημένη μορφή, Cartesius του ονόματος Descartes. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι ο Καρτέσιος *δεν χρησιμοποίησε ενα δεύτερο άξονα* στη μελέτη των ιδιοτήτων των επίπεδων καμπυλών. Μάλλον, σκεφτόταν ανυψωμένο ένα τμήμα κατάλληλου μήκους, είτε κάθετα είτε σε μια ορισμένη πλάγια κατεύθυνση (ο Καρτέσιος είχε μια σύγχρονη αντίληψη της έννοιας μιας συνάρτησης), σε κάθε σημείο ενός μοναδικού άξονα.

Επίσης ο Καρτέσιος εξέταζε μόνο τις θετικές τιμές. Κατά συνέπεια, με τη σύγχρονη ορολογία δούλευε *μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο.* Ο Newton ήταν προφανώς ο πρώτος που χρησιμοποίησε αρνητικές συντεταγμένες, και ο Leibniz εισήγαγε τη λέξη ¨συντεταγμένη¨ στη αναλυτική γεωμετρία.

Χρησιμοποιώντας Καρτεσιανές συντεταγμένες, ο Newton και ο Leibniz ανέπτυξαν το διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, και πολλοί μαθηματικοί όπως οι Carl Friedrich Gauss (Γερμανός 1777-1855), Georg Friedrich Bernhard Riemann (Γερμανός 1826-1866), και Hermann Minkowski (Ρώσος 1864-1909) ανέπτυξαν τη γεωμετρία σε ποικίλες κατευθύνσεις, δίνοντας μια πολύ βαθύτερη κατανόηση του χώρου και των διαπλεκόμενων κλάδων των μαθηματικών, παρέχοντας τους ακρογωνιαιους λίθους επί των οποίων όλες τις φυσικές επιστήμες στηρίζονται. Η θεωρία της σχετικότητας του Άλμπερτ Αϊνστάιν (1879-1955) μπορεί να ιχνηλατηθεί, με μια σύμμειξη προτότυπων ιδεών διάσπαρτων κατά μήκος του δρόμου, κατευθείαν πίσω σε αυτά τα πρώτα ξεκινήματα.

Η διανυσματική ανάλυση αναπτύχθηκε κάπως πιο αργά. Η θεωρία των quaternions του Sir William Rowan Hamilton (Βρετανός 1805-1865) και η αλγεβρική ανάλυση του Hermann Grassmann (Γερμανός 1809-1877), οι οποίες είχαν αναπτυχθεί στο πρώτο μι-

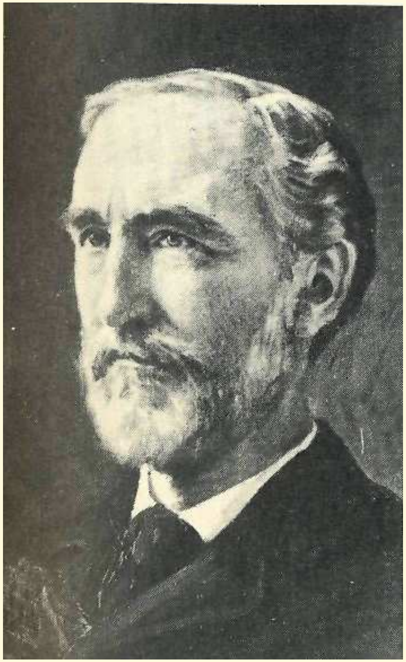




Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πινακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 76 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

σό του δέκατου ένατου αιώνα, φορμαρίστηκαν , στα πλαισια της αναλυτικής γεωμετρίας, στη σύγχρονη διανυσματική ανάλυση αρκετές δεκαετίες αργότερα από τον Josiah Willard Gibbs (Αμερικάνος 1839-1903) και τον Oliver Heaviside (Αγγλος 1850-1925). Ειδικότερα, ο Gibbs [που, σύμφωνα με τον Max Planck (Γερμανός 1 858-1947), ήταν ¨ανάμεσα στους πιο φημισμένους θεωρητικούς φυσικούς όλων των εποχών¨] σε μια φημισμένη πραγματεία με ημερομηνία 1881 εισήγαγε τα σύμβολα για τα αριθμητικά γινόμενα και τα διανυσματικά γινόμενα που χρησιμοποιούνται σήμερα.

Οι Fermat και Descartes θεωρούνται ως οι πρώτοι σύγχρονοι μαθηματικοί. Εφευρίσκοντας την αναλυτική γεωμετρία έδωσαν το έναυσμα της έκρηξης ενός κύματος μαθηματικής δημιουργικότητας που συνεχίζεται και σήμερα.



Josiah Willard Gibbs

# Κεφάλαιο 2

# Ευθείες στο Επίπεδο

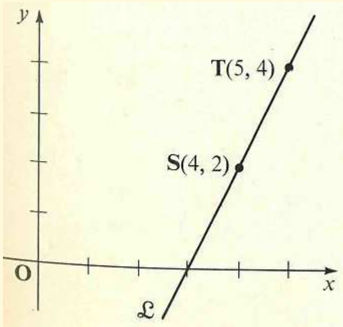
## Διανυσματικές Εξισώσεις Ευθειών

### 2.1. Ευθείες και Ευθύγραμμα τμήματα στο Επίπεδο

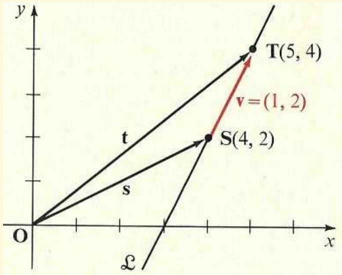
Στην γεωμετρία του επιπέδου, μάθατε πως μια γραμμή είναι ένα σύνολο σημείων του επιπέδου. Στην άλγεβρα, ανακαλύψατε ότι ένα τέτοιο σύνολο σημείων είναι το γράφημα του συνόλου λύσεων στο $\mathbb{R}^2$ μιας *γραμμικής εξίσωσης* δύο μεταβλητών, της οποίας η **Καρτεσιανή κανονική μορφή** είναι η

$$Ax + By + C = 0,$$

όπου τα $A$ και $B$ δεν είναι συγχρόνως μηδέν. (Η συνθήκη "τα $A$ και $B$ δεν είναι συγχρόνως μηδέν" συνήθως εκφράζεται ισοδύναμα ως εξής "$A^2 + B^2 \neq 0$"). Αργότερα σ' αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε λεπτομερειακά τέτοιες εξισώσεις, αλλά κατ΄ αρχήν θα εκμεταλλευτούμε την σχέση μεταξύ των σημείων και των διανυσμάτων που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 1.1 για να δείξουμε ότι μια ευθεία μπορεί επίσης να ορισθεί με μια διανυσματική εξίσωση. Στη συζήτησή μας για σημεία και διανύσματα του επιπέδου, εάν ένα σημείο συμβολίζεται με το κεφαλαίο γράμμα $\mathbf{S}$, για παράδειγμα, τότε είναι βολικό να συμβολίζουμε το γεωμετρικό διάνυσμα από την αρχή των αξόνων έως αυτό το σημείο αυτό με το μικρό γράμμα $\mathbf{s}$. Όπως γνωρίζετε, δύο σημεία ορίζουν μια ευθεία. Τώρα θα δείτε πως αυτό το γεγονός μπορεί να χρησιμεύσει στην εύρεση μιας διανυσματικής εξίσωσης της ευθείας. Κοιτάξτε το Σχήμα 2.1, που δείχνει τα σημεία $\mathbf{S}(4, 2)$ και $\mathbf{T}(5, 4)$ και την γραμμή $\mathfrak{L}$ που περιέχει αυτά τα σημεία. Εάν οι κανονικές γεωμετρικές παραστάσεις των διανυσμάτων $\mathbf{s} = (4, 2)$ και $\mathbf{t} = (5, 4)$ προστεθούν στην εικόνα, τότε το αποτέλεσμα




***Σχήμα 2.1:***

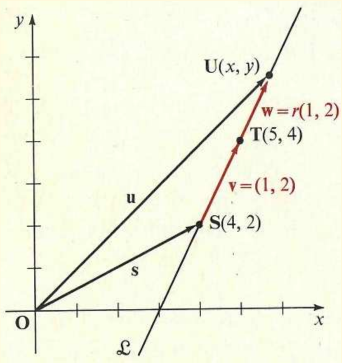



***Σχήμα 2.2:***

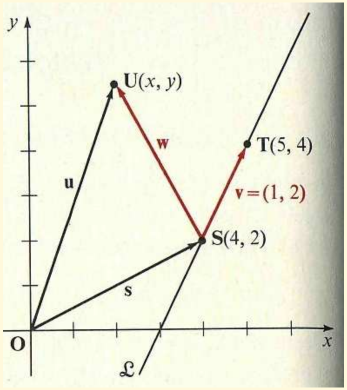
είναι αυτό που βλέπετε στο Σχήμα 2.2. Παρατήρησε στο Σχήμα 2.2 ότι το διάνυσμα $\mathbf{v} = \mathbf{t} - \mathbf{s} = (5, 4) - (4, 2) = (1, 2)$ έχει μια γεωμετρική παράσταση που βρίσκεται πάνω στην $\mathfrak{L}$.

Τώρα κοιτάξτε στο Σχήμα 2.3 που δείχνει την ίδια κατάσταση όπως στο Σχήμα 2.2

εκτός του ότι το σημείο $\mathbf{U}(x, y)$ προστέθηκε πάνω στην $\mathfrak{L}$ όπως και το αντίστοιχο διάνυσμα $\mathbf{u}$ (και, για λόγους απλότητας, το διάνυσμα $\mathbf{t}$ αφαιρέθηκε). Από το σχήμα μπορείτε να δείτε ότι το διάνυσμα $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{s}$ έχει επίσης μια γεωμετρική παράσταση που βρίσκεται πάνω στην $L$ και άρα (δες Άσκηση 27, σελίδα 87) το $\mathbf{w}$ είναι παράλληλο στο $\mathbf{v}$.




**Σχήμα 2.3:**




**Σχήμα 2.4:**

Το Σχήμα 2.4 δείχνει ουσιαστικά την ίδια κατάσταση όπως το Σχήμα 2.3 εκτός του ότι αυτή τη φορά το σημείο $\mathbf{U}(x, y)$ βρίσκεται *εκτός* της $\mathfrak{L}$. Σ' αυτήν την περίπτωση μπορείτε να δείτε ότι η γεωμετρική παράσταση του $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{s}$ *δεν* βρίσκεται πάνω στην $\mathfrak{L}$ και άρα (δες Άσκηση 28, σελ. 87) το $\mathbf{w}$ *δεν* είναι παράλληλο στο $\mathbf{v}$. Έτσι το $\mathbf{U}(x, y)$ βρίσκεται πάνω στην $L$ αν και μόνο αν το $\mathbf{w}$ είναι παράλληλο στο $\mathbf{v}$, δηλαδή, αν και μόνο αν το $\mathbf{u} - \mathbf{s}$ είναι παράλληλο στο $\mathbf{t} - \mathbf{s}$. Από την Ενότητα 1.5, εντούτοις, γνωρίζεται ότι το $\mathbf{w}$ είναι παράλληλο στο $\mathbf{v}$ εάν και μόνο εάν το $\mathbf{w} = r\mathbf{v}$, όπου το $r$ είναι ένας αριθμός. Οπότε το $\mathbf{U}$ βρίσκεται στην $\mathfrak{L}$ εάν και μόνο εάν

$$\mathbf{w} = r\mathbf{v},$$

ή

$$\mathbf{u} - \mathbf{s} = r(\mathbf{t} - \mathbf{s}).$$

Επειδή $\mathbf{u} = (x, y), \mathbf{s} = (4, 2)$, και $\mathbf{t} = (5, 4), \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{s} = (x - 4, y - 2)$ και, όπως σημειώσαμε νωρίτερα, $\mathbf{v} = \mathbf{t} - \mathbf{s} = (1, 2)$. Οπότε, η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$(x - 4, y - 2) = r(1, 2), (x, y) - (4, 2) = r(1, 2),$$

ή

$$(x, y) = (4, 2) + r(1, 2).$$

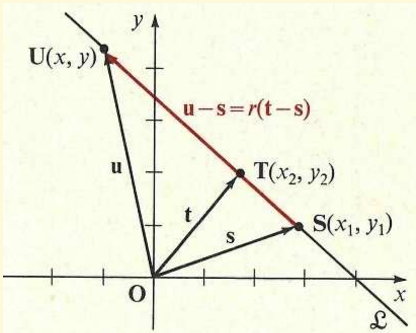
Γενικά με όμοιο συλλογισμό μπορείτε να συμπεράνετε ότι εάν τα $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{T}(x - 2, y - 2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου (Σχήμα 2.5), τότε το σημείο $\mathbf{U}(x, y)$ βρίσκεται στην ευθεία που διέρχεται από τα $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$ εάν και μόνο εάν

$$\mathbf{u} - \mathbf{s} = r(\mathbf{t} - \mathbf{s}),$$

ή

□
$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(\mathbf{t} - \mathbf{s}), r \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

***Σχήμα 2.5:***





Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πινακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 81 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Το σύνολο των σημείων που βρίσκονται στην $\mathfrak{L}$ μπορεί να ορισθεί από το

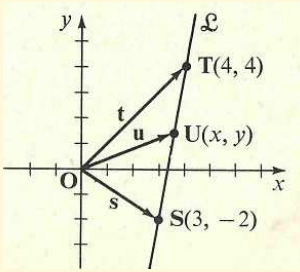
$$\{\mathbf{U} : \mathbf{u} = \mathbf{s} + r(\mathbf{t} - \mathbf{s}), r \in \mathbb{R}\},$$

όπου $\mathbf{t} \neq \mathbf{s}$ αφού $\mathbf{T} \neq \mathbf{S}$.

Επειδή το $\mathbf{U}$ βρίσκεται στην $\mathfrak{L}$ *εάν και μόνο εάν* η Εξίσωση (1) ικανοποιείται, για αυτό το λόγο λέμε ότι η Εξίσωση (1) είναι μια *εξίσωση* της $\mathfrak{L}$ και ότι η $\mathfrak{L}$ είναι το *γράφημα* της Εξισώσεως (1). Στην Εξίσωση (1), η μεταβλητή $r$ καλείται μια **παράμετρος**, και η Εξίσωση (1) καλείται η **παραμετρική διανυσματική εξίσωση της ευθείας που περνά από τα S και T**.

***Παράδειγμα 1.*** Γράψτε μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για την ευθεία $\mathfrak{L}$ που διέρχεται από τα $\mathbf{S}(3, -2)$ και $\mathbf{T}(4, 4)$.

*Λύση:* Ας σχεδιάσουμε ένα σκίτσο. Έχετε $\mathbf{s} = (3, -2)$ και $\mathbf{t} = (4, 4)$. Τότε




$$\begin{aligned} \mathbf{t} - \mathbf{s} &= (4, 4) - (3, -2) \\ &= (1, 6). \end{aligned}$$

Οπότε, από την Εξίσωση (1), μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για την $\mathfrak{L}$ είναι η

$$\mathbf{u} = (3, -2) + r(1, 6).$$

□

Εάν περιορίσουμε τις τιμές της παραμέτρου $r$ σε ένα κλειστό διάστημα της μορφής $\{r : a \leq r \leq b\}$, τότε το γράφημα της Εξίσωσης (1) είναι ένα *ευθύγραμμο τμήμα*. Σημειώστε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση που θέσουμε $r = 0$ στην Εξίσωση (1), τότε $\mathbf{u} = \mathbf{s}$ και

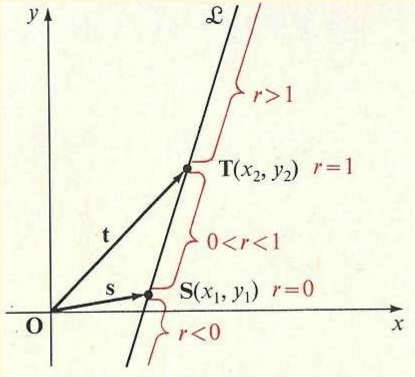

Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πίνακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα



Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

$\mathbf{U}(x, y) = \mathbf{S}(x_1, y_1)$. Επίσης, εάν $r = 1$, τότε $\mathbf{u} = \mathbf{t}$ και $\mathbf{U}(x, y) = \mathbf{T}(x - 2, y - 2)$. Οπότε, όπως δείχνει το Σχήμα 2.6, καθώς το $r$ διατρέχει

***Σχήμα 2.6:***




το διάστημα $\{r : 0 \leq r \leq 1\}$, το σημείο $\mathbf{U}(x, y)$ διασχίζει το ευθύγραμμο τμήμα από το $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ έως το $\mathbf{T}(x - 2, y - 2)$. Τα υπόλοιπα σημεία στην ευθεία αντιστοιχούν σε τιμές της $r$ που ικανοποιούν τις σχέσεις $r < 0$ και $r > 1$.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Εξίσωση (1), σελίδα 81, για να βρείτε τις συντεταγμένες ενός σημείου στο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{\mathbf{ST}}$ που βρίσκεται σε κάποιο σημείο του δρόμου μεταξύ των $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$. Για παράδειγμα, για να βρείτε τις συντεταγμένες του ενδιάμεσου σημείου, θα μπορούσατε να θέσετε $r = \frac{1}{2}$.

***Παράδειγμα 2.*** Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων που χωρίζουν στα τρία το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $\mathbf{S}(3, 4)$ και $\mathbf{T}(6, 2)$.

*Λύση:* Έχετε $\mathbf{s} = (3, -4)$ και $\mathbf{t} = (6, 2)$. Οπότε, το διάνυσμα από το $\mathbf{S}$ στο $\mathbf{T}$ είναι το

$$\mathbf{t}-\mathbf{s}=(6,2)-(3,-4)=(3,6).$$

Τότε τα σημεία του τμήματος $\overline{\mathbf{ST}}$ δίνονται από την

$$\mathbf{u}=(3,-4)+r(3,6), 0 \leq r \leq 1.$$

Οι συντεταγμένες του σημείου που βρίσκεται στο ένα-τρίτο του δρόμου από το $\mathbf{S}$ στο $\mathbf{T}$ είναι

$$(3,-4)+\frac{1}{3}(3,6)=(3,-4)+(1,2)=(4,-2),$$

και του σημείου που βρίσκεται στα δύο-τρίτα του δρόμου από το $\mathbf{S}$ στο $\mathbf{T}$ είναι

$$(3,-4)+\frac{2}{3}(3,6)=(3,-4)+(2,4)=(5,0).$$

Έτσι οι συντεταγμένες των σημείων που τριχοτομούν είναι $(4,-2)$ και $(5,0)$. □

Εάν η Εξίσωση (1), σελίδα 81, γραφτεί ισοδύναμα με την βοήθεια των παραμέτρων $r$ και τις συντεταγμένες των $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$, και $\mathbf{U}$, έχετε

$$\begin{aligned}(x,y) &= (x_1,y_1)+r[(x_2,y_2)-(x_1,y_1)]\\ &= (x_1,y_1)+r(x_2-x_1,y_2-y_1),\end{aligned}$$

ή

$$(x,y)=(x_1+r(x_2-x_1), y_1+r(y_2-y_1)).$$

Αυτή η διανυσματική εξίσωση είναι ισοδύναμη με τις δύο εξισώσεις

□

$$x=x_1+r(x_2-x_1) \text{ και } y=y_1+r(y_2-y_1), r\in\mathbb{R}. \qquad (2)$$

Αυτές καλούνται ένα σύστημα από **παραμετρικές Καρτεσιανές εξισώσεις** για το ευθύγραμμο τμήμα από τα $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$. Στην ενότητα θα δούμε πως ένα σύστημα συσχετίζεται με τη κανονική Καρτεσιανή μορφή της εξίσωσης μιας ευθείας.

***Παράδειγμα 3.*** Γράψτε ένα σύστημα των παραμετρικών Καρτεσιανών εξισώσεων για την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\mathbf{S}(2,-1)$ και $\mathbf{T}(5,3)$.

*Λύση:* Εάν στις Εξισώσεις (2) αντικαταστήσετε τις $x_1, y_1, x_2$ και $y_2$ με 2, -1, 5, και 3, αντίστοιχα, βρίσκετε

$$x = 2 + r(5-2) \text{ και } y = -1 + r[3-(-1)]$$

ή

$$x = 2 + 3r \text{ και } y = -1 + 4r.$$

□

## Ασκήσεις 2.1

Στις Ασκήσεις 1-10, γράψτε μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση και ένα σύστημα παραμετρικών Καρτεσιανών εξισώσεων για την ευθεία που περιέχει τα δοθέντα σημεία $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$.

**1.** $\mathbf{S}(2,1), \mathbf{T}(0,0)$

**2.** $\mathbf{S}(3,2), \mathbf{T}(1,1)$

**3.** $\mathbf{S}(4,-2), \mathbf{T}(4,3)$

**4.** $\mathbf{S}(5,-6), \mathbf{T}(2,-6)$

**5.** $\mathbf{S}(-7,2), \mathbf{T}(-3,-1)$

**6.** $\mathbf{S}(-3,1), \mathbf{T}(4,-2)$

**7.** $\mathbf{S}(-6,-3), \mathbf{T}(-4,-2)$

**8.** $\mathbf{S}(-1,-7), \mathbf{T}(-7,-1)$

**9.** $\mathbf{S}(a,b), \mathbf{T}(b,a)$

**10.** $\mathbf{S}(2a,b), \mathbf{T}(3a,2b)$

Στις Ασκήσεις 11-18, βρείτε τις εξισώσεις των (α) του μέσου (ενδιάμεσου) σημείου και (β) τα σημεία που τριχοτομούν το τμήμα με άκρα τα δοθέντα $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$.

**11.** $\mathbf{S}(5,-1), \mathbf{T}(-4,2)$

**12.** $\mathbf{S}(6,-2), \mathbf{T}(1,7)$

**13.** $\mathbf{S}(-3,-5), \mathbf{T}(3,10)$

**14.** $\mathbf{S}(4,7), \mathbf{T}(-5,3)$

**15.** $\mathbf{S}(2,5), \mathbf{T}(-10,-1)$

**16.** $\mathbf{S}(-5,3), \mathbf{T}(7,21)$

**17.** $\mathbf{S}(-3,7), \mathbf{T}(4,1)$

**18.** $\mathbf{S}(5,-2), \mathbf{T}(12,-5)$

Στις Ασκήσεις 19-22, βρείτε μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για τα τμήματα που ενώνουν τα σημεία.

**19.** $\mathbf{R}(2,5)$ και το μέσο του τμήματος με άκρα $\mathbf{S}(5,1)$ και $\mathbf{T}(7,-3)$.

**20.** $\mathbf{R}(-2,6)$ και το μέσο του τμήματος με άκρα $\mathbf{S}(0,3)$ και $\mathbf{T}(4,0)$.

**21.** Το μέσο του τμήματος με άκρα $\mathbf{Q}(-5,2)$ και $\mathbf{R}(1,6)$ και του σημείου που βρίσκεται στο ένα-τρίτο του δρόμου από το $\mathbf{S}(-2,6)$ στο $\mathbf{T}(1,9)$.

**22.** Του σημείου στα δύο-τρίτα του δρόμου από το δρόμο από το $\mathbf{Q}(8,-2)$ στο $\mathbf{R}(2,7)$ και του σημείου στο ένα-τέταρτο του δρόμου από το $\mathbf{S}(1,6)$ στο $\mathbf{T}(9,10)$.

***23.** Δείξτε ότι οι συντεταγμένες $(x_0, y_0)$ του μέσου του τμήματος με άκρα $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ δίνεται από τους τύπους

$$x_0 = \frac{x_1 + y_2}{2}, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

***24.** Δείξτε ότι οι συντεταγμένες $(x', y')$ και $(x'', y'')$ των σημείων που τριχοτομούν το τμήμα με άκρα $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{T}(x-2, y-2)$ δίνονται από τους

$$x' = \frac{2x_1 + x - 2}{3}, y' = \frac{2y_1 + y - 2}{3}.$$

και

$$x'' = \frac{x_1 + 2x - 2}{3}, y'' = \frac{y_1 + 2y - 2}{3}.$$

***25.** Δείξτε ότι οι διάμεσοι του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $\mathbf{R}(6, 1), \mathbf{S}(-2, 3)$, και $\mathbf{T}(2, -7)$ συναντιούνται σ' ένα κοινό σημείο που βρίσκεται στα δύο-τρίτα του δρόμου από την κάθε κορυφή στην αντίθετη πλευρά. [Υπόδειξη: Προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου που βρίσκεται στα δύο-τρίτα του δρόμου από κάθε κορυφή στη μέση της απέναντι πλευράς.]

***26.** Επαναλάβετε την Άσκηση 25 για το τρίγωνο με κορυφές $\mathbf{O}(0, 0), \mathbf{S}(x_1, y_1)$, και $\mathbf{T}(x_2, y_2)$.

***27.** Αποδείξτε ότι εάν η ευθεία $\mathfrak{L}$ είναι το γράφημα της γραμμικής Καρτεσιανής εξίσωσης $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$, τότε όλα τα διανύσματα που έχουν γεωμετρικές παραστάσεις με αρχικό σημείο και τελικό σημείο πάνω στην $\mathfrak{L}$ είναι παράλληλα. [Υπόδειξη: Έστω $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ είναι δύο οποιαδήποτε σημεία στην $\mathfrak{L}$. Δείξτε ότι $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$, και συνεπώς (δείτε Ενότητα 1.6) ότι το διάνυσμα $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $(A, B)$.]

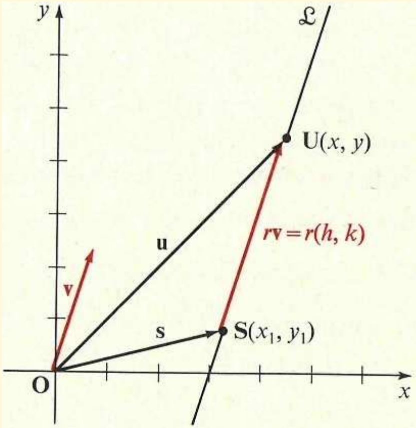
***28.** Δείξτε ότι εάν η γραμμή $\mathfrak{L}$ είναι το γράφημα για την γραμμική Καρτεσιανή εξίσωση $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$, και το $\mathbf{v}$ είναι ένα διάνυσμα που έχει γεωμετρική παράσταση με το ένα άκρο πάνω στην $\mathfrak{L}$ και το άλλο έξω από την $\mathfrak{L}$, τότε το $\mathbf{v}$ δεν είναι παράλληλο σε οποιοδήποτε μη μηδενικό διάνυσμα που έχει γεωμετρική παράσταση με τα δύο άκρα του πάνω στην $\mathfrak{L}$. [Υπόδειξη: Έστω $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο πάνω στην $\mathfrak{L}$ και $\mathbf{T}(x-2, y-2)$ ένα οποιοδήποτε σημείο όχι στην $\mathfrak{L}$. Δείξτε ότι $A(x-2-x_1) + B(y-2-y_1) \neq 0$, και συνεπώς ότι το διάνυσμα $(x-2-x_1, y-2-y_1)$ δεν είναι κάθετο στο διάνυσμα $(A, B)$.]

## 2.2. Σημεία πάνω σε Ευθείες

Στην Ενότητα 2.1, χρησιμοποιήσαμε τις παρακάτω αλήθειες, οι οποίες διαισθητικά φαίνονται προφανείς, για την εύρεση μιας παραμετρικής διανυσματικής εξίσωσης για την ευθεία: Εάν ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$έχει μια γεωμετρική παράσταση με το αρχικό σημείο της και το τελικό σημείο της πάνω σε μια δοθείσα ευθεία $\mathfrak{L}$, τότε το $\mathbf{v}$ είναι παράλληλο σε κάθε άλλο διάνυσμα που έχει μια τέτοια γεωμετρική παράσταση· όμως, με εξαίρεση την περίπτωση $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, το $\mathbf{v}$ δεν είναι παράλληλο με το οποιοδήποτε διάνυσμα που έχει μια διανυσματική παράσταση με το ένα άκρο στην $\mathfrak{L}$ και το άλλο άκρο έξω από την $\mathfrak{L}$. (Για ένα περίγραμμα των αποδείξεων, δείτε Ασκήσεις 27 και 28, σελίδα 87). Λέμε ότι η ευθεία $\mathfrak{L}$ είναι **παράλληλη** σε κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}$ που έχει γεωμετρική παράσταση με άκρα πάνω στην $\mathfrak{L}$ και ότι κάθε τέτοιο διάνυσμα $\mathbf{v}$ είναι παράλληλο με την $\mathfrak{L}$. Ένα *μη μηδενικό* διάνυσμα $\mathbf{v}$ παράλληλο με την $\mathfrak{L}$ καλείται **διάνυσμα κατεύθυνσης** της $\mathfrak{L}$.

Είδατε στην Ενότητα 2.1 ότι μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση, ή ένα σύστημα παραμετρικών Καρτεσιανών εξισώσεων, μιας γραμμής $\mathfrak{L}$ μπορεί να βρεθεί εάν οι συντεταγμένες δύο σημείων της $\mathfrak{L}$ είναι γνωστές. Τέτοιες εξισώσεις μπορεί επίσης να βρεθούν εάν οι συντεταγμένες ενός μοναδικού σημείου στην $\mathfrak{L}$ και ενός διανύσματος κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}$ είναι γνωστά. Πράγματι θεώρησε την γραμμή $\mathfrak{L}$ που διέρχεται από το σημείο $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v} = (h, k)$.(Δείτε και Σχήμα 2.7.)

***Σχήμα 2.7:***




Από τα παραπάνω σχόλια, ένα σημείο $\mathbf{U}(x, y)$ βρίσκεται στην $\mathfrak{L}$ εάν και μόνο εάν

$$\mathbf{u} - \mathbf{s} = r\mathbf{v},$$

ή

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r\mathbf{v} \tag{1}$$

□

όπου το $r$ είναι ένας αριθμός. Η Εξίσωση (1) καλείται η **κανονική παραμετρική διανυσματική εξίσωση της γραμμής από το S παράλληλη στο v.** Επειδή η Εξίσωση (1) μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως

$$(x, y = (x_1, y_1)) + r(h, k),$$

το αντίστοιχο σύστημα των παραμετρικών Καρτεσιανών εξισώσεων για την $\mathfrak{L}$ είναι

□ $$x = x_1 + rh, y = y_1 + rk, r \in R. \tag{2}$$

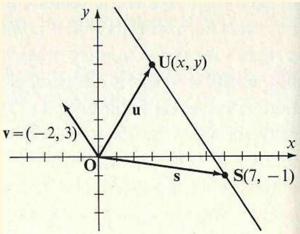
***Παράδειγμα 1.*** Γράψτε μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση και ένα σύστημα παραμετρικών Καρτεσιανών εξισώσεων για την ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\mathbf{S}(7, -1)$ παράλληλο στο διάνυσμα $\mathbf{v} = (-2, 3)$.

*Λύση:* Κάντε ένα σχέδιο. Άμμεσα από την Εξίσωση (1), έχετε

$$\mathbf{u} = (7, -1) + r(-2, 3).$$

Όμοια, από την Εξίσωση (2), έχετε

$$x = 7 - 2r, y = -1 + 3r.$$




□

Φυσικά, κάθε ευθεία, έχει άπειρα το πλήθος διανύσματα κατεύθυνσης, διότι κάθε ένα από τα άπειρα το πλήθος μη μηδενικά διανύσματα παράλληλα στην ευθεία είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για την ευθεία. Συγκεκριμένα, εάν τα $\mathbf{P}$ και $\mathbf{Q}$ είναι δύο σημεία πάνω στην ευθεία $\mathfrak{L}$, τότε τα $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ και $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ είναι διανύσματα κατευθύνσεως της ευθείας. Για να αποφασίσουμε εάν ένα σημείο $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία $\mathfrak{L}$ με Καρτεσιανή εξίσωση $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$, αντικαθιστάμε τις συντεταγμένες $x_1$ και $y_1$ στην εξίσωση και βλέπειτε εάν προκύπτει μια αληθινή πρόταση. Για μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση ή ένα σύστημα παραμετρικών Καρτεσιανών εξισώσεων, το πρόβλημα είναι κάπως διαφορετικό. Για παράδειγμα, για να αποφασίσουμε εάν το $\mathbf{T}(3, 6)$ βρίσκεται

*Διανύσματα στο Επίπεδο*
*Το ιστορικό Ξεκίνημα*
*Ευθείες στο Επίπεδο*
*Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη*
*Εφαρμογές των Ευθειών*
*Απαντήσεις*
*Τριγωνομετρικοί Πίνακες*
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 90 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

σε μια γραμμή με παραμετρική διανυσματική εξίσωση

$$(x, y) = (1, 3) + r(1, 1),$$

μπορείτε να αντικαταστήσετε τις συντεταγμένες του **T** στα $x$ και $y$ της δοθείσας εξίσωσης και στη συνέχεια να αποφασίσετε εάν ή όχι υπάρχει ένας αριθμός $r$ για τον οποίο

$$(3, 6) = (1, 3) + r(1, 1), \tag{3}$$

δηλαδή, για τον οποίο

$$(3, 6) = (1 + r, 3 + r),$$

ή $3 = 1 + r$ και $6 = 3 + r$, ή $r = 2$ και $r = 3$. Επειδή $2 \neq 3$, δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός $r$ για τον οποίο η Εξίσωση (3) είναι αληθινή, οπότε μπορείτε να συμπεράνετε ότι το $\mathbf{T}(3, 6)$ δεν βρίσκεται πάνω στην $\mathfrak{L}$.
Υπάρχει, εντούτοις, ένας πιο εύκολος τρόπος για να φτάσουμε σε αυτό το συμπέρασμα. Σημειώστε κατ΄ αρχήν, ότι το αποτέλεσμα της Εξίσωσης (1) στη σελίδα 89 μπορεί να ειπωθεί ως:

☐ Εάν το $\mathbf{v}$ είναι το διάνυσμα κατεύθυνσης μιας γραμμής $\mathfrak{L}$ που περιέχει ένα σημείο $\mathbf{S}$, τότε ένα σημείο $\mathbf{U}$ βρίσκεται πάνω στην $\mathfrak{L}$ εάν και μόνο εάν το $\mathbf{u} - \mathbf{s}$ είναι παράλληλο στο $\mathbf{v}$.

Στη συνέχεια θυμηθείτε (σελίδα 52) ότι τα διανύσματα $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ και $(x_2, y_2)$ είναι παράλληλα αν και μόνον εάν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v_p} = 0$, όπου $\mathbf{v_p} = (-y_2, x_2)$. Αυτά τα δύο αποτελέσματα μπορούν να συνδυαστούν για να πετύχουμε το παρακάτω απλό τέστ για να προσδιορίσουμε εάν ή όχι ένα σημείο $\mathbf{U}$ βρίσκεται σε μια ευθεία $\mathfrak{L}$:

☐ Εάν $\mathbf{v}$ είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για μια ευθεία $\mathfrak{L}$ που περιέχει κάποιο σημείο $\mathbf{S}$, τότε ένα σημείο $\mathbf{U}$ ανήκει στην $\mathfrak{L}$ εάν και μόνον εάν

$$(\mathbf{u}-\mathbf{s})\cdot\mathbf{v_p}=0. \tag{4}$$

Συγκεκριμένα, εάν γνωρίζετε ότι η $\mathfrak{L}$ περιέχει δύο σημεία $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$, τότε υπάρχει ένα σημείο $\mathbf{U}$ ανήκει στην $\mathfrak{L}$ εάν και μόνον εάν

$$(\mathbf{u}-\mathbf{s})\cdot(\mathbf{t}-\mathbf{s})_\mathbf{p}=0. \tag{5}$$

Σημειώστε ότι αν και οι Εξισώσεις 4 και 5 περιέχουν διανύσματα, ουσιαστικά είναι οι αριθμητικές εξισώσεις για την $\mathfrak{L}$ λόγω των εσωτερικών γινομένουν που εμφανίζονται. Θα επιστρέψουμε ξανά σάυτήν την παρατήρηση στην Ενότητα 2.4.

***Παράδειγμα 2.*** Δείξτε ότι εάν η $\mathfrak{L}$ είναι η ευθεία με παραμετρική διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{u}=(3,2)+r(-1,2),$$

τότε (α) το σημείο με συντεταγμένες $(6,1)$ δεν βρίσκεται στην $\mathfrak{L}$ και (β) το σημείο με συντεταγμένες $(5,-2)$ ανήκει στην $\mathfrak{L}$.

*Λύση:* Εξετάζοντας την δοθείσα εξίσωση για την $\mathfrak{L}$, μπορείτε να δείτε ότι η $\mathfrak{L}$ διέρχεται από το σημείο $\mathbf{S}(3,2)$ και ότι το $\mathbf{v}=(-1,2)$ είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για την $\mathfrak{L}$. Οπότε έχετε $\mathbf{v_p}=(-2,-1)$.
(α) Για $\mathbf{u}=(6,1)$, έχετε

$$\mathbf{u}-\mathbf{s}=(6,1)-(3,2)=(3,-1),$$

και

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}-\mathbf{s})\cdot\mathbf{v_p}&=(3,-1)\cdot(-2,-1)\\&=-6+1=-5\neq 0.\end{aligned}$$

Οπότε το $\mathbf{u} - \mathbf{s}$ δεν είναι παράλληλο στο $\mathbf{v}$, και άρα το σημείο με συντεταγμένες $(6, 1)$ δεν ανήκει στην $\mathfrak{L}$.

(β) Για $\mathbf{u} = (5, -2)$, έχετε

$$\mathbf{u} - \mathbf{s} = (5, -2) - (3, 2) = (2, -4),$$

και

$$(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{v_p} = (2, -4) \cdot (-2, -1) = -4 + 4 = 0.$$

Οπότε, το $\mathbf{u} - \mathbf{s}$ είναι παράλληλο στο $\mathbf{v}$, και το σημείο με συντεταγμένες $(5, -2)$ δεν βρίσκεται πάνω στην $\mathfrak{L}$.

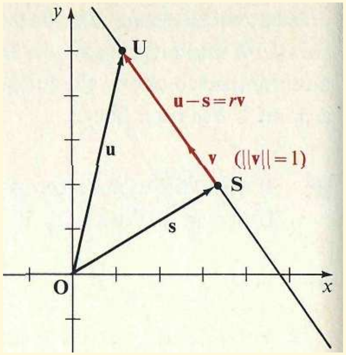
Εάν το διάνυσμα κατεύθυνσης $\mathbf{v}$ στην εξίσωση

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r\mathbf{v}$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, τότε για κάθε σημείο $\mathbf{U}$ στο γράφημα της εξίσωσης, τότε το $|r|$ είναι η απόσταση μεταξύ των $\mathbf{S}$ και $\mathbf{U}$ (Σχήμα 2.8). Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

$$\begin{aligned} d(\mathbf{S}, \mathbf{U}) &= \|\mathbf{u} - \mathbf{s}\| = \|r\mathbf{v}\| \\ &= |r|\|\mathbf{v}\| \\ &= |r|(1) \\ &= |r|. \end{aligned}$$

$\square$



**Σχήμα 2.8:**

***Παράδειγμα 3.*** Εάν $\mathfrak{L}$ είναι η ευθεία με εξίσωση $\mathbf{u} = (1, 6) + r(3, 4)$, βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της $\mathfrak{L}$ που απέχουν 10 μονάδες από τό $\mathbf{S}(1, 6)$.

*Λύση:* Κατ' αρχήν ας βρούμε το μοναδιαίο διάνυσμα με την ίδια κατεύθυνση όπως το $(3, 4)$. Αυτό το διάνυσμα (δείτε σελίδα 1.5) είναι το

$$\left(\frac{3}{\sqrt{9+16}}, \frac{4}{\sqrt{9+16}}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Οπότε μια άλλη εξίσωση για την $\mathfrak{L}$ είναι

$$\mathbf{u} = (1, 6) + r(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}).$$

Ζητάτε να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\mathbf{U}(x, y)$ για τα οποία ισχύει $|r| = 10$, δηλαδή, για τα οποία ισχύει $r = 10$ ή $r = -10$. Έτσι έχετε:

$$\begin{array}{c|c} r = 10 & r = -10 \\ \begin{aligned} (x_1, y_1) &= (1, 6) + 10(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}) \\ &= (1, 6) + (6, 8) \\ &= (7, 14) \end{aligned} & \begin{aligned} (x_2, y_2) &= (1, 6) - 10(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}) \\ &= (1, 6) - (6, 8) \\ &= (-5, -2) \end{aligned} \end{array}$$

Οπότε τα $\mathbf{U}_1(7, 14)$ και $\mathbf{U}_2(-5, -2)$ είναι τα ζητούμενα σημεία. □

## Ασκήσεις 2.2

Στις Ασκήσεις 1–8, γράψτε μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση και ένα σύστημα παραμετρικών Καρτεσιανών εξισώσεων για την ευθεία $\mathfrak{L}$ που διέρχεται απο το δοθέν σημείο $\mathbf{S}$ και παράλληλη στο δοθέν διάνυσμα $\mathbf{v}$.

**1.** $\mathbf{S}(3, 2); \mathbf{v} = (1, 1)$

**2.** $\mathbf{S}(5, 7); \mathbf{v} = (2, 3)$

**3.** $\mathbf{S}(4, -3); \mathbf{v} = (-1, 2)$

**4.** $\mathbf{S}(1, -5); \mathbf{v} = (3, -1)$

**5.** $\mathbf{S}(-2, 4); \mathbf{v} = (-1, -2)$

**6.** $\mathbf{S}(-5, 2); \mathbf{v} = (-3, 1)$

**7.** $\mathbf{S}(-6, -4); \mathbf{v} = (-3, -2)$

**8.** $\mathbf{S}(-3, -7); \mathbf{v} = (4, -2)$

Στις Ασκήσεις 9–16, απαντήστε εάν ή όχι το δοθέν σημείο $\mathbf{S}$ ανήκει στην ευθεία με την δοθείσα παραμετρική διανυσματική εξίσωση.

**9.** $\mathbf{S}(2, -1); \mathbf{u} = (1, 2) + r(-1, 3)$

**10.** $\mathbf{S}(-8, 6); \mathbf{u} = (-2, 3) + r(2, -1)$

**11.** $\mathbf{S}(3, 2); \mathbf{u} = (1, 1) + r(2, -3)$

**12.** $\mathbf{S}(-1, 2); \mathbf{u} = (4, 7) + r(3, 3)$

**13.** $\mathbf{S}(-1, 1); \mathbf{u} = (-2, -3) + r(1, 4)$

**14.** $\mathbf{S}(2, -7); \mathbf{u} = (-3, 2) + r(2, 1)$

**15.** $\mathbf{S}(0, -1); \mathbf{u} = (3, -4) + r(-6, 2)$

**16.** $\mathbf{S}(-4, 0); \mathbf{u} = (-1, -2) + r(3, -2)$

Στις Ασκήσεις 17–24 βρείτε μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για την ευθεία που περιέχει το δοθέν σημείο $\mathbf{S}$ και έχει το δοθέν διάνυσμα ως ένα διάνυσμα κατεύθυνσης.

**17.** $\mathbf{S}(2, 3); \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

**18.** $\mathbf{S}(4, 1); \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

**19.** $\mathbf{S}(3, -1); \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

**20.** $\mathbf{S}(1, -5); \mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

**21.** $\mathbf{S}(-6, 2); \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

**22.** $\mathbf{S}(-5, 3); \mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

**23.** $\mathbf{S}(-1, -1); \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

**24.** $\mathbf{S}(-3, -5); \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

Στις ασκήσεις 25–30, προσδιορίστε εάν ή όχι οι δύο δοθείσες παραμετρικές διανυσματικές εξισώσεις ορίζουν την ίδια ευθεία.

**25.** $\mathbf{u} = (2, 1) + r(3, -1); \mathbf{u} = (2, 1) + r(-3, 1)$

**26.** $\mathbf{u} = (3, 4) + r(2, -2); \mathbf{u} = (3, 4) + r(-2, 2)$

**27.** $\mathbf{u} = (2, 3) + r(-1, 2); \mathbf{u} = (1, 5) + r(2, -4)$

**28.** $\mathbf{u} = (-3, 1) + r(1, -3); \mathbf{u} = (3, -1) + r(-1, 3)$

**29.** $\mathbf{u} = (-1, -2) + r(-2, 4); \mathbf{u} = (1, 0) + r(1, -2)$

**30.** $\mathbf{u} = (0, 3) + r(-1, 5); \mathbf{u} = (-1, -2) + r(2, -10)$

Στις Ασκήσεις 31–34, βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\mathbf{U}_1$ και $\mathbf{U}_2$ στην ευθεία με την δοθείσα παραμετρική διανυσματική εξίσωση τα οποία βρίσκονται στην δοθείσα απόσταση από το σημείο $\mathbf{S}$.

**31.** Στην ευθεία $\mathbf{u} = (4, -2) + r(1, 1); 3\sqrt{2}$ μονάδες μήκους απόσταση απο το σημείο $\mathbf{S}(4, -2)$

**32.** Στην ευθεία $\mathbf{u} = (-3, -1) + r(6, 8); 5$ μονάδες μήκους απόσταση απο το σημείο $\mathbf{S}(-3, -1)$

**33.** Στην ευθεία $\mathbf{u} = (0, 4)+r(5, 12); 26$ μονάδες μήκους απόσταση απο το σημείο $\mathbf{S}(5, 16)$

**34.** Στην ευθεία $\mathbf{u} = (-1, 6) + r(1, 4); 2\sqrt{17}$ μονάδες μήκους απόσταση απο το σημείο $\mathbf{S}(1, 14)$

***35.** Δοθέντος ότι η ευθεία $\mathfrak{L}$ με παραμετρική διανυσματική εξίσωση $\mathbf{u} = \mathbf{s} + r\mathbf{v}$ περιέχει το σημείο $\mathbf{T}$, δείξτε ότι για κάθε σημείο $\mathbf{U}$ στην $\mathfrak{L}$, υπάρχει ένας αριθμός $k$ έτσι ώστε $\mathbf{u} - \mathbf{t} = k\mathbf{v}$.

***36.** Χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμα της Άσκησης 35 για να δείξετε ότι $(\mathbf{u} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v_p} = 0$. Τι συνεπάγεται αυτό για την ευθεία που διέρχεται από το $\mathbf{T}$ με διάνυσμα κατεύθυνσης το $\mathbf{v}$; □

## 2.3. Η κλίση μιας Ευθείας: Παράλληλες και κάθετες Ευθείες

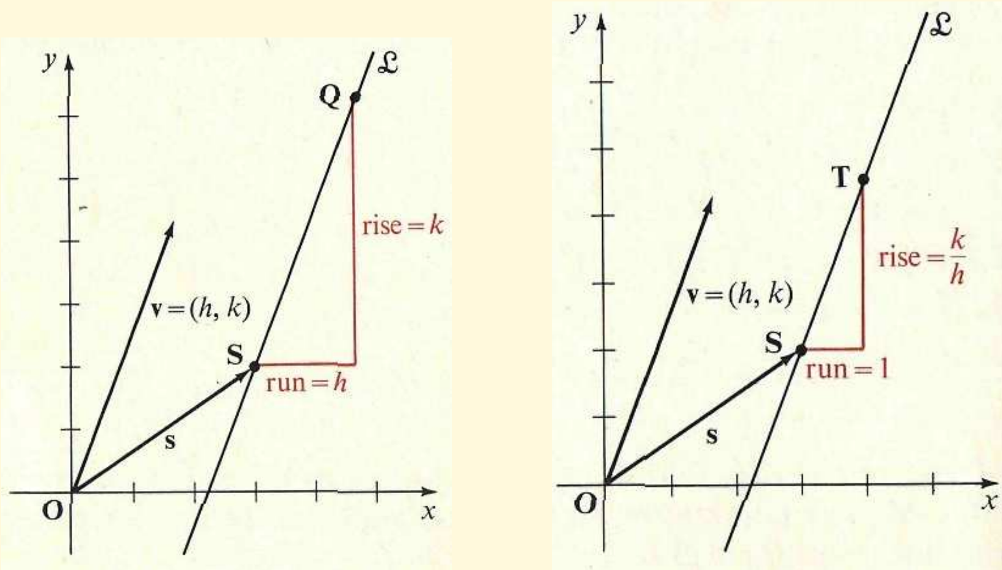
Ίσως να θυμάστε από άλλα μαθήματα ότι ο λόγος του (κάθετου) ύψους ενός ευθύγραμμου τμήματος προς το (οριζόντιο) πλάτος του λέγεται η *κλίση του ευθυγράμμου τμήματος*, και αυτή η κλίση κανονικά συμβολίζεται με το γράμμα $m$. Έτσι έχετε

$$m = \frac{\text{ύψος}}{\text{πλάτος}}.$$

Εάν $\mathbf{v} = (h, k)$ είναι το διάνυσμα κατεύθυνσης για μια ευθεία $\mathfrak{L}$ που περιέχει ένα σημείο $\mathbf{S}$, τότε η $\mathfrak{L}$ έχει μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση της μορφής

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(h, k), r \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Εάν η $r$ πάρει τιμή 1, τότε μπορείτε να δείτε ότι οι συντεταγμένες ενός δεύτερου σημείου $\mathbf{Q}$ στην $\mathfrak{L}$ μπορούν να βρεθούν προσθέτοντας το $h$ στην πρώτη συντεταγμένη και το $k$ στη δεύτερη συντεταγμένη του δοθέντος σημείου $\mathbf{S}$. Οπότε, τα $h$ και $k$ είναι αντίστοιχα το οριζόντιο πλάτος(run) και το κάθετο ύψος(rise) του τμήματος $\overline{\mathbf{SQ}}$, και εάν $h \neq 0$, τότε ο λόγος $\frac{k}{h}$ είναι η κλίση του $\overline{\mathbf{SQ}}$ (Σχήμα 2.9α').




**(α΄)** **(β΄)**

***Σχήμα 2.9:***

Ξανά, εάν $h \neq 0$, εάν δώσετε την τιμή $\frac{1}{h}$ στο $r$, τότε μπορείτε να δείτε από την Εξίσωση 1 ότι οι συντεταγμένες ενός δεύτερου σημείου, έστω $\mathbf{T}$, στην $\mathfrak{L}$ μπορεί να βρεθούν προσθέτοντας το $\frac{1}{h}(h,k) = \left(1, \frac{k}{h}\right)$ στο $\mathbf{s}$, δηλαδή, προσθέτοντας 1 στην πρώτη συντεταγμένη του $\mathbf{S}$ και $\frac{k}{h}$ στη δεύτερη συντεταγμένη του $\mathbf{S}$. Επειδή η μονάδα προστίθεται στη πρώτη συντεταγμένη του $\mathbf{S}$ και το $\frac{k}{h}$ στη δεύτερη συντεταγμένη μπορείτε να σκέφτεστε το $\frac{k}{h}$ ως το ρυθμό αλλαγής, κατά μήκος της ευθείας $\mathfrak{L}$, στη κάθετη κατεύθυνση ανά μονάδα μήκους στην οριζόντια κατεύθυνση, όπως δείχνεται στο Σχήμα 2.9β΄.

Σημειώστε ότι ο αριθμός $\frac{k}{h}$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου $\mathbf{S}$ στην $\mathfrak{L}$ αλλά μόνο από το διάνυσμα κατεύθυνσης $(h, k)$. Αλλά ούτε ο $\frac{k}{h}$ εξαρτάται από κάποιο *συγκεκριμένο* διάνυσμα κατεύθυνσης $(h, k)$ της $\mathfrak{L}$, επειδή κάθε διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}$ είναι της μορφής $c(h, k)$ ή $(ch, ck)$, όπου $c \neq 0$, και $\frac{ck}{ch} = \frac{k}{h}$. Ως συνέπεια, μπορείτε να ορίσετε την *κλίση μιας ευθείας* ως εξής:

□ Εάν $\mathfrak{L}$ είναι μια ευθεία με διάνυσμα κατεύθυνσης $(h, k)$, όπου $h \neq 0$, τότε η κλίση $m$ της $\mathfrak{L}$ δίνεται από τον τύπο

$$m = \frac{k}{h}.$$

Προκύπτει από αυτόν τον ορισμό ότι το $m$ είναι η κλίση της ευθείας $\mathfrak{L}$ εάν και μόνο εάν το $(1, m)$, ή το $(1, \frac{k}{h})$, είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}$. Έτσι, η Εξίσωση 1, σελίδα 97, μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(1, m), \quad r \in \mathbb{R}.$$

***Παράδειγμα 1.*** Προσδιορίσετε τη κλίση $m$ μιας ευθείας που περιέχει τα σημεία $\mathbf{S}(5, 1)$ και $\mathbf{T}(3, -2)$, και γράψτε μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση της μορφής $\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(1, m)$ για την ευθεία.

*Λύση:* Ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για την ευθεία είναι

$$\mathbf{t} - \mathbf{s} = (3, -2) - (5, 1) = (-2, -3).$$

Οπότε, από τον ορισμό, $m = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$. Επειδή το $\mathbf{S}(5, 1)$ βρίσκεται στην ευθεία, μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για την ευθεία είναι η $\mathbf{u} = (5, 1) + r(1, \frac{3}{2})$. □

Η μέθοδος της λύσης στο Παράδειγμα 1 μας υποδεικνύει ότι θα ήταν χρήσιμο να έχουμε ένα τύπο για την κλίση μιας ευθείας που διέρχεται από δύο δοθέντα σημεία ως συνάρτηση των συντεταγμένων των σημείων. Επειδή ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για την ευθεία $\mathfrak{L}$ που διέρχεται από τα σημεία $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ είναι

$$\mathbf{v} = \mathbf{t} - \mathbf{s} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

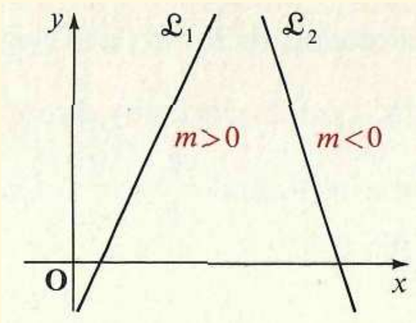
προκύπτει από τον ορισμό της κλίσης ότι εάν $x_2 \neq x_1$, τότε η κλίση της $\mathfrak{L}$ δίνεται από τον τύπο

□

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2}$$

Μια ευθεία με *θετική* κλίση «ανεβαίνει» από τα αριστερά στα δεξιά· μια ευθεία με *αρνητική* κλίση «κατεβαίνει» από τα αριστερά στα δεξιά. Στο Σχήμα 2.10, η $\mathfrak{L}_1$ έχει θετική κλίση και η $\mathfrak{L}_2$ αρνητική.

***Σχήμα 2.10:***




Μια ευθεία με ένα διάνυσμα κατεύθυνσης της μορφής $(h, 0)$, $h \neq 0$, είναι μια **οριζόντια ευθεία** και έχει κλίση $\frac{0}{h} = 0$. Επειδή το διάνυσμα $(h, 0)$ έχει μια γεωμετρική παράσταση που κείται στον $x$-άξονα, μια οριζόντια ευθεία είναι παράλληλη στον $x$-άξονα (δείτε ορισμό παρακάτω). Μια ευθεία με διάνυσμα κατεύθυνσης της μορφής $(0, k), k \neq 0$, είναι μια **κάθετη ευθεία**. Οι κάθετες ευθείες δεν έχουν κλίση (επειδή ο λόγος $\frac{k}{0}$ δεν ορίζεται) και είναι παράλληλες στον $y$-άξονα.

Είχατε συνηθίσει, από την μελέτη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, να σκέφτεστε τις παράλληλες ευθείες ως ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και οι οποίες δεν έχουν κανένα σημείο κοινό. Θυμηθείτε, όμως (σελίδα 29), ότι δύο διανύσματα λέγονται παράλληλα αν και μόνο αν έχουν τις ίδιες ή τις αντίθετες κατευθύνσεις. Επίσης, (σελίδα 88), μια ευθεία $\mathfrak{L}$ και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v}$ λέγονται να είναι παράλληλα εάν και μόνο εάν το $\mathbf{v}$έχει μια γεωμετρική παράσταση που βρίσκεται πάνω στην $\mathfrak{L}$, δηλαδή, εάν και μόνο εάν το $\mathbf{v}$ είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}$. Είναι τώρα η κατάλληλη στιγμή για μας να δώσουμε ένα νέο ορισμό των παράλληλων ευθειών με ορολογία των διανυσμάτων κατεύθυνσης. Ο νέος ορισμός είναι ισοδύναμος (Ασκήσεις 45 και **;;**, σελίδα 106) με τον γνωστό γεωμετρικό ορισμό δηλ. ότι οι παράλληλες ευθείες είναι μη τεμνόμενες συνεπίπεδες γραμμές, εκτός από το γεγονός, όπως θα δείτε, ότι κάθε ευθεία του επιπέδου θα θεωρείτε τώρα παράλληλη στον εαυτό της.

□ Δύο ευθείες $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ στο επίπεδο συντεταγμένων καλούνται **παράλληλες** εάν και μόνο εάν ένα διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_1$ είναι παράλληλο σε ένα διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_2$.

Φυσικά, επειδή όλα τα διανύσματα κατεύθυνσης μιας δοθείσας ευθείας είναι παράλληλα (σελίδα 88), εάν οποιοδήποτε διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_1$ είναι παράλληλο σε ένα οποιοδήποτε διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_2$, τότε *όλα* τα διανύσματα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_1$ είναι παράλληλα σε *όλα* τα διανύσματα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_2$. Ακόμα, επειδή κάθε μη μηδενικό διάνυσμα παράλληλο σε ένα διάνυσμα κατεύθυνσης μιας ευθείας είναι *επίσης* και ένα διάνυσμα κατεύθυνσης της ευθείας (σελίδα 88), προκύπτει ότι κάθε διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_1$ είναι επίσης και ένα διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_2$. Οπότε οι ευθείες $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ είναι παράλληλες εάν και μόνο εάν έχουν ένα κοινό διάνυσμα κατεύθυνσης

$(h, k)$. Θυμηθείτε, όμως, ότι μια ευθεία με διάνυσμα κατεύθυνσης $(h, k)$ είναι είτε κάθετη (εάν $h = 0$) ή έχει κλίση $\frac{k}{h}$ (εάν $h \neq 0$). Οπότε οι ευθείες $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ είναι παράλληλες εάν και μόνο εάν είτε (α) είναι και οι δύο κάθετες ή (β) έχουν την ίδια κλίση $\frac{k}{h}$.

***Παράδειγμα 2.*** Εάν η $\mathfrak{L}_1$ περιέχει το $\mathbf{S}(3, -1)$ και η $\mathfrak{L}$ περιέχει το $\mathbf{T}(2, 5)$, και οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ έχουν το $\mathbf{v} = (1, 2)$ ως ένα διάνυσμα κατεύθυνσης, τότε άραγε οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ συμπίπτουν·

*Λύση:* Από τον ορισμό, οι γραμμές $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ είναι παράλληλες. Συμπίπτουν εάν και μόνο εάν τα $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$ βρίσκονται και στις δύο. Οπότε (δείτε και το κείμενο που προηγείται της σχέσεως **;;** σελίδα **;;**), συμπίπτουν εάν και μόνο εάν το $\mathbf{t} - \mathbf{s}$ είναι παράλληλο και στις δύο, δηλαδή, εάν και μόνο εάν $(\mathbf{t} - \mathbf{s})\mathbf{v_p} = [(2, 5) - (3, -1)](-2, 1) = (-1, 6)(-2, 1) = 8 \neq 0$. Οπότε οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ δεν συμπίπτουν. □

Μόλις είδατε ότι οι παράλληλες ευθείες μπορούν να ορισθούν με χρήση των διανυσμάτων κατεύθυνσής τους. Μπορείτε όμοια να ορίσετε κάθετες ευθείες ως συνάρτηση των διανυσμάτων κατεύθυνσής τους. Θυμηθείτε (σελίδα 29) ότι διανύσματα που οι κατευθύνσεις τους διαφέρουν κατά $\pm 90°$ ή $\pm 270°$ λέγονται κάθετα, ή ορθογώνια, διανύσματα.

□ Οι ευθείες $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ του διανυσματικού επιπέδου λέγονται **κάθετες**, ή **ορθογώνιες**, εάν και μόνο εάν ένα διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_1$ είναι κάθετο σε ένα διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_2$.

Αυτός ο ορισμός είναι ισοδύναμος στον γνωστό ορισμό από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι δύο συνεπίπεδες ευθείες είναι κάθετες εάν και μόνο εάν τέμνονται σε ορθές γωνίες.

Φυσικά, εάν ένα οποιοδήποτε διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_1$ είναι κάθετο σε ένα οποιοδήποτε διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_2$, τότε *όλα* τα διανύσματα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_1$ είναι κάθετα σε *όλα* τα διανύσματα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_2$. Οπότε, επειδή δύο διανύσματα είναι κάθετα αν και μόνο αν το εσωτερικό γινόμενό τους είναι 0, εάν το $\mathbf{v}_1$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_1$ και εάν το $\mathbf{v}_2$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}_2$, τότε οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ είναι κάθετες εάν και μόνο εάν $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

***Παράδειγμα 3.*** Δείξτε ότι η ευθεία $\mathfrak{L}_1$ με παραμετρική διανυσματική εξίσωση $\mathbf{u} = (3, -1) + r(2, 3)$ είναι κάθετη στην ευθεία $\mathfrak{L}_2$ με παραμετρική διανυσματική εξίσωση $\mathbf{u} = (2, -1) + r(6, -4)$.

*Λύση:* Από τις δοθείσες εξισώσεις, μπορείτε να δείτε ότι το $(2, 3)$ είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για την $\mathfrak{L}_1$ και το $(6, -4)$ είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για την $\mathfrak{L}_2$. Επειδή $(2, 3) \cdot (6, -4) = 12 - 12 = 0$, οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ είναι κάθετες. □

Στη σελίδα 99, είδατε ότι κάθε μη κάθετη ευθεία έχει ένα διάνυσμα κατεύθυνσης της μορφής $(1, m)$, όπου η $m$ είναι η κλίση της ευθείας. Οπότε εάν η $\mathfrak{L}_1$ είναι μια μη κάθετη ευθεία με κλίση $m_1$ και η $\mathfrak{L}_2$ είναι μια μη κάθετη ευθεία με κλίση $m_2$, τότε τα $(1, m_1)$ και $(1, m_2)$ είναι διανύσματα κατεύθυνσης των $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$, αντίστοιχα. Τώρα, οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ είναι κάθετες εάν και μόνο εάν τα $(1, m_1)$ και $(1, m_2)$ είναι κάθετα, δηλαδή, εάν και μόνο εάν

$$\begin{aligned} (1, m_1) \cdot (1, m_2) &= 0, \\ 1 + (m_1)(m_2) &= 0, \\ m_1 m_2 &= -1, \end{aligned}$$

ή

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{και} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Οπότε:

□ Δύο μη-κάθετες (δηλ. μη παράλληλες ως προς τον $y$-άξονα) ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους εάν και μόνο εάν οι κλίσεις τους είναι *αρνητικά αντίστροφες* μεταξύ τους, δηλαδή έχουν γινόμενο το -1.

Οι κάθετες ευθείες είναι κάθετες προς τις οριζόντιες. Όπως συζητήσαμε νωρίτερα, οι πρώτες δεν έχουν κάποια κλίση ενώ οι δεύτερες έχουν κλίση ίση με 0. Για τέτοιες ευθείες, το παραπάνω τεστ του αρνητικού αντιστρόφου δεν εφαρμόζεται.

## Ασκήσεις 2.3

Στις Ασκήσεις 1-8, βρείτε την κλίση της ευθείας που περιέχει τα δοθέντα διανύσματα $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$, και γράψτε μια διανυσματική παραμετρική εξίσωση για την ευθεία της μορφής $\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(1, m)$.

**1.** $\mathbf{S}(5, 1)$ και $\mathbf{T}(-4, 2)$

**2.** $\mathbf{S}(0, 7)$ και $\mathbf{T}(5, 0)$

**3.** $\mathbf{S}(3, -4)$ και $\mathbf{T}(-2, 1)$

**4.** $\mathbf{S}(2, 1)$ και $\mathbf{T}(1, -2)$

**5.** $\mathbf{S}(2, -3)$ και $\mathbf{T}(-4, -3)$

**6.** $\mathbf{S}(-1, -5)$ και $\mathbf{T}(4, -5)$

**7.** $\mathbf{S}(-2, -3)$ και $\mathbf{T}(-1, -7)$

**8.** $\mathbf{S}(-5, -4)$ και $\mathbf{T}(2, 5)$

Στις Ασκήσεις 9-16, γράψτε μια διανυσματική παραμετρική εξίσωση για την ευθεία που διέρχεται από το δοθέν σημείο $\mathbf{S}$ με την δοθείσα κλίση $m$.

**9.** $\mathbf{S}(3, -4); m = 2$

**10.** $\mathbf{S}(-2, 1); m = -3$

**11.** $\mathbf{S}(0, -5); m = 0$

**12.** $\mathbf{S}(2 - 3)$; χωρίς κλίση

**13.** $\mathbf{S}(-2, -3); m = \frac{2}{3}$

**14.** $\mathbf{S}(1, -5); m = -\frac{3}{4}$

**15.** $\mathbf{S}(1, 0)$; χωρίς κλίση

**16.** $\mathbf{S}(-3, 4); m = 0$

Στις Ασκήσεις 17-21, προσδιορίστε εάν οι ευθείες με τις δοθείσες διανυσματικές παραμετρικές εξισώσεις είναι (α) παράλληλες, (β) κάθετες, ή (γ) ούτε παράλληλες ούτε κάθετες.

**17.** $\mathfrak{L}_1 : \mathbf{u} = (2, -1) + r(3, 2), \ \mathfrak{L}_2 : \mathbf{u} = (-3, 1) + r(6, 4)$

**18.** $\mathfrak{L}_1 : \mathbf{u} = (4, 7) + r(-1, 3), \ \mathfrak{L}_2 : \mathbf{u} = (-2, 5) + r(6, 2)$

**19.** $\mathfrak{L}_1: \ \mathbf{u} = (3, -5) + r(2, -3), \ \mathfrak{L}_2: \ \mathbf{u} = (-1, 1) + r(-6, 9)$

**20.** $\mathfrak{L}_1: \ \mathbf{u} = (1, -2) + r(-2, -3), \ \mathfrak{L}_2: \ \mathbf{u} = (4, 2) + r(4, -3)$

**21.** $\mathfrak{L}_1: \ \mathbf{u} = (6, 1) + r(-3, 6), \ \mathfrak{L}_2: \ \mathbf{u} = (-2, 1) + r(4, 2)$

**22.** Προσδιορίστε ποιες από τις παράλληλες ευθείες στις Ασκήσεις 17-21 συμπίπτουν.

Στις Ασκήσεις 23-28, προσδιορίστε εάν ή όχι τα τρία δοθέντα σημεία $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$, είναι συγγραμικά.

**23.** $\mathbf{R}(2, 1), \mathbf{S}(-1, 3), \mathbf{T}(5, -1)$

**24.** $\mathbf{R}(1, -2), \mathbf{S}(7, 1), \mathbf{T}(-3, -4)$

**25.** $\mathbf{R}(8, -3), \mathbf{S}(-4, 5), \mathbf{T}(2, 4)$

**26.** $\mathbf{R}(3, -1), \mathbf{S}(-2, -3), \mathbf{T}(-1, -3)$

**27.** $\mathbf{R}(1, 0), \mathbf{S}(0, -3), \mathbf{T}(3, 3)$

**28.** $\mathbf{R}(2, 0), \mathbf{S}(0, -5), \mathbf{T}(4, 5)$

Στις Ασκήσεις 29-36, γράψτε μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για την ευθεία που διέρχεται από το δοθέν σημείο $\mathbf{S}$ (α) και είναι παράλληλη και (β) κάθετη στην ευθεία με την δοθείσα παραμετρική διανυσματική εξίσωση.

**29.** $\mathbf{S}(-2, 1); \mathbf{u} = (3, 0) + r(2, -1)$

**30.** $\mathbf{S}(1, 2); \mathbf{u} = (-3, -2) + r(3, 4)$

**31.** $\mathbf{S}(3, 4); \mathbf{u} = (1, 5) + r(5, -2)$

**32.** $\mathbf{S}(2, 1); \mathbf{u} = (-1, 7) + r(1, 3)$

**33.** $\mathbf{S}(0, 4); \mathbf{u} = (2, 2) + r(-3, 3)$

**34.** $\mathbf{S}(0, 0); \mathbf{u} = (1, -1) + r(4, 3)$

**35.** $\mathbf{S}(-2, -3); \mathbf{u} = (3, 3) + r(5, 6)$

**36.** $\mathbf{S}(4, -2); \mathbf{u} = (1, 2) + r(3, -4)$

Στις Ασκήσεις 37-42, προσδιορίστε εάν η γραμμή $\mathfrak{L}_1$ που περιέχει τα δοθέντα σημεία $\mathbf{Q}$ και $\mathbf{R}$ είναι (α) παράλληλη (β) κάθετη, ή (γ) ούτε παράλληλη ούτε κάθετη, στην ευθεία $\mathfrak{L}_2$ που περιέχει τα δοθέντα σημεία $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$.

**37.** $\mathfrak{L}_1: \ \mathbf{Q}(3, 1)$ και $\mathbf{R}(4, 3)$; $\mathfrak{L}_2: \ \mathbf{S}(2, 4)$ και $\mathbf{T}(4, 8)$

**38.** $\mathfrak{L}_1: \ \mathbf{Q}(2, -5)$ και $\mathbf{R}(1, 2)$; $\mathfrak{L}_2: \ \mathbf{S}(6, 5)$ και $\mathbf{T}(-1, 4)$

**39.** $\mathfrak{L}_1$ : $\mathbf{Q}(-1,-2)$ και $\mathbf{R}(2,2)$; $\mathfrak{L}_2$ : $\mathbf{S}(-5,7)$ και $\mathbf{T}(3,1)$

**40.** $\mathfrak{L}_1$ : $\mathbf{Q}(4,-5)$ και $\mathbf{R}(2,-1)$; $\mathfrak{L}_2$ : $\mathbf{S}(6,-2)$ και $\mathbf{T}(-2,3)$

**41.** $\mathfrak{L}_1$ : $\mathbf{Q}(1,-1)$ και $\mathbf{R}(3,0)$; $\mathfrak{L}_2$ : $\mathbf{S}(0,3)$ και $\mathbf{T}(1,5)$

**42.** $\mathfrak{L}_1$ : $\mathbf{Q}(2,0)$ και $\mathbf{R}(0,-2)$; $\mathfrak{L}_2$ : $\mathbf{S}(-1,3)$ και $\mathbf{T}(2,-4)$

**43.** Δοθέντος ότι η $\mathfrak{L}$ είναι το γράφημα της παραμετρικής διανυσματικής εξίσωσης $\mathbf{u} = (a,b) + r(c,d)$, γράψτε μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για τη ευθεία $\mathfrak{M}$ που είναι παράλληλη στην $\mathfrak{L}$ και περιέχει το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{T}(x_2, y_2)$.

**44.** Στην Άσκηση 43, γράψτε μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για την ευθεία που είναι κάθετη στην $\mathfrak{L}$ και περιέχει το μέσο του δοθέντος τμήματος.

***45.** Έστω $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ είναι μη συμπίπτουσες παράλληλες ευθείες με διάνυσμα κατεύθυνσης $\mathbf{v}$, και έστω $\mathbf{S}$ είναι ένα σημείο στην $\mathfrak{L}_1$ αλλά όχι στην $\mathfrak{L}_2$ και το $\mathbf{T}$ είναι ένα σημείο της $\mathfrak{L}_2$ αλλά όχι της $\mathfrak{L}_1$. Δείξτε ότι εάν υπήρχε ένα σημείο $\mathbf{R}$ πάνω στις $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$, τότε θα είχατε $(\mathbf{r}-\mathbf{s})\cdot\mathbf{v_p} = 0$ και $(\mathbf{r}-\mathbf{t})\cdot\mathbf{v_p} = 0$. Δείξτε στη συνέχεια, ότι αφού $(\mathbf{t}-\mathbf{s}) = (\mathbf{r}-\mathbf{s}) - (\mathbf{r}-\mathbf{t})$, θα έχετε $(\mathbf{t}-\mathbf{s})\cdot\mathbf{v_p} = 0$ και συνεπώς ότι το $\mathbf{T}$ θα βρίσκεται στην $\mathfrak{L}_1$. Τι συμπέρασμα βγάζετε;

***46.** Αποδείξτε ότι εάν τα $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$ είναι συγγραμικά σημεία, τότε $(\mathbf{b}-\mathbf{a})(\mathbf{c}-\mathbf{a})_\mathbf{p} = 0$.

# Καρτεσιανές Εξισώσεις Ευθειών

## 2.4. Κανονική Καρτεσιανή Μορφή μιας Εξίσωσης μιας Ευθείας

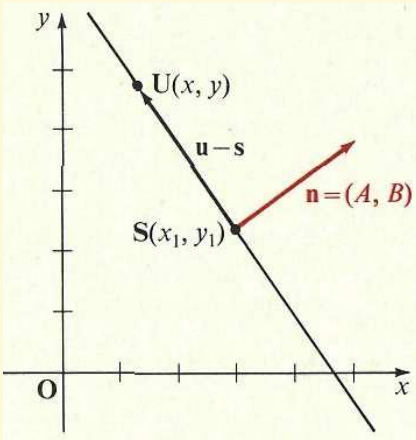
Η κανονική Καρτεσιανή μορφή (σελίδα 78) μιας εξίσωσης μιας ευθείας $\mathfrak{L}$ στο επίπεδο συντεταγμένων,

$$Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0,$$

μπορεί να προκύψει με πολλούς τρόπους. Ένας απ•αυτούς περιγράφεται στις Ασκήσεις 35 και 36 στη σελίδα 114. Σε τούτη την ενότητα, θα δείτε πως η κανονική Καρτεσιανή μορφή μπορεί να προέλθει από μια διανυσματική εξίσωση της $\mathfrak{L}$.

Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα κάθετο σε ένα διάνυσμα κατεύθυνσης μιας ευθείας $\mathfrak{L}$ λέγεται ότι ένα **κανονικό διάνυσμα** (normal vector) για την $\mathfrak{L}$. Το Σχήμα 2.11 δείχνει μια ευθεία $\mathfrak{L}$ που περιέχει ένα σημείο $\mathbf{S}(x_1, y_1)$, μαζί με ένα κανονικό διάνυσμα $\mathbf{n} = (A, B)$ της $\mathfrak{L}$, όπου $A$ και $B$ παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς όχι συγχρόνως και οι δύο 0.

***Σχήμα 2.11:***




Εάν $\mathbf{U}(x, y)$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο στο επίπεδο συντεταγμένων, τότε το $\mathbf{U}$ βρίσκεται στην $\mathfrak{L}$ εάν και μόνο εάν το διάνυσμα $\mathbf{u} - \mathbf{s}$ είναι παράλληλο στη $\mathfrak{L}$, δηλαδή, εάν και μόνο εάν το $\mathbf{u} - \mathbf{s}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{n}$. Προκύπτει (δείτε σελίδα 92) ότι μια εξίσωση της $\mathfrak{L}$ είναι η

$$(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

ή

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}.$$

Επειδή $\mathbf{u} = (x, y), \mathbf{s} = (x_1, y_1)$, και $\mathbf{n} = (A, B)$, αυτή η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως

$$(x, y) \cdot (A, B) = (x_1, y_1) \cdot (A, B),$$

ή

$$Ax + By = Ax_1 + By_1.$$

Τώρα, επειδή τα $x_1, y_1, A$, και $B$ είναι σταθερές, ο αριθμός $Ax_1 + By_1$ είναι επίσης μια σταθερά, η οποία, για ευκολία θα την συμβολίζουμε με $-C$. Τότε παίρνετε, ως εξίσωση για την $\mathfrak{L}$,

$$Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0. \tag{1}$$

□

Η Καρτεσιανή εξίσωση 1 καλείται συνήθως η **αριθμητική εξίσωση** (scalar equation) της $\mathfrak{L}$ επειδή δεν περιέχει διανύσματα.

***Παράδειγμα 1.*** Βρείτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία $\mathfrak{L}$ που περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(1, 4)$ και έχει το $\mathbf{v} = (3, -2)$ ως ένα διάνυσμα κατεύθυνσης.

*Λύση(1):* Επειδή ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για την $\mathfrak{L}$ είναι το $(3, -2)$, έχουμε ότι το $\mathbf{n} = (2, 3)$ είναι ένα κανονικό διάνυσμα για την $\mathfrak{L}$. Οπότε επειδή το $\mathbf{S}(1, 4)$ βρίσκεται στην $\mathfrak{L}$, εάν $\mathbf{U}(x, y)$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο στην $\mathfrak{L}$, έχετε

$$(\mathbf{u} - \mathbf{s})\mathbf{n} = 0.$$

Επειδή $\mathbf{u} = (x, y), \mathbf{s} = (1, 4)$, και $\mathbf{n} = (2, 3)$, αυτή η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$[(x, y) - (1, 4)] \cdot (2, 3) = 0,$$
$$(x, y) \cdot (2, 3) - (1, 4) \cdot (2, 3) = 0,$$

ή

$$2x + 3y - 14 = 0,$$

που είναι η ζητούμενη Καρτεσιανή εξίσωση.

*Λύση(2):* Παρατηρείστε ότι αφού το $(3, -2)$ είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για την $\mathfrak{L}$, ένα κανονικό διάνυσμα για την $\mathfrak{L}$ είναι το $\mathbf{n} = (A, B) = (2, 3)$. Οπότε, αντικαθιστώντας στην Εξίσωση 1 παραπάνω, παίρνετε $A = 2$ και $B = 3$, δηλαδή,

$$2x + 3y + C = 0.$$

Επειδή το $\mathbf{S}(1, 4)$ βρίσκεται στην $\mathfrak{L}$, μπορείτε να αντικαταστήσετε το $x$ με το 1 και το $y$ με το 4 σε αυτήν την εξίσωση και να πάρετε

$$2(1) + 3(4) + C = 0,$$

ή

$$C = -14.$$

Οπότε η Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την $\mathfrak{L}$ είναι η

$$2x + 3y - 14 = 0.$$

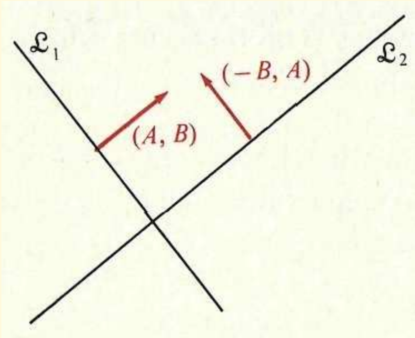
□

Επειδή τα διανύσματα $(A, B)$ και $(-B, A)$ είναι κάθετα, τότε εάν υποθέσουμε ότι είναι τα κανονικά διανύσματα δύο ευθειών $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ στο επίπεδο, αντίστοιχα, τότε οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ πρέπει να είναι κάθετες (Σχήμα 2.12). Προκύπτει ότι εξισώσεις της μορφής

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ -Bx + Ay + C' &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

όπου $A^2 + B^2 \neq 0$, είναι Καρτεσιανές εξισώσεις για κάθετες ευθείες.

**Σχήμα 2.12:**




***Παράδειγμα 2.*** Βρείτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία που περιέχει το $\mathbf{S}(5, -1)$ και είναι κάθετη στην ευθεία με Καρτεσιανή εξίσωση

$$3x - 4y + 6 = 0.$$

*Λύση:* Από τις εξισώσεις 1, η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής

$$4x + 3y + C' = 0.$$

Επειδή το $\mathbf{S}(5,-1)$ βρίσκεται στην ευθεία, μπορείτε να αντικαταστήσετε το $x$ με το 5 και το $y$ με -1 και να πάρετε

$$4(5)+3(-1)+C'=0,$$

ή

$$C'=-17.$$

Οπότε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία είναι η

$$4x+3y-17=0.$$

□

Εάν το $(A,B)$ είναι ένα κανονικό διάνυσμα για μια ευθεία $\mathfrak{L}$, τότε επίσης είναι ένα κανονικό διάνυσμα για οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη με την $\mathfrak{L}$. Οπότε, οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} Ax+By+C&=0,\\ Ax+By+C'&=0, \end{aligned} \tag{3}$$

όπου $A^2+B^2\neq 0$ είναι Καρτεσιανές εξισώσεις για παράλληλες ευθείες.

***Παράδειγμα 3.*** Βρείτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για μια ευθεία η οποία περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(3,-2)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία με Καρτεσιανή εξίσωση $2x-5y-4=0$.

*Λύση:* Από τις Εξισώσεις ;;, η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής

$$2x-5y+C'=0.$$

Επειδή το $\mathbf{S}(3,-2)$ βρίσκεται στην ευθεία, μπορείτε να αντικαταστήσετε το $x$ με το 3 και το $y$ με το -2 και να πάρετε

$$2(3)-5(-2)+C'=0,$$

ή

$$C' = -16.$$

Οπότε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία είναι η

$$2x - 5y - 16 = 0.$$

$\square$

Παρατηρείστε ότι όταν μια εξίσωση μιας ευθείας $\mathfrak{L}$ δίνεται στη κανονική Καρτεσιανή μορφή,

$$Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0,$$

τότε ένα κανονικό διάνυσμα για την $\mathfrak{L}$ είναι το $\mathbf{n} = (A, B)$ και ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για την $\mathfrak{L}$ είναι το $\mathbf{v} = (-B, A)$. Οπότε, η κλίση της $\mathfrak{L}$ δίνεται από το

$$m = -\frac{A}{B}, \text{ εάν } B \neq 0.$$

## Ασκήσεις 2.4

Στις Ασκήσεις 1–8, βρείτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία που περιέχει το δοθέν σημείο $\mathbf{S}$ και έχει κανονικό διάνυσμα το δοθέν $\mathbf{n}$.

**1.** $\mathbf{S}(4, 2); \mathbf{n} = (3, 5)$

**2.** $\mathbf{S}(3, 7); \mathbf{n} = (2, 4)$

**3.** $\mathbf{S}(2, -1); \mathbf{n} = (1, -7)$

**4.** $\mathbf{S}(5, -3); \mathbf{n} = (-6, 1)$

**5.** $\mathbf{S}(-7, 3); \mathbf{n} = (-1, -2)$

**6.** $\mathbf{S}(-6, -1); \mathbf{n} = (-3, -3)$

**7.** $\mathbf{S}(-2, -2); \mathbf{n} = (1, 1)$

**8.** $\mathbf{S}(-8, -3); \mathbf{n} = (-4, 2)$

Στις Ασκήσεις 9–14, βρείτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία που περιέχει το δοθέν $\mathbf{S}$ και έχει ως διάνυσμα κατεύθυνσης το δοθέν $\mathbf{v}$.

**9.** $\mathbf{S}(3,7); \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

**10.** $\mathbf{S}(2,-1); \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

**11.** $\mathbf{S}(-4,5); \mathbf{v} = -6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

**12.** $\mathbf{S}(6,3); \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

**13.** $\mathbf{S}(7,-5); \mathbf{v} = 6\mathbf{i}$

**14.** $\mathbf{S}(0,5); \mathbf{v} = -3\mathbf{j}$

Στις Ασκήσεις 15–20, βρείτε ποιά ζευγάρια ευθειών με τις δοθείσες Καρτεσιανές εξισώσεις είναι κάθετα και ποιά παράλληλα.

**15.** $2x - 3y + 7 = 0, 4x - 6y - 15 = 0$

**16.** $5x - 7y + 13 = 0, -15x + 21y + 25 = 0$

**17.** $4x + 5y - 9 = 0, 10x - 8y + 17 = 0$

**18.** $6x - 8y + 19 = 0, 4x + 3y + 5 = 0$

**19.** $3x - 6y + 8 = 0, -2x + 4y - 7 = 0$

**20.** $8x + 20y - 7 = 0, 15x - 6y - 4 = 0$

Στις Ασκήσεις 21–28, γράψτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία που περιέχει το δοθέν σημείο $\mathbf{S}$ και είναι (α) κάθετη και (β) παράλληλη στην ευθεία με την δοθείσα Καρτεσιανή εξίσωση.

**21.** $\mathbf{S}(1,3);\ 2x - 5y + 7 = 0$

**22.** $\mathbf{S}(5,2);\ 3x + 4y - 8 = 0$

**23.** $\mathbf{S}(3,-2);\ 5x - 7y + 10 = 0$

**24.** $\mathbf{S}(2,-4);\ 3x - 4y + 12 = 0$

**25.** $\mathbf{S}(-6,2);\ 5x + 6y - 0 = 0$

**26.** $\mathbf{S}(-3,5);\ 6x - 3y + 18 = 0$

**27.** $\mathbf{S}(-1,-1);\ x - 2y - 7 = 0$

**28.** $\mathbf{S}(-8,-3);\ 4x + 7y - 11 = 0$

Στις Ασκήσεις 29–34, βρείτε μια Καρτεσιανή εξίσωση για την ευθεία που περιέχει τα δοθέντα σημεία $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$.

**29.** $\mathbf{S}(3,5)$ και $\mathbf{T}(2,6)$

**30.** $\mathbf{S}(2,7)$ και $\mathbf{T}(5,1)$

**31.** $\mathbf{S}(4,-5)$ και $\mathbf{T}(-2,3)$

**32.** $\mathbf{S}(-4,2)$ και $\mathbf{T}(3,-7)$

**33.** $\mathbf{S}(-1,-1)$ και $\mathbf{T}(0,-1)$

**34.** $\mathbf{S}(3,-5)$ και $\mathbf{T}(3,2)$

Στις Ασκήσεις 35 και 36, χρησιμοποιείστε την παρακάτω πρόταση της γεωμετρίας του επιπέδου: Η ευθεία η οποία είναι η μεσοκάθετος του τμήματος $\overline{\mathbf{ST}}$είναι το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν απο τα άκρα $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$.

***35.** Αποδείξτε ότι κάθε ευθεία σε ένα επίπεδο συντεταγμένων είναι το γράφημα κάποιας γραμμικής Καρτεσιανής εξίσωσης $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$. [Υπόδειξη: Έστω $\mathfrak{L}$ είναι μια ευθεία του επιπέδου και επιλέξτε δύο σημεία $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ έτσι ώστε η $\mathfrak{L}$ είναι η μεσοκάθετος του $\overline{\mathbf{ST}}$. Δείξτε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{U}(x,y) \text{ είναι πάνω στη και } \mathfrak{L} \\ d(\mathbf{U},\mathbf{S}) = d(\mathbf{U},\mathbf{T}) \end{array} \right\} \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \\ 2(x_2-x_1)x + 2(y_2-y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0. \end{array} \right\} \tag{5}$$

Είναι η τελευταία εξίσωση γραμμική ως προς τις μεταβλητές $x$ και $y$; Με άλλα λόγια, είναι της μορφής $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$;]

***36.** Αποδείξτε ότι το γράφημα μιας οποιασδήποτε γραμμικής Καρτεσιανής εξίσωσης δύο μεταβλητών είναι ευθεία. [Υπόδειξη: Έστω $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$, είναι μια γραμμική εξίσωση ως προς $x$ και $y$. Η Εξίσωση 5 της Άσκησης 35 μας υποδεικνύει να διαλέξουμε κατάλληλους αριθμούς $x_1, x_2, y_1$, και $y_2$, ως συντεταγμένες των σημείων $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$, έτσι ώστε

$$2(x_2-x_1) = A, 2(y_2-y_1) = B, x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = C. \tag{6}$$

Δείξτε ότι αυτή η επιλογή είναι δυνατή με το να λύσουμε τις δυο πρώτες εξισώσεις στην 6 ως προς $x_2$ και $y_2$ και στην συνέχεια απαλοίφοντας τα $x_2, y_2$ από την τρίτη εξίσωση στην 6. Η δοθείσα εξίσωση $Ax + By + C = 0$ είναι τώρα η *ίδια* με την 5. Χρησιμοποιείστε το γεγονός ότι οι Εξισώσεις 5 και 4 είναι ισοδύναμες για να δείξετε ότι το γράφημα της $Ax + By + C = 0$ είναι το $\{\mathbf{U} : d(\mathbf{U}, \mathbf{S}) = d(\mathbf{U}, \mathbf{T})\}$.]

***37.** Έστω $\mathfrak{L}$ είναι η ευθεία με Καρτεσιανή εξίσωση $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$. Γράψτε μια Καρτεσιανή εξίσωση για την ευθεία $\mathfrak{M}$ που είναι παράλληλη στην $\mathfrak{L}$ και περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(a, b)$.

***38.** Γράψτε μια Καρτεσιανή εξίσωση για την ευθεία $\mathfrak{M}$ που είναι κάθετη στην $\mathfrak{L}$ της Άσκησης 37 και περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(a, b)$.

***39.** Δείξτε ότι εάν το σημείο $\mathbf{S}(h, k)$ βρίσκεται σε μια ευθεία $\mathfrak{L}$ με Καρτεσιανή εξίσωση $Ax + By + C = 0, B \neq 0$, τότε η $\mathfrak{L}$ τέμνει τον $y$-άξονα στο $\mathbf{Q}(0, \frac{A}{B}h + k)$.

***40.** Δείξτε ότι εάν το σημείο $\mathbf{S}(h, k)$ βρίσκεται σε μια ευθεία $\mathfrak{L}$ με Καρτεσιανή εξίσωση $Ax + By + C = 0, A \neq 0$, τότε η $\mathfrak{L}$ τέμνει τον $x$-άξονα στο $\mathbf{R}(\frac{B}{A}k + h, 0)$.

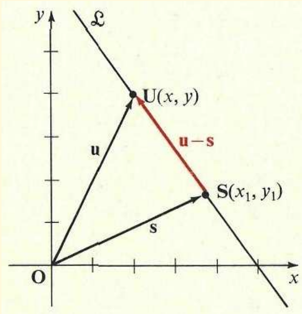
## 2.5. Δυο Μορφές των Εξισώσεων της Ευθείας: Σημείο-Κλίση-και Δυο Σημεία

Η κανονική Καρτεσιανή εξίσωση μιας ευθείας

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0,$$

μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα με ποικίλες διαφορετικές μορφές. Μερικές απ' αυτές έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον διότι μας δίνουν την δυνατότητα να πάρουμε μια εξίσωση απ' ευθείας από συγκεκριμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της, ή αντίστροφα, μας δίνουν την δυνατότητα να αποκαλύψουμε συγκεκριμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά μιας ευθείας απ′ ευθείας απο την εξίσωσή της. Δυο από αυτές τις χρήσιμες μορφές θα συζητηθούν στη παρούσα ενότητα.

***Σχήμα 2.13:***




Το Σχήμα 2.13 δείχνει μια γραμμή $\mathfrak{L}$ που διέρχεται από ένα δοθέν σημείο $\mathbf{S}(x_1, y_1)$. Εάν $\mathbf{U}(x, y)$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο στην $\mathfrak{L}$ διαφορετικό από το $\mathbf{S}$, τότε ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για την $\mathfrak{L}$ είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{u} - \mathbf{s} &= (x, y) - (x_1, y_1)\\ &= (x - x_1, y - y_1).\end{aligned}$$

Επίσης είχατε δεί στην σελίδα **;;** ότι εάν $x \neq x_1$, τότε η κλίση $m$ της $\mathfrak{L}$ δίνεται από τον τύπο

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m, \tag{1}$$

από την οποία παίρνετε

□

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{2}$$

Αυτή η Καρτεσιανή εξίσωση για την $\mathfrak{L}$ καλείται η **μορφή σημείο-κλίση** της εξίσωσης της

*Διανύσματα στο Επίπεδο*
*Το ιστορικό Ξεκίνημα*
*Ευθείες στο Επίπεδο*
*Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη*
*Εφαρμογές των Ευθειών*
*Απαντήσεις*
*Τριγωνομετρικοί Πινακες*
*Τμ. Μαθηματικών*
*Πρώτη Σελίδα*
◀◀ ▶▶
◀ ▶
*Σελίδα 116 από 218*
*Πίσω*
*Όλη η οθόνη*
*Κλείσε*
*Έξοδος*

ευθείας. Αν και η Εξίσωση 1 δεν έχει νόημα για $x = x_1$, η Εξίσωση **;;** ικανοποιείται από τις συντεταγμένες *κάθε* σημείου $(x, y)$ της $\mathfrak{L}$, επειδή για $(x, y) = (x_1, y_1)$ παίρνετε

$$y_1 - y_1 = m(x_1 - x_1),$$

ή

$$0 = 0.$$

Εάν είναι γνωστή η κλίση μιας ευθείας και ένα σημείο της, τότε μπορείτε να γράψετε κατευθείαν μια εξίσωση της μορφής 2 και στη συνέχεια να την μετασχηματίσετε σε μια ισοδύναμη Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

***Παράδειγμα 1.*** Γράψτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\mathbf{S}(7, -1)$ και έχει κλίση ίση με 3.

*Λύση:* Εάν θέσετε $x_1 = 7, y_{=} - 1$, και $m = 3$ στην Εξίσωση 2, παίρνετε

$$y - (-1) = 3(x - 7).$$

Οπότε έχετε,

$$y + 1 = 3x - 21,$$

ή

$$3x - y - 22 = 0.$$

□

Εάν μια ευθεία $\mathfrak{L}$ περιέχει τα σημεία $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{T}(x_2, y_2)$, με $x_2 \neq x_1$, τότε, όπως έχετε δεί, η κλίση $m$ της $\mathfrak{L}$ δίνεται από τον τύπο

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x - 1}.$$

Εάν αντικαταστήσετε αυτήν την έκφραση για το $m$ στην Εξίσωση 2 παραπάνω, παίρνετε την ισοδύναμη εξίσωση

$$\square \qquad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x - 1}(x - x_1). \qquad (3)$$

Αυτή η Καρτεσιανή εξίσωση καλείται η **μορφή δύο σημείων** της εξίσωσης για την $\mathfrak{L}$.

***Παράδειγμα 2.*** Γράψτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία που περιέχει τα σημεία $\mathbf{S}(2, 3)$ και $\mathbf{T}(4, -7)$.

*Λύση:* Εάν αντικαταστήσετε τα $x_1$ και $y_1$ με τις συντεταγμένες του $\mathbf{S}(2, 3)$ και τα $x_2$ και $y_2$ με τις συντεταγμένες του $\mathbf{T}(4, -7)$ στην Εξίσωση 3, παίρνετε

$$\begin{aligned} y - 3 &= \frac{-7 - 3}{4 - 2}(x - 2), \\ y - 3 &= -5(x - 2), \\ y - 3 &= -5x + 10, \end{aligned}$$

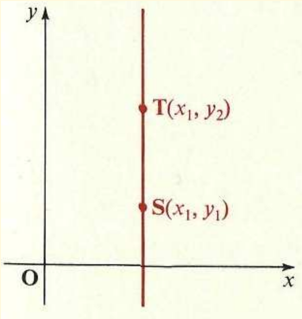
ή

$$5x + y - 13 = 0.$$

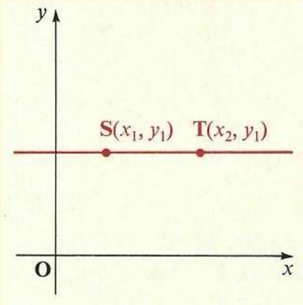
$\square$

Εάν οι $x$–συντεταγμένες δυο δοθέντων σημείων είναι ίσες, τότε η ευθεία που περιέχει αυτά τα σημεία είναι κάθετη (Σχήμα 2.14), και η κλίση της δεν ορίζεται. Όμως, επειδή κάθε σημείο στην ευθεία πρέπει να έχει την ίδια $x$– συντεταγμένη, ας πούμε $x_1$, η ευθεία ορίζεται πλήρως με το να γνωρίζουμε αυτή την συντεταγμένη, και κατά συνέπεια μια Καρτεσιανή εξίσωση για την ευθεία είναι η

$$x = x_1.$$




***Σχήμα 2.14:***




***Σχήμα 2.15:***

Αντίθετα, εάν οι $y$–συντεταγμένες δύο δοθέντων σημείων είναι ίσες, τότε η ευθεία που τα περιέχει είναι οριζόντια (Σχήμα 2.15), και η ευθεία έχει κλίση 0. προκύπτει αμέσως από την Εξίσωση 2, σελίδα 116, ότι

$$y - y - 1 = 0,$$

και συνεπώς η

$$y = y_1$$

είναι η Καρτεσιανή εξίσωση για την ευθεία. Στις Ενότητες 2.1 και 2.2, βρήκατε δυο μορφές ενος συστήματος παραμετρικών εξισώσεων για την ευθεία:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + r(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + r(y_2 - y - 1) \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} x &= x_1 + rh \\ y &= y_1 + rk \end{aligned}$$

Μπορείτε τώρα να δείτε πως συσχετίζονται αυτά τα συστήματα συντεταγμένων με τις εξισώσεις του παρόντος κεφαλαίου. Σε κάθε περίπτωση, λύνουμε τις πρώτες εξισώσεις ως προς το $r$:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad r = \frac{x - x_1}{h}.$$

Στην συνέχεια αντικαταστήσετε το $r$ στη δεύτερες εξισώσεις:

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1) \qquad y = y_1 + \frac{x - x_1}{h}(k),$$

ή

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x - 1}(x - x - 1) \qquad y - y_1 = \frac{k}{h}(x - x_1). \tag{4}$$

Επειδή ο λόγος $\frac{k}{h}$ είναι η κλίση για την ευθεία εάν $h \neq 0$, μπορείτε να συμπεράνετε ότι οι εξισώσεις 4 αντιστοιχούν στις μορφές που αναπτύξαμε σε τούτη την ενότητα.

### Ασκήσεις 2.5

Στις Ασκήσεις 1-10, γράψτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία που περιέχει το δοθέν σημείο $\mathbf{S}$ και έχει την δοθείσα κλίση $m$.

**1.** $\mathbf{S}(2, 5); m = 2$

**2.** $\mathbf{S}(6, 1); m = 4$

**3.** $\mathbf{S}(3, -4); m = -1$

**4.** $\mathbf{S}(7, -2); m = 5$

**5.** $\mathbf{S}(-1, 5); m = -3$

**6.** $\mathbf{S}(-4, 6); m = -2$

**7.** $\mathbf{S}(-1, -1); m = \frac{1}{2}$

**8.** $\mathbf{S}(-3, -5); m = -\frac{2}{3}$

**9.** $\mathbf{S}(2, -6); m = -\frac{3}{5}$

**10.** $\mathbf{S}(-4, -1); m = 0$

Στις Ασκήσεις 11-22, γράψτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία που περιέχει τα δοθέντα δυο σημεία $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$.

**11.** $\mathbf{S}(1,5)$ και $\mathbf{T}(3,2)$

**12.** $\mathbf{S}(4,1)$ και $\mathbf{T}(2,6)$

**13.** $\mathbf{S}(2,-4)$ και $\mathbf{T}(-1,2)$

**14.** $\mathbf{S}(3,-7)$ και $\mathbf{T}(1,-4)$

**15.** $\mathbf{S}(-6,2)$ και $\mathbf{T}(7,-2)$

**16.** $\mathbf{S}(-4,3)$ και $\mathbf{T}(-2,1)$

**17.** $\mathbf{S}(-3,4)$ και $\mathbf{T}(-1,-1)$

**18.** $\mathbf{S}(-2,-3)$ και $\mathbf{T}(-5,-4)$

**19.** $\mathbf{S}(4,-3)$ και $\mathbf{T}(7,-3)$

**20.** $\mathbf{S}(-3,2)$ και $\mathbf{T}(6,2)$

**21.** $\mathbf{S}(3,5)$ και $\mathbf{T}(3,-2)$

**22.** $\mathbf{S}(-4,6)$ και $\mathbf{T}(-4,-3)$

Στις Ασκήσεις 23-26, δίνονται οι συντεταγμένες των κορυφών ενός τριγώνου. Σε κάθε άσκηση, βρείτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για τις ευθείες των πλευρών του τριγώνου.

**23.** $\mathbf{A}(0,0), \mathbf{B}(4,2), \mathbf{C}(-2,6)$

**24.** $\mathbf{A}(0,0), \mathbf{B}(-6,2), \mathbf{C}(2,4)$

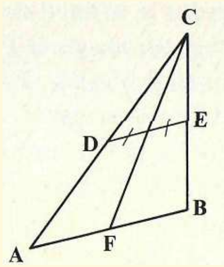
**25.** $\mathbf{A}(-1,3), \mathbf{B}(3,7), \mathbf{C}(7,3)$

**26.** $\mathbf{A}(-3,-3), \mathbf{B}(-3,3), \mathbf{C}(5,0)$

**27-30.** Επαναλάβετε τις Ασκήσεις 23-26 για τις ευθείες που περιέχουν τους διαμέσους του τριγώνου.

**31-34.** Επαναλάβετε τις Ασκήσεις 23-26 για τις ευθείες που περιέχουν τα ύψη του τριγώνου.

Στις Ασκήσεις 35 και 36, θυμηθείτε από την γεωμετρία ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο στη τρίτη πλευρά και έχει μήκος ίσο με το ένα τρίτο της τρίτης πλευράς, και αυτό το τμήμα διχοτομείται απο μια διάμεσο του τριγώνου.




$\overline{\mathbf{DE}} \| \overline{\mathbf{AB}}$

$\overline{\mathbf{CF}}$ διχοτομεί το $\overline{\mathbf{DE}}$

**35.** Βρείτε τις Καρτεσιανές εξισώσεις στη κανονική μορφή για τις ευθείες που περιέχουν τους διαμέσους του τριγώνου που έχει $\mathbf{S}(2, 6)$, $\mathbf{T}(5, 2)$, και $\mathbf{O}(0, 0)$ ως μέσα των πλευρών του.

**36.** Επαναλάβετε την Άσκηση 35 για το τρίγωνο που έχει τα $\mathbf{R}(0, 5)$, $\mathbf{S}(2, 3)$, και $\mathbf{T}(-3, -3)$ ως μέσα των πλευρών του.

***37.** Χρησιμοποιείστε την μέθοδο του Παραδείγματος 3 σελίδα 94, για να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου που ορίζεται στην Άσκηση 35.

***38.** Χρησιμοποιείστε την μέθοδο του Παραδείγματος 3 σελίδα 94, για να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου που ορίζεται στην Άσκηση 36.

***39.** Χρησιμοποιείστε τα αποτελέσματα της Άσκησης 37 για να βρείτε Καρτεσιανές εξισώσεις για τις ευθείες που περιέχουν τα ύψη του τριγώνου που ορίζεται στην Άσκηση 35.

***40.** Χρησιμοποιείστε τα αποτελέσματα της Άσκησης 38 για να βρείτε Καρτεσιανές εξισώσεις για τις ευθείες που περιέχουν τα ύψη του τριγώνου που ορίζεται στην Άσκηση 36.

## 2.6. Άλλες Μορφές των Εξισώσεων της Ευθείας: Κλίση–Τέμνουσα και Τέμνουσας

Τώρα έχετε εξικοιωθεί με τις μορφές

$$Ax + by + C = 0,$$

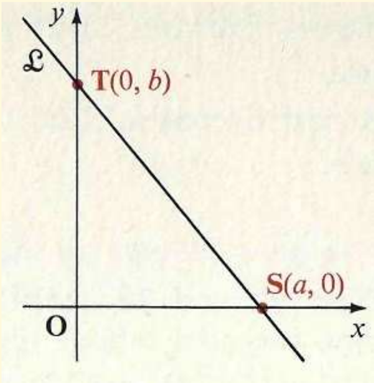
$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

και

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

(όπου $A^2 + B^2 \neq 0$ και $x_2 \neq x_1$) Καρτεσιανών εξισώσεις ευθειών. Δυο άλλες διαφορετικές μορφές θα μελετήσουμε στην ενότητα αυτή. Όπως δείχνει το Σχήμα 2.16, εάν μια γραμμή $\mathfrak{L}$ δεν είναι παράλληλη στον $y$-άξονα, τότε θα πρέπει να τέμνει τον $y$-άξονα σε κάποιο σημείο **T** (δείτε Άσκηση 39, σελίδα 115). Επειδή η $x$-συντεταγμένη κάθε σημείου στον $y$-άξονα είναι 0, οι συντεταγμένες του **T** πρέπει να είναι της μορφής $(0, b), b \in \mathbb{R}$. Ο αριθμός $b$ καλείται η **y-τέμνουσα**(intercept) της $\mathfrak{L}$. Εάν αντικαταστήσετε το $x_1$ με το 0 και το $y_1$ με το $b$ στην Εξίσωση 2 σελίδα 116, παίρνετε

$$y - b = m(x - 0),$$




**Σχήμα 2.16:**

ή

$$y = mx + b. \quad (1)$$

Αυτή η μορφή της εξίσωσης καλείται η **μορφή κλίση-τέμνουσα**, επειδή $m$ είναι η κλίση της $\mathfrak{L}$ και $b$ είναι η $y$-τέμνουσα της $\mathfrak{L}$.

Εάν η κανονική Καρτεσιανή μορφή μιας εξίσωσης μιας μή κάθετης ευθείας $\mathfrak{L}$ λύνεται ως προς την $y$ με όρισμα την $x$, έχετε

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \ (B \neq 0), \\ By &= -Ax - C, \\ y &= -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας αυτήν την εξίσωση με την Εξίσωση 1 παραπάνω, μπορείτε να δείτε ότι

$$m = -\frac{A}{B} \ \text{και} \ \ b = -\frac{C}{B}.$$

Αυτή η έκφραση για το $m$, συμφωνεί, φυσικά, με αυτή που είδαμε στην Ενότητα 2.4.

***Παράδειγμα 1.*** Προσδιορίστε την κλίση και την $y$-τέμνουσα της ευθείας με Καρτεσιανή εξίσωση $3x - 4y = 12$.

*Λύση:* Γράφετε την εξίσωση ισοδύναμα σε μορφή κλίση-τέμνουσα. Έχετε

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 12, \\ -4y &= -3x + 12, \\ y &= \frac{3}{4}x - 3. \end{aligned}$$

Όπως βλέπετε, η κλίση είναι $\frac{3}{4}$ και η $y$-τέμνουσα -3. □

Εάν μια ευθεία $\mathfrak{L}$ δεν είναι παράλληλη στον $x$-άξονα, τότε θα πρέπει να τέμνει τον $x$-άξονα σε κάποιο σημείο. Αυτό το σημείο έχει συντεταγμένες της μορφής $(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$, επειδή η $y$-συντεταγμένη κάθε σημείου του $x$-άξονα είναι 0. (Δείτε το Σχήμα 2.16.) Ο αριθμός $a$ καλείται η **$x$-τέμνουσα της** $\mathfrak{L}$.

Εάν μια ευθεία $\mathfrak{L}$ έχει $x$-τέμνουσα το $a$ και $y$-τέμνουσα το $b$, με $a \neq 0$ και $b \neq 0$, μπορείτε να χρησιμοποιείσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της $\mathfrak{L}$ με τους ορθογώνιους άξονες, $(a, 0)$ και $(0, b)$ αντίστοιχα, στην μορφή δύο σημείων της εξίσωσης μιας ευθείας (Εξίσωση 3 σελίδα 118) για να πάρετε

$$\begin{aligned} y - 0 &= \frac{b-0}{0-a}(x-a), \\ -ay &= bx - ab, \\ bx + ay &= ab, \end{aligned}$$

ή, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\frac{1}{ab}$,

□
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (2)$$

Αυτή η εξίσωση καλείται η **μορφή τέμνουσα** της εξίσωσης της $\mathfrak{L}$.

***Παράδειγμα 2.*** Γράψτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή της ευθείας με $x$-τέμνουσα 3 και $y$-τέμνουσα -5.

*Λύση:* Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση 2 παραπάνω, με $a = 3$ και $b = -5$, έχετε

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1,$$

απο την οποία παίρνετε

$$-5x + 3y = -15,$$

ή

$$5x - 3y - 15 = 0.$$

Αυτή είναι η ζητούμενη Καρτεσιανή εξίσωση για την ευθεία $\mathfrak{L}$. $\square$

Όταν η εξίσωση μιας ευθείας $\mathfrak{L}$ δίνεται στη μορφή $Ax + By + C = 0$, όπου $A, B,$ και $C$ είναι όλα μή μηδενικά, τότε μπορείτε να προσδιορίσετε τα $a$ και $b$, τις $x$- και $y$- τέμνουσες της $\mathfrak{L}$, απλά αντικαθιστώντας τα $y$ και $x$, αντίστοιχα, με το 0. Έχετε

$$a = -\frac{C}{A} \text{ και } b = -\frac{C}{B}.$$

### Ασκήσεις 2.6

Στις Ασκήσεις 1–8, γράψτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία με την δοθείσα κλίση $m$ και $y$-τέμνουσα $b$.

**1.** $m = 2; b = 5$

**2.** $m = -3; b = 2$

**3.** $m = 4; b = -4$

**4.** $m = -2; b = -1$

**5.** $m = \frac{2}{3}; b = 0$

**6.** $m = -\frac{1}{2}; b = 0$

**7.** $m = -\frac{4}{5}; b = 4$

**8.** $m = 0; b = -5$

Στις Ασκήσεις 9–16, βρείτε την κλίση $m$ και την $y$-τέμνουσα της ευθείας με την δοθείσα Καρτεσιανή εξίσωση.

**9.** $3x - 4y + 8 = 0$

**10.** $2x - 5y + 10 = 0$

**11.** $5x + 4y - 16 = 0$

**12.** $x + 3y + 9 = 0$

**13.** $7x - 2y - 4 = 0$

**14.** $3x + 4y + 5 = 0$

**15.** $3y + 6 = 0$

**16.** $5y - 4 = 0$

Στις Ασκήσεις 17–24, γράψτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία με την δοθείσα $x$-τέμνουσα $a$ και $y$-τέμνουσα $b$.

**17.** $a = 2, b = 3$

**18.** $a = 5, b = 1$

**19.** $a = -3, b = 2$

**20.** $a = -4, b = 4$

**21.** $a = 7, b = -2$

**22.** $a = 5, b = -3$

**23.** $a = -1, b = -2$

**24.** $a = -5, b = -4$

Στις Ασκήσεις 25–32, βρείτε την $x$-τέμνουσα $a$ και την $y$-τέμνουσα $b$ της ευθείας με την δοθείσα Καρτεσιανή εξίσωση.

**25.** $3x + 4y - 12 = 0$

**26.** $2x + 3y - 18 = 0$

**27.** $5x - 3y + 15 = 0$

**28.** $x - 7y - 14 = 0$

**29.** $5x - 2y + 10 = 0$

**30.** $8x + 3y - 12 = 0$

**31.** $3x - 5y + 8 = 0$

**32.** $4x + 6y + 7 = 0$

Στις Ασκήσεις 33–40, βρείτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή της ευθείας με τα δοθέντα χαρακτηριστικά:

**33.** Περιέχει την αρχή των αξόνων, και είναι κάθετη στην ευθεία με $x$-τέμνουσα 5 και

$y$-τέμνουσα $-\frac{2}{3}$.

**34.** Περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(3,-2)$, και κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\mathbf{T}(1,1)$ και κλίση $\frac{3}{2}$. Το άθροισμα των τεμνουσών είναι 7, και η κλίση είναι $-\frac{11}{3}$. (Υπόδειξη: Θέστε $\frac{b}{a}=-m$.)

**35.** Το άθροισμα των τεμνουσών είναι 2, και η κλίση είναι $\frac{9}{5}$.

**36.** Το άθροισμα των τεμνουσών είναι 0, και η ευθεία περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(2,4)$.

**37.** Το άθροισμα των τεμνουσών είναι -1, και η ευθεία περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(2,2)$. (Δύο λύσεις)

***38.** Το γινόμενο των τεμνουσών είναι 12, και η ευθεία περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(3,1)$.

***39.** Το γινόμενο των τεμνουσών είναι 6, και η ευθεία περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(\frac{3}{2},-3)$. (Δύο λύσεις)

***40.** Για ποιά τιμή της $a$ είναι κάθετες οι ευθείες με τις παρακάτω εξισώσεις;

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{-2}=1 \text{ και } \frac{x}{-4}+\frac{y}{-2}=1$$

***41.** Για ποιά τιμή της $b$ είναι κάθετες οι ευθείες με τις παρακάτω εξισώσεις;

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{b}=1 \text{ και } \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$$

## 2.7. Συμμετρική Μορφή της Εξίσωσης μιας Ευθείας

Οι συντεταγμένες $h$ και $k$ ενός διανύσματος κατεύθυνσης $(h,k)$ για μιά ευθεία $\mathfrak{L}$ λέγονται **αριθμοί κατεύθυνσης** για την ευθεία $\mathfrak{L}$. Αυτοί οι αριθμοί παίζουν σημαντικό ρόλο σε μια άλλη χρήσιμη μορφή μιας εξίσωσης μιας ευθείας η οποία δεν είναι παράλληλη με κανένα από τους κάθετους συντεταγμενικούς άξονες.

Ας θεωρήσετε μια ευθεία $\mathfrak{L}$ από το σημείο $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ με ένα διάνυσμα κατεύθυνσης $\mathbf{v} = (h, k)$. Μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για την $\mathfrak{L}$ είναι

$$(x, y) = (x_1, y_1) + r(h, k), \;\; r \in \mathbb{R},$$

από την οποία παίρνετε τις παραμετρικές Καρτεσιανές εξισώσεις

$$x = x_1 + rh \text{ και } y = y_1 + rk. \tag{1}$$

Εάν $h \neq 0$ και $k \neq 0$, τότε μπορείτε να λύσετε κάθε μια από τις παραπάνω εξισώσεις ως πρός $r$ και να πάρετε

$$\frac{x - x_1}{h} = r = \frac{y - y_1}{k},$$

από την οποία έχετε

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{y - y_1}{k}. \tag{2}$$

□

Η Εξίσωση 2 καλείται η **συμμετρική μορφή** της εξίσωσης της $\mathfrak{L}$.

Εάν κάποιο από τα $h$ ή $k$ είναι 0, τότε η $\mathfrak{L}$ είναι παράλληλη σε ένα από τους συντεταγμενικούς άξονες, δηλαδή, η $\mathfrak{L}$ είναι κάθετη ή οριζόντια. Σε αυτές τις περιπτώσεις η συμμετρική μορφή δεν ορίζεται. Όμως, από τις Εξισώσεις 1 παραπάνω, παίρνετε $x = x_1$ ή $y = y_1$, αντίστοιχα, ως μια εξίσωση της $\mathfrak{L}$.

Ένα ζευγάρι από αριθμούς κατεύθυνσης για την $\mathfrak{L}$ μπορεί να προσδιορισθεί αφού εντοπίσουμε δύο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ της $\mathfrak{L}$ και παρατηρώντας από την Εξίσωση 1 ότι

$$x_2 = x_1 + ch, \;\; y_2 = y_1 + ck,$$

όπου $c$ είναι μια σταθερά. Κατά συνέπεια, έχετε

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = c(h, k),$$

και συνεπώς τα $x_2 - x_1$ και $y_2 - y_1$ είναι ένα ζευγάρι από αριθμούς κατεύθυνσης για την $\mathfrak{L}$.

***Παράδειγμα 1.*** Γράψτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε συμμετρική μορφή για την ευθεία $\mathfrak{L}$ που διέρχεται από τα σημεία $\mathbf{S}(3, -3)$ και $\mathbf{T}(6, 1)$.

*Λύση:* Ένα ζευγάρι από αριθμούς κατεύθυνσης είναι

$$h = x_2 - x_1 = 6 - 3 = 3$$

και

$$k = y_2 - y_1 = 1 - (-3) = 4.$$

Τότε, αντικαθιστώντας τα $x_1$ και $y_1$ της Εξίσωσης 2 παραπάνω, με τις αντίστοιχες συντεταγμένες του $\mathbf{S}(3, -3)$, ή του $\mathbf{T}(6, 1)$, έχετε

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+3}{4} \text{ ή } \frac{x-6}{3} = \frac{y-1}{4}.$$

Μπορείτε να βεβαιωθείτε ότι κάθε μια από αυτές τις εξισώσεις στην πραγματικά παριστάνει την ίδια ευθεία με την αναγωγή κάθε εξίσωσης στην κανονική Καρτεσιανή μορφή. □

Δοθέντος μιας Καρτεσιανής εξίσωσης σε κανονική μορφή $Ax + By + C = 0$ μιας ευθείας $\mathfrak{L}$, εάν $A$ και $B \neq 0$, τότε μπορείτε να γράψετε μια ισοδύναμη εξίσωση σε συμμετρική μορφή βρίσκοντας απλά ένα σημείο $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ στην $Ax + By + C = 0$, και στην συνέχεια παρατηρώντας ότι το $\mathbf{v} = (-B, A)$ είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για την ευθεία. Οπότε, σε συμμετρική μορφή, έχετε ότι η

$$\frac{x - x_1}{-B} = \frac{y - y_1}{A}$$

είναι μια εξίσωση της $\mathfrak{L}$.

***Παράδειγμα 2.*** Γράψτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε συμμετρική μορφή για την ευθεία με εξίσωση $3x - 4y + 7 = 0$.

*Λύση:* Κατ' αρχήν ας βρούμε μια λύση της $3x - 4y + 7 = 0$ δίνοντας μια τιμή, ας πούμε 1, στο $x$ και λύνοντας ως προς $y$. Έχετε

$$\begin{aligned} 3(1) - 4y + 7 &= 0, \\ -4y &= -10, \\ y &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

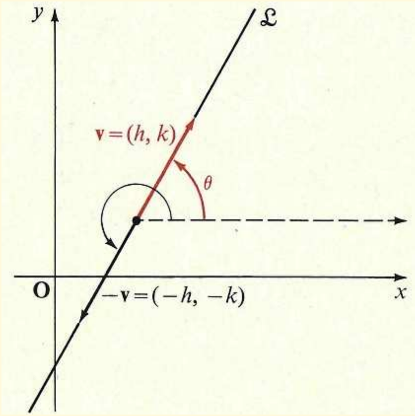
Οπότε το $\mathbf{S}(1, \frac{5}{2})$ είναι ένα σημείο που ανήκει στην ευθεία με την δοθείσα εξίσωση. Επειδή $A = 3$ και $B = -4$, ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για την ευθεία είναι το $\mathbf{v} = (4, 3)$. Οπότε μια εξίσωση σε συμμετρική μορφή είναι η

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - \frac{5}{2}}{3}.$$

□

Ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για μιά ευθεία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιορίσουμε την *γωνία κατεύθυνσης* της ευθείας. Θυμηθείτε ότι η γωνία κατεύθυνσης ενός διανύσματος $\mathbf{v} = (h, k)$ ικανοποιεί τις συνθήκες $0 \leq m^{\circ}(\partial) < 360$. Εάν $\mathbf{v}$ είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για μια ευθεία $\mathfrak{L}$, τότε όπως παρατηρήσαμε νωρίτερα, το $-\mathbf{v}$ είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}$, και $-\mathbf{v}$ έχει αντίθετη κατεύθυνση με εκείνη του $\mathbf{v}$. Κατά συνέπεια, είτε η γωνία κατεύθυνσης του $\mathbf{v}$ή η γωνία κατεύθυνσης του -$\mathbf{v}$ ικανοποιεί την συνθήκη $0 \leq m^\circ(\partial) < 180$, και η γωνία που ικανοποιεί την συνθήκη ορίζεται να είναι η **γωνία κατεύθυνσης** $\partial$ της $\mathfrak{L}$. (Δείτε το Σχήμα 2.17.)

*Σχήμα 2.17:*




Εάν $h = 0$, τότε $m^\circ(\partial) = 90$. Αλλιώς, επειδή $\frac{-k}{-h} = \frac{k}{h}$, η $\partial$ μπορεί να προσδιορισθεί από την εξίσωση

$$\tan\partial = \frac{k}{h},\ 0 \leq m^\circ(\partial) < 180.$$

Σημειώστε ότι η $\tan\partial$ είναι απλά η κλίση της $\mathfrak{L}$.

Ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για την ευθεία $\mathfrak{L}$ με εξίσωση $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$, είναι το $(-B, A)$. Συνεπώς, εάν $B \neq 0$, τότε μια γωνία κατεύθυνσης $\partial$ της $\mathfrak{L}$ δίνεται από την


Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πινακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 132 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

σχέση

$$\tan \vartheta = -\frac{A}{B}, \ 0 \le m^\circ(\vartheta) < 180. \qquad \square$$

## Ασκήσεις 2.7

Στις Ασκήσεις 1–12, γράψτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε συμμετρική μορφή για την ευθεία $\mathfrak{L}$ που περιέχει τα δοθέντα σημεία $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$, και βρείτε την γωνία κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}$ με ακρίβεια (του κοντυνότερου) βαθμού.

**1.** $\mathbf{S}(5,2)$ και $\mathbf{T}(3,6)$

**2.** $\mathbf{S}(6,4)$ και $\mathbf{T}(2,3)$

**3.** $\mathbf{S}(5,9)$ και $\mathbf{T}(3,-2)$

**4.** $\mathbf{S}(-1,3)$ και $\mathbf{T}(4,-3)$

**5.** $\mathbf{S}(-3,4)$ και $\mathbf{T}(-1,-3)$

**6.** $\mathbf{S}(2,-4)$ και $\mathbf{T}(-3,-2)$

**7.** $\mathbf{S}(4,-5)$ και $\mathbf{T}(2,-1)$

**8.** $\mathbf{S}(3,-8)$ και $\mathbf{T}(-3,-7)$

**9.** $\mathbf{S}(-1,-3)$ και $\mathbf{T}(2,3)$

**10.** $\mathbf{S}(-6,-4)$ και $\mathbf{T}(4,-1)$

**11.** $\mathbf{S}(-2,-3)$ και $\mathbf{T}(-3,-5)$

**12.** $\mathbf{S}(-1,-7)$ και $\mathbf{T}(7,-1)$

Στις Ασκήσεις 13–20, βρείτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε συμμετρική μορφή ισοδύναμη με την δοθείσα εξίσωση.

**13.** $2x - y + 4 = 0$

**14.** $x + 3y - 6 = 0$

**15.** $2x + 5y - 10 = 0$

**16.** $3x + 4y - 24 = 0$

**17.** $2x + 3y - 7 = 0$

**18.** $7x + 3y - 5 = 0$

**19.** $2x - 7y + 3 = 0$

**20.** $5x - 9y + 45 = 0$

Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πινακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 133 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Στις Ασκήσεις 21–24, βρείτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε συμμετρική μορφή για την ευθεία $\mathfrak{L}$ με τα δοθέντα χαρακτηριστικά.

**21.** Περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(-5, 3)$, και έχει γωνία κατεύθυνσης ίση με $60°$.

**22.** Περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(2, 6)$, και έχει γωνία κατεύθυνσης ίση με $45°$.

**23.** Περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(3, -2)$, και είναι κάθετη σε μια ευθεία με γωνία κατεύθυνσης ίση με $30°$.

**24.** Περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(-4, 3)$, και είναι κάθετη σε μια ευθεία με γωνία κατεύθυνσης ίση με $135°$.

***25.** Δείξτε ότι οι γωνίες με συμμετρικές εξισώσεις

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{y - y_1}{k} \quad \text{και} \quad \frac{x - x_1}{k} = -\frac{y - y_1}{h}$$

είναι κάθετες.

***26.** Δείξτε ότι εάν οι ευθείες με συμμετρικές εξισώσεις

$$\frac{x - x_1}{h_1} = \frac{y - y_1}{k_1} \quad \text{και} \quad \frac{x - x_1}{h_2} = -\frac{y - y_1}{k_2}$$

είναι παράλληλες, τότε $h_1 k_2 = h_2 k_1$.

***27.** Δείξτε ότι οι $x$ και $y$-τέμνουσες της ευθείας με συμμετρική εξίσωση

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{y - y_1}{k}$$

είναι οι

$$\frac{kx_1 - hy_1}{k} \quad \text{και} \quad \frac{hy_1 - kx_1}{h},$$

αντίστοιχα.

# Περίληψη Κεφαλαίου

**1.** Οι ευθείες του επιπέδου έχουν και **διανυσματικές** και **Καρτεσιανές εξισώσεις.** Η παραμετρική διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(\mathbf{t} - \mathbf{s}), \ \ r \in \mathbb{R},$$

ορίζει την ευθεία του επιπέδου που περιέχει τα (διαφορετικά) σημεία $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$. Η μεταβλητή $r$ στην εξίσωση είναι μια **παράμετρος**. Εάν αντικαταστήσουμε την $r$ με τιμές που ανήκουν σε ένα κλειστό διάστημα, τότε το γράφημα της εξίσωσης είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα. Ένα σύστημα από **παραμετρικές Καρτεσιανές εξισώσεις** για την ευθεία που περιέχει τα σημεία $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ είναι

$$x = x_1 + r(x_2 - x_1) \ \text{ και } y = y_1 + r(y_2 - y_1).$$

**2.** Ένα σημείο $\mathbf{U}$ βρίσκεται στην ευθεία $\mathfrak{L}$ που περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και έχει διάνυσμα κατεύθυνσης $\mathbf{v} = (h.k)$ εάν και μόνον εάν το $\mathbf{u} - \mathbf{s}$ είναι παράλληλο με το $\mathbf{v}$. Μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για την $\mathfrak{L}$ είναι η $\mathbf{u} = \mathbf{s} + r\mathbf{v}$, και ένα σύστημα παραμετρικών Καρτεσιανών εξισώσεων για την $\mathfrak{L}$ είναι

$$x = x_1 + rh, y = y_1 + rk.$$

Ένα σημείο $\mathbf{U}(x, y)$ βρίσκεται στην $\mathfrak{L}$ εάν και μόνον εάν $(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{v_p} = 0$.

**3.** Εάν $(h, k)$, με $h \neq 0$, είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για μια ευθεία $\mathfrak{L}$, τότε η κλίση $m$ της $\mathfrak{L}$ είναι ίση με $\frac{k}{h}$. Αυτός ο αριθμός είναι επίσης ο λόγος του ύψους προς το πλάτος(οριζόντιας απόστασης) οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος της $\mathfrak{L}$. Για την ευθεία $\mathfrak{L}$ που περιέχει τα σημεία $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{T}(x_2, y_2)$, με $x_2 \neq x_1$, έχετε κλίση ίση με

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

**4.** Μή κάθετες παράλληλες ευθείες έχουν την ίδια κλίση. Το γινόμενο των κλίσεων παράλληλων ευθειών, που καμμιά τους δεν είναι κάθετη, είναι ίσο με -1.

**5.** Ένα μή μηδενικό διάνυσμα κάθετο σε ένα διάνυσμα κατεύθυνσης $\mathbf{v}$ μιας ευθείας $\mathfrak{L}$ είναι ένα **κανονικό διάνυσμα** της $\mathfrak{L}$. Εάν το $(A, B)$ όπου $A^2 + B^2 \neq 0$, είναι ένα κανονικό διάνυσμα της $\mathfrak{L}$, τότε μια **Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή** για την $\mathfrak{L}$ είναι η

$$Ax + By + C = 0,$$

όπου $C$ είναι μια κατάλληλη σταθερά. Μια ευθεία με εξίσωση $Ax + By + C' = 0$ είναι παράλληλη στην $\mathfrak{L}$, και μια ευθεία με εξίσωση $-Bx + Ay + C' = 0$ είναι κάθετη στην $\mathfrak{L}$. Η κλίση της $\mathfrak{L}$ είναι ίση με $-\frac{A}{B}$ εάν $B \neq 0$.

**6.** Η **μορφή σημείο-κλίση** της εξίσωσης της ευθείας $\mathfrak{L}$ που περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και έχει κλίση $m$ είναι η

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Η **δύο-σημείων μορφή** της εξισώσεως μιας μή κάθετης ευθείας $\mathfrak{L}$ που περιέχει τα σημεία $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ είναι η

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

**7.** Η **μορφή κλίση-τέμνουσα** της εξίσωσης της ευθείας $\mathfrak{L}$ που έχει κλίση $m$ και $y$-τέμνουσα $b$ είναι

$$y = mx + b.$$

Η **μορφή τέμνουσας** της εξίσωσης της ευθείας $\mathfrak{L}$ με $x$- και $y$-τέμνουσες τα $a$ και $b$, αντίστοιχα, με $a \neq 0$ και $b \neq 0$, είναι

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

**8.** Εάν $\mathbf{v} = (h, k)$ είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για μια ευθεία $\mathfrak{L}$, τότε τα $h$ και $k$ καλούνται οι **αριθμοί κατεύθυνσης** της $\mathfrak{L}$. Η γωνία κατεύθυνσης $\partial$ της $\mathfrak{L}$ ικανοποιεί την σχέση $0 \leq m^\circ(\partial) < 180$· εάν $h \neq 0$, τότε η $m^\circ(\partial)$ μπορεί να προσδιοριστεί από την εξίσωση

$$\tan \partial = \frac{k}{h} = m, \; 0 \leq m^\circ(\partial) < 180,$$

όπου $m$ είναι η κλίση της $\mathfrak{L}$. Εάν $h \neq 0$ και $k \neq 0$, και η $\mathfrak{L}$ περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(x_1, y_1)$, τότε η **συμμετρική μορφή** της εξισώσεως της ευθείας της $\mathfrak{L}$ είναι

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{y - y_1}{k}.$$

## *Επαναληπτικές Ασκήσεις*

**1.** Βρείτε μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση και ένα σύστημα παραμετρικών Καρτεσιανών εξισώσεων της ευθείας που περιέχει τα σημεία $\mathbf{S}(3, -2)$ και $\mathbf{T}(-1, 5)$.

**2.** Βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου του τμήματος με άκρα τα $\mathbf{S}(1, 7)$ και $\mathbf{T}(3, -9)$.

**3.** Γράψτε μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για την ευθεία που περιέχει το $\mathbf{S}(5, -1)$ και έχει το $\mathbf{v} = (3, 1)$ ως ένα διάνυσμα κατεύθυνσης.

**4.** Προσδιορίστε εάν ή όχι το σημείο $\mathbf{T}(1, -8)$ βρίσκεται στην ευθεία με παραμετρική διανυσματική εξίσωση $\mathbf{u} = (3, 2) + r(1, 5), \; r \in \mathbb{R}$.

**5.** Γράψτε μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για την ευθεία που περιέχει το $\mathbf{S}(2, -5)$ και έχει κλίση $-\frac{2}{3}$.

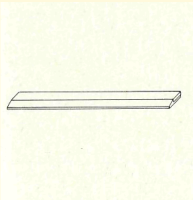
**6.** Γράψτε μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για την ευθεία που περιέχει το $\mathbf{S}(-5, 7)$ και είναι κάθετη στην ευθεία με διανυσματική παραμετρική εξίσωση $\mathbf{u} = (1, 4) + r(-2, 3), \; r \in \mathbb{R}$.

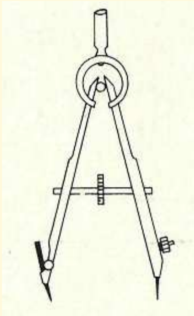
7. Βρείτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία που περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(4, -1)$ και έχει διάνυσμα κατεύθυνσης το $\mathbf{v} = (1, 3)$.
8. Γράψτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία που περιέχει τα σημείο $\mathbf{S}(-5, 7)$ και $\mathbf{T}(0, 3)$.
9. Βρείτε την κλίση και την $y$-τέμνουσα της ευθείας με εξίσωση $4x - 2y + 7 = 0$.
10. Γράψτε μια εξίσωση σε συμμετρική μορφή της ευθείας που περιέχει τα σημεία $\mathbf{S}(7, 1)$ και $\mathbf{T}(-1, 9)$.

## 2.8. Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί ρώτησαν και εκτεταμένα διερεύνησαν το πρόβλημα του προσδιορισμού των γεωμετρικών σχημάτων που κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη.

Πρέπει να κατανοήσουμε, κατ΄ αρχήν, ποιά είναι η φύση του προβλήματος. Ένας κανόνας είναι ένα όργανο με την βοήθεια του οποίου μπορείτε να προσδιορίσετε μια ευθεία, ή ένα ευθύγραμμο τμήμα με κάποιο αόριστο μήκος, που διέρχεται από δύο οποιαδήποτε δοσμένα σημεία του επιπέδου–τίποτα παραπάνω. Όμοια, ένας διαβήτης είναι ένα όργανο με το οποίο μπορείτε να προσδιορίσετε ένα κύκλο, ή ένα τόξο ενός κύκλου, που έχει κέντρο ένα οποιδήποτε δοσμένο σημείο και ακτίνα την απόσταση δύο οποιοδήποτε σημείων του επιπέδου–τίποτα παραπάνω.

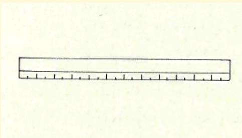


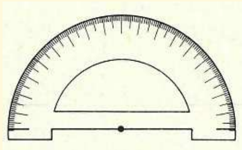


Η ‘ευθεία’ και ‘ο κύκλος’ δεν είναι τα σημάδια που σχεδιάσατε σε φύλλο χαρτιού, τα οποία είναι βασικά τα τρισδιάστατα σύνολα από μόρια με τα ηλεκτρόνια τους να στριφογυρίζουν γύρω τους, αλλά είναι η ιδεατή ευθεία και κύκλος της γεωμετρίας.

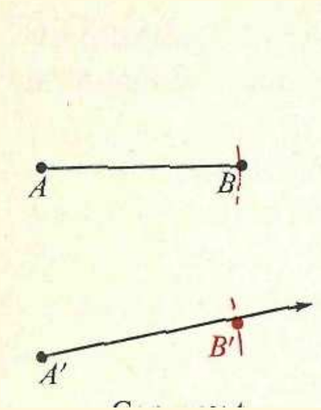
Η *κατασκευή* ξεκινάει με μια *αρχική σύνθεση* που περιέχει ένα πεπερασμένο πλήθος από σημεία, ευθείες και κύκλους. Πρέπει να ολοκληρωθεί σε ένα *πεπερασμένο πλήθος* *βημάτων*, και να είναι *μαθηματικά ορθή*.

Από τα κριτήρια που θέσαμε, ίσως εμφανίζεται ότι φυσικώς το πρόβλημα της κατασκευής με κανόνα και διαβήτη δεν είναι και ιδιαίτερα πρακτικό. Θα ήταν προτιμότερο να χρησιμοποιήσετε ένα χάρακα και ένα μοιρογνωμόνιο, ή κάποια άλλα πιό σοφιστικέ όργανα, ώστε να προσδιορίσετε τα μήκη των ευθυγράμων τμημάτων ή το μέτρο των γωνιών με μεγάλη ακρίβεια.

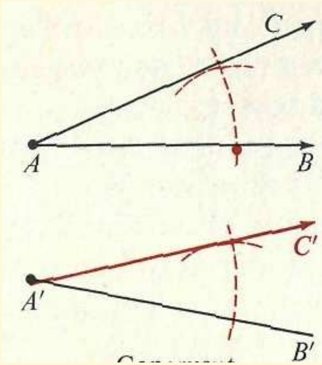




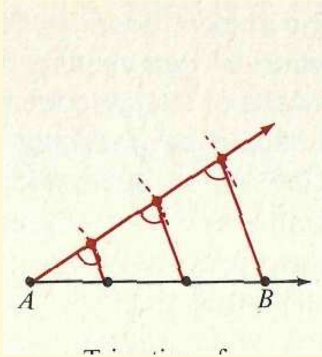
Όμως το πρόβλημα είναι ιστορικά σημαντικό, διότι βοήθησε τους μαθηματικούς να συγκεντρώσουν την προσοχή τους σε βασικά ερωτήματα. Η γνώση των βασικών αρχών των μαθηματικών και της επιστήμης είναι βασική για πρακτική επιστημονική πρόοδο χωρίς λάθη. Παρακάτω σχεδιάζονται κάποιες πολύ γνωστές και απλές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη.



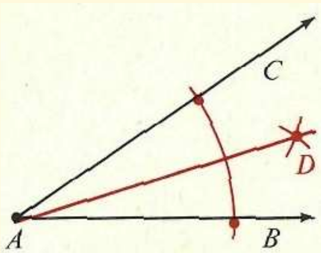

Ίσα τμήματα



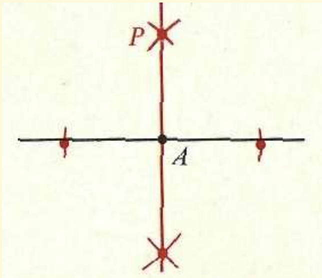

Ίσες γωνίες



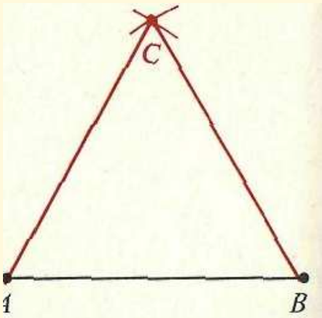

Τριχοτόμηση τμήματος




Διχοτόμηση γωνίας



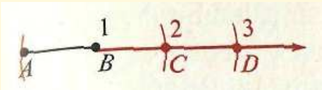

Κάθετη σε ευθεία σε κάποιο σημείο




Ισόπλευρο τρίγωνο

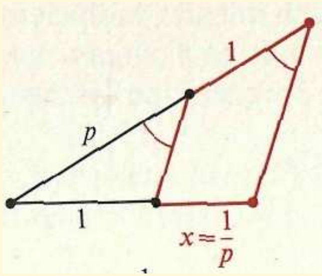
Οι απλές αρχικές συνθέσεις που θα ασχοληθείτε σε τούτο το απλό δοκίμιο καθώς σε αυτό που θα βρείτε στο τέλος του Κεφαλαίου 3, και συγκεκριμένα ο κύκλος και η γωνία με μέτρο $60^\circ$, μπορούν να κατασκευαστούν με απλές συνθέσεις που περιλαμβάνουν μόνο δύο σημεία και με χρήση του κανόνα και του διαβήτη. Έτσι, ένας κύκλος μπορεί να σχεδιαστεί όταν δίνονται το κέντρο του και ένα σημείο του· και μια γωνία $60^\circ$μπορεί να βρεθεί με την κατασκευή ενός ισοσκελούς τριγώνου, όπως σχεδιάζεται παραπάνω. Κατά συνέπεια, κάθε κατασκευή που μπορεί να γίνει ξεκινώντας με κάποια απ' αυτές τις συνθέσεις μπορεί επίσης να γίνει ξεκινώντας από μια σύνθεση που περιέχει μόνο δύο σημεία. Εν συντομία, θα λέμε ότι μια σύνθεση *μπορεί να κατασκευαστεί*, ή ότι η σύνθεση *είναι κατασκευάσιμη*, εάν μπορεί να κατασκευαστεί με την βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη ξεκινώντας μόνο από δύο σημεία.

Ας υποθέσουμε ότι, ξεκινώντας από μια σύνθεση που περιέχει δύο μόνο σημεία $A$ και $B$, και χρησιμοποιώντας το $d(A, B)$ ως μονάδα μήκους, μπορείτε να ορίσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους $p$ με χρήση κανόνα και διαβήτη. Τότε λέμε ότι *ο αριθμός $p$ είναι κατασκευάσιμος(με κανόνα και διαβήτη)*. Κάθε θετικός ακέραοις αριθμός είναι κατασκευάσιμος, όπως δείχνεται στο (α) παρακάτω. Εάν ένας θετικός αριθμός $p$ είναι κατασκευάσιμος, τότε είναι το ίδιο και οι $\frac{1}{p}$ και $\sqrt{p}$, όπως φαίνεται στο (β) και (γ), αντίστοιχα.



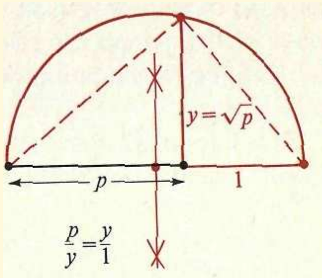

$d(A, B) = 1$
$d(A, C) = 2$
$d(A, D) = 3$

(α)



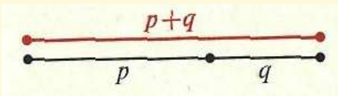

$\frac{x}{1} = \frac{1}{p}$

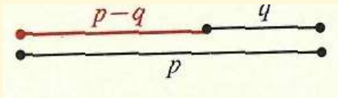
(β)

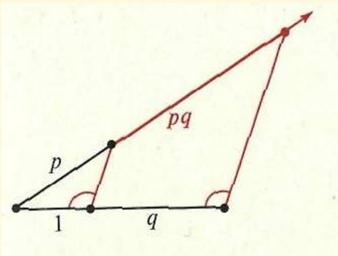


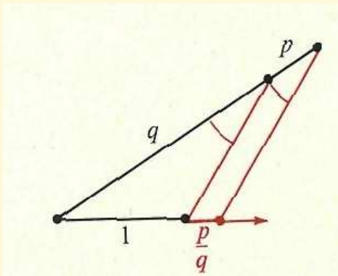

(γ)

Εάν οι θετικοί αριθμοί $p$ και $q$ είναι κατασκευάσιμοι, τότε όμοια είναι και οι $p+q$, $p-q$(εάν $p > q$), $pq$ και $\frac{p}{q}$ :



Προκύπτει ότι αριθμοί όπως οι

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, y = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{7}}+2}, \text{ και } z = \sqrt{3+\sqrt{9-\sqrt{6}}}$$

είναι κατασκευάσιμοι.

Σημειώστε, για παράδειγμα, ότι η δεύτερη απο τους κατασκευάσιμους αριθμούς που δίνονται παραπάνω ικανοποιεί τις σχέσεις

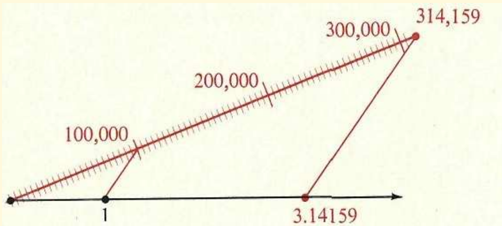
$$\begin{aligned} y^2 &= \sqrt{\frac{1}{7}}+2, \\ y^2-2 &= \sqrt{\frac{1}{7}}, \\ y^4-4y^2+4 &= \frac{1}{7}, \\ 7y^4-28y^2+27 &= 0. \end{aligned}$$

Εάν ένας αριθμός $k$ είναι μιά ρίζα μιας πολυωνιμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές, τότε ο $k$ λέγεται ότι είναι ένας *αλγεβρικός αριθμός*. Για παράδειγμα, ο ρητός αριθμός $\frac{2}{3}$ και ο άρρητος αριθμός $\sqrt{3}$ είναι αλγεβρικοί επειδή είναι ρίζες των εξισώσεων $3x-2=0$ και $x^2-3=0$, αντίστοιχα. Εάν ο ελάχιστος από τους βαθμούς όλων των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές που ικανοποιούνται από το αλγεβρικό αριθμό $k$ είναι $n$, τότε το $k$ λέγεται να είναι ένας αλγεβρικός αριθμός *βαθμού* $n$. Οπότε το $\sqrt{3}$ είναι βαθμού 2 αν και το $\sqrt{3}$ είναι επίσης μια ρίζα της τετραγωνικής εξίσωσης $x^4-6x^2+9=0$.

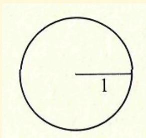
Τα παραπάνω παραδείγματα κατασκευάσιμων αριθμών μας υποδεικνύουν το παρακάτω αληθινό αποτέλεσμα, που δεν πρόκειται να το αποδείξουμε εδώ:

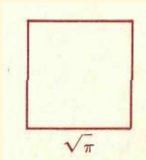
Εάν ο θετικός αριθμός $k$ είναι κατασκευάσιμος, τότε ο $k$ είναι ένας αλγεβρικός αριθμός βαθμού $2^n$, όπου το $n$ είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Ο αριθμός $\pi$ είναι ένας *υπερβατικός*, ή *μή αλγεβρικός*, αριθμός· δηλαδή, δεν υπάρχει πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές η οποία έχει ρίζα το $\pi$. Αυτό το εκπληκτικό αποτέλεσμα αποδείκτηκε σχετικά αργά το 1882, από τον Γερμανό μαθηματικό Carl Louis Ferdinand von Lindemann(1852-1939). Προκύπτει ότι ο $\pi$ δεν είναι ένας κατασκευάσιμος αριθμός. Το διάγραμμα παρακάτω δείχνει ένα σωστό(αλλά όχι πρακτικό τρόπο) για την κατασκευή μιας σχετικά καλής προσέγγισης του $\pi$, αλλά όχι του ίδιου του $\pi$.



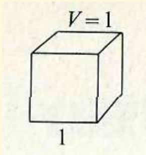

Το αποτέλεσμα του Lindenmann που αναφέραμε, ξεκαθάρισε ένα από τα τρία περίφημα κατασκευαστικά προβλήματα με κανόνα και διαβήτη των αρχαίων Ελλήνων, δηλαδή του "τετραγωνισμού του κύκλου", δηλαδή την κατασκευή ενός

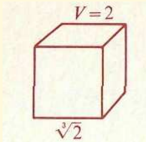



τετραγώνου που έχει το ίδιο εμβαδόν με εκείνο ενός δοθέντος κυκλικού δίσκου. Εάν πάρουμε ως ακτίνα του δοθέντος κύκλου την μονάδα μέτρησης του μήκους, τότε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι $\pi$, και το υπό κατασκευή τετράγωνο θα έπρεπε να έχει πλευρές μήκους $\sqrt{\pi}$. Εάν όμως το $\sqrt{\pi}$ ήταν κατασκευάσιμος, τότε και το $\pi$ θα ήταν κατασκευάσιμος. Οπότε, δεν υπάρχει κατασκευή με κανόνα και διαβήτη για τον τετραγωνισμό του κύκλου.

Ένα άλλο από τα τρία περίφημα κατασκευαστικά προβλήματα των αρχαίων Ελλήνων ήταν του "διπλασιασμού του κύβου," δηλαδή της κατασκευής ενός κύβου που ο όγκος του είναι ακριβώς ο διπλάσιος ενός δοθέντος κύβου.




Εάν τα μήκη των πλευρών του κύβου τα πάρουμε μοναδιαία, τότε ο υπό κατασκευή κύβος θα είχε μήκη πλευρών ίσα με $\sqrt[3]{2}$. Επειδή η $\sqrt[3]{2}$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $x^3 - 2 = 0$, η $\sqrt[3]{2}$ είναι ένας αλγεβρικός αριθμός και βαθμού το πολύ 3. Μπορεί αν αποδειχθεί σχετικά εύκολα ότι η ρίζα $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι ρίζα μιας γραμμικής εξίσωσης ή μιας τετραγωνικής με ακέραιους συντελεστές, δηλ. η $\sqrt[3]{2}$ δεν έχει βαθμό 1 ή 2. Οπότε η $\sqrt[3]{2}$ είναι ένας αλγεβρικός αριθμός βαθμού 3. Επειδή το 3 δέν είναι της μορφής $2^n$, για κάποιο ακέραιο θετικό $n$, η $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι κατασκευάσιμη. Οπότε δεν μπορεί να υπάρχει κατασκευή με κανόνα και διαβήτη για τον διπλασιασμό του κύβου.

Το τρίτο περίφημο πρόβλημα της αρχαιότητος ήταν η τριχοτόμηση μιας οποιασδήποτε δοθείσας γωνίας με κανόνα και διαβήτη. Αυτό το πρόβλημα θα συζητηθεί στο μικρό δοκίμιο στο τέλος του Κεφαλαίου 3.


Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πινακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 146 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

# Κεφάλαιο 3

# Εφαρμογές των Ευθειών

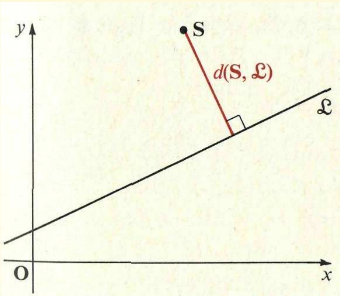
## Προβλήματα που εμπλέκουν Ευθείες

### 3.1. Απόσταση μεταξύ ενός Σημείου και μιας Ευθείας

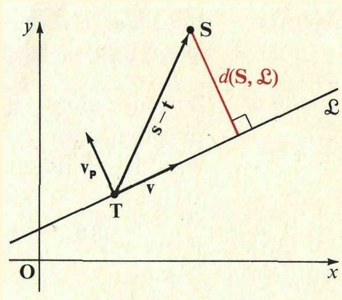
Στην επίπεδη γεωμετρία, μάθατε ότι η απόσταση μεταξύ ενός σημείου $\mathbf{S}$ και μιας ευθείας $\mathfrak{L}$, που συμβολίζεται με $d(\mathbf{S}, \mathfrak{L})$, ορίζεται να είναι το μήκος του κάθετου τμήματος μεταξύ του $\mathbf{S}$ και της $\mathfrak{L}$ (Σχήμα 3.1).




Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 147 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος




**Σχήμα 3.1:**




**Σχήμα 3.2:**

Μπορείτε να προσδιορίσετε την $d(\mathbf{S}, \mathfrak{L})$ με διανυσματικές μεθόδους εάν γνωρίζετε τις συντεταγμένες του $\mathbf{S}$, και τις συντεταγμένες κάθε σημείου $\mathbf{T}$ στην $\mathfrak{L}$, και ένα διάνυσμα κατεύθυνσης $\mathbf{v}$ της $\mathfrak{L}$. Για να την βρούμε, παρατηρείστε από το Σχήμα 3.2 ότι η ζητούμενη απόσταση είναι η απόλυτη τιμή της αριθμητικής συνιστώσας του $\mathbf{s} - \mathbf{t}$ παράλληλη στο $\mathbf{v_p}$. Δηλαδή,

$$d(\mathbf{S}, \mathfrak{L}) = |Comp_{\mathbf{v_p}}(\mathbf{s} - \mathbf{t})|,$$

ή (θυμηθείτε από σελίδα 63 και Άσκηση 37 σελίδα 51).

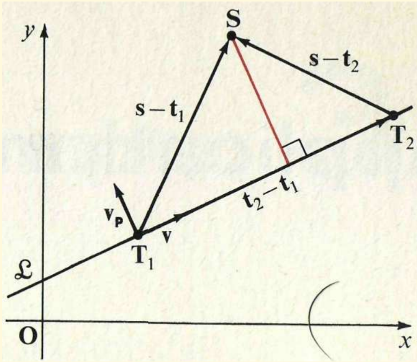
□
$$d(\mathbf{S}, \mathfrak{L}) = \frac{|(\mathbf{s} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v_p}|}{\|\mathbf{v_p}\|}. \tag{1}$$

Η απόσταση μεταξύ του $\mathbf{S}$ και της $\mathfrak{L}$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του συγκεκριμένου σημείου $\mathbf{T}$ της $\mathfrak{L}$. Για να δείτε ότι αυτό αληθεύει, θεωρείστε οποιαδήποτε δύο σημεία $\mathbf{T}_1$ και $\mathbf{T}_2$ στην $\mathfrak{L}$. Από το Σχήμα 3.3, μπορείτε να δείτε ότι

$$\mathbf{s} - \mathbf{t}_1 = (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1) + (\mathbf{s} - \mathbf{t}_2).$$

Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πινακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 148 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

**Σχήμα 3.3:**




Οπότε παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο κάθε μέλους αυτής της εξίσωσης και του $\mathbf{v_p}$, παίρνετε

$$(\mathbf{s}-\mathbf{t}_1)\cdot\mathbf{v_p} = (\mathbf{t}_2-\mathbf{t}_1)\cdot\mathbf{v_p} + (\mathbf{s}-\mathbf{t}_2)\cdot\mathbf{v_p} = 0 + (\mathbf{s}-\mathbf{t}_2)\cdot\mathbf{v_p}.$$

Οπότε,

$$\frac{|(\mathbf{s}-\mathbf{t}_1)\cdot\mathbf{v_p}|}{\|\mathbf{v_p}\|} = \frac{|(\mathbf{s}-\mathbf{t}_2)\cdot\mathbf{v_p}|}{\|\mathbf{v_p}\|}$$

***Παράδειγμα 1.*** Βρείτε την απόσταση μεταξύ του $\mathbf{S}(6,2)$ και της ευθείας $\mathfrak{L}$ που διέρχεται από το σημείο $\mathbf{T}(4,2)$ με κλίση $\frac{1}{5}$.

*Λύση:* Επειδή η κλίση της $\mathfrak{L}$ είναι $\frac{1}{5}$, το διάνυσμα $\mathbf{v} = 5(1,\frac{1}{5}) = (5,1)$ είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{L}$. Οπότε $\mathbf{v_p} = (-1,5)$, και το $\mathbf{s}-\mathbf{t}$, το διάνυσμα από το $\mathbf{T}$ στο $\mathbf{S}$, είναι ίσο με $(6,2)-(4,2)=(2,0)$. Οπότε

$$\begin{aligned} d(\mathbf{S},\mathfrak{L}) &= \frac{|(\mathbf{s}-\mathbf{t})\cdot \mathbf{v_p}|}{\|\mathbf{v_p}\|} \\ &= \frac{|(2,0)\cdot(-1,5)|}{\|\mathbf{v_p}\|} = \frac{|-2|}{\sqrt{26}} = \frac{2}{\sqrt{26}}. \end{aligned}$$

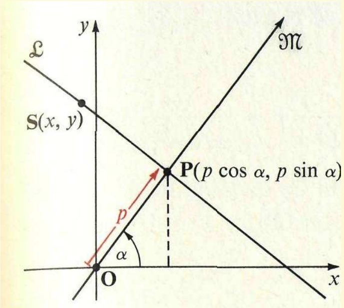
□

Για να βρούμε την $d(\mathbf{S},\mathfrak{L})$ όταν η εξίσωση για την $\mathfrak{L}$ δίνεται στη κανονική Καρτεσιανή μορφή

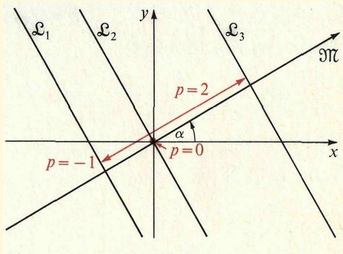
$$Ax+By+C=0, \tag{2}$$

μπορείτε να ξεκινήσετε μετασχηματίζοντας την εξίσωση σε μια ειδική μορφή η οποία συστηματικά επεξεργάστηκε από τον Γερμανό γεωμέτρη Ludwig Otto Hesse (1811-1874) και που ίδιος την αποκάλεσε *κανονική μορφή*. Για να βρούμε την κανονική μορφή, θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια μιας *κατευθυνόμενης ευθείας*: Εάν το $\mathbf{v}$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα κατεύθυνσης για μια ευθεία $\mathfrak{M}$ του επιπέδου, τότε η $\mathfrak{M}$ μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει δύο κατευθύνσεις: της $\mathbf{v}$ και της -$\mathbf{v}$. Όταν μια διεύθυνση σημειώνεται σε μια ευθεία, τότε η ευθεία λέγεται να είναι μια **κατευθυνόμενη ευθεία**. Εάν $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$ είναι δύο οποιαδήποτε σημεία σε μια κατευθυνόμενη ευθεία $\mathfrak{M}$, τότε η $l(\mathbf{S},\mathbf{T})$, δηλαδή η **κατευθυνόμενη απόσταση** από το $\mathbf{S}$ στο $\mathbf{T}$, είναι ίση με $d(\mathbf{S},\mathbf{T})$ ή $-d(\mathbf{S},\mathbf{T})$ ανάλογα με το εάν η $\mathfrak{M}$ και το γεωμετρικό διάνυσμα από το $\mathbf{S}$ στο $\mathbf{T}$ έχουν ίδιες ή αντίθετες κατευθύνσεις. Οπότε η κατευθυνόμενη απόσταση από το $\mathbf{S}$ στο $\mathbf{T}$ είναι η αριθμητική συνιστώσα του διανύσματος $\mathbf{s}-\mathbf{t}$ παράλληλο στην $\mathfrak{M}$.

Τώρα, για μια δοθείσα ευθεία $\mathfrak{L}$, έστω $\mathfrak{M}$ είναι μια *κατευθυνόμενη* ευθεία από την αρχή των αξόνων $\mathbf{O}$ κάθετη προς την $\mathfrak{L}$· έστω $\alpha$ είναι η γωνία από την θετική $x$-κατεύθυνση του οριζόντιου άξονα προς την θετική κατεύθυνση της $\mathfrak{M}$, $0 \le m^\circ(\alpha) < 360$· Έστω $\mathbf{P}$ είναι το σημείο της τομής της $\mathfrak{L}$ και $\mathfrak{M}$· και έστω $p$ είναι η *κατευθυνόμενη απόσταση* από το $\mathbf{O}$ στο $\mathbf{P}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4.




***Σχήμα 3.4:***




***Σχήμα 3.5:***

(Σημειώστε ότι εάν η $\mathfrak{M}$ και το διάνυσμα από το **O** στο **P** έχουν την ίδια κατεύθυνση, τότε η κατευθυνόμενη απόσταση από το **O** στο **P** είναι θετική και η κατευθυνόμενη απόσταση από το **P** στο **O** είναι αρνητική). Από το Σχήμα 3.4, μπορείτε να δείτε ότι η $\mathfrak{L}$ προσδιορίζεται από τα $a$ και $p$.

Το Σχήμα 3.5 δείχνει τρεις ευθείες $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, και $\mathfrak{L}_3$ με $m^\circ(a) = 30$ και $p = -1, 0$, και 2, αντίστοιχα. Γι' αυτές τις ευθείες θα μπορούσατε ισοδύναμα να επιλέξετε $m^\circ(a) = 210$ και $p = 1, 0$, και -2, αντίστοιχα.

Από τον ορισμό των $\cos(a)$ και $\sin(a)$, οι συντεταγμένες του **P** στο Σχήμα 3.4 είναι $(p\cos(a), p\sin(a))$. Επειδή το σημείο **O** βρίσκεται επίσης στην $\mathfrak{M}$, το διάνυσμα από το **O** στο **P**, $(p\cos(a), p\sin(a))$, είναι παράλληλο στη $\mathfrak{M}$· οπότε το διάνυσμα $(\cos(a), \sin(a))$ είναι επίσης παράλληλο στην $\mathfrak{M}$ και οπότε είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης της $\mathfrak{M}$. Κάθε σημείο $\mathbf{S}(x, y)$ του επιπέδου βρίσκεται στην $\mathfrak{L}$ εάν και μόνο εάν το διάνυσμα

$$\mathbf{s} - \mathbf{p} = (x - p\cos a, y - p\sin a)$$

είναι κάθετο στην $\mathfrak{M}$· δηλαδή, εάν και μόνο εάν

$$\begin{aligned}(x - p\cos a, y - p\sin a)\cdot(\cos a, \sin a) &= 0,\\ (x\cos a - p\cos^2 a) + (y\sin a - p\sin^2 a) &= 0,\\ x\cos a + y\sin a - p(\cos^2 a + \sin^2 a) &= 0,\end{aligned}$$

ή

$$x\cos a + y\sin a - p = 0 \tag{3}$$

□

Η Εξίσωση 3 είναι η **κανονική μορφή** της εξίσωσης της $\mathfrak{L}$.

Εάν οι Εξισώσεις 2 και 3 παριστάνουν την ίδια ευθεία $\mathfrak{L}$, τότε οι συντελεστές στις δύο εξισώσεις πρέπει να είναι ανάλογες:

$$A = k\cos a, B = k\sin a, C = -kp, \tag{4}$$

όπου $k$ είναι μια σταθερά. Για να προσδιορίσετε το $k$, παρατηρείστε ότι

$$A^2 + B^2 = k^2\cos^2 a + k^2\sin^2 a = k^2(\cos^2 a + \sin^2 a) = k^2,$$

Οπότε

$$k = \pm\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Οπότε, από τις Εξισώσεις 4,

$$\cos a = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \sin a = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{5}$$

Έτσι μπορείτε να ανάγετε την Εξίσωση 2 στη κανονική μορφή διαιρώντας και τα δύο μέλη με το $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$. Δηλαδή, μπορείτε να γράψετε τις Εξισώσεις 2 για την $\mathfrak{L}$ σε κανονική μορφή ως είτε

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0 \qquad (6)$$

□

ή

$$\frac{A}{-\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{-\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{-\sqrt{A^2+B^2}}=0 \qquad (7)$$

***Παράδειγμα 2.*** Γράψτε μια εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία $\mathfrak{L}$ με Καρτεσιανή εξίσωση

$$2x+2y+3=0,$$

και προσδιορίστε τα $a$, $0 \le m^\circ(a) < 360$, και $p$, κατ' αρχήν (α) με $p>0$ και στη συνέχεια (β) με $p<0$. Κάντε ένα σκίτσο σε κάθε περίπτωση.

*Λύση:* Επειδή $A=2$ και $B=2$, έχετε $k=\pm\sqrt{2^2+2^2}=\pm 2\sqrt{2}$.
**(α)** Επειδή $C=3$, που είναι θετικό, και $C=-kp$, για να πάρετε $p>0$ επιλέγετε $k=-2\sqrt{2}$. Οπότε, η κανονική μορφή είναι η

$$\frac{2}{-2\sqrt{2}}x+\frac{2}{-2\sqrt{2}}y+\frac{3}{-2\sqrt{2}}=0,$$

ή

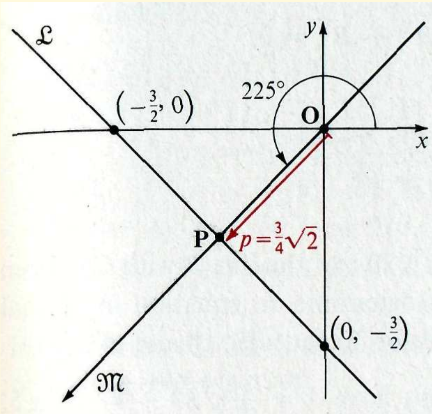
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{3}{2\sqrt{2}}=0.$$

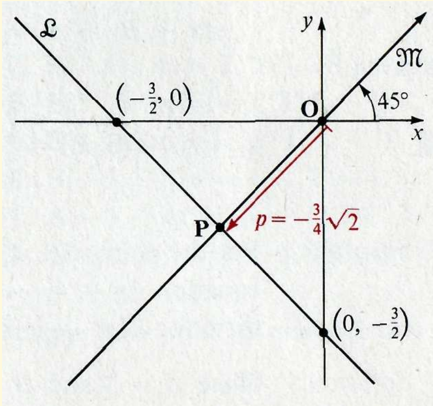
Επειδή $\cos a=-\frac{1}{\sqrt{a}}, \sin a=-\frac{1}{\sqrt{al}}$, και $-p=-\frac{3}{2\sqrt{2}}$, έχετε $m^\circ(a)=225$ και $p=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\sqrt{2}\doteq 1.06$.

**(β)** Για να πάρετε $p < 0$, επιλέγετε $k = 2\sqrt{2}$ και έχετε την κανονική μορφή

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{3}{2\sqrt{2}} = 0.$$

Επειδή $\cos a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $-p = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ έχετε $m^{\circ}(a) = 45$ και $p = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{4}\sqrt{2} \doteq -1.06$. $\square$




Για να προσδιορίσετε την απόσταση μεταξύ του σημείου $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και της ευθείας $\mathfrak{L}$ με κανονική εξίσωση

$$x\cos a + y\sin a - p = 0,$$

παρατηρείστε πρώτα ότι η ευθεία $\mathfrak{L}'$ που είναι παράλληλη στην $\mathfrak{L}$ και περιέχει το $\mathbf{S}$ έχει μια κανονική εξίσωση της μορφής

$$x\cos a + y\sin a - p' = 0,$$

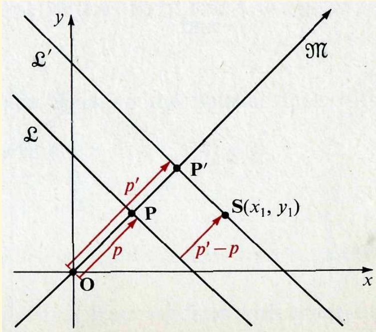

Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πινακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 154 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

όπου $p'$ είναι η κατευθυνόμενη απόσταση από το $\mathbf{O}$ στην $\mathfrak{L}'$ (Σχήμα 3.6).
Επειδή το $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ βρίσκεται στην $\mathfrak{L}'$, έχετε

$$x_1 \cos a + y_1 \sin a - p' = 0,$$

Οπότε,

$$p' = x_1 \cos a + y_1 \sin a.$$




Σχήμα 3.6:

Τώρα η κατευθυνόμενη απόσταση από την $\mathfrak{L}$ στην $\mathfrak{L}'$ είναι $p' - p$, και αυτή είναι επίσης η κατευθυνόμενη απόσταση από την $\mathfrak{L}$ στο $\mathbf{S}$. Οπότε,

$$\square \qquad d(\mathbf{S}, \mathfrak{L}) = |p - p'| = |x_1 \cos a + y_1 \sin a - p|. \qquad (8)$$

Οπότε, η απόσταση μεταξύ του $\mathbf{S}$ και της $\mathfrak{L}$ προσδιορίζεται παίρνοντας την απόλυτη τιμή του τύπου που προκύπτει με την αντικατάσταση των συντεταγμένων του $\mathbf{S}$ στο αριστερό μέλος μιας κανονικής εξίσωσης για την $\mathfrak{L}$.

Προκύπτει από τις Εξισώσεις 5 και 8 ότι η απόσταση μεταξύ του σημείου $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και της ευθείας $\mathfrak{L}$ με καρτεσιανή Εξίσωση

$$Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0,$$

δίνεται από τον τύπο

$$\square \qquad d(\mathbf{S}, \mathfrak{L}) = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

***Παράδειγμα 3.*** Για τα σημεία $\mathbf{S}(1,1)$ και $\mathbf{T}(1,2)$ και την ευθεία $\mathfrak{L}$ με Καρτεσιανή εξίσωση $3x+4y-8=0$, προσδιορίστε μια εξίσωση σε κανονική μορφή για την $\mathfrak{L}$, την διαφορά $p'-p$ για τα $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$, και τις αποστάσεις $d(\mathbf{S},\mathfrak{L})$ και $d(\mathbf{T},\mathfrak{L})$.

*Λύση:* Επειδή $A=3$ και $B=4$, έχετε $k=\pm\sqrt{3^2+4^2}=\pm 5$. Υποθέστε ότι επιλέγετε $k=5$. Η κανονική μορφή της εξίσωσης της $\mathfrak{L}$ είναι τότε

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{8}{5}=0.$$

Για το $\mathbf{S}$, έχετε

$$p'-p=\frac{3}{5}(1)+\frac{4}{5}(1)-\frac{8}{5}=-\frac{1}{5},$$

και

$$d(\mathbf{S},\mathfrak{L})=|-\frac{1}{5}|=\frac{1}{5}.$$

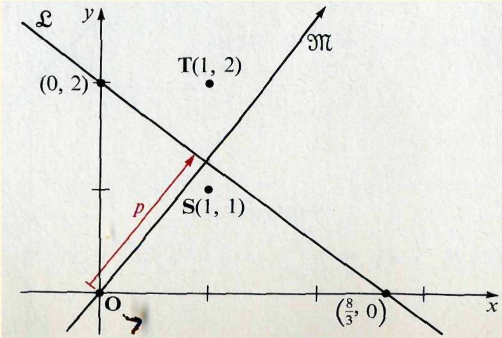
Για το $\mathbf{T}$, έχετε

$$p'-p=\frac{3}{5}(1)+\frac{4}{5}(2)-\frac{8}{5}=\frac{3}{5},$$

και

$$d(\mathbf{T},\mathfrak{L})=|\frac{3}{5}|=\frac{3}{5}.$$

*Διανύσματα στο Επίπεδο*
*Το ιστορικό Ξεκίνημα*
*Ευθείες στο Επίπεδο*
*Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη*
*Εφαρμογές των Ευθειών*
*Απαντήσεις*
*Τριγωνομετρικοί Πινακες*
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 156 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος




$\square$

Παρατηρείστε στην προηγούμενη λύση ότι $p' - p < 0$ για το $\mathbf{S}$ και $p' - p > 0$ για το $\mathbf{T}$. Αυτό δείχνει ότι τα $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$ βρίσκονται στις απέναντι πλευρές της $\mathfrak{L}$, και, επειδή $p > 0$, τα $\mathbf{S}$ και $\mathbf{O}$ βρίσκονται στην ίδια πλευρά της $\mathfrak{L}$.

## Ασκήσεις 3.1

Στις Ασκήσεις 1–12, βρείτε την απόσταση μεταξύ του δοθέντος σημείου $\mathbf{S}$ και της ευθείας που έχει το δοθέν διάνυσμα κατεύθυνσης $\mathbf{v}$ή κλίση το $m$ και διέρχεται από το δοθέν σημείο $\mathbf{T}$.

1. $\mathbf{S}(3,4)$; $\mathbf{v} = (2,1)$, $\mathbf{T}(4,7)$
2. $\mathbf{S}(2,5)$; $\mathbf{v} = (3,-1)$, $\mathbf{T}(1,3)$
3. $\mathbf{S}(-1,3)$; $\mathbf{v} = (2,2)$, $\mathbf{T}(4,-2)$
4. $\mathbf{S}(4,-7)$; $\mathbf{v} = (-5,-6)$, $\mathbf{T}(1,0)$
5. $\mathbf{S}(-5,1)$; $\mathbf{v} = (4,-6)$, $\mathbf{T}(0,-1)$
6. $\mathbf{S}(-6,-2)$; $\mathbf{v} = (1,5)$, $\mathbf{T}(0,0)$
7. $\mathbf{S}(1,6)$; $m = 2$, $\mathbf{T}(3,3)$
8. $\mathbf{S}(5,1)$; $m = -3$, $\mathbf{T}(2,-1)$
9. $\mathbf{S}(4,-2)$; $m = \frac{1}{2}$, $\mathbf{T}(5,-3)$
10. $\mathbf{S}(-3,7)$; $m = \frac{-2}{3}$, $\mathbf{T}(-4,6)$
11. $\mathbf{S}(-3,-4)$; $m = -\frac{1}{7}$, $\mathbf{T}(2,3)$
12. $\mathbf{S}(-4,0)$; $m = -4$, $\mathbf{T}(0,4)$

Στις Ασκήσεις 13-20, βρείτε την απόσταση μεταξύ του σημείου $\mathbf{S}$ και της ευθείας $\mathfrak{L}$ με την δοθείσα εξίσωση.

13. $\mathbf{S}(5,7)$; $3x + 4y + 12 = 0$
14. $\mathbf{S}(3,6)$; $2x - 3y + 6 = 0$
15. $\mathbf{S}(-2,4)$; $5x - 4y - 10 = 0$
16. $\mathbf{S}(-3,7)$; $6x - 5y - 15 = 0$
17. $\mathbf{S}(4,-3)$; $x - 8y + 5 = 0$
18. $\mathbf{S}(5,-8)$; $4x + y - 3 = 0$
19. $\mathbf{S}(-1,-5)$; $5x - 12y + 7 = 0$
20. $\mathbf{S}(-3,-6)$; $4x - 3y + 6 = 0$

Στις Ασκήσεις 21-24, βρείτε τα μήκη των υψών του τριγώνου που οι κορυφές του $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, και $\mathbf{T}$ δίνονται.

21. $\mathbf{R}(0,4)$, $\mathbf{S}(4,-3)$, $\mathbf{T}(-3,1)$
22. $\mathbf{R}(1,0)$, $\mathbf{S}(2,5)$, $\mathbf{T}(-2,2)$
23. $\mathbf{R}(7,0)$, $\mathbf{S}(-1,0)$, $\mathbf{T}(1,-1)$
24. $\mathbf{R}(4,-1)$, $\mathbf{S}(1,7)$, $\mathbf{T}(-3,3)$

**25-28.** Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που οι κορυφές του $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$ δίνονται στις Ασκήσεις 21-24.

Στις Ασκήσεις 29 και 30, βρείτε την απόσταση μεταξύ των παράλληλων ευθειών με τις δοθείσες εξισώσεις.

**29.** $3x - y - 8 = 0$ και $3x - y - 15 = 0$

**30.** $x - 3y + 12 = 0$ και $x - 3y - 18 = 0$

**31.** Βρείτε ένα $k$ έτσι ώστε το σημείο $(2, k)$ είναι ισαπέχων από τις ευθείες με εξισώσεις $x + y - 2 = 0$ και $x - 7y + 2 = 0$.

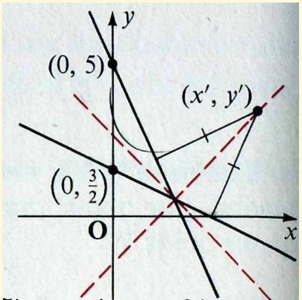
**32.** Βρείτε ένα $k$ έτσι ώστε το σημείο $(k, 4)$ είναι ισαπέχων από τις ευθείες με εξισώσεις $13x - 9y - 10 = 0$ και $x + 3y - 6 = 0$.

Στις Ασκήσεις 33-36, βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που οι πλευρές του βρίσκονται στις ευθείες με τις δοθείσες εξισώσεις.

***Παράδειγμα.*** $x + 2y - 3 = 0$ και $2x + y - 5 = 0$

*Λύση:* Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές. Έστω $(x', y')$ είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου που ισαπέχει από τις δοθείσες ευθείες. Τότε έχετε

$$\frac{|x' + 2y' - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x' + y' - 5|}{\sqrt{5}}$$




Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής, αυτή η εξίσωση είναι ισοδύναμη με τις

$$\frac{x' + 2y' - 3}{\sqrt{5}} = \frac{2x' + y' - 5}{\sqrt{5}} \quad ή \quad \frac{x' + 2y' - 3}{\sqrt{5}} = -\frac{2x' + y' - 5}{\sqrt{5}},$$

Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πίνακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 159 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

$$x' + 2y' - 3 = 2x' + y' - 5 \text{ ή } x' + 2y' - 3 = -2x' - y' + 5,$$

$$x' - y' - 2 = 0 \text{ ή } 3x' + 3y' - 8 = 0.$$

Οπότε οι εξισώσεις των διχοτόμων της γωνίας είναι

$$x - y - 2 = 0 \text{ και } 3x + 3y - 8 = 0.$$

□

**33.** $3x + 4y - 2 = 0$ και $4x + 3y + 2 = 0$

**34.** $3x - 4y + 1 = 0$ και $5x + 12y - 2 = 0$

**35.** $x + 3y - 2 = 0$ και $2x - 6y + 5 = 0$

**36.** $x + y - 6 = 0$ και $3x - 3y + 5 = 0$

***37.** Βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων της γωνίας του τριγώνου με κορυφές $\mathbf{R}(6, 2)$, $\mathbf{S}(-2, -4)$, και $\mathbf{T}(-\frac{42}{5}, 8)$. (Υπόδειξη: Κάντε ένα σκίτσο για βοήθεια ώστε να διαλέξετε τις ζητούμενες εξισώσεις).

***38.** Βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων της γωνίας που οι πλευρές βρίσκονται στις ευθείες με εξισώσεις $x + 2y - 4 = 0$, $x - 2y + 2 = 0$, και $2x - y - 8 = 0$.

***39.** Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην ευθεία $\mathfrak{L}$ με εξίσωση $3x - 4y + 10 = 0$ και βρίσκονται σε απόσταση 5 μονάδων από την $\mathfrak{L}$.

***40.** Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην ευθεία $\mathfrak{L}$ με εξίσωση $15x + 8y - 34 = 0$ και βρίσκονται σε απόσταση 4 μονάδων από την $\mathfrak{L}$.

***41.** Βρείτε την απόσταση μεταξύ του σημείου $\mathbf{S}(b, a)$ και της ευθείας με $x$ και $y$-τέμνουσες με τους ορθογώνιους άξονες τα $a$ και $b$, αντίστοιχα.

***42.** Βρείτε την απόσταση μεταξύ του σημείου $\mathbf{S}(b, -a)$ και της ευθείας με $x$ και $y$-τέμνουσες με τους ορθογώνιους άξονες τα $a$ και $b$, αντίστοιχα.

***43.** Δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $\mathbf{R}(x_1, y_1)$, $\mathbf{S}(x_2, y_2)$, και $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ είναι

$$\frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

## 3.2. Τομή δύο Ευθειών

Από παλαιότερα μαθήματα, μάθατε στα μαθηματικά ότι η τομή των συνόλων $A$ και $B$ (που συμβολίζεται με $A \bigcap B$) ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των σημείων που είναι κοινά στα $A$ και $B$. Μια συγκεκριμένη ιδιότητα των συνόλων των σημείων που καλούμε *ευθείες*, είναι ότι η τομή δύο *διαφορετικών* ευθειών του επιπέδου είναι είτε κενή (εάν οι ευθείες είναι παράλληλες) ή διαφορετικά περιέχει ένα μοναδικό σημείο (εάν οι ευθείες δεν είναι παράλληλες). Εάν με «$\mathfrak{L}_1$» και «$\mathfrak{L}_2$» παριστάνουμε την ίδια ευθεία, τότε οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ είναι παράλληλες και, φυσικά, η τομή τους είναι ολόκληρη η ευθεία.

Μπορείτε να προσδιορίσετε εάν ή όχι δύο ευθείες είναι παράλληλες συγκρίνοντας απλά τα διανύσματα κατεύθυνσης, ή, ισοδύναμα, τα κανονικά διανύσματα, των ευθειών. Εάν οι ευθείες *είναι* παράλληλες, τότε συμπίπτουν εάν και μόνο εάν έχουν ένα κοινό σημείο (δείτε Άσκηση **;;** σελίδα **;;**)

***Παράδειγμα 1.*** Εάν οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ είναι ευθείες που ορίζονται από τους τύπους

$$\mathfrak{L}_1 = \{(x, y) : 3x - 4y = 5\}$$

και

$$\mathfrak{L}_2 = \{(x, y) : -6x + 8y + 9 = 0\},$$

βρείτε την τομή τους $\mathfrak{L}_1 \bigcap \mathfrak{L}_2$.

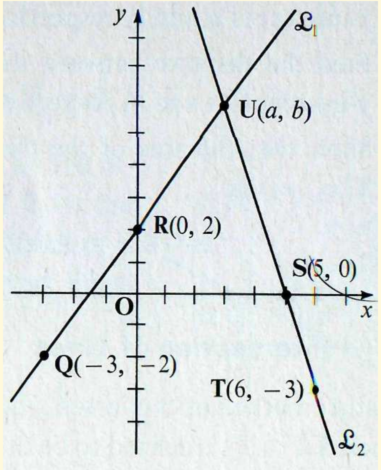
*Λύση:* Ελέγχοντας τις δοθείσες εξισώσεις, βλέπετε ότι το $(3, -4)$ είναι ένα κανονικό διάνυσμα της $\mathfrak{L}_1$ και το $(-6, 8) = -2(3, -4)$ είναι ένα κανονικό διάνυσμα της $\mathfrak{L}_2$. Οπότε το $(4, 3)$ είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για την $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$, συγχρόνως, και συνεπώς οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ είναι παράλληλες.

Μπορείτε να βρείτε τις συντεταγμένες $(x, y)$ του σημείου $\mathbf{S}$ της $\mathfrak{L}_1$ με το να δώσετε αυθαίρετα μια τιμή στο $x$ και στη συνέχεια λύνοντας την δοθείσα εξίσωση της $\mathfrak{L}_1$ ως προς $y$. Για παράδειγμα, εάν $x = 3$, τότε

$$y = -\frac{1}{4}(5 - 9) = 1,$$

και το $\mathbf{S}(3, 1)$ είναι ένα σημείο στην $\mathfrak{L}_1$. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του $\mathbf{S}$ στην εξίσωση της $\mathfrak{L}_2$, παίρνετε $-6(3)+8(1)+9 = -18+8+9 \neq 0$. Οπότε το $\mathbf{S}$ δεν βρίσκεται στην $\mathfrak{L}_2$, και συνεπώς $\mathfrak{L}_1 \bigcap \mathfrak{L}_2 = \emptyset$. $\square$

Σε μαθήματα άλγεβρας, είδατε ότι οι Καρτεσιανές μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποδείξετε ότι δύο μη παράλληλες ευθείες στο επίπεδο τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο. Μπορείτε επίσης να χρησιμοποιήσετε διανυσματικές μεθόδους για να αποδείξετε αυτό το αποτέλεσμα. Κοιτάξτε το Σχήμα 3.7, που δείχνει την ευθεία $\mathfrak{L}_1$ που διέρχεται από τα σημεία $\mathbf{Q}(-3,-2)$ και $\mathbf{R}(0,2)$ και την ευθεία $\mathfrak{L}_2$ που διέρχεται από τα σημεία $\mathbf{S}(5,0)$ και $\mathbf{T}(6,-3)$; σ' αυτό το σχήμα, οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ εμφανίζονται να τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο. Για να το αποδείξετε αυτό, πρέπει να δείξετε αναλυτικά (1) ότι υπάρχει ένα και μόνον σημείο που μπορεί να βρίσκεται και στις δύο ευθείες και (2) ότι αυτό το σημείο πράγματι βρίσκεται και στις δύο ευθείες.



**Σχήμα 3.7:**

Από τις δοθείσες πληροφορίες, μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για την $\mathfrak{L}_1$ είναι

$$(x, y) = (-3,-2) + r_1[(0,2) - (-3,-2)], \ \ r_1 \in \mathbb{R},$$

ή

$$(x, y) = (-3,-2) + r_1(3,4)\cdot$$

και μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση για την $\mathfrak{L}_2$ είναι

$$(x, y) = (5,0) + r_2[(6,-3) - (5,0)], \ \ r_2 \in \mathbb{R},$$

ή

$$(x, y) = (5,0) + r_2(1,-3).$$

Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πίνακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 163 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υποθέστε ότι το $\mathbf{U}(a,b)$ είναι ένα σημείο που ανήκει και στις δύο ευθείες. Οπότε θα πρέπει να ικανοποιούνται συγχρόνως

$$(a,b) = (-3,-2) + r_1(3,4) \text{ και } (a,b) = (5,0) + r_2(1,-3),$$

οπότε

$$(-3,-2) + r_1(3,4) = (5,0) + r_2(1,-3). \tag{1}$$

Μπορείτε να λύσετε την Εξίσωση 0 ως προς $r_1$ και $r_2$ όπως ακολουθεί: Επειδή για κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v_p} = 0$, μπορείτε να απαλοίψετε το $r_1$ παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο κάθε αριθμού στην 0(θυμηθείτε την Επιμεριστική Ιδιότητα στην Ενότητα 1.6) με το διάνυσμα $(3,4)_\mathbf{p}$ ώστε να πάρετε

$$\begin{aligned}
(-3,-2)\cdot(-4,3) + r_1(3,4)\cdot(-4,3) &= (5,0)\cdot(-4,3) + r_2(1,-3)\cdot(-4,3)\\
6 + r_1(0) &= -20 + r_2(-13),\\
26 &= -13r_2,\\
r_2 &= -2.
\end{aligned}$$

Όμοια, μπορείτε να απαλοίψετε το $r_2$ παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο κάθε αριθμού στην 0 με το $(1,-3)_\mathbf{p} = (3,1)$. Παίρνετε:

$$\begin{aligned}
(-3,-2)\cdot(3,1) + r_1(3,4)\cdot(3,1) &= (5,0)\cdot(3,1) + r_2(1,-3)\cdot(3,1)\\
-11 + r_1(13) &= 15 + r_2(0),\\
13r_1 &= 26,\\
r_1 &= 2.
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, εάν υπάρχει ένα σημείο $\mathbf{U}(a,b)$ που βρίσκεται και στις δύο ευθείες, τότε γιάυτό θα πρέπει να πάρετε $r_1 = 2$ και $r_2 = -2$. Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στις εξισώσεις για τις $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$, έχετε, αντίστοιχα,

$$(a, b) = (-3, -2) + 2(3, 4) = (-3, -2) + (6, 8) = (3, 6)$$

και

$$(a, b) = (5, 0) - 2(1, -3) = (5, 0) + (-2, 6) = (3, 6).$$

Οπότε, οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο $\mathbf{U}(3, 6)$. Επειδή η ίδια μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σε δύο *οποιεσδήποτε* δοθείσες μή παράλληλες ευθείες, μπορείτε να συμπεράνετε ότι δύο μή παράλληλες ευθείες του επιπέδου τέμνονται σε ακριβώς ένα σημείο.

Εάν δύο ευθείες του επιπέδου προσδιορίζονται από ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων δύο μεταβλητών, τότε το σημείο της τομής των μπορεί να προσδιοριστεί λύνοντας τις δύο εξισώσεις συγχρόνως. Στην Άλγεβρα, μάθατε ότι μπορείτε να λύσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων δύο μεταβλητών με "αντικατάσταση" αλλά και με "απαλοιφή μαις μεταβλητής", μια μέθοδος που ονομάζεται μερικές φορές η μέθοδος του "γραμμικού συνδυασμού". Και οι δύο τεχνικές, όπως και μια διανυσματική μέθοδος που παραλληλίζεται με την μέθοδο της "απαλοιφής" φαίνονται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

***Παράδειγμα 2.*** Λύστε το σύστημα:

$$3x - 5y = 1 \qquad (2)$$

$$4x + 3y = 11 \qquad (3)$$

*Λύση με αντικατάσταση:*

Λύνετε την Εξίσωση 2 ως προς $y$ με παράμετρο $x$:

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}. \qquad (4)$$

Αντικαθιστούμε το $y$ στην Εξίσωση 3 με $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$ και λύνετε ως προς $x$:

$$4x = 3\left(\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}\right) = 11,$$
$$x = 2.$$

Αντικαθιστούμε στην Εξίσωση 4 το $x$ με το 2 και λύνουμε ως προς $y$:

$$y = \frac{3}{5}(2) - \frac{1}{5} = 1.$$

Οπότε, η μόνη δυνατή λύση του συστήματος είναι η $(2, 1)$. Για να τη επιβεβαιώσετε, μπορείτε να αντικαταστήσετε το $x$ με το 2 και το $y$ με 1 σε κάθε μιά από τις αρχικές εξισώσεις:

$$3(2) - 5(1) = 1 \;\text{ και }\; 4(2) + 3(1) = 11.$$

Οπότε, η $(2,1)$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

*Λύση με απαλοιφή:*

Πολλαπλασιάζουμε κάθε μέλος της Εξίσωσης 2 με το 3 και κάθε μέλος της Εξίσωσης 3 με το 5 και παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{aligned} 9x - 15y &= 3 \\ 20x + 15y &= 55 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις πάιρνουμε

$$\begin{aligned} 29x &= 58, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Τώρα μπορείτε να αντικαταστήσετε με το 2 σε κάποια από τις εξισώσεις και να λύσετε ως προς , όπως κάναμε και στη λύση με αντικατάσταση, ή διαφορετικά να επιστρέψετε στις αρχικές εξισώσεις και να απαλοίψετε το όπως ακολουθεί: Πολλαπλασιάζουμε κάθε μέλος της Εξίσωσης με το -4 και κάθε μέλος της Εξίσωσης με το 3 ώστε να πάρουμε το ισοδύναμο σύστημα:Προσθέτονατς τις εξισώσεις παίρνετε Οπότε, όπως προηγουμένως, η μοναδική δυνατή λύση είναι η (2,1), και μπορείτε να ελένξετε ότι η (2,1) είναι πράγματι μια λύση αντικαθιστώντας στις αρχικές εξισώσεις.

*Λύση χρησιμοποιώντας διανύσματα:*

Το δοθέν σύστημα εξισώσεων, δηλαδή, η σύζευξη των προτάσεων

$$2x - 5y = 1 \;\; \textit{και} \;\; 4x + 3y = 11$$

είναι ισοδύναμη με την διανυσματική εξίσωση

$$(3x - 5y, 4x + 3y) = (1, 11),$$

που, με την σειρά της, είναι ισοδύναμη με την

$$x(3, 4) - y(5, -3) = (1, 11). \tag{5}$$

Μπορείτε να λύσετε αυτή την εξίσωση με την μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στη σελίδα 164. Δηλαδή, μπορείτε να απαλοίψετε την $y$ παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο κάθε μέλους της Εξίσωσης 5 με το $(5, -3)_{\mathbf{p}} = (3, 5)$. Έχετε

$$\begin{aligned} x(3, 4) \cdot (3, 5) - y(5, -3) \cdot (3, 5) &= (1, 11) \cdot (3, 5), \\ 29x - 0y &= 58, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Μπορείτε στη συνέχεια να απαλοίψετε το $x$ παίρνοντας το εσωτερικό κάθε μέλους με το $(3,4)_{\mathbf{p}} = (-4,3)$. Έχετε

$$\begin{aligned} x(3,4)\cdot(-4,3) - y(5,-3)\cdot(-4,3) &= (1,11)\cdot(-4,3), \\ 0x + 29y &= 29, \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Οπότε, η μόνη δυνατή λύση του συστήματος είναι η (2,1), και, όπως προηγουμένως, μπορείτε να ελένξετε ότι πράγματι η (2,1) είναι μια λύση αντικαθιστώντας στις αρχικές Εξισώσεις 2 και 3.

Εάν συγκρίνετε την λύση με απαλοιφή και την λύση με διανύσματα, θα δείτε εύκολα ότι είναι αλγεβρικά ισοδύναμες. Η μοναδική διανυσματική εξίσωση 5 είναι ισοδύναμη με δύο Καρτεσιανές εξισώσεις 2 και 3. Για να απαλοίψετε το $y$, θα πολλαπλασιάσετε κάθε μέλος της Εξίσωσης 2 με το 3 και κάθε μέλος της 3 με το 5 και θα προσθέσετε, ή ισοδύναμα σχηματίζοντας το εσωτερικό γινόμενο κάθε μέλους της 5 με το (3,5). Όμοια, για να απαλοίψετε το $x$, πολλαπλασιάζετε κάθε μέλος των 2 και 3 με -4 και 3, αντίστοιχα, και προσθέτοντας, ή ισοδύναμα σχηματίζοντας το εσωτερικό γινόμενο κάθε μέλους της 5 με το (-4,3).

## Ασκήσεις 3.2

Στις Ασκήσεις 1–6, βρείτε την $\mathfrak{L}_1 \bigcap \mathfrak{L}_2$ εάν οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ έχουν τις δοθείσες εξισώσεις. (Οι παράμετροι $r_1, r_2, t_1, t_2$ παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.)

**1.** $\mathfrak{L}_1 : (x,y) = (3,4) + r_1(1,1); \mathfrak{L}_2 : (x,y) = (1,2) + r_2(1,-3)$

**2.** $\mathfrak{L}_1 : (x,y) = (2,-3) + r_1(4,-2); \mathfrak{L}_2 : (x,y) = (-2,1) + r_2(-1,-2)$

**3.** $\mathfrak{L}_1 : x - 2y = 3; \mathfrak{L}_2 : 2x + y = 1$

**4.** $\mathfrak{L}_1 : 3x - y = 4; \mathfrak{L}_2 : x + 3y = 8$

**5.** $\mathfrak{L}_1 : (x, y) = (3 - 2t_1, 1 - t_1); \mathfrak{L}_2 : (x, y) = (4 + 5t_2, 2 + 3t_2)$

**6.** $\mathfrak{L}_1 : (x, y) = (6 + 3t_1, 3 - 2t_1); \mathfrak{L}_2 : (x, y) = (3 - 3t_2, 5 + 2t_2)$

Στις Ασκήσεις 7–10, λύστε το δοθέν σύστημα με αντικατάσταση.

**7.** $x + 3y = 7, 2x + y = -1$

**8.** $3x - 2y = 19, 2x + 5y = 0$

**9.** $x - 2y = 7, -2x + 4y = -14$

**10.** $4x - 3y = -2, 3x + 2y = 7$

Στις Ασκήσεις 11–16, λύστε το δοθέν σύστημα με απαλοιφή.

**11.** $x + 3y = 7, x - y = 3$

**12.** $x - 3y = -8, 2x + y = 5$

**13.** $2x - 5y = 3, 3x + y = 13$

**14.** $3x + 2y = 4, 2x - 7y = 11$

**15.** $3x - 2y = 8, 6x - 4y = 3$

**16.** $5x + y = -9, x - 3y = -5$

**17-26.** Λύστε τα συστήματα στις Ασκήσεις 7–16 χρησιμοποιώντας διανύσματα.

Στις Ασκήσεις 27–30, βρείτε τις κορυφές του τριγώνου που οι πλευρές του περιέχονται στις ευθείες με τις δοθείσες εξισώσεις.

**27.** $2x + y = 4, x - 3y = -5, 4x - 5y = 8.$

**28.** $x - y = -1, x + 3y = 7, x + y = -1.$

**29.** $(x, y) = (3, 1) + r_1(1, -2), (x, y) = (5, 7) + r_2(3, 4), (x, y) = (-3, -7) + r_3(1, 3).$

**30.** $(x, y) = (2, 4) + r_1(0, 1), (x, y) = (5, 4) + r_2(2, 1), (x, y) = (3, 3) + r_3(-1, 1).$

Στις Ασκήσεις 31–36, βρείτε μια Καρτεσιανή εξίσωση σε κανονική μορφή για την ευθεία με τα δοθέντα χαρακτηριστικά:

**31.** Που περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(4, \frac{8}{3})$ και το σημείο της τομής των ευθειών με εξισώσεις $3x - 4y - 2 = 0$ και $12x - 15y - 8 = 0$.

**32.** Που περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(1, 1)$ και το σημείο της τομής των ευθειών με εξισώσεις $2x - 5y + 9 = 0$ και $4x + y + 7 = 0$.

**33.** Που περιέχει το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις $3x+y-16 = 0$ και $2x-7y-3 = 0$, και είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $x - 3y + 2 = 0$.

**34.** Που περιέχει το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις $2x + y = 13$ και $7x - y = 2$, και είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $x - y = 2$.

**35.** Που περιέχει το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις $x+2y = 12$ και $3x-4y = 26$, και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $x + y = 1$.

**36.** Που περιέχει το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις $3x + 4y + 10 = 0$ και $5x - 12y - 12 = 0$, και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $x - 2y + 6 = 0$.

**37.** Βρείτε κάποιες εξισώσεις για τις ευθείες που περιέχουν τις διαγώνιες ενός τετραπλεύρου με πλευρές που περιέχονται στις ευθείες με εξισώσεις $x-3y+13 = 0, 7x-y+31 = 0, x - 3y - 7 = 0$, και $x + y - 11 = 0$.

**38.** Οι ευθείες με εξισώσεις $3x - 8y - 2 = 0$ και $3x - 8y - 44 = 0$ περιέχουν τις απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου, και μια διαγώνιος του παραλληλογράμμου βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $x + 2y + 4 = 0$. Εάν η άλλη διαγώνιος του παραλληλογράμμου περιέχει το σημείο $(4, \frac{1}{5})$, βρείτε τις κορυφές του παραλληλογράμμου.

**39.** Δείξτε ότι για $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, το σύστημα

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

έχει μια μοναδική λύση που δίνεται απο τις σχέσεις

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

**40.** Χρησιμοποιήσετε τις σχέσεις της Άσκησης 39 για να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 5 \\ 2x + 5y &= 35 \end{aligned}$$

# Αναλυτικές Μέθοδοι

## 3.3. Ορίζουσες

Οι ορίζουσες είναι χρήσιμες για την λύση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, και επίσης έχουν πολλές άλλες εφαρμογές στην αναλυτική γεωμετρία.

Θυμηθείτε ότι μια ορθογώνια παράταξη απο σύμβολα που παριστάνουν αριθμούς(τέτοια σύμβολα ονομάζονται αριθμητικά)
όπως αυτή που βλέπετε στα δεξιά παριστάνει ένα **πίνακα** με τον ίδιο τρόπο που μια αράδα απο διαδοχικά ψηφία παριστάνει ένα αριθμό. Παρατηρείστε ότι μια τέτοια παράταξη μπαίνει σε αγκύλες. Κεφαλαία γράμματα, όπως τα $M$ και $N$, χρησιμοποιούνται για να παραστήσουμε τους πίνακες.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{στήλη} \\ & & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{γραμμή} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Κάθε αριθμητικό σύμβολο στη παράταξη παριστάνει ένα *στοιχείο* του πίνακα. Το πλήθος των (οριζόντιων) γραμμών και το πλήθος των (καθέτων) στηλών στην παράσταση ενός πίνακα προσδιορίζουν τις *διαστάσεις του*. Για παράδειγμα, ο παραπάνω πίνακας έχει **δύο** γραμμές και **τρείς** στήλες και συνεπώς καλείται ένας $2\times 3$(διαβάζουμε "δύο επί τρία") πίνακας. Σημειώστε ότι *πρώτα* δίνουμε το πλήθος των γραμμών και *μετά* το πλήθος των στηλών. Ένα στοιχείο ενός πίνακα προσδιορίζεται δίνοντας τον αριθμό της γραμμής και της στήλης του. Για παράδειγμα, στον πίνακα που παρουσιάσαμε παραπάνω, το στοιχείο στη πρώτη γραμμή και στην τρίτη στήλη είναι το 5.

Εάν ένας πίνακας έχειτο ίδιο πλήθος από $n$ γραμμές και στήλες, τότε λέγεται ένας *τετραγωνικός πίνακας τάξεως $n$*. Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα $M$ με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να αντιστοιχήσουμε ένα συγκεκριμμένο πραγματικό αριθμό, που καλείται η *ορίζουσα* του $M$ και συμβολίζεται με $\det M$(διαβάζουμε " η ορίζουσα του $M$").

Οι ορίζουσες παριστάνονται πολλές φορές όπως οι πίνακες, με την διαφορά ότι αντί αγκύλες χρησιμοποιούνται κάθετες γραμμές. Για παράδειγμα,

$$\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Τα στοιχεία, οι γραμμές και οι στήλες του πίνακα καλούνται τότε τα στοιχεία, οι γραμμές και οι στήλες της αντίστοιχης ορίζουσας, και η τάξη του πίνακα λέγεται επίσης η τάξη της ορίζουσας.

Η ορίζουσα του $1 \times 1$ πίνακα $[a_1]$ είναι απλά ο ίδιος ο αριθμός $a_1$. Για παράδειγμα,

$$\det[-7] = -7.$$

(Δεν θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε κάθετες για να συμβολίσετε μια ορίζουσα πρώτου βαθμού, διότι σε αυτή την περίπτωση με κάθετες γραμμές συμβολίζουμε ως γνωστό, την απόλυτη τιμή.)

Η ορίζουσα ενός $2 \times 2$ πίνακα ορίζεται ως εξής:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{1}$$

Για παράδειγμα, $\det\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 28 - (-4) = 32$. Η ορίζουσα ενός πίνακα $3 \times 3$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1. \tag{2}$$

Τα αθροίσματα από γινόμενα αριθμών που βλέπετε στις παραπάνω ισότητες λέγονται *αναπτύγματα* των οριζουσών.

Η ορίζουσα ενός πίνακα μεγαλύτερης τάξης από 3 ορίζεται με την βοήθεια των οριζουσών της αμέσως προηγούμενης τάξεως με την χρήση *ελασσόνων*. Η **ελάσσονα** ενός στοιχείου μιας ορίζουσας ορίζεται να είναι η ορίζουσα που προκύπτει όταν απαλοίψουμε την γραμμή και την στήλη που το περιέχει στην (αρχική) ορίζουσα. Για παράδειγμα,

$$\text{η ελάσσονα του 4 στην } \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \\ -6 & 5 & 3 \end{vmatrix} \text{ είναι } \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Όμοια, η ελάσσονα του 0 είναι $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$, και η ελάσσονα του -7 είναι $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$.

Στο δεξιό μέλος της Εξίσωσης 2, μπορείτε να παραγοντοποιήσετε τους όρους κατά ζεύγη με πολλούς τρόπους. Ένας τρόπος είναι ο:

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2).$$

Προκύπτει ότι εάν συμβολίσετε με $A_1, B_1$ και $C_1$ τους ελάσσονες των στοιχείων $a_1, b_1$ και $c_1$ αντίστοιχα, τότε μπορείτε να γράψετε

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1.$$

Το δεξί μέλος της τελευταίας εξίσωσης καλείται το *αναπτύγμα* της ορίζουσας ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής.

Με κατάλληλη ανακατάταξη των όρων στο δεξί μέλος της Εξίσωσης 2, μπορείτε να δείξετε ότι μια ορίζουσα τρίτου βαθμού μπορεί να αναπτυχθεί με τις ελάσσονες των στοιχείων οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης με τον εξής τρόπο:

☐ 1. Επέλεξε μια γραμμή ή στήλη και σχημάτισε το γινόμενο κάθε στοιχείου της γραμμής ή της στήλης με την ελάσσονά της.
2. Αν το άθροισμα του αριθμού της γραμμής με του αριθμού της στήλης που περιέχει το στοιχείο είναι *άρτιος* τότε το γινόμενο παραμένει ως έχει αλλιώς παίρνει αρνητικό πρόσημο(δηλαδή πολλαπλασιάζεται με -1).
3. Το άθροισμα των αριθμών που προκύπτουν είναι η τιμή της ορίζουσας.

Η ίδια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί για να πάρουμε οριζουσών τετάρτης τάξεως (ή και ανωτέρας). Για παράδειγμα, έχετε

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = -b_1B_1 + b_2B_2 - b_3B_3 + b_4B_4,$$

όπου, $B_1 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$, κ.ο.κ.

***Παράδειγμα 1.*** Αναπτύξατε την $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ με ελάσσονες της δεύτερης γραμμής.

*Λύση:* Τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής είναι τα 2, 0, και -3. Το στοιχείο 2 είναι στη **δεύτερη** γραμμή και στη **πρώτη** στήλη· επειδή 2 + 1 = 3(περιττός), χρησιμοποιούμε το αντίθετο του γινομένου του στη ελάσσονά του. Όμοια, χρησιμοποιούμε το αντίθετο του γινομένου του -3 στη ελάσσονά του. Οπότε,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= -2(13) + 0(9) + 3(-7) = -47$$

□

Στην Άσκηση 39, σελίδα 170, είδατε ότι εάν $a_1 b_2 - a_2 b - 1 \neq 0$ τότε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned} \tag{3}$$

έχει μια μοναδική λύση, που δίνεται από τις σχέσεις

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Αυτή η λύση μπορεί να γραφτεί με χρήση των οριζουσών ως

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \; y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Έστω με $M$ συμβολίζουμε τον πίνακα $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ των συντελεστών των $x$ και $y$, και έστω $D = \det M$, και παρατηρείστε ότι οι ορίζουσες του αριθμητή, που θα τις συμβολίζουμε με $D_x$ και $D_y$, αντίστοιχα, είναι οι ορίζουσες που παίρνουμε από τον με αντικατάσταση των συντελεστών των αντίστοιχων μεταβλητών $x$ και $y$ στις Εξισώσεις 2 με τους σταθερούς όρους $c_1$ και $c_2$. Έτσι, εάν $D \neq 0$ , τότε το σύστημα των εξισώσεων 2 έχει μια μοναδική λύση, που δίνεται από τους τύπους

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}.$$

Για κάθε θετικό ακέραιο $n$, οι παραπάνω τύποι μπορούν να γενικευθούν για να εκφράσουν την μοναδική λύση οποιουδήποτε συστήματος συστήματος γραμμικών εξισώσεων με $n$ αγνώστους για τα οποία η ορίζουσα $D$ του πίνακα $M$ των συντελεστών των μεταβλητών δεν είναι 0. Η περιγραφή των λύσεων με χρήση των οριζουσών ονομάζεται **κανόνας του Cramer.**

Συγκεκριμένα, για το σύστημα

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

έχετε

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

και εάν $D \neq 0$, τότε η λύση είναι μοναδική και δίνεται από τους τύπους

$$x = \frac{D_x}{D}, \ y = \frac{D_y}{D}. \ z = \frac{D_z}{D}.$$

Σε εφαρμογές στη Αναλυτική γεωμετρία, η παρακάτω ιδιότητα των οριζουσών (δείτε Ασκήσεις 12, 13 σελίδα 178) είναι αρκετά χρήσιμη.

□ Εάν δύο γραμμές(ή δύο στήλες) μιας ορίζουσας έχουν τα αντίστοιχά τους στοιχεία ίσα, τότε η ορίζουσα είναι ίση με 0.

***Παράδειγμα 2.*** Δείξτε ότι για κάθε δύο (διαφορτεικά) σημεία $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ του επιπέδου, η

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

είναι μια εξίσωση για την ευθεία που περιέχει τα $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$.

*Λύση:* Εάν αντικαταστήσετε το $x$ με $x_1$ και το $y$ με $y-1$ στην Εξίσωση 4 παίρνετε

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

που είναι αλήθεια επειδή οι δύο πρώτες γραμμές έχουν ίσα τα αντίστοιχα στοιχεία. Οπότε το $\mathbf{S}$ ανήκει στην ευθεία που έχει την παραπάνω εξίσωση. Το ανάπτυγμα της ορίζουσας στην Εξίσωση 4 είναι

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Επειδή $\mathbf{S} \neq \mathbf{T}$, οι συντελεστές των $x$ και $y$ δεν είναι συγχρόνως 0. Οπότε η Εξίσωση 4 είναι μια γραμμική εξίσωση ως προς $x$ και $y$, και επειδή το γράφημά της περιέχει τα $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$, το γράφημά της είναι η η ευθεία που περιέχει τα $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$. □

## Ασκήσεις 3.3

Στις Ασκήσεις 1–16, εάν $M$ είναι ο δοθέν πίνακας, βρείτε την ορίζουσα του $M$.

**1.** $\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

**2.** $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$

**3.** $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

**4.** $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

**5.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}$

**6.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}$

**7.** $\begin{vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix}$

**8.** $\begin{vmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{vmatrix}$

**9.** $\begin{vmatrix} a & 1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}$

**10.** $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$

**11.** $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$

**12.** $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$

**13.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ s & p & q \end{vmatrix}$

**14.** $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 2 \end{vmatrix}$

**15.** $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

**16.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Στις Ασκήσεις 17 και 18, υπολογίστε την ορίζουσα αναπτύσσοντας την ως προς τα στοιχεία της δεύτερης στήλης.

**17.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

**18.** $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$


*Διανύσματα στο Επίπεδο*
*Το ιστορικό Ξεκίνημα*
*Ευθείες στο Επίπεδο*
*Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη*
*Εφαρμογές των Ευθειών*
*Απαντήσεις*
*Τριγωνομετρικοί Πινακες*
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 178 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

**19-20.** Κάντε τις Ασκήσεις 17 και 18 αναπτύσσοντας ως προς τα στοιχεία της τρίτης σειράς.

Στις Ασκήσεις 21–24, βρείτε το σύνολο των λύσεων για το δοθέν σύστημα εξισώσεων χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer.

**21.** $\begin{aligned} 4x-3y &= 5 \\ 2x+\ y &= 5 \end{aligned}$

**22.** $\begin{aligned} x+2y &= 0 \\ x+\ z &= 1 \\ 3y-2z &= -3 \end{aligned}$

**23.** $\begin{aligned} 3x+2y &= 1 \\ x+\ y &= -1 \end{aligned}$

**24.** $\begin{aligned} 2x-3y\ +z &= 1 \\ 6x-6y\ -z &= 0 \\ 4x+6y-2z &= 2 \end{aligned}$

Στις Ασκήσεις 25 και 26, χρησιμοποιείστε μια ορίζουσα τάξεως 3 για να βρείτε μια εξίσωση της ευθείας που περιέχει τα δοθέντα σημεία $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$.

**25.** $\mathbf{S}(2,-1), \mathbf{T}(3,0)$

**26.** $\mathbf{S}(-3,4), \mathbf{T}(5,2)$

***27.** Δείξτε ότι τα σημεία (μή αναγκαία διαφορετικά) $\mathbf{R}(x_1, y_1), \mathbf{S}(x_2, y_2)$, και $\mathbf{T}(x_3, y_3)$ είναι συγραμμικά αν και μόνον αν

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

***28.** Βρείτε μια εξίσωση σε μορφή οριζουσας για την ευθεία που περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και έχει $y$-τέμνουσα ίση με $b$.

***29.** Βρείτε μια εξίσωση σε μορφή οριζουσας για την ευθεία που έχει $x$-τέμνουσα το $a$ και $y$-τέμνουσα το $b$.

***30.** Δείξτε ότι η

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 0$$

είναι μια εξίσωση για την ευθεία που περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και έχει κλίση $m$.

***31.** Δείξτε ότι η μορφή κλίση–τέμνουσας της εξίσωσης μιας ευθείας μπορεί να γραφτεί σε μορφή ορίζουσας ως

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

***32.** Δείξτε ότι η ευθεία που διέρχεται απο την αρχή των αξόνων και περιέχει το σημείο $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ έχει μια εξίσωση της μορφής

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

***33.** Δείξτε ότι τα σημεία $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ και $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ είναι συγραμμικά με την αρχή των αξόνων εάν και μόνον εάν

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

***34.** Δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $\mathbf{R}(x_1, y_1)$, $\mathbf{S}(x_2, y_2)$, και $\mathbf{T}(x_3, y_3)$ είναι ίσο με

$$\pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(Υπόδειξη: Δείτε Άσκηση 43, σελίδα 161)

***35.** Δείξτε ότι εάν τα διανύσματα $\mathbf{s} = (x_1 y_1)$ και $\mathbf{t} = (x_2, y_2)$ δεν είναι παράλληλα, τότε κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} = (x, y)$ μπορεί να εκφραστεί ως ένα γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{s}$ και $\mathbf{t}$,

$$\mathbf{v} = a\mathbf{s} + b\mathbf{t},$$

όπου τα δίνονται από τους τύπους

$$a = \frac{\begin{vmatrix} x & x_2 \\ y & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}} \quad \text{και} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x \\ y_1 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}.$$

(Υπόδειξη: Η διανυσματική εξίσωση $(x, y) = a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2)$ είναι ισοδύναμη με ένα σύστημα δύο Καρτεσιανών εξισώσεων ως προς τις μεταβλητές $a$ και $b$. )

## 3.4. Αναλυτικές Αποδείξεις

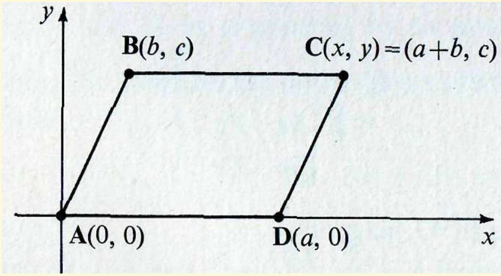
Οι αναλυτικές μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολύ αποτελεσματικά στην απόδειξη θεωρημάτων απο την Ευκλείδια επίπεδη γεωμετρία. Οι αποδείξεις μπορούν να δοθούν με την χρήση των Καρτεσιανών συντεταγμένων των σημείων ή, διαφορετικά, με χρήση των διανυσμάτων.

Όταν οι συντεταγμένες χρησιμοποιούνται για την απόδειξη ενός θεωρήματος, τότε μερικές φορές μπορείτε να κάνετε ευκολότερη την απόδειξη εάν οι συντεταγμενικοί άξονες κατευθύνονται με ένα *συγκεκριμένο* τρόπο ως προς το επίπεδο σχήμα που μελετάμε· αυτό δεν σημαίνει ότι θυσιάσαμε την γενικότητα των αποτελεσμάτων μας διότι η θέση των συντεταγμενικών αξόνων στο επίπεδο είναι αυθαίρετη. Όμως, όταν χρησιμοποιούνται διανυσματικές μέθοδοι, η θέση του σχήματος ως προς τους συντεταγμενικούς άξονες δεν είναι κάτι σημαντικό· πράγματι, η ακριβής θέση του σχήματος συνήθως δεν μπαίνει καθόλου μέσα στη συζήτηση.

**Θεώρημα.** Τα μήκη των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσα.

*Απόδειξη με χρήση συντεταγμένων:*

Για ένα παραλληλόγραμμο **ABCD** (δείτε το παρακάτω διάγραμμα), οι συντεταγμενικοί άξονες μπορούν να επιλεγούν με αρχή των αξόνων το **A** και η θετική κατεύθυνση του $x$-άξονα κατά μήκος του $\overline{\mathbf{AD}}$.




Τότε οι συντεταγμένες του **A** είναι (0,0) και οι συντεγμένες του **D** είναι της μορφής $(a, 0)$, με $a > 0$. Έστω το **B** έχει συντεταγμένες $(b, c)$, με $c \neq 0$, όπως δείχνεται στο σχήμα. Μπορείτε να βρείτε τα $(x, y)$, τις συντεταγμένες του **C**, ως εξής:

Επειδή $\overline{\mathbf{BC}} \| \overline{\mathbf{AD}}$, και η κλίση του $\overline{\mathbf{AD}}$ είναι 0, προκύπτει ότι η κλίση του $\overline{\mathbf{BC}}$ είναι 0. Οπότε έχετε $\frac{y-c}{x-b} = 0$, ώστε

$$y = c.$$

Επειδή $\overline{\mathbf{CD}} \| \overline{\mathbf{AB}}$, η κλίση $\overline{\mathbf{CD}}$ = κλίση $\overline{\mathbf{AB}}$. Οπότε, εάν $x \neq a$,

$$\frac{y-0}{x-a} = \frac{c-0}{b-0}.$$

Όμως, επειδή $y = c$, όπως ήδη είχαμε βρεί, έχετε

$$\frac{c-0}{x-a} = \frac{c-0}{b-0},$$

ή

$$x = a + b.$$

Εάν $x = a$, οπότε το $\overline{\mathbf{CD}}$ είναι κάθετο, τότε το $\overline{\mathbf{AB}}$ πρέπει να είναι επίσης κάθετο, και άρα $b = 0$· οπότε και σ' αυτήν την περίπτωση έχετε επίσης $x = a + b$.

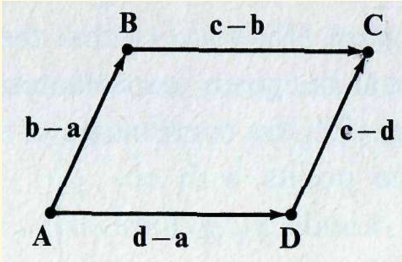
Αφότου οι συντεταγμένες $(a + b, c)$ του $\mathbf{C}$ είναι γνωστές, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο της απόστασης για να βρείτε τα μήκη των πλευρών:

$$\begin{aligned}
d(\overline{\mathbf{AB}}) &= \sqrt{(b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2} \\
d(\overline{\mathbf{CD}}) &= \sqrt{(a+b-a)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2} \\
d(\overline{\mathbf{BC}}) &= \sqrt{(a+b-b)^2 + (c-c)^2} = \sqrt{a^2} = a \\
d(\overline{\mathbf{AD}}) &= \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{a^2} = a
\end{aligned}$$

Οπότε τα μήκη των απέναντι πλευρών είναι ίσα.

*Απόδειξη χρησιμοποιώντας διανύσματα:*

Έστω $\mathbf{ABCD}$ είναι ένα παραλληλόγραμμο, και έστω τα (αντίστοιχα) έντονα πεζά γράμματα να αναφέρονται σε διανύσματα από την αρχή των αξόνων στα αντίστοιχα σημεία.




Επειδή $\overline{\mathbf{CD}} \| \overline{\mathbf{AB}}$ και $\overline{\mathbf{BC}} \| \overline{\mathbf{AD}}$, έχετε

$$\mathbf{c} - \mathbf{d} = k_1(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \text{ και } \mathbf{c} - \mathbf{d} = k_2(\mathbf{d} - \mathbf{a}),\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Επειδή

$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = (\mathbf{c} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

και

$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = (\mathbf{c} - \mathbf{d}) + (\mathbf{d} - \mathbf{a}),$$

έχετε

$$(\mathbf{c} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (\mathbf{c} - \mathbf{d}) + (\mathbf{d} - \mathbf{a}).$$

Οπότε, από τις Εξισώσεις 1,

$$k_2(\mathbf{d} - \mathbf{a}) + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = k_1(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\mathbf{d} - \mathbf{a}),$$

ή

$$(k_2 - 1)(\mathbf{d} - \mathbf{a}) = (k_1 - 1)(\mathbf{b} - \mathbf{a}). \tag{2}$$

Λόγω των υποθέσεων, κανένα εκ των $\mathbf{d} - \mathbf{a}$ ή $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα. Οπότε εάν $k_1 - 1 \neq 0$ και $k_1 - 1 \neq 0$, τότε η Εξίσωση 2 συνεπάγεται ότι τα $\mathbf{d} - \mathbf{a}$ και $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ είναι μη μηδενικά αριθμητικά πολλαπλάσια μεταξύ τους και άρα είναι παράλληλα (σελίδα 36). αλλά αυτό είναι αδύνατον, διότι οι διπλανές πλευρές ενός παραλληλόγραμμου *δεν* είναι παράλληλες. Οπότε μπορείτε να συμπεράνετε ότι $k_2 - 1 = 0$ και $k_1 - 1 = 0$, δηλαδή, ότι $k_2 = 1$ και $k_1 = 1$. Τότε από την Εξίσωση 1 παραπάνω, έχετε

$$\mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \text{ και } \mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{d} - \mathbf{a}, \tag{3}$$

Κατά συνέπεια,

$$\|\mathbf{c} - \mathbf{d}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$

και

$$\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{d} - \mathbf{a}\|,$$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

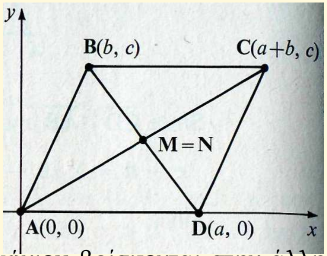
Για μια επιπλεόν διασάφηση των δύο μεθόδων, δίνουμε άλλο ένα παράδειγμα.

**Θεώρημα.** Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται μεταξύ τους.

*Απόδειξη με χρήση συντεταγμένων:*

Στην απόδειξη στη σελίδα 182, είδατε ότι οι κορυφές του παραλληλογράμμου $\mathbf{ABCD}$ μπορούν να πάρουν συντεταγμένες όπως αυτές που βλέπετε παρακάτω.

Από την Άσκηση 23 σελίδα 86, οι συντεταγμένες του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει δύο σημεία με συντεταγμένες $(x_1, y_1)$ και $(x_2, y_2)$ δίνονται απο τις σχέσεις $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Κατά συνέπεια, το μέσο **M** του $\overline{\mathbf{AC}}$ έχει συντεταγμένες και το μέσο του $\overline{\mathbf{BD}}$ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.




Οπότε, **M** = **N**. Επειδή τα μέσα κάθε διαγώνιου βρίσκονται στην άλλη διαγώνιο, οι διαγώνιες διχοτομούνται.

*Απόδειξη χρησιμοποιώντας διανύσματα:*

Έστω το **ABCD** είναι ένα παραλληλόγραμμο, με **M** και **N** να είναι τα μέσα των διαγωνίων $\overline{\mathbf{AC}}$ και $\overline{\mathbf{BD}}$, αντίστοιχα, όπως φαίνεται παρακάτω. Οπότε,

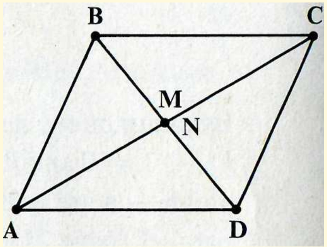
$$\mathbf{m} - \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$

ώστε

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a})$$

Όμοια, έχετε

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d}).$$




Από την Εξίσωση 3 στη σελίδα 185, έχετε

$$\mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Οπότε

$$\mathbf{c} - \mathbf{d} + (\mathbf{d} + \mathbf{a}) = \mathbf{b} - \mathbf{a} + (\mathbf{d} + \mathbf{a}),$$
$$\mathbf{c} + \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{d},$$
$$\frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d}).$$

Άρα $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, δηλαδή, $\mathbf{M} = \mathbf{N}$ και το θεώρημα απεδείχθη.

## Ασκήσεις 3.4

Στις Ασκήσεις1–10, αποδείξτε το δοθέν θεώρημα χρησιμοποιώντας Καρτεσιανές συντεταγμένες.

**1.** Οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου έχουν ίδιο μήκος.

**2.** Οι διαγώνιες ενός τετραγώνου είναι κάθετες μεταξύ τους.

**3.** Οι διαγώνιες ενός ρόμβου είναι κάθετες μεταξύ τους.

**4.** Το μέσο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ισαπέχει από τις τρείς κορυφές.

**5.** Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου τέμνονται στο ίδιο σημείο.

**6.** Το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των τεσσάρων πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των δύο διαγωνίων.

**7.** Οι διαγώνιοι ενός ισοσκελούς τραπεζοειδούς είναι ίσου μήκους.

**8.** Οι διαγώνιοι ενός τραπεζοειδούς και της ευθείας που ενώνει τα μέσα των παραλλήλων πλευρών συναντιώνται στο ίδιο σημείο.

**9.** Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μή παράλληλων πλευρών ενός τραπεζοειδούς είναι παράλληλο στη βάση, και το μήκος του είναι ίσο με το μισό του αθροίσματος των μηκών των βάσεων.

**10.** Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά και έχει μήκος το μισό του μήκους της τρίτης πλευράς.

Στις Ασκήσεις 11–16, αποδείξετε τα δοθέντα θεωρήματα χρησιμοποιώντας διανύσματα.

***11.** Οι διάμεσοι στις δύο ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου έχουν ίσο μήκος.

***12.** Η κάθετος διχοτόμος της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου διέρχεται από την κορυφή του τριγώνου.

***13.** Τα μέσα των πλευρών ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κορυφές ενός παραλληλογράμμου.

***14.** Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, κάθε διάμεσος είναι και ένα ύψος.

***15.** Οι διάμεσοι ενός τριγώνου τέμνονται σε ένα σημείο που η απόστασή του από κάθε κορυφή είναι ίση με τα δύο–τρίτα του μήκους της διαμέσου απο αυτή την κορυφή.

***16.** Οι κάθετες διχοτόμοι των πλευρών ενός τριγώνου συναντιώνται στο ίδιο σημείο.

***17-21.** Χρησιμοποιείστε διανύσματα για να αποδείξετε τα θεωρήματα στις Ασκήσεις 2,3,6,9, και 9.

***22-25.** Χρησιμοποιείστε Καρτεσιανές συντεταγμένες για να αποδείξετε τα θεωρήματα στις Ασκήσεις 12, 13, 15 και 16.

***26.** Δείξτε ότι εάν οι ευθείες που περιέχουν δύο απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου συναντιώνται σε ένα σημείο $\mathbf{S}$ και οι ευθείες που περιέχουν τις δύο άλλες πλευρές συναντιώνται σε ένα σημείο $\mathbf{T}$, τότε το μέσο του τμήματος $\overline{\mathbf{ST}}$ είναι συγραμμικό με το μέσο που περιέχει τα μέσα των διαγωνίων του τερταπλεύρου. (Υπόδειξη: Θέστε την αρχή των αξόνων να είναι μια κορυφή του παραλληλογράμμου.)

# Περίληψη Κεφαλαίου

**1.** Η απόσταση μεταξύ ενός σημείου $\mathbf{S}(x_1, y_)$ και μιας ευθείας $\mathfrak{L}$ που έχει διάνυσμα κατεύθυνσης $\mathbf{v}$ και περιέχει ένα δοθέν σημείο $\mathbf{T}$ δίνεται από τον τύπο

$$d(\mathbf{S}, \mathfrak{L}) = \frac{|(\mathbf{s} - \mathbf{t})\cdot \mathbf{v_p}|}{||\mathbf{v_p}||}.$$

Εάν η $\mathfrak{L}$έχει εξίσωση $Ax + By + C = 0,$, τότε

$$d(\mathbf{S}, \mathfrak{L}) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

**2.** Η **τομή** δύο ευθειών $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ είναι είτε ένα μοναδικό σημείο εάν δεν είναι παράλληλες, μια ευθεία εάν οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ συμβολίζουν την ίδια ευθεία, ή το κενό σύνολο εάν οι $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ είναι παράλληλες και διαφορετικές.

**3.** $\det[a_1] = a_1\cdot$ $\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$. Οι ορίζουσες ανωτέρου βαθμού μπορούν να αναπτυχθούν με την βοήθεια ελασσόνων, για παράδειγμα:

$$\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1$$

όπου $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, B_1 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, και $C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$. Τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων μπορούν να λυθούν με αντικατάσταση ή με απαλοιφή. Επίσης μπορούν να λυθούν με μια διανυσματική μέθοδο ή με τον κανόνα του Cramer.

**4.** Για ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων δύο μεταβλητών,

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

στο οποίο $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, , ο κανόνας του Cramer βεβαιώνει ότι η μοναδική λύση δίνεται από τις σχέσεις

$$x = \frac{D_x}{D}, \; y = \frac{D_y}{D},$$

όπου

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

**5.** Οι εξισώσεις των ευθειών μπορούν να γραφτούν με μορφή οριζουσών. Η μορφή δύο σημείων είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**6.** Οι αποδείξεις των γεωμετρικών θεωρημάτων μπορούν να διατυπωθούν με χρήση των Καρτεσιανών συντεταγμένων των σημείων ή με χρήση διανυσμάτων

## *Επαναληπτικές Ασκήσεις*

**1.** Βρείτε την απόσταση μεταξύ του σημείου $\mathbf{S}(4, -1)$ και της ευθείας $\mathfrak{L}$ με εξίσωση
$$5x + 12y - 2 = 0.$$

**2.** Βρείτε την απόσταση μεταξύ των παραλλήλων ευθειών με εξισώσεις

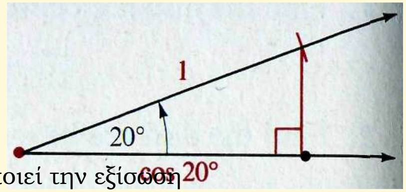
$$3x - 4y - 15 = 0 \;\text{ και }\; 3x - 4y + 10 = 0.$$

3. Βρείτε την τομή των ευθειών $\mathfrak{L}_1$ και $\mathfrak{L}_2$ με τις παρακάτω παραμετρικές διανυσματικές εξισώσεις:
$$\mathfrak{L}_1 : (x, y) = (-2, 2) + r_1(2, 3), \mathfrak{L}_2 : (x, y) = (4, 2) + r_2(1, -1).$$
4. Λύστε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων
$$\begin{aligned} x-3y &= 4 \\ 2x+5y &= -3 \end{aligned}$$
με απαλοιφή.
5. Λύστε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων
$$\begin{aligned} 4x-2y &= 3 \\ 3x+5y &= 6 \end{aligned}$$
με χρήση διανυσμάτων.
6. Λύστε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 3x - 2z &= 1 \\ y + 3z &= 2 \end{aligned}$$
με τον κανόνα του Cramer
7. Υπολογίστε την ορίζουσα
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$
αναπτύσσοντας την ως προς τις ελάσσονες της δεύτερης γραμμής.
8. Χρησιμοποιείστε μια ορίζουσα τρίτης τάξης για να γράψετε μια εξίσωση της ευθείας που έχει $x$-τέμνουσα 7 και $y$-τέμνουσα -3.
9. Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $\mathbf{O}(0, 0)$, $\mathbf{S}(3, 5)$, και $\mathbf{T}(6, 4)$.
10. Αποδείξτε ότι οι απέναντι γωνίες των δύο ίσων πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

# Κατασκευάσιμες και Μή Κατασκευάσιμες Γωνίες

Υπάρχουν πολλές γωνίες που μπορούν να τριχοτομηθούν με μια κατασκευή με κανόνα και διαβήτη. Για παράδειγμα, μια ορθή γωνία μπορεί να τριχοτομηθεί διότι, όπως είδατε στην σελίδα 142, ένα ισόπλευρο τρίγωνο μπορεί να κατασκευαστεί ξεκινώντας με μία σύνθεση δύο μόνο σημείων, και, φυσικά, κάθε μία απο τις $60^\circ$ μοιρών γωνίες του μπορεί να διχοτομηθεί. Όμως, μια γωνία $60^\circ$ δεν μπορεί να τριχοτομηθεί με μια κατασκευή με κανόνα και διαβήτη· δηλ. μια γωνία $20^\circ$ δεν μπορεί να κατσκευαστεί με την μέθοδο αυτή. Για να δούμε τον λόγο, παρατηρείστε ότι εάν μια γωνία $20^\circ$ μπορούσε να κατασκευαστεί, τότε θα μπορούσε να κατασκευαστεί και ο αριθμός $\cos 20^\circ$. Θυμηθείτε τώρα την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos 3\partial = 4\cos^3 \partial - 3\cos \partial$$




Επειδή $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, προκύπτει ότι το $\cos 20^\circ$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$$

ή

$$8x^3 - 6x - 1 = 0. \tag{1}$$

Οπότε το $\cos 20^\circ$ είναι ένας αλγεβρικός αριθμός, βαθμού το πολύ 3. Μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει λύση της Εξίσωσης 1 η οποία να είναι συγχρόνως λύση μιας γραμμικής ή τετραγωνικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Οπότε ο $\cos 20^\circ$ είναι ένας αλγεβρικός αριθμός βαθμού 3, και κατά συνέπεια δεν είναι κατασκευάσιμος. Οπότε δεν υπάρχει κατασκευή με κανόνα και διαβήτη για την τριχοτόμηση μιας γωνίας των $60^\circ$.

Έχουν αναπτυχθεί πολλές κατασκευές για την τριχοτόμηση μιας τυχαίας γωνίας, αλλά φυσικά από την παραπάνω συζήτηση κάθε τέτοια κατασκευή είτε δεν ικανοποιεί τα

Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πίνακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 192 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

κριτήρια μιας κατασκευής με κανόνα και διαβήτη ή δεν είναι ορθή για όλες τις γωνίες.

Μια κατασκευή ρουτίνας για μία *προσεγγιστική* τριχοτόμηση είναι η παρακάτω: Επειδή κάθε γωνία μπορεί να διχοτομηθεί, και μία οποιαδήποτε απο τις προκύπτουσες γωνίες μπορεί ξανά να διχοτομηθεί, συμπεραίνουμε ότι για μια οποιαδήποτε γωνία $\partial$ μπορούμε να κατασκευάσουμε γωνίες με τα εξής μεγέθη σε μοίρες

$$\frac{1}{4}m^\circ(\partial), (\frac{1}{4}+\frac{1}{15})m^\circ(\partial), (\frac{1}{4}+\frac{1}{15}+\frac{1}{64})m^\circ(\partial),$$

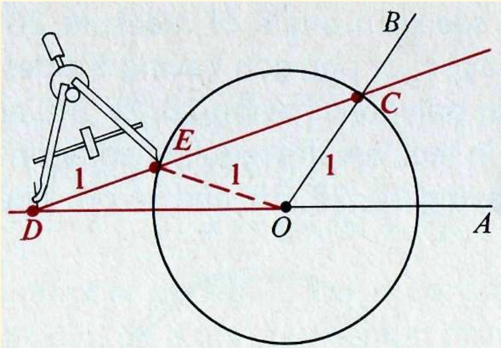
κ.ο.κ. Επειδή η γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{15}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots$$

συγκλίνει στο $\frac{1}{3}$, συνεχίζοντας αυτή την διαδιακασία μπορείτε σε κάποιο πεπερασμένο αριθμό βημάτων να κατασκευάσετε μια γωνία με μέγεθος που είναι όσο θέλουμε κοντά στην τιμή $\frac{1}{3}m^\circ(\partial)$· μετά από το $n$ιοστό-βήμα, το σφάλμα θα είναι ακριβώς ίσο με $\frac{1}{3\cdot 4^n}m^\circ(\partial)$.

Άλλες "τριχοτομήσεις" που έχουν κατά καιρούς αναφερθεί, αποκρύβουν έξυπνα κάποιο μικρό λάθος στην κατασκευή. Απλά να θυμούμαστε δύο πράγματα: (α) σε κάθε "τριχοτόμηση" η υποχρέωση της *απόδειξης* επιβαρύνει το πρόσωπο που ισχυρίζεται την λύση, και (β) μια ορθή απόδειξη με κανόνα και διαβήτη *δεν* είναι δυνατή.

Μια σύνθεση που οφείλεται στον Αρχιμήδη, που στην πραγματικότητα δεν είναι κατασκευή με κανόνα και διαβήτη, πράγματι κάνει τριχοτόμηση μιας τυχαίας γωνίας . Η σύνθεση σχεδιάζεται ως εξής:




Για μια δοθείσα γωνία $AOB$, σχεδιάζουμε τον μοναδιαίο κύκλο με κέντρο το $O$, και έστω αυτός ο κύκλος τέμνει την ακτίνα $OB$ στο σημείο $C$. Επεκτείνετε την ακτίνα $OA$ προς τα πίσω ξεκινώντας από το $O$. Κρατείστε μια άκρη ενός διαβήτη σταθερά σε ένα σημείο $D$ ενός κανόνα και στη συνέχεια τοποθετείστε αυτό το σημείο πανω στην επέκταση της $OA$. Θέστε επίσης κατάλληλα τον κανόνα ώστε να διέρχεται και απο το σημείο $C$. Τώρα θέστε την άλλη άκρη του διαβήτη στο σημείο $E$ του κανόνα σε μοναδιαία απόσταση από το $D$ με κατεύθυνση προς το $C$, και προσαρμόστε τον κανόνα με τέτοιο τρόπο ώστε το $E$ να βρίσκεται πάνω στον κύκλο, όπως φαίνεται στο σχήμα. (Διαφορετικά, θα μπορούσατε να κρατήσετε το $E$ πάνω στον κύκλο, να τοποθετήσετε τον κανόνα ώστε να διέρχεται και απο το σημείο $C$, και να προσαρμόσετε τον κανόνα με τέτοιο τρόπο ώστε το σημείο $D$ να διέρχεται από την επέκταση της $OA$.) Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή, έχετε

$$m^\circ(\angle EDO) = m^\circ(\angle EOD),$$

και

$$m^\circ(\angle CEO) = m(\angle OCE). \tag{2}$$

Οπότε, επειδή το μέγεθος της εξωτερικής γωνίας ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών, έχετε

$$m^\circ(\angle CEO) = 2m^\circ(\angle EDO), \tag{3}$$

και

$$m^\circ(\angle AOB) = m^\circ(\angle EDO) + m^\circ(\angle OCE). \tag{4}$$

Οπότε, από τις Εξισώσεις 2 και 3 παραπάνω,

$$2m^\circ(\angle EDO) = m^\circ(\angle OCE).$$

Αντικαθιστώντας αυτό το τελευταίο αποτέλεσμα στην Εξίσωση 4, παίρνετε

$$m^\circ(\angle AOB) = 3m^\circ(\angle EDO). \tag{5}$$

Από το διάγραμμα παραπάνω, μπορείτε να δείτε ότι τα σημεία $A, O$ και $D$ και επίσης τα $C, E$ και $D$ είναι συγραμμικά, οπότε

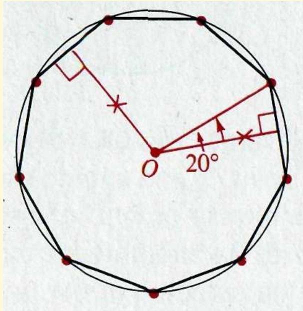
$$m^\circ(\angle EDO) = m^\circ(\angle ADC),$$

και άρα η Εξίσωση 5 είναι ισοδύναμη με την

$$m^\circ(\angle ADC = \frac{1}{3}(\angle AOB).$$

Όμως, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι αν και κάποιος μπορεί να ικανοποιηθεί οπτικά ότι η σύνθεση του Αρχιμήδη έχει σχεδιαστεί με ακρίβεια και ορθότητα, οι κατάλληλες τοποθετήσεις και προσαρμογές του κανόνα δεν συμβιβάζονται με τα κριτήρια που θέσαμε για μία κατασκευή με κανόνα και διαβήτη.

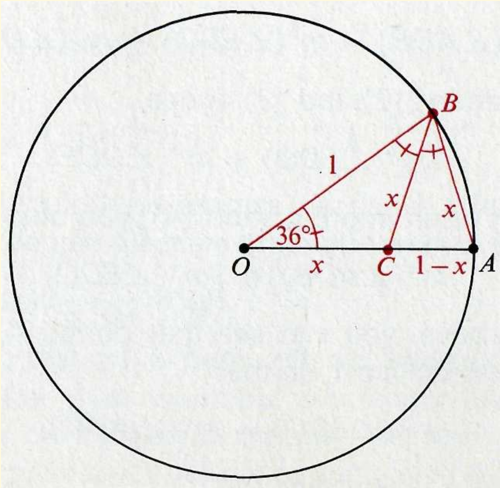
Επειδή, όπως είδατε προηγουμένως, μια γωνία με μέτρο δεν είναι κατασκευάσιμη, ομοίως δεν μπορεί να κατασκευαστεί και ένα κανονικό εννεάγωνο δηλαδή ένα κανονικό πολύγωνο με εννέα πλευρές όπως φαίνεται στο σχήμα παρακάτω. Για τον ίδιο λόγο, κανονικά πολύγωνα με κ.ο.κ. πλευρές δεν είναι κατασκευάσιμα. Ούτε είναι κατασκευάσιμο ένα κανονικό επτάγωνο (με 7 πλευρές) και άρα ούτε τα κανονικά πολύγωνα με πλευρές κ.ο.κ.




Αντίθετα, ένα ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο είναι κατασκευάσιμα και άρα είναι και τα κανονικά εξάγωνα και τα κανονικά οκτάγωνα κ.ο.κ.

Το 1796, σε ηλικία μόλις δεκαοκτώ χρονών, ο μεγάλος Γερμανός μαθηματικός Carl Fredrich Gauss (1777-1855) απέδειξε το πραγματικά απρόβλεπτο αποτέλεσμα ότι ένα κανονικό πολύγωνο με 17 πλευρές είναι κατασκευάσιμο.

Με την βοήθεια της θεωρίας των αλγεβρικών αριθμών, είναι σήμερα γνωστό ότι ένα πολύγωνο με $k$ πλευρές μπορεί να κατασκευασθεί εάν και μόνον εάν το $k$ είναι ένας πρώτος αριθμός του Fermat (δηλαδή, ένας πρώτος της μορφής $2^{2^n}$) ή μια δύναμη του 2, ή το γινόμενο διαφορετικών αριθμών αυτής της μορφής. Δυστυχώς γνωρίζουμε μόνο λίγους πρώτους του Fermat. Οι πρώτοι απ' αυτούς είναι οι 3, 5, 17, και 257. Μεταξύ αυτών των κανονικών πολυγώνων που μπορεί να κατασκευαστούν είναι πεντάγωνο και το δεκάγωνο, όπως θα δείξουμε τώρα.




Κατασκευή Κανονικού Δεκαγώνου

(Αφότου κατασκεάσατε ένα κανονικό δεκάγωνο, μπορείτε να ενώσετε διαδοχικές μη γειτονικές κορυφές για να φτιάξετε ένα κανονικό πεντάγωνο.)

Αρχίζοντας με τον μοναδιαίο κύκλο, μπορείς να εγγράψεις ένα κανονικό δεκάγωνο εάν μπορείς να κατασκευάσεις ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος ίσο με το μήκος της πλευράς του δεκαγώνου.

Στο παραπάνω σχήμα τα ισοσκελή τρίγωνα $OAB$ και $BAC$ είναι όμοια. Οπότε, έχετε

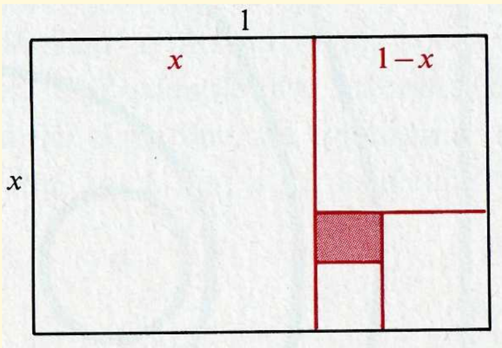
Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πινακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 197 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

κεντρο

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{x}{1-x}, \\ x^2 + x - 1 &= 0, \\ x &= \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \end{aligned} \tag{6}$$

Επειδή το $x$ είναι ένας αλγεβρικός αριθμός τάξεως 2, ο $x$ μπορεί να κατασκευαστεί, αυτό που θέλουμε.

Από την Εξίσωση 6, ένα σημείο πάνω σε ένα μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα που βρίσκεται σε απόσταση $x$ ή $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ από το ένα άκρο του τμήματος διαιρεί το τμήμα σε μια ενδιαφέρουσα αναλογία. Ο λόγος $\frac{1}{x}$ είναι γνωστός στα μαθηματικά ως ο λόγος της *χρυσής* τομής. Ένα ορθογώνιο με πλευρές που έχουν μήκος αυτόν τον λόγο καλείται ένα *χρυσό ορθογώνιο* από τους αρχαίους Έλληνες λόγω του ευχάριστου αισθητικά σχήματος του. Εάν ένα τετράγωνο αποκόβεται από την μία άκρη ενός χρυσού ορθογωνίου, τότε το υπόλοιπο ορθογώνιο είναι επίσης χρυσό.




Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πινακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 198 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Είναι επίσης ενδιαφέρον και συγχρόνως διασκεδαστικό να παρατηρήσετε ότι αυτή η διαδιακασία αποκοπής τετραγώνων ώστε να παραμείνουν χρυσά ορθογώνια μπορεί να συνεχιστεί θεωρητικά επ' άπειρο.

# Κεφάλαιο 4

# Απαντήσεις στις Ασκήσεις με Περιττό Αριθμό

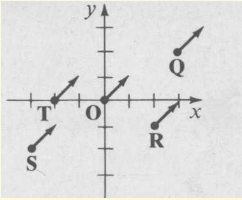
## 4.1. Απαντήσεις στις Ασκήσεις με Περιττό Αριθμό

***Ασκήσεις 1.1, σελίδες 6–7***

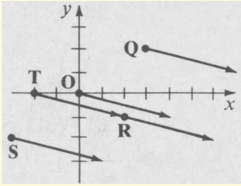
**1.** $-4$ **3.** $1$ **5.** $x = 1, y = 5$ **7.** $3$

**9.** $3\sqrt{2}$ **11.** $4$ **13.** $\sqrt{8+2\sqrt{3}}$ **25.** $(3, 4)$

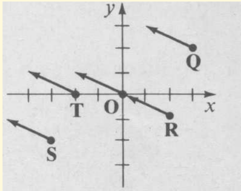
**1.**



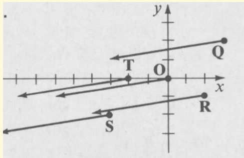

**3.**



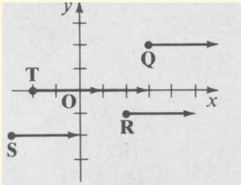

**5.**




**7.**




**9.**




**11.** **(α)** $(1, 6)$
**(β)** $(4, 8)$
**(γ)** $(5, 5)$
**(δ)** $(-12, 13)$
**(ε)** $(-5, 1)$

**13.** **(α)** $(-3, 5)$ **(β)** $(0, 7)$ **(γ)** $(1, 4)$ **(δ)** $(-6, 12)$ **(ε)** $(-9, 0)$

**15.** **(α)** $(7, -8)$ **(β)** $(10, -6)$ **(γ)** $(11, -9)$ **(δ)** $(4, -1)$ **(ε)** $(1, -13)$

**17.** **(α)** $(-3, -4)$ **(β)** $(0, -2)$ **(γ)** $(1, -5)$ **(δ)** $(-6, 3)$ **(ε)** $(-9, -9)$

**19.** **(α)** $(-2, 0)$ **(β)** $(1, 2)$ **(γ)** $(2, -1)$ **(δ)** $(-5, 7)$ **(ε)** $(-8, -5)$

**21.** $(4, 2)$ **23.** $(-5, 3)$ **25.** $(-15, 9)$ **27.** $(6, 0)$

**29.** $(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$ **31.** $(\frac{11}{2}, 3)$ **33.** $(7, -10)$

***Ασκήσεις 1.3, σελίδες 21–23***

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $(6,-2)$ | **3.** $(-1,6)$ | **5.** $(5,-3)$ |
| **7.** $(4,3)$ | **9.** $(2,-4)$ | **11.** $(6,1)$ |
| **13.** $(-4,2)$ | **15.** $(-2,5)$ | **17.** $(1,-4)$ |

***Ασκήσεις 1.4, σελίδες 34–34***

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $3\sqrt{2}\cdot 45^\circ$ | **3.** $2\cdot 30^\circ$ | **5.** $5\cdot 126^\circ 50'$ |
| **7.** $2\cdot 180^\circ$ | **9.** $10\cdot 233^\circ 10'$ | **11.** $5\cdot 306^\circ 50'$ |
| **13.** $2\sqrt{5}\cdot 26^\circ 30'$ | **15.** $3\sqrt{2}\cdot 45^\circ$ | **17.** $(4.35, 2.5)$ |
| **19.** $(0,6)$ | **21.** $(1,-1.73)$ | **23.** $(-6.06,-3.5)$ |
| **25.** **(α)** $3$, **(β)** $-\frac{16}{3}$ | **27.** **(α)** $-\frac{9}{2}$,**(β)** $2$ | **29.** **(α)** $\frac{6}{5}$, **(β)** $-\frac{10}{3}$ |
| **31.** $(\frac{15\sqrt{58}}{58}, \frac{35\sqrt{58}}{58})$ | **33.** $(-\frac{6\sqrt{29}}{29}, \frac{15\sqrt{29}}{29})$ | **35.** $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2})$ |

***Ασκήσεις 1.5, σελίδες 42–44***

**1.** $(7, -1)$ **3.** $(-1, -3)$

**5.** $5\sqrt{2}$ **7.** $4\sqrt{29} - 4$

**9.** $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ **11.** $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$

**13.** $(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$ **15.** ναί

**17.** όχι **19.** ναί

**21.** $2(\cos 30°, \sin 30°)$ **23.** $\sqrt{34}(\cos 301°, \sin 301°)$

**25.** $\sqrt{53}(\cos 254°, \sin 30°)$ **27.** $\sqrt{34}(\cos 301°, \sin 301°)$

**29.** $\sqrt{53}(\cos 254°, \sin 254°)$ **31.** $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

**33.** $(-\frac{7}{\sqrt{58}}, \frac{3}{58})$ **35.** $(0, 1)$

**37.** $(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$

### *Ασκήσεις 1.6, σελίδες 49–51*

**1.** $-1$ **3.** $0$ **5.** $15 - \sqrt{2}$

**7.** $16$ **9.** $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ **11.** $(-\frac{7}{4}, -\frac{3}{4})$

**13.** $(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$ **15.** $(0, -1)$ **17.** $-\frac{5}{3}$

**19.** $6$ **21.** $3$ **23.** $-\frac{3}{2}$

**25.** $4\sqrt{3}$ **27.** $0$ **29.** $6\sqrt{3}$

### *Ασκήσεις 1.7, σελίδες 56–57*

**1.** κάθετα **3.** παράλληλα **5.** κανένα απ' αυτά, $m°(a) \approx 143$

**7.** κανένα απ' αυτά, $m°(a) = 30$ **9.** κάθετα **11.** κανένα απ' αυτά, $m°(a) \approx 25$

**13.** $m^\circ(\angle A) = 60, m^\circ(\angle B) = 60, m^\circ(\angle C) = 60$

**15.** $m^\circ(\angle A) = 90, m^\circ(\angle B) \approx 53, m^\circ(\angle C) \approx 37$

### *Ασκήσεις 1.8, σελίδες 65–67*

**1. (α)** $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **(β)** $\frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{u} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u_p}$ **(γ)** $\frac{11}{25}\mathbf{t} + \frac{2}{25}\mathbf{t_p}$

**3. (α)** $-\mathbf{i}$ **(β)** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u_p}$ **(γ)** $-\frac{3}{25}\mathbf{t} + \frac{4}{25}\mathbf{t_p}$

**5. (α)** $-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ **(β)** $-\frac{7}{\sqrt{2}}\mathbf{u} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u_p}$ **(γ)** $-\mathbf{t}$

**7. (α)** $5\mathbf{i} + -6\mathbf{j}$ **(β)** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u} - \frac{11}{\sqrt{2}}\mathbf{u_p}$ **(γ)** $-\frac{9}{25}\mathbf{t} - \frac{38}{25}\mathbf{t_p}$

**9.** $90^\circ$ **11.** $120^\circ$ **13.** $(-\frac{3}{13}, -\frac{2}{13})\cdot\frac{-1}{\sqrt{13}}$

**15.** $(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})\cdot\frac{-2}{\sqrt{5}}$ **17.** $0$ **19.** $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

**21.** $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$

### *Ασκήσεις Επαναληπτικές Κεφαλαίου, σελίδες 71–72*

**1.** $x = 3, y = 3$ **3.** $(2, 1)$ **5.** νόρμα$= 2 \cdot \tan a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**7.** $-6$ **9.** $\frac{26}{5}\mathbf{u} + \frac{7}{5}\mathbf{u_p}$

### *Ασκήσεις 2.1, σελίδες 85–87*

1. $\mathbf{u} = (2, 1) + r(-2, -1) \cdot x = 2 - 2r, y = 1 - r$
3. $\mathbf{u} = (4, -2) + r(0, 5) \cdot x = 4, y = -2 + 5r$
5. $\mathbf{u} = (-7, 2) + r(4, -3) \cdot x = -7 + 4r, y = 2 - 3r$
7. $\mathbf{u} = (-6, -3) + r(2, 1) \cdot x = -6 + 2r, y = -3 + r$
9. $\mathbf{u} = (a, b) + r(b - a, a - b) \cdot x = a + r(b - a), y = b + r(a - b)$
11. **(α)** $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ **(β)** $(-1, 1), (2, 0)$
13. **(α)** $(0, \frac{5}{2})$ **(β)** $(-1, 0), (1, 5)$
15. **(α)** $(-4, 2)$ **(β)** $(-6, 1), (-2, 3)$
17. **(α)** $(\frac{1}{2}, 4)$ **(β)** $(-\frac{2}{3}, 5), (\frac{5}{3}, 3)$
19. $\mathbf{v} = (2, 5) + r(4, -6), 0 \leq r \leq 1$
21. $\mathbf{v} = (-2, 4) + r(1, 3), 0 \leq r \leq 1$

***Ασκήσεις 2.2, σελίδες 94–96***

1. $\mathbf{u} = (3, 2) + r(1, 1) \cdot\ x = 3 + r, y = 2 + r$
3. $\mathbf{u} = (4, -3) + r(-1, 2) \cdot\ x = 4 - r, y = -3 + 2r$
5. $\mathbf{u} = (-2, 4) + r(-1, 2) \cdot\ x = -2 - r, y = 4 - 2r$
7. $\mathbf{u} = (-6, -4) + r(-3, -2) \cdot\ x = -6 - 3r, y = -4 - 2r$

**9.** ναί

**11.** όχι

**13.** ναί

**15.** όχι

**17.** $\mathbf{u} = (2, 3) + r(3, 4)$

**19.** $\mathbf{u} = (3, -1) + r(5, 2)$

**21.** $\mathbf{u} = (-6, 2) + r(3, 1)$

**23.** $\mathbf{u} = (-1, -1) + r(-2, 7)$

**25.** ναί

**27.** ναί

**29.** όχι

**31.** $\mathbf{U}_1(7, 1), \mathbf{U}_2(1, -5)$

**33.** $\mathbf{U}_1(15, 40), \mathbf{U}(-5, -8)$

### *Ασκήσεις 2.3, σελίδες 104–106*

**1.** $m = -\frac{1}{9} \cdot \mathbf{u} = (5, 1) + r(1, -\frac{1}{9})$

**3.** $m = -1 \cdot \mathbf{u} = (3, -4) + r(1, -1)$

**5.** $m = 0 \cdot \mathbf{u} = (2, -3) + r(1, 0)$

**7.** $m = -4 \cdot \mathbf{u} = (-2, -3) + r(1, -4)$

**9.** $\mathbf{u} = (3, -4) + r(1, 2)$ **11.** $\mathbf{u} = (0, -5) + r(1, 0)$

**13.** $\mathbf{u} = (-2, -3) + r(1, \frac{2}{3})$ **15.** $\mathbf{u} = (1, 0) + r(0, 1)$

**17.** παράλληλα **19.** παράλληλα

**21.** κάθετα **23.** συγραμμικά

**25.** μή συγραμμικά **27.** μή συγραμμικά

**29.** **(α)** $\mathbf{u} = (-2, 1) + r(2, -1)$ **(β)** $\mathbf{u} = (-2, 1) + r(1, 2)$

**31.** **(α)** $\mathbf{u} = (3, 4) + r(5, -2)$ **(β)** $\mathbf{u} = (3, 4) + r(2, 5)$

**33.** **(α)** $\mathbf{u} = (0, 4) + r(-3, 3)$ **(β)** $\mathbf{u} = (0, 4) + r(-3, -3)$

**35.** **(α)** $\mathbf{u} = (-2, -3) + r(5, 6)$ **(β)** $\mathbf{u} = (-2, -3) + r(-6, 5)$

**37.** παράλληλα **39.** κάθετα **41.** κανένα απ' αυτά

**43.** $\mathbf{u} = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}) + r(c, d)$

### *Ασκήσεις 2.4, σελίδες 112–115*

**1.** $3x + 5y - 22 = 0$ **3.** $x - 7y - 9 = 0$ **5.** $-x - 2y - 1 = 0$

**7.** $x + y + 4 = 0$ **9.** $2x + 5y - 41 = 0$ **11.** $x + 2y - 6 = 0$

**13.** $y + 5 = 0$ **15.** παράλληλες **17.** κάθετες

**19.** παράλληλες

**21.** **(α)** $5x+2y-11=0$ **(β)** $2x-5y+13=0$

**23.** **(α)** $7x+5y-11=0$ **(β)** $5x-7y-29=0$

**25.** **(α)** $-6x+5y-46=0$ **(β)** $5x+6y+18=0$

**27.** **(α)** $2x+y+3=0$ **(β)** $x-2y-1=0$

**29.** $x+y-8=0$

**31.** $4x+3y-1=0$

**33.** $y+1=0$

### *Ασκήσεις 2.5, σελίδες 120–122*

**1.** $2x-y+1=0$ **3.** $x+y+1=0$

**5.** $3x+y-2=0$ **7.** $x-2y-1=0$

**9.** $3x+5y+24=0$ **11.** $3x+2y-13=0$

**13.** $2x+y=0$ **15.** $4x+13y-2=0$

**17.** $5x+2y+7=0$ **19.** $y+3=0$

**21.** $x-3=0$

**23.** $x - 2y = 0$· $3x + y = 0$· $2x + 3y - 14 = 0$

**25.** $x - y + 4 = 0$· $x + y - 10 = 0$· $y - 3 = 0$

**27.** $5x + 4y - 14 = 0$· $4x - y = 0$· $x + 5y - 14 = 0$

**29.** $x + 3y - 16 = 0$· $x - 3y + 10 = 0$· $x - 3 = 0$

**31.** $2x + y - 2 = 0$· $3x - 2y - 0$· $x - 3y + 2 = 0$

**33.** $x - y + 4 = 0$· $x - 3 = 0$· $x + y - 10 = 0$

**35.** $10x + y - 26 = 0$· $x + 4y - 13 = 0$· $8x - 7y = 0$

**37.** $(3, -4), (-3, 4), (7, 8)$

**39.** $3x - 4y + 11 = 0$· $x + 3y - 9 = 0$· $5x + 2y - 7 = 0$

***Ασκήσεις 2.6, σελίδες 126–128***

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $2x - y + 5 = 0$ | **3.** $4x - y - 4 = 0$ | **5.** $2x - 3y = 0$ |
| **7.** $4x + 5y - 20 = 0$ | **9.** $m = \frac{3}{4}$· $b = 2$ | **11.** $m = -\frac{5}{4}$· $b = 4$ |
| **13.** $m = \frac{7}{2}$· $b = -2$ | **15.** $m = 0$· $b = -2$ | **17.** $3x + 2y - 6 = 0$ |
| **19.** $2x - 3y + 6 = 0$ | **21.** $2x - 7y - 14 = 0$ | **23.** $2x + y + 2 = 0$ |
| **25.** $a = 4, b = 3$ | **27.** $a = -3, b = 5$ | **29.** $a = -2, b = 5$ |
| **31.** $a = -\frac{8}{3}, b = \frac{8}{5}$ | **33.** $15x + 2y = 0$ | **35.** $22x + 6y - 33 = 0$ |
| **37.** $x - y + 2 = 0$ | **39.** $x + 3y - 6 = 0$ | **41.** $a = 1$ |

***Ασκήσεις 2.7, σελίδες 133–134***

**1.** $\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-4} \cdot m^\circ(\partial) \approx 117$ **3.** $\frac{x-5}{2} = \frac{y-9}{11} \cdot m^\circ(\partial) \approx 80$

**5.** $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-4}{7} \cdot m^\circ(\partial) \approx 106$ **7.** $\frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{-4} \cdot m^\circ(\partial) \approx 117$

**9.** $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+3}{-6} \cdot m^\circ(\partial) \approx 63$ **11.** $x + 2 = \frac{y+3}{2} \cdot m^\circ(\partial) \approx 63$

**13.** $x = \frac{y-4}{2}$ **15.** $\frac{x}{-5} = \frac{y-2}{2}$

**17.** $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-\frac{5}{3}}{2}$ **19.** $\frac{x-1}{7} = \frac{y-\frac{5}{7}}{2}$

**21.** $\sqrt{3}x - y + (3 + 5\sqrt{3}) = 0$ **23.** $3x + \sqrt{3}y + (2\sqrt{3} - 9) = 0$

### *Ασκήσεις Επαναληπτικές Κεφαλαίου, σελίδες 137–138*

**1.** $\mathbf{u} = (3, -2) + r(-4, 7) \cdot \; x = 3 - 4r, y = -2 + 7r$

**3.** $\mathbf{u} = (5, -1) + r(3, 1)$ **5.** $\mathbf{u} = (2, -5) + r(-3, 2)$

**7.** $-3x + y + 13 = 0$ **9.** $m = 2 \cdot \; b = \frac{7}{2}$

### *Ασκήσεις 3.1, σελίδες 157–161*

**1.** $\frac{5}{\sqrt{5}}$ **3.** $\frac{10}{\sqrt{2}}$ **5.** $\frac{11}{\sqrt{13}}$

**7.** $\frac{7}{\sqrt{5}}$ **9.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$ **11.** $\frac{54}{5\sqrt{2}}$

**13.** $11$ **15.** $\frac{36}{\sqrt{41}}$ **17.** $\frac{33}{\sqrt{65}}$

**19.** $\frac{62}{13}$ **21.** $\frac{33}{\sqrt{65}}, \frac{33}{\sqrt{65}}, \frac{11}{\sqrt{2}}$ **23.** $\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{37}}, 1$

**25.** $\frac{33}{2}$ **27.** $4$ **29.** $\frac{7}{\sqrt{10}}$

*Διανύσματα στο Επίπεδο*
*Το ιστορικό Ξεκίνημα*
*Ευθείες στο Επίπεδο*
*Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη*
*Εφαρμογές των Ευθειών*
*Απαντήσεις*
*Τριγωνομετρικοί Πινακες*
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 210 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

**31.** $k = \frac{1}{3}$ ή $k = 2$

**33.** $x - y + 4 = 0$ και $x + y = 0$

**35.** $4y - 3 = 0$ και $4x + 1 = 0$

**37.** $x - 8y + 10 = 0, 9x - 2y + 10 = 0, 10x + 11y - 4 = 0$

**39.** $3x - 4y + 35 = 0$ και $3x - 4y - 15 = 0$

**41.** $\left|\frac{b^2+a^2-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

### *Ασκήσεις 3.2, σελίδες 168–171*

**1.** $(1, 2)$
**3.** $(1, -1)$
**5.** $(-1, -1)$
**7.** $(-2, 3)$
**9.** οι ευθείες συμπίπτουν
**11.** $(4, 1)$
**13.** $(4, 1)$
**15.** $\emptyset$
**17.** $(-2, 3)$
**19.** οι ευθείες συμπίπτουν
**21.** $(4, 1)$
**23.** $(4, 1)$
**25.** $\emptyset$
**27.** $(1, 2), (2, 0)$, και $(7, 4)$
**29.** $(-1, -1), (1, 5)$ και $(2, 3)$
**31.** $12x - 15y - 8 = 0$
**33.** $x - 3y - 2 = 0$
**35.** $x - y - 9 = 0$
**37.** $x + 7y - 17 = 0,\ x - y + 1 = 0$

### *Ασκήσεις 3.3, σελίδες 178–181*

**1.** $-26$ **3.** $0$ **5.** $0$ **7.** $1$

**9.** $a+b$ **11.** $a^2+b^2$ **13.** $0$ **15.** $0$

**17.** $-19$ **19.** $-19$ **21.** $(2,1)$ **23.** $(-2,1,3)$

**25.** $x-y-3=0$

**29.** $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0$

### *Ασκήσεις Επαναληπτικές Κεφαλαίου, σελίδες 190– 191*

**1.** $\frac{6}{13}$ **3.** $(2,4)$ **5.** $(\frac{27}{26}, \frac{15}{26})$

**7.** $66$ **9.** $9$

# Κεφάλαιο 5

# Τιμές Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

## 5.1. Τιμές Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

| Γωνία | Sin | Cos | Tan | Cot | Sec | Csc | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0°00′** | .0000 | 1.0000 | .0000 | . . . | 1.000 | . . . | **90°00′** |
| **10′** | .0029 | 1.0000 | .0029 | 343.8 | 1.000 | 343.8 | **50′** |
| **20′** | .0058 | 1.0000 | .0058 | 171.9 | 1.000 | 171.9 | **40′** |
| **30′** | .0087 | 1.0000 | .0087 | 114.6 | 1.000 | 114.6 | **30′** |
| **40′** | .0116 | .9999 | .0116 | 85.94 | 1.000 | 85.95 | **20′** |
| **50′** | .0145 | .9999 | .0145 | 68.75 | 1.000 | 68.76 | **10′** |
| **1°00′** | .0175 | .9998 | .0175 | 57.29 | 1.000 | 57.30 | **89°00′** |
| **10′** | .0204 | .9998 | .0204 | 49.10 | 1.000 | 49.11 | **50′** |
| **20′** | .0233 | .9997 | .0233 | 42.96 | 1.000 | 42.98 | **40′** |
| **30′** | .0262 | .9997 | .0262 | 38.19 | 1.000 | 38.20 | **30′** |


Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πινακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 213 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **40′** | .0291 | .9996 | .0291 | 34.37 | 1.000 | 34.38 | **20′** |
| **50′** | .0320 | .9995 | .0320 | 31.24 | 1.001 | 31.26 | **10′** |
| **2°00′** | .0349 | .9994 | .0349 | 28.64 | 1.001 | 28.65 | **88°00′** |
| **10′** | .0378 | .9993 | .0378 | 26.43 | 1.001 | 26.45 | **50′** |
| **20′** | .0407 | .9992 | .0407 | 24.54 | 1.001 | 24.56 | **40′** |
| **30′** | .0436 | .9990 | .0437 | 22.90 | 1.001 | 22.93 | **30′** |
| **40′** | .0465 | .9989 | .0466 | 21.47 | 1.001 | 21.49 | **20′** |
| **50′** | .0494 | .9988 | .0495 | 20.21 | 1.001 | 20.23 | **10′** |
| **3°00′** | .0523 | .9986 | .0524 | 19.08 | 1.001 | 19.11 | **87°00′** |
| **30′** | .1132 | .9936 | .1139 | 8.777 | 1.006 | 8.834 | **30′** |
| **40′** | .1161 | .9932 | .1169 | 8.556 | 1.007 | 8.614 | **20′** |
| **50′** | .1190 | .9929 | .1198 | 8.345 | 1.007 | 8.405 | **10′** |
| **7°00′** | .1219 | .9925 | .1228 | 8.144 | 1.008 | 8.206 | **83°00′** |
| **10′** | .1248 | .9922 | .1257 | 7.953 | 1.008 | 8.016 | **50′** |
| **20′** | .1276 | .9918 | .1287 | 7.770 | 1.008 | 7.834 | **40′** |
| **30′** | .1305 | .9914 | .1317 | 7.596 | 1.009 | 7.661 | **30′** |
| **40′** | .1334 | .9911 | .1346 | 7.429 | 1.009 | 7.496 | **20′** |
| **50′** | .1363 | .9907 | .1376 | 7.269 | 1.009 | 7.337 | **10′** |
| **8°00′** | .1392 | .9903 | .1405 | 7.115 | 1.010 | 7.185 | **82°00′** |
| **10′** | .1421 | .9899 | .1435 | 6.968 | 1.010 | 7.040 | **50′** |
| **20′** | .1449 | .9894 | .1465 | 6.827 | 1.011 | 6.900 | **40′** |
| **30′** | .1478 | .9890 | .1495 | 6.691 | 1.011 | 6.765 | **30′** |
| **40′** | .1507 | .9886 | .1524 | 6.561 | 1.012 | 6.636 | **20′** |
| **50′** | .1536 | .9881 | .1554 | 6.435 | 1.012 | 6.512 | **10′** |
| **9°00′** | .1564 | .9877 | .1584 | 6.314 | 1.012 | 6.392 | **81°00′** |
| | Cos | Sin | Cot | Tan | Csc | Sec | Γωνία |

| Γωνία | Sin | Cos | Tan | Cot | Sec | Csc | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **9°00′** | .1564 | .9877 | .1584 | 6.314 | 1.012 | 6.392 | **81°00′** |
| **10′** | .1593 | .9872 | .1614 | 6.197 | 1.013 | 6.277 | **50′** |
| **20′** | .1622 | .9868 | .1644 | 6.084 | 1.013 | 6.166 | **40′** |
| **30′** | .1650 | .9863 | .1673 | 5.976 | 1.014 | 6.059 | **30′** |
| **40′** | .1679 | .9858 | .1703 | 5.871 | 1.014 | 5.955 | **20′** |
| **50′** | .1708 | .9853 | .1733 | 5.769 | 1.015 | 5.855 | **10′** |
| **10°00′** | .1736 | .9848 | .1763 | 5.671 | 1.015 | 5.759 | **80°00′** |
| **10′** | .1765 | .9843 | .1793 | 5.576 | 1.016 | 5.665 | **50′** |
| **20′** | .1794 | .9838 | .1823 | 5.485 | 1.016 | 5.575 | **40′** |
| **30′** | .1822 | .9833 | .1853 | 5.396 | 1.017 | 5.487 | **30′** |
| **40′** | .1851 | .9827 | .1883 | 5.309 | 1.018 | 5.403 | **20′** |
| **50′** | .1880 | .9822 | .1914 | 5.226 | 1.018 | 5.320 | **10′** |
| **11°00′** | .1908 | .9816 | .1944 | 5.145 | 1.019 | 5.241 | **79°00′** |
| **10′** | .1937 | .9811 | .1974 | 5.066 | 1.019 | 5.164 | **50′** |
| **20′** | .1965 | .9805 | .2004 | 4.989 | 1.020 | 5.089 | **40′** |
| **30′** | .1994 | .9799 | .2035 | 4.915 | 1.020 | 5.016 | **30′** |
| **40′** | .2022 | .9793 | .2065 | 4.843 | 1.021 | 4.945 | **20′** |
| **50′** | .2051 | .9787 | .2095 | 4.773 | 1.022 | 4.876 | **10′** |
| **12°00′** | .2079 | .9781 | .2126 | 4.705 | 1.022 | 4.810 | **78°00′** |
| **10′** | .2108 | .9775 | .2156 | 4.638 | 1.023 | 4.745 | **50′** |
| **20′** | .2136 | .9769 | .2186 | 4.574 | 1.024 | 4.682 | **40′** |
| **30′** | .2164 | .9763 | .2217 | 4.511 | 1.024 | 4.620 | **30′** |
| **40′** | .2193 | .9757 | .2247 | 4.449 | 1.025 | 4.560 | **20′** |
| **50′** | .2221 | .9750 | .2278 | 4.390 | 1.026 | 4.502 | **10′** |
| **13°00′** | .2250 | .9744 | .2309 | 4.331 | 1.026 | 4.445 | **77°00′** |
| **10′** | .2278 | .9737 | .2339 | 4.275 | 1.027 | 4.390 | **50′** |
| **20′** | .2306 | .9730 | .2370 | 4.219 | 1.028 | 4.336 | **40′** |
| **30′** | .2334 | .9724 | .2401 | 4.165 | 1.028 | 4.284 | **30′** |
| **40′** | .2363 | .9717 | .2432 | 4.113 | 1.029 | 4.232 | **20′** |
| **50′** | .2391 | .9710 | .2462 | 4.061 | 1.030 | 4.182 | **10′** |
| **14°00′** | .2419 | .9703 | .2493 | 4.011 | 1.031 | 4.134 | **76°00′** |
| **10′** | .2447 | .9696 | .2524 | 3.962 | 1.031 | 4.086 | **50′** |
| **20′** | .2476 | .9689 | .2555 | 3.914 | 1.032 | 4.039 | **40′** |
| **30′** | .2504 | .9681 | .2586 | 3.867 | 1.033 | 3.994 | **30′** |
| **40′** | .2532 | .9674 | .2617 | 3.821 | 1.034 | 3.950 | **20′** |
| **50′** | .2560 | .9667 | .2648 | 3.776 | 1.034 | 3.906 | **10′** |
| **15°00′** | .2588 | .9659 | .2679 | 3.732 | 1.035 | 3.864 | **75°00′** |
| **10′** | .2616 | .9652 | .2711 | 3.689 | 1.036 | 3.822 | **50′** |
| **20′** | .2644 | .9644 | .2742 | 3.647 | 1.037 | 3.782 | **40′** |

| Γωνία | Sin | Cos | Tan | Cot | Sec | Csc | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **18°00′** | .3090 | .9511 | .3249 | 3.078 | 1.051 | 3.236 | **72°00′** |
| **10′** | .3118 | .9502 | .3281 | 3.047 | 1.052 | 3.207 | **50′** |
| **20′** | .3145 | .9492 | .3314 | 3.018 | 1.053 | 3.179 | **40′** |
| **30′** | .3173 | .9483 | .3346 | 2.989 | 1.054 | 3.152 | **30′** |
| **40′** | .3201 | .9474 | .3378 | 2.960 | 1.056 | 3.124 | **20′** |
| **50′** | .3228 | .9465 | .3411 | 2.932 | 1.057 | 3.098 | **10′** |
| **19°00′** | .3256 | .9455 | .3443 | 2.904 | 1.058 | 3.072 | **71°00′** |
| **10′** | .3283 | .9446 | .3476 | 2.877 | 1.059 | 3.046 | **50′** |
| **20′** | .3311 | .9436 | .3508 | 2.850 | 1.060 | 3.021 | **40′** |
| **30′** | .3338 | .9426 | .3541 | 2.824 | 1.061 | 2.996 | **30′** |
| **40′** | .3365 | .9417 | .3574 | 2.798 | 1.062 | 2.971 | **20′** |
| **50′** | .3393 | .9407 | .3607 | 2.773 | 1.063 | 2.947 | **10′** |
| **20°00′** | .3420 | .9397 | .3640 | 2.747 | 1.064 | 2.924 | **70°00′** |
| **10′** | .3448 | .9387 | .3673 | 2.723 | ;.065 | 2.901 | **50′** |
| **20′** | .3475 | .9377 | .3706 | 2.699 | 1.066 | 2.878 | **40′** |
| **30′** | .3502 | .9367 | .3739 | 2.675 | 1.068 | 2.855 | **30′** |
| **40′** | .3529 | .9356 | .3772 | 2.651 | 1.069 | 2.833 | **20′** |
| **50′** | .3557 | .9346 | .3805 \ | 2.628 | 1.070 | 2.812 | **10′** |
| **21°00′** | .3584 | .9336 | .3839 | \2.605 | 1.071 | 2.790 | **69°00′** |
| **10′** | .3611 | .9325 | .3872 | \2.583 | 1.072 | 2.769 | **50′** |
| **20′** | .3638 | .9315 | .3906 | ;.560 | 1.074 | 2.749 | **40′** |
| **30′** | .3665 | .9304 | .3939 | 2.539 | 1.075 | 2.729 | **30′** |
| **40′** | .3692 | .9293 | .3973 | 2.517 | 1.076 | 2.709 | **20′** |
| **50′** | .3719 | .9283 | .4006 | 2.496 | 1.077 | 2.689 | **10′** |
| **22°00′** | .3746 | .9272 | .4040 | 2.475 | 1.079 | 2.669 | **68°00′** |
| **10′** | .3773 | .9261 | .4074 | 2.455 | 1.080 | 2.650 | **50′** |
| **20′** | .3800 | .9250 | .4108 | 2.434 | 1.081 | 2.632 | **40′** |
| **30′** | .3827 | .9239 | .4142 | 2.414 | 1.082 | 2.613 | **30′** |
| **40′** | .3854 | .9228 | .4176 | 2.394 | 1.084 | 2.595 | **20′** |
| **50′** | .3881 | .9216 | .4210 | 2.375 | 1.085 | 2.577 | **10′** |
| **23°00′** | .3907 | .9205 | .4245 | 2.356 | 1.086 | 2.559 | **67°00′** |
| **10′** | .3934 | .9194 | .4279 | 2.337 | 1.088 | 2.542 | **50′** |
| **20′** | .3961 | .9182 | .4314 | 2.318 | 1.089 | .2525 | **40′** |
| **30′** | .3987 | .9171 | .4348 | 2.300 | 1.090 | .2508 | **30′** |
| **40′** | .4014 | .9159 | .4383 | 2.282 | 1.092 | .2491 | **20′** |
| **50′** | .4041 | .9147 | .4417 | 2.264 | 1.093 | .2475 | **10′** |
| **24°00′** | .4067 | .9135 | .4452 | 2.246 | 1.095 | 2.459 | **66°00′** |
| **10′** | .4094 | .9124 | .4487 | 2.229 | 1.096 | 2.443 | **50′** |
| **20′** | .4120 | .9112 | .4522 | 2.211 | 1.097 | 2.427 | **40′** |
| **30′** | .4147 | .9100 | .4557 | 2.194 | 1.099 | 2.411 | **30′** |

| Γωνία | Sin | Cos | Tan | Cot | Sec | Csc | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **27°00′** | .4540 | .8910 | .5095 | 1.963 | 1.122 | 2.203 | **63°00′** |
| **10′** | .4566 | .8897 | .5132 | 1.949 | 1.124 | 2.190 | **50′** |
| **20′** | .4592 | .8884 | .5169 | 1.935 | 1.126 | 2.178 | **40′** |
| **30′** | .4617 | .8870 | .5206 | 1.921 | 1.127 | 2.166 | **30′** |
| **40′** | .4643 | .8857 | .5243 | 1.907 | 1.129 | 2.154 | **20′** |
| **50′** | .4669 | .8843 | .5280 | 1.894 | 1.131 | 2.142 | **10′** |
| **28°00′** | .4695 | .8829 | .5317 | 1.881 | 1.133 | 2.130 | **62°00′** |
| **10′** | .4720 | .8816 | .5354 | 1.868 | 1.134 | 2.118 | **50′** |
| **20′** | .4746 | .8802 | .5392 | 1.855 | 1.136 | 2.107 | **40′** |
| **30′** | .4772 | .8788 | .5430 | 1.842 | 1.138 | 2.096 | **30′** |
| **40′** | .4797 | .8774 | .5467 | 1.829 | 1.140 | 2.085 | **20′** |
| **50′** | .4823 | .8760 | .5505 | 1.816 | 1.142 | 2.074 | **10′** |
| **29°00′** | .4848 | .8746 | .5543 | 1.804 | 1.143 | 2.063 | **61°00′** |
| **10′** | .4874 | .8732 | .5581 | 1.792 | 1.145 | 2.052 | **50′** |
| **20′** | .4899 | .8718 | .5619 | 1.780 | 1.147 | 2.041 | **40′** |
| **30′** | .4924 | .8704 | .5658 | 1.767 | 1.149 | 2.031 | **30′** |
| **40′** | .4950 | .8689 | .5696 | 1.756 | 1.151 | 2.020 | **20′** |
| **50′** | .4975 | .8675 | .5735 | 1.744 | 1.153 | 2.010 | **10′** |
| **30°00′** | .5000 | .8660 | .5774 | 1.732 | 1.155 | 2.000 | **60°00′** |
| **10′** | .5025 | .8646 | .5812 | 1.720 | 1.157 | 1.990 | **50′** |
| **20′** | .5050 | .8631 | .5851 | 1.709 | 1.159 | 1.980 | **40′** |
| **30′** | .5075 | .8616 | .5890 | 1.698 | 1.161 | 1.970 | **30′** |
| **40′** | .5100 | .8601 | .5930 | 1.686 | 1.163 | 1.961 | **20′** |
| **50′** | .5125 | .8587 | .5969 | 1.675 | 1.165 | 1.951 | **10′** |
| **31°00′** | .5150 | .8572 | .6009 | 1.664 | 1.167 | 1.942 | **59°00′** |
| **10′** | .5175 | .8557 | .6048 | 1.653 | 1.169 | 1.932 | **50′** |
| **20′** | .5200 | .8542 | .6088 | 1.643 | 1.171 | 1.923 | **40′** |
| **30′** | .5225 | .8526 | .6128 | 1.632 | 1.173 | 1.914 | **30′** |
| **40′** | .5250 | .8511 | .6168 | 1.621 | 1.175 | 1.905 | **20′** |
| **50′** | .5275 | .8496 | .6208 | 1.611 | 1.177 | 1.896 | **10′** |
| **32°00′** | .5299 | .8480 | .6249 | 1.600 | 1.179 | 1.887 | **58°00′** |
| **10′** | .5324 | .8465 | .6289 | 1.590 | 1.181 | 1.878 | **50′** |
| **20′** | .5348 | .8450 | .6330 | 1.580 | 1.184 | 1.870 | **40′** |
| **30′** | .5373 | .8434 | .6371 | 1.570 | 1.186 | 1.861 | **30′** |
| **40′** | .5398 | .8418 | .6412 | 1.560 | 1.188 | 1.853 | **20′** |
| **50′** | .5422 | .8403 | .6453 | 1.550 | 1.190 | 1.844 | **10′** |
| **33°00′** | .5446 | .8387 | .6494 | 1.540 | 1.192 | 1.836 | **57°00′** |
| **10′** | .5471 | .8371 | .6536 | 1.530 | 1.195 | 1.828 | **50′** |
| **20′** | .5495 | .8355 | .6577 | 1.520 | 1.197 | 1.820 | **40′** |

Διανύσματα στο Επίπεδο
Το ιστορικό Ξεκίνημα
Ευθείες στο Επίπεδο
Κατασκευές με Κανόνα και Διαβήτη
Εφαρμογές των Ευθειών
Απαντήσεις
Τριγωνομετρικοί Πινακες
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 217 από 218
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

| Γωνία | Sin | Cos | Tan | Cot | Sec | Csc | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **36°00′** | .5878 | .8090 | .7265 | 1.376 | 1.236 | 1.701 | **54°00′** |
| **10′** | .5901 | .8073 | .7310 | 1.368 | 1.239 | 1.695 | **50′** |
| **20′** | .5925 | .8056 | .7355 | 1.360 | 1.241 | 1.688 | **40′** |
| **30′** | .5948 | .8039 | .7400 | 1.351 | 1.244 | 1.681 | **30′** |
| **40′** | .5972 | .8021 | .7445 | 1.343 | 1.247 | 1.675 | **20′** |
| **50′** | .5995 | .8004 | .7490 | 1.335 | 1.249 | 1.668 | **10′** |
| **37°00′** | .6018 | .7986 | .7536 | 1.327 | 1.252 | 1.662 | **53°00′** |
| **10′** | .6041 | .7969 | .7581 | 1.319 | 1.255 | 1.655 | **50′** |
| **20′** | .6065 | .7951 | .7627 | 1.311 | 1.258 | 1.649 | **40′** |
| **30′** | .6088 | .7934 | .7673 | 1.303 | 1.260 | 1.643 | **30′** |
| **40′** | .6111 | .7916 | .7720 | 1.295 | 1.263 | 1.636 | **20′** |
| **50′** | .6134 | .7898 | .7766 | 1.288 | 1.266 | 1.630 | **10′** |
| **38°00′** | .6157 | .7880 | .7813 | 1.280 | 1.269 | 1.624 | **52°00′** |
| **10′** | .6180 | .7862 | .7860 | 1.272 | 1.272 | 1.618 | **50′** |
| **20′** | .6202 | .7844 | .7907 | 1.265 | 1.275 | 1.612 | **40′** |
| **30′** | .6225 | .7826 | .7954 | 1.257 | 1.278 | 1.606 | **30′** |
| **40′** | .6248 | .7808 | .8002 | 1.250 | 1.281 | 1.601 | **20′** |
| **50′** | .6271 | .7790 | .8050 | 1.242 | 1.284 | 1.595 | **10′** |
| **39°00′** | .6293 | .7771 | .8098 | \235 | 1.287 | 1.589 | **51°00′** |
| **10′** | .6316 | .7753 | .8146 | 1.228 | 1.290 | 1.583 | **50′** |
| **20′** | .6338 | .7735 | .8195 | 1.220 | 1.293 | 1.578 | **40′** |
| **30′** | .6361 | .7716 | .8243 | 1.213 | 1.296 | 1.572 | **30′** |
| **40′** | .6383 | .7698 | .8292 | 1.206 | 1.299 | 1.567 | **20′** |
| **50′** | .6406 | .7679 | .8342 | 1.199 | 1.302 | 1.561 | **10′** |
| **40°00′** | .6428 | .7660 | .8391 | 1.192 | 1.305 | 1.556 | **50°00′** |
| **10′** | .6450 | .7642 | .8441 | 1.185 | 1.309 | 1.550 | **50′** |
| **20′** | .6472 | .7623 | .8491 | 1.178 | 1.312 | 1.545 | **40′** |
| **30′** | .6494 | .7604 | .8541 | 1.171 | 1.315 | 1.540 | **30′** |
| **40′** | .6517 | .7585 | .8591 | 1.164 | 1.318 | 1.535 | **20′** |
| **50′** | .6539 | .7566 | .8642 | 1.157 | 1.322 | 1.529 | **10′** |
| **41°00′** | .6561 | .7547 | .8693 | 1.150 | 1.325 | 1.524 | **49°00′** |
| **10′** | .6583 | .7528 | .8744 | 1.144 | 1.328 | 1.519 | **50′** |
| **20′** | .6604 | .7509 | .8796 | 1.137 | 1.332 | 1.514 | **40′** |
| **30′** | .6626 | .7490 | .8847 | 1.130 | 1.335 | 1.509 | **30′** |
| **40′** | .6648 | .7470 | .8899 | 1.124 | 1.339 | 1.504 | **20′** |
| **50′** | .6670 | .7451 | .8952 | 1.117 | 1.342 | 1.499 | **10′** |
| **42°00′** | .6691 | .7431 | .9004 | 1.111 | 1.346 | 1.494 | **48°00′** |
| **10′** | .6713 | .7412 | .9057 | 1.104 | 1.349 | 1.490 | **50′** |
| **20′** | .6734 | .7392 | .9110 | 1.098 | 1.353 | 1.485 | **40′** |