Πανεπιστήμιο Αιγαίου

URL: http://www.aegean.gr

Ασκήσεις στον Απειροστικό Λογισμό II

Χρήστος Νικολόπουλος
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
83200 Καρλόβασι
Σάμος

Κεφάλαιο 1

Αόριστο Ολοκλήρωμα

1.1. Στοιχεία Θεωρίας

Ορισμός 1.1.1 *Έστω $f : I \to R$ μια συνάρτηση. Αν $F : I \to R$ είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε*

$$\forall\, x \in I, \quad F'(x) = f(x),$$

τότε η F λέγεται αντιπαράγωγος της f και συμβολίζεται με $\int f(x)dx$. Δηλαδή $F(x) = \int f(x)dx$.

Παρατήρηση. Αν η $F(x)$ είναι αντιπαράγωγος της $f(x)$ τότε είναι και η $H(x) = F(x)+c$, c σταθερά. Η συνάρτηση $H(x) = F(x) + c$ λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα της f.

Ολοκληρώματα στοιχειωδών συναρτήσεων

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \in N$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + c$

3) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\ a \in R$

4) $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$
5) $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$
6) $\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + c$
7) $\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cot(x) + c$
8) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$
9) $\int e^x dx = e^x + c$
10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c$
11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan(x) + c$
12) $\int \sinh(x)dx = \cosh(x) + c$
12) $\int \cosh(x)dx = \sinh(x) + c$

Πρόταση 1.1.2 *Αν για τις συναρτήσεις $f1, f2 : I \to R$ υπάρχουν τα αόριστα ολοκληρώματα τότε υπάρχει και το αόριστο ολοκλήρωμα της $h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ όπου $c_1, c_2 \in R$ και ισχύει*

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx$$

Πρόταση 1.1.3 *Έστω Δ_1, Δ_2 δυο διαστήματα και $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_2$, $f : \Delta_2 \to R$ δύο συναρτήσεις έτσι ώστε $\varphi'(t) \neq 0$. Τότε*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Μεθοδολογία :

Αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι πηλίκο δύο συναρτήσεων, έτσι ώστε ο αριθμητής να είναι η παράγωγος του παρανομαστή, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα είναι η παράγωγος του παρανομαστή.

Αν το ολοκλήρωμα περιέχει τη παράσταση $\sqrt{a^2 - x^2}$ τότε θέτουμε $x = |a| \sin(u)$ η $x = |a| \cos(u)$.

Αν το ολοκλήρωμα περιέχει τη παράσταση $\sqrt{a^2+x^2}$ τότε θέτουμε $x = |a|\tan(u)$ η $x = |a|\cot(u)$.

Αν το ολοκλήρωμα περιέχει τη παράσταση $\sqrt{x^2-a^2}$ τότε θέτουμε $x = |a|\frac{1}{\cos(u)}$ η $x = \pm|a|\cosh(u)$.

Αν το ολοκλήρωμα περιέχει τη παράσταση $\sqrt{ax+b}$ τότε θέτουμε $t = ax+b$.

Αν το ολοκλήρωμα περιέχει τη παράσταση $\sqrt{2ax-x^2}$ τότε θέτουμε $x = a(1-\cos(u))$.

Παραγοντική ολοκλήρωση

Πρόταση 1.1.4 *Έστω $f, g : \Delta \to R$, δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε η συνάρτηση f', g' έχει αντιπαράγωγο στο διάστημα Δ και ισχύει*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx, \quad x \in \Delta$$

Μεθοδολογία :

Για ένα ολοκλήρωμα της μορφής $I = \int P(x)e^{ax}dx,\ a \in R,\ P(x)$ πολυώνυμο έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int P(x)e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int P(x)de^{ax} \\ &= \frac{1}{a}P(x)e^{ax} - \frac{1}{a}\int P'(x)e^{ax}dx. \end{aligned}$$

Για ένα ολοκλήρωμα της μορφής $I = \int P(x)\cos(ax+b)dx,\ a, b \in R,\ P(x)$ πολυώνυμο έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int P(x)\cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int P(x)d\sin(ax+b) \\ &= \frac{1}{a}P(x)\sin(ax+b) - \frac{1}{a}\int P'(x)\sin(ax+b)dx. \end{aligned}$$

(Όμοια αν αντί του cos έχουμε sin.)

Για ένα ολοκλήρωμα της μορφής $I = \int P(x)e^{kx}\cos(ax+b)dx,\ \ a, b \in R,\ \ P(x)$ πολυώνυμο θέτουμε $f(x) = \int e^{kx}\sin(ax+b)dx$ και $I = \int P(x)df(x) = P(x)f(x) - \int f(x)P'(x)dx$. (Όμοια αν αντί cos έχουμε sin.)

Για ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$I = \int e^{kx}\cos(ax+b)\sin(ax+b)dx \text{ ή } I = \int e^{kx}\sin(ax+b)\sin(ax+b)dx$$

ή $I = \int e^{kx}\cos(ax+b)\cos(ax+b)dx,\ \ a, b \in R$ χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες

$$\begin{aligned} 2\sin(a)\sin(b) &= \cos(a-b) - \cos(a+b), \\ 2\sin(a)\cos(b) &= \sin(a+b) + \sin(a-b), \\ 2\cos(a)\cos(b) &= \cos(a+b) + \cos(a-b). \end{aligned}$$

Για ένα ολοκλήρωμα της μορφής $I = \int f(x)\ln(\varphi(x))dx$ ή $I = \int f(x)\arcsin(\varphi(x))dx$ ή $I = \int f(x)\arccos(\varphi(x))dx$ ή $\int f(x)\arctan(\varphi(x))dx$, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της f, $F = \int f$ και $\int f(x)\ln(\varphi(x))dx = \int \ln(\varphi(x))df(x) = F(x)\ln(\varphi(x)) - \int F(x)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx$.

Για ένα ολοκλήρωμα της μορφής $I = \int \frac{f(x)}{\varphi^2(x)}dx$, βρίσκουμε τη παράγωγο της $\frac{1}{\varphi(x)}$ και μετασχηματίζουμε κατάλληλα το ολοκλήρωμα.

Ορισμός 1.1.5 *Μια συνάρτηση $f : R \to R$ λέγεται ρητή αν και μόνο αν $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ όπου p, q πολυόνυμα.*

Μεθοδολογία :

Αν R μια ρητή συνάρτηση, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $m \geq 0$ ο βαθμός του $P(x)$ και n ο βαθμός του $Q(x) \geq 0$. Αν $m \geq n$ έχουμε $P(x) = P_1(x)Q(x) + P_2(x)$ για κάποια πολυώνυμα $P_1(x)$ $P_2(x)$. Τότε $\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, όπου $deg(P_2(x)) \leq n$. Επομένως αναγόμαστε στη παρακάτω περίπτωση :

Αν $m \leq n$ παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή $Q(x)$ και διασπάμε τη ρητή συνάρτηση $R(x)$ σε άθροισμα ρητών συναρτήσεων που έχουν για παρανομαστή τους παράγοντες της $Q(x)$. Αν το $Q(x)$ έχει πραγματικές απλές ρίζες έχουμε $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_1)} + \dots \frac{A_n}{(x-r_n)}$. Αν το $Q(x)$ έχει πολλαπλές ρίζες τότε χρησιμοποιούμε τη ταυτότητα $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{\phi(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{\phi_1(x)}{Q_2(x)} dx$,όπου $Q_1(x) = \text{ΜΚΔ}(Q(x), Q'(x))$, $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$ και $deg(\phi(x)) \leq deg(Q_1(x)) - 1$, $deg(\phi_1(x)) \leq deg(Q_2(x)) - 1$. (Οι συντελεστές των $\phi(x)$ και $\phi_1(x)$ υπολογίζονται με παραγώγιση της σχέσης $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{\phi(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{\phi_1(x)}{Q_2(x)} dx$.

Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων

Μερικοί τύποι ολοκληρωμάτων αλγεβρικών άρρητων παραστάσεων ανάγονται με κατάλληλη αντικατάσταση, σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.

Μεθοδολογία :

Για το ολοκλήρωμα της μορφής $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, ($\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ αν n άρτιος) θέτουμε $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$.

Για ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ έχουμε :

Αν $a > 0$ θέτουμε $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ ή $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}x$.

Αν $a < 0$ και $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ θέτουμε $\sqrt{ax^2+bx+c} = t|x - r_1|$ όπου r_1 ρίζα της $ax^2 + bx + c = 0$.

Αν $a < 0$ και $c > 0$ θέτουμε $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx - \sqrt{c}$ ή $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$.

1.2. Ασκήσεις

Άσκηση 1.2.1 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int(\sqrt(x) + 1)(x + \sqrt(x) + 1)dx$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.2 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x^2 e^{x^3} dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.3 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{e^x+1}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.4 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+2}{2x-1}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.5 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sin(x)}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.6 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1-x^2}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.7 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$ για $a<b$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.8 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$ για $a<b$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.9 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.10 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{3+x^2}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.11 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{x^2-5}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.12 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{\sqrt{x-x^2}}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.13 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \cos(ax+b)dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.14 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.15 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.16 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.17 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos(x)dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.18 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.19 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.20 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.21 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{(x^3-1)^2}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.22 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x^2e^xdx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.23 Αν a και b είναι δύο πραγματικές σταθερές να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $C(x) = \int e^{ax}\cos(bx)dx$ και $S(x) = \int e^{ax}\sin(bx)dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.24 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int x^2\cos(x)dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.25 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x\ln(x)}dx$, $x > 1$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.26 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$, $x > 1$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.27 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \ln(x)dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.28 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int(x^2-1)\cos(3x)dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.29 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int xe^x\cos(x)dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.30 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int e^x\sin(2x)\cos(x)dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.31 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}} \arctan(x)dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.32 Εάν $I_n = \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} dx$ δείξτε ότι

$I_{n+1} = \frac{2ax+b}{n(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^n} + \frac{2(2n-1)a}{n(4ac-b^2)} I_n$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.33 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.34 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}} dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.35 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-x-1}} dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 2

Ολοκλήρωμα Riemann

2.1. Στοιχεία Θεωρίας

Ορισμός 2.1.1 *Έστω $I = [a. b]$ κλειστό και φραγμένο διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Κάθε σύνολο σημείων $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ με $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots x_n = b$. λέγεται διαμέριση του $[a,\ b]$.*

• Το άθροισμα $S(P, f, E) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$, εξαρτάται από την επιλογή των x_i, $x_i \in [x_{i-1},\ x_i]$.

• Έστω P διαμέριση του $[a,\ b]$, $i = 1, \ldots n$
$m_i = \min\{f(x) :\in [x_{i-1}, x_i]\}$
$M_i = \max\{f(x) :\in [x_{i-1}, x_i]\}$
Το άθροισμα $L_p(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ λέγεται κάτω άθροισμα της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P.
Το άθροισμα $U_p(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ λέγεται άνω άθροισμα της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P.

Ορισμός 2.1.2 *Αν για κάθε $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ακολουθία διαμερίσεων με $\lim|P_n| = 0$ όπου $|P_n| = \max\{(x_i - x_{i-1}), i = 1\dots n\}$ και για κάθε σύνολο επιλογής σημείων $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από τα στοιχεία της διαμέρισης P_n η αντίστοιχη ακολουθία $S(P_n, E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει πάντα στον ίδιο αριθμό τον οποίο συμβολίζουμε με $\int_a^b f(x)dx$, τότε ο αριθμός $\int_a^b f(x)dx$ είναι το ολοκλήρωμα Riemann της f από το a μέχρι το b.*

Πρόταση 2.1.3 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, $m = \min f$ και $M = \max f$. Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$ και $E = \{\xi_1, \dots \xi_n\}$ μια επιλογή σημείων τότε*
$m(b-a) \leq L(P, f) \leq S(P, f, E) \leq U(P, f) \leq M(b-a)$.

Ορισμός 2.1.4 *Αν P, P' δύο διαμερίσεις του $[a, b]$ αν $P' \supset P$ τότε η P' λεπτότερη της P.*

Πρόταση 2.1.5 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και P, P', $P' \supset P$ δυο διαμερίσεις του $[a, b]$ τότε, $L(P', f) \geq L(P, f)$, $U(P', f) \leq U(P, f)$.*

Πρόταση 2.1.6 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και P_1, P_2, δυο διαμερίσεις του $[a, b]$ τότε, $L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$.*

Πρόταση 2.1.7 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τότε για κάθε > 0, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για $|P| < \delta \implies |L(P, f) - U(P, f)| <$*

Πρόταση 2.1.8 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τότε το ολοκλήρωμα Riemann, $\int_a^b f(x)dx$, υπάρχει.*

- Ιδιότητες ολοκληρώματος *Riemann*

Πρόταση 2.1.9 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $c \in \mathbb{R}$ τότε $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.*

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 11 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Πρόταση 2.1.10 *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τότε* $\int_a^b g(x) + f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Πρόταση 2.1.11 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $c \in \mathbb{R}$ τότε* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Πρόταση 2.1.12 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τότε* $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Πρόταση 2.1.13 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι συνεχής*

Πρόταση 2.1.14 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τότε υπάρχει $\xi \in (a,\ b)$ με* $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$.

Πρόταση 2.1.15 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ τότε για κάθε $x \in [a,\ b]$ $F'(x) = f(x)$.*

Πρόταση 2.1.16 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ αντιπαράγωγος της f ($H' = f,\ x \in [a,\ b]$), τότε* $\int_a^b f(t)dt = H(a) - H(b)$.

- Βασικές μέθοδοι υπολογισμού ορισμένου ολοκληρώματος

Πρόταση 2.1.17 *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συναρτήσεις τότε* $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Πρόταση 2.1.18 *Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση και $f : [g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$ τότε* $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$.

- Θεώρημα μέσης τιμής.

Πρόταση 2.1.19 *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συναρτήσεις. Αν η g έχει σταθερό πρόσημο τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ με $f(\xi)\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$.*

Πρόταση 2.1.20 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε η $G(x) = \int_x^b f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη με $G'(x) = -f'(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.*

Πρόταση 2.1.21 *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν η g έχει σταθερό πρόσημο και η f είναι μονότονη τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ με $\int_a^b f(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx$.*

- Θεώρημα *Bonnet*

Πρόταση 2.1.22 *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν η f είναι φθίνουσα, θετική και g έχει σταθερό πρόσημο τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx$.*

Πρόταση 2.1.23 *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν η f είναι αύξουσα, θετική και η g έχει σταθερό πρόσημο τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_\xi^b g(x)dx$.*

- Προσεγγιστική ολοκλήρωση

Κανόνας ορθογωνίου

$\int_a^b f(x)dx \simeq \Delta x \sum_{i=1}^n y_i$, με $y_i = f(x_i) = f(a + i\frac{b-a}{n})$

Κανόνας Τραπεζίου

$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$.

Κανόνας *Simpson*

$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{\Delta x}{3}\{(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_n)\}$.

- Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Αν $f \geq 0$, $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε το εμβαδόν A του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον xx' και τις $x = a$, $x = b$ δίνεται $A = \int_a^b f(x)dx$.

Αν η f δεν είναι μη αρνητική τότε $A = \int_a^b |f(x)|dx$.

Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $0 \leq g(x) \leq f(x)$ τότε το εμβαδόν $A(R)$ του χωρίου $R = \{f, g, x = a, x = b\}$ είναι $A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

Αν $x = g(t)$, $y = f(t)$, $t \in [t_1,\ t_2]$ και $g'(t) \neq 0$ τότε οι $x = g(t)$, $y = f(t)$ ορίζουν το y σαν συνάρτηση του x

Πρόταση 2.1.24 *Έστω $g(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x = g(t)$, $y = f(t)$ τότε $E = \int_a^b g(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(t)g'(t)dt$, αρκεί $g(t_1) = a$, $g(t_2) = b$ και f, g' συνεχείς στο $[t_1,\ t_2]$*

- Μήκος τόξου καμπύλης

Πρόταση 2.1.25 *Έστω γ καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $x = g(t)$, $y = f(t)$, $t \in [a,\ b]$ αν g', f' συνεχείς στο $[a,\ b]$ τότε η γ έχει μήκος $S = L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g'(t)^2 + f'(t)^2}dt$.*

- Εμβαδόν επιφάνειας από περιστροφή

Πρόταση 2.1.26 *Έστω γ καμπύλη με παραμετρική εξίσωση $x = g(t)$, $y = f(t)$, $t \in [a,\ b]$ αν g', f' συνεχείς στο $[a,\ b]$ τότε το εμβαδόν από περιστροφή της γ γύρω από τον xx' δίνεται $B = 2\pi \int_a^b |f(t)| \sqrt{g'(t)^2 + f'(t^2)}dt$.*

Αν η γ δίνεται από την $y = f(x)$, $x \in [a,\ b]$ τότε $B = 2\pi \int_a^b |f(t)| \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$

- Όγκος στερεών από περιστροφή

Έστω $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $R = \{f, Ox, x = a, x = b\}$ είναι ο όγκος από περιστροφή του γραφήματος της f γύρω από τον Ox μεταξύ των ευθειών $x = a$, και $x = b$, τότε $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$

• Αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ και $0 \leq g(x) \leq f(x)$ τότε ο όγκος στερεού που παράγεται από περιστροφή των γραφημάτων των f και g, $R = \{f, g, Ox, x = a, x = b\}$ είναι $V = \pi \int_a^b \{f(x)^2 - g(x)^2\} dx$.

• Αν $x = g(t)$, $y = f(t)$, $t = [t_1, t_2]$ τότε $V = \pi \int_{t_1}^{t_2} \{f(t)^2 g'(t)\} dt$ για $g(t_1) = a$, $g(t_2) = b$.

2.2. Ασκήσεις

Άσκηση 2.2.1 *Να εκφραστεί το παρακάτω όριο ως ολοκλήρωμα Riemann κατάλληλης συνάρτησης*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^k}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.2 *Έστω $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με $f(t) \leq g(t) \leq h(t)$, $\forall t \in [a, b]$. Δείξτε ότι αν οι $f, h \in \mathcal{R}([a, b])$, όπου $\mathcal{R}([a, b])$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων που είναι Riemann ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, και $\int_a^b f dx = \int_a^b h dx$ τότε η g είναι Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση, $g \in \mathcal{R}([a, b])$ και $\int_a^b g dx = \int_a^b f dx$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.3 *Να αποδειχθεί ότι αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και Riemann ολοκληρώσιμη τότε ισχύει η συνεπαγωγή $\int_a^b |f(t)| dt = 0 \Rightarrow f = 0$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.4 *Αποδείξτε ότι για κάθε $n = 1, 2, \cdots$ ισχύουν οι ανισότητες*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n-1}.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.5 *Να αποδείξετε ότι*

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.6 *Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα* $\int_a^b x^m dx$ *για* $b > a > 0$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.7 *Αν* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής τότε να αποδείξετε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.8 *Αν* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής να εκφράσετε το όριο* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$ *σαν ορισμένο ολοκλήρωμα.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.9 *Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας*

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.10 *Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα* $\int_0^1 e^x dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.11 *Αν για μια συνεχή και μη αρνητική συνάρτηση* f *στο* $[a, b]$ *υπάρχει* $c \in [a, b]$ *με* $f(c) > 0$, *τότε* $\int_a^b f(x)dx > 0$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.12 *Να υπολογιστούν το ολοκληρώματα*

α) $\int_0^1 x^2 dx$

β) $\int_0^1 x^3 dx$

γ) $\int_0^\pi \cos(x) dx$

δ) $\int_{-1}^1 (2x^2 - x^3) dx$

ε) $\int_2^3 e^{-x/2} dx$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.13 *Να εξετάσετε αν ισχύουν οι υποθέσεις του πρώτου θεωρήματος μέσης τιμής για το ολοκλήρωμα* $\int_0^\pi (x + \pi) \sin(x) dx$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.14 *Βρείτε άνω φράγμα για το ολοκλήρωμα* $\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx$, $0 < a < b \leq 0$ **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.15 *Να υπολογιστεί το εμβαδόν χωρίου που βρίσκεται μεταξύ των συναρτήσεων* $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $g(x) = x + 1$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.16 *Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης* $y = \sqrt{1 - \sin(x)}$ *στο διάστημα* $[0, 2\pi]$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.17 *Να υπολογιστεί το εμβαδόν χωρίου που βρίσκεται μεταξύ της παραβολής* $y = x^2$, *και της ευθείας* $x + y = 2$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.18 *Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο* $r = -6\sin(\theta)$ *και μέσα στην καρδιοειδή* $r = 2(1 - \cos(\theta))$ **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.19 *Να υπολογιστεί το μήκος τόξου της παραβολής* $y = x^2$, *για* $0 \leq x \leq 1$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.20 *Να υπολογιστεί το μήκος τόξου της καμπύλης* $x = \cos(t)(1+\cos(t))$, $y = \sin(t)(1+\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.21 *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\int_1^4 (2x^3 - 5x)dx$ *χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.22 *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\int_0^4 \sqrt{3x+4}dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.23 *Βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που φράσσεται από τις καμπύλες* $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $x = 0$, $x = \pi/2$ **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.24 *Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής με άξονες* a, b, b *που παράγεται από την περιστροφή της ημιελλείψεως* $x = a\cos(t)$, $y = b\sin(t)$, $t \in [0, \pi]$, $(a > b)$ *γύρω από τον* x*-άξονα.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.25 *Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της κυκλοειδούς* $x = a(t - \sin(t))$, $y = a(1 - \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ *γύρω από τον* x*-άξονα.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.26 *Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης* $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$, *μεταξύ των σημείων τομής της καμπύλης και του* x*-άξονα.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.27 *Να υπολογιστεί ο όγκος που παράγεται από την περιστροφή του χωρίου, που ορίζεται από τη παραβολή* $y = x^2$ *και την ευθεία* $y = x + 2$, *γύρω από τον* x *- άξονα.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.28 *Να υπολογιστεί ο όγκος που παράγεται από τη περιστροφή του χωρίου, που ορίζεται από την έλλειψη* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ *γύρω από τον* x *- άξονα.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.29 *Να υπολογιστεί ο όγκος που παράγεται από τη περιστροφή του αστεροειδούς,* $x = a\cos^3(t)$, $y = a\sin^3(t)$ *γύρω από τον* x *- άξονα.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.30 *Να υπολογιστεί προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα* $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$ *με τη μέθοδο του τραπεζίου* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.31 *Να υπολογιστεί προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα* $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$ *με τη μέθοδο του Simpson* **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 3

Σειρές

3.1. Στοιχεία Θεωρίας

• Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Το άθροισμα $G_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} a_i$ και $(G_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων.

Ορισμός 3.1.1 *Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ και $(G_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία μερικών αθροισμάτων. Το σύνολο $(a_\nu,\ G_\nu)$ λέγεται σειρά και συμβολίζεται με $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$.*

Ορισμός 3.1.2 *Η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει στο $l \in \mathbb{R}$, αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = l \Leftrightarrow \lim_{\nu\to\infty} G_\nu = l$*
Αν $l = +\infty$ η σειρά απειρίζεται θετικά.
Αν $l = -\infty$ η σειρά απειρίζεται αρνητικά.
Αν δεν υπάρχει όριο η σειρά αποκλίνει.

• Βασικές ιδιότητες

Πρόταση 3.1.3 *Αν η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει τότε η $(G_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική.*

Πρόταση 3.1.4 *Αν η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = l$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu = m$, $l, m \in \mathbb{R}$ τότε $\sum_{\nu=1}^{\infty} \xi a_\nu + n b_\nu = \xi l + nm$.*

Αν στην $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ προσθέσουμε η παραλείψουμε k πρώτους όρους τότε η σειρά είναι της ίδιας φύσης με την αρχική

• Σειρές με θετικούς όρους

Η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ λέγεται σειρά με θετικούς όρους αν $a_\nu > 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη.

Πρόταση 3.1.5 *Μια σειρά θετικών όρων είναι συγκλίνουσα αν η $(G_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.*

Πρόταση 3.1.6 *Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ είναι σειρά θετικών όρων και $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής θετική και φθίνουσα τέτοια ώστε $f(\nu) = a_\nu$, $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$ τότε η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει αν και μόνο αν το $\int_1^{\infty} f(x)dx$ συγκλίνει.*

• Κριτήριο σύγκλισης.

Πρόταση 3.1.7 *Αν η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, και $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ είναι σειρές θετικών όρων με $a_\nu \leq b_\nu$, $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$ τότε*
1) Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \leq +\infty \Rightarrow$ η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει
2) Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \leq +\infty \Rightarrow$ η $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ συγκλίνει.

Πρόταση 3.1.8 *Αν η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, είναι σειρά θετικών όρων και $l = \lim_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ τότε αν*
1) $l < 1 \Rightarrow$ η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει
2) $l > 1 \Rightarrow$ η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ απειρίζεται θετικά.

• Σειρές με αρνητικούς όρους.

Μια σειρά με μόνο αρνητικούς όρους αντιμετωπίζεται σαν σειρά θετικών όρων.

Ορισμός 3.1.9 *Η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ λέγεται εναλλάσσουσα σειρά αν έχει εναλλασσόμενα θετικούς και αρνητικούς όρους.*

Πρόταση 3.1.10 *Η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, συγκλίνει αν η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$.*

Ορισμός 3.1.11 *Η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ λέγεται απόλυτα συγκλίνουσα αν η $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$ συγκλίνει.*

Πρόταση 3.1.12 *Κάθε απόλυτα συγκλίνουσα σειρά είναι συγκλίνουσα.*

Πρόταση 3.1.13 *(Κριτήριο ν-οστής ρίζας)*
Αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ είναι σειρά θετικών όρων τότε αυτή συγκλίνει αν $\exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \sqrt[\nu]{a_\nu} \le q < 1,\ \forall \nu > \nu_0$, και απειρίζεται θετικά αν $\sqrt[\nu]{a_\nu} \ge q > 1,\ \forall \nu > \nu_0$.

3.2. Ασκήσεις

Άσκηση 3.2.1 Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+3)}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.2 Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.3 Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.4 Εξετάστε για ποιους αριθμούς $p \in \mathbb{Z}$ και $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p x^n}{n!}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.5 Να μελετηθεί η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n^3}$, ως προς τη σύγκλιση.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.6 Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{10}}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.7 Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^{n/2}}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.8 Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n!}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.9 Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(3n+1)^n}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.10 Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos^2(nx)}{2^n}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.11 Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.12 Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^{n-1}}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.13 Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.14 Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.15 Να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ συγκλίνει μόνο όταν $a > 1$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.16 Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.17 Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.18 Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.19 Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ και αν συγκλίνει να υπολογιστεί το άθροισμα της.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.20 Να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)} = 0$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.21 Έστω ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $0 \leq a_n \leq 9$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ συγκλίνει σε ένα αριθμό a με $0 \leq a \leq 1$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.22 Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{7^n n^{\frac{3}{2}}}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.23 Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.24 Να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^a}$ συγκλίνει μόνο αν $a > 1$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.25 Εξετάστε ως προς την απόλυτη ή υπό συνθήκη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+1}{2n^3+n-1}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.26 Εξετάστε ως προς την απόλυτη ή υπό συνθήκη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.27 Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.28 Να δειχθεί ότι η εναλλάσσουσα σειρά

$$1 - \ln(\frac{2}{1}) + \frac{1}{2} - \ln(\frac{3}{2}) + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(\frac{n+1}{n})$$

συγκλίνει.

Υπόδειξη-Λύση

Κεφάλαιο 4

Γενικευμένα ολοκληρώματα

4.1. Στοιχεία Θεωρίας

• Γενικευμένο ολοκλήρωμα Α′ είδους

Ορισμός 4.1.1 *Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής. Ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f από το a έως το $+\infty$,*
$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt$.
Αν το $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt$ υπάρχει τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα f της συγκλίνει.
Αν το $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt$ είναι $+\infty$ $(-\infty)$ τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα f απειρίζεται θετικά (αρνητικά).
Αν δεν υπάρχει το όριο τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.
Όμοια ορίζεται το $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)dt$ και $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_c^x f(t)dt + \lim_{x\to-\infty} \int_x^c f(t)dt$

Πρόταση 4.1.2 *Αν τα* $\int_a^\infty f(t)dt + \int_a^\infty g(t)dt$ *υπάρχουν* $\Rightarrow \int_a^\infty lf(t)+mg(t)dt = l\int_a^\infty f(t)dt + m\int_a^\infty g(t)dt$.

- Κριτήρια σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων Α′ είδους.

Πρόταση 4.1.3 *Έστω* $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση τότε το* $\int_a^\infty f(x)dx$ *υπάρχει* $\Leftrightarrow$ *για κάθε* $\;> 0$, *υπάρχει* $\delta > 0$ *έτσι ώστε για κάθε* $y_1, y_2 \in [a,+\infty)$,*και* $x_1, x_2 > \delta$, $|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx| <$

Πρόταση 4.1.4 *Έστω* $f, g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *συνεχής συναρτήσεις έτσι ώστε* $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $a \leq x < \infty$ *τότε*
1) $\int_a^\infty g(x)dx < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty$.
2) $\int_a^\infty g(x)dx = \infty \Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx = \infty$

Πρόταση 4.1.5 *Έστω* $f, g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *συνεχής συναρτήσεις έτσι ώστε* $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in [a,+\infty)$ *αν* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ *τότε*
1) Αν $0 < l < \infty$ *τότε* $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$, $\int_a^\infty g(x)dx < \infty$
2) Αν $l = 0$ $\int_a^\infty g(x)dx < \infty$, $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$
3) Αν $l = \infty$ *τότε* $\int_a^\infty f(x)dx = \infty$, $\int_a^\infty g(x)dx = \infty$.

- Απόλυτη και υπό συνθήκη σύγκλιση γενικευμένου ολοκληρώματος Α′ είδους.

Ορισμός 4.1.6 *Έστω* $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *συνεχής. Το* $\int_a^\infty f(x)dx$ *συγκλίνει απόλυτα αν και μόνο αν* $\int_a^\infty |f(x)|dx$.
Αν $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$ *και* $\int_a^\infty |f(x)|dx = \infty$ *τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό συνθήκη και η* f *είναι υπό συνθήκη ολοκληρώσιμη.*

Πρόταση 4.1.7 *Έστω* $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *συνεχής αν* $\int_a^\infty |f(x)|dx$ *συγκλίνει τότε το* $\int_a^\infty f(x)dx$ *συγκλίνει.*

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 27 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Πρόταση 4.1.8 *Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής αν $F(x) = \int_a^x |f(t)|dt$ φραγμένη τότε $\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty$.*

- Γενικευμένο ολοκλήρωμα Β′ είδους

Ορισμός 4.1.9 *Αν η f δεν ορίζεται στο $[a,\ b]$ αλλά στο $(a,\ b]$ ή $[a,\ b)$ ή $(a,\ b)$ τότε ορίζουμε : Έστω $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $h : (a, b) \to \mathbb{R}$*
$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt$
$\int_a^b g(x)dx = \lim_{x\to b^-} \int_x^b g(t)dt$
$\int_a^b h(x)dx = \int_a^c h(x)dx + \int_c^b h(x)dx$

Ορισμός 4.1.10 *Έστω $f : [a,\ b] - c \to \mathbb{R}$ συνεχής αλλά όχι φραγμένη σε μια περιοχή του c και το όριο $l = \lim_{\to 0}\left(\int_a^{c-} f(x)dx + \int_{c+}^b f(x)dx\right)$ υπάρχει, τότε λέμε ότι το l είναι η πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy και το συμβολίζουμε με CPV $\int_a^b f(x)dx$.*

- Κριτήρια σύγκλισης γενικευμένου ολοκληρώματος Β′ είδους

Πρόταση 4.1.11 *Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής αν τότε το $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ για κάθε > 0, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $q_1, q_2 \in [a, b]$,και $|x_1 - b| < \delta$, $|x_2 - b| < \delta$ τότε $|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx| < .$*

Πρόταση 4.1.12 *Έστω $f : [a, +b) \to \mathbb{R}^+$ συνεχής αν $F(x) = \int_a^x |f(t)|dt$ φραγμένη τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ συγκλίνει.*

Πρόταση 4.1.13 *Έστω $f, g : [a, +b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συναρτήσεις έτσι ώστε $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $a \leq x < b$ τότε*
1) $\int_a^b g(x)dx < \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty$.
2) $\int_a^b g(x)dx = \infty \Rightarrow \int_a^b g(x)dx = \infty$

Πρόταση 4.1.14 *Έστω $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συναρτήσεις έτσι ώστε $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, +b)$ αν $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ τότε*

1) Αν $0 < l < \infty$ τότε $\int_a^b f(x)dx < \infty$, $\int_a^b g(x)dx < \infty$

2) Αν $l = 0$ $\int_a^b g(x)dx < \infty$, $\int_a^b f(x)dx < \infty$

3) Αν $l = \infty$ τότε $\int_a^b f(x)dx = \infty$, $\int_a^b g(x)dx = \infty$.

- Δυναμοσειρές

Ορισμός 4.1.15 *Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ με a_n σταθερές λέγεται δυναμοσειρά ως προς x.*
Όμοια η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ με a_n σταθερές λέγεται δυναμοσειρά ως προς $x - a$

Ορισμός 4.1.16 *Το διάστημα I τέτοιο ώστε για τα $x \in I$ η δυναμοσειρά να συγκλίνει λέγεται διάστημα σύγκλισης.*

- Σύγκλιση και ομοιόμορφη σύγκλιση δυναμοσειρών.

Ορισμός 4.1.17 *Το άθροισμα $S_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m x^m$ ονομάζεται μερικό άθροισμα δυναμοσειράς και η σειρά $R_n(x) = \sum_{m=n}^{\infty} a_m x^m$ ονομάζεται υπόλοιπο της δυναμοσειράς.*
Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S_n(x) + R_n(x).$$

Ορισμός 4.1.18 *Αν για $x = x_0$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει τότε λέμε ότι συγκλίνει στο $S(x_0) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$.*
Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ για $x = x_0$ αν και μόνο αν $\forall > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall n \geq n_0$ για κάποιο n_0 έχουμε $R_n(x_0) < 0$.

4.2. Ασκήσεις

Άσκηση 4.2.1 Να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_a^\infty \frac{dx}{x^k}$, $a > 0$ συγκλίνει για $k > 1$ και αποκλίνει για $k \leq 1$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.2 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.3 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.4 Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα

α) $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

β) $\int_0^\infty \cos(x) dx$

γ) $\int_0^\infty e^{-x} dx$

δ) $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.5 Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ συγκλίνει.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.6 Δείξτε ότι τα ολοκληρώματα $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^a} dx$ και $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^a} dx$ συγκλίνουν απολύτως για $a > 1$ και συγκλίνουν για $a > 0$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.7 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_3^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.8 Να αποδείξετε ότι $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.9 Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ συγκλίνει χρησιμοποιώντας το κριτήριο *Cauchy*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.10 Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$, για $a > 0$ συγκλίνει.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.11 Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}} dx$, συγκλίνει.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.12 Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{2x^4-x^2+1} dx$, συγκλίνει.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.13 Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} x\sin(x^4) dx$, συγκλίνει.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.14 Να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$ συγκλίνει για $k < 1$ και αποκλίνει $k > 1$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.15 Να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.16 Να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sin(\frac{1}{x}) dx$ συγκλίνει.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.17 Να διερευνηθεί για ποιες τιμές του p συγκλίνει το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^p(x)}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.18 Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

συγκλίνει για $x > 0$. (Συνάρτηση Γάμμα)

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.19 Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt,$$

συγκλίνει για $x > 0$, $y < 1$. (Συνάρτηση Βήτα)

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.20 Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx,$$

συγκλίνει.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.21 Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ συγκλίνει.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.22 Να βρεθεί το διάστημα και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^\infty \frac{n+1}{n^2+1}(x-2)^n$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.23 Να βρεθεί το διάστημα και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+4}} x^n$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.24 Να βρεθεί το διάστημα και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.25 Να βρεθεί το διάστημα και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.26 Να βρεθεί το διάστημα και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.27 Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln(x)}{n}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.28 Δείξτε ότι αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, τότε η ακτίνα σύγκλισης της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ είναι $R = \frac{1}{a}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.29 Έστω a_n ακολουθία. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και

$$2\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = 0,$$

τότε να βρεθεί το a_n.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.30 Αν υποθέσουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ είναι R τότε ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ ·

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.31 Να εξεταστεί ως προς την σύγκλιση η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^a x^n$.

Υπόδειξη-Λύση

Υπόδειξη: Κάνουμε τις πράξεις και ολοκληρώνουμε κάθε παράγοντα ξεχωριστά.

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.1

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 35 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Πολλαπλασιάζουμε με μία κατάλληλη σταθερά έτσι ώστε να φέρουμε το ολοκλήρωμα στη μορφή $\int \phi'(x)e^{\phi(x)}dx$ $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.2

Υπόδειξη: Θέτουμε $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.3

Υπόδειξη: Για κατάλληλα a και b θέτουμε $\frac{x+2}{2x-1} = a + \frac{b}{2x-1}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.4

Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη ταυτότητα $\sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$.

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.5

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $x = \sin(y)$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.6

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $x = a + (b-a)\sin^2(u)$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.7

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $x = a + (b - a)\sin^2(u)$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.8

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $e^x = y$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.9

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $x = \sqrt{3}\tan(u)$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.10

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $x = \sqrt{5}\cosh(u)$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.11

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $x = \frac{1}{2}(1 - \cos(u))$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.12

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $t = ax + b$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.13

Υπόδειξη: Βρίσκουμε a και b έτσι ώστε $\frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$ και μετά υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα που προκύπτουν. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.14

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $x = 2\arctan(t)$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.15

Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $x = 2\tan(u)$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.16

Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $\sqrt{x} = t$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.17

Υπόδειξη: Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή και προσδιορίζουμε τα a, b, c έτσι ώστε $\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$ □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.18

Υπόδειξη: Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή και προσδιορίζουμε τα a, b, c έτσι ώστε $\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.19

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 53 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή και προσδιορίζουμε τα a, b, c έτσι ώστε $\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1} = \frac{3x^2+2x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$. ☐

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.20

Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη ταυτότητα $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{\phi(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{\phi_1(x)}{Q_2(x)}dx$ για κατάλληλα $\phi(x)$, $\phi_1(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.21

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.22

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση ώστε να καταλήξουμε σε ένα αλγεβρικό σύστημα με αγνώστους τα $S(x)$, $C(x)$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.23

Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.24

Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.25

Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.26

Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση θέτοντας $1 = (x)'$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.27

Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.28

Υπόδειξη: Θέτουμε $f(x) = \int e^x \cos(x)dx$ και χρησιμοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση.
$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.29

Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη ταυτότητα $\sin(2x)\cos(x) = \frac{1}{2}(\sin(3x) + \sin(x))$, και κατόπιν εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση στα ολοκληρώματα που προκύπτουν. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.30

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}dx$ και κατόπιν εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.31

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.32

Υπόδειξη: Πολλαπλασιάζουμε με $\sqrt{(1+x)}$ αριθμητή και παρανομαστή έτσι ώστε : $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1+x}{\sqrt{(1-x)(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} + \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ και υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα που προκύπτουν ξεχωριστά. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.33

Υπόδειξη: Θέτουμε $\sqrt{4-3x-x^2} = t(x+4)$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.34

Υπόδειξη: Θέτουμε $\sqrt{x^2 - x - 1} = t - x$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.35

Υπόδειξη: Πρέπει να σκεφτούμε μια συνάρτηση της οποίας γνωρίζουμε ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα. Τότε παίρνουμε μια διαμέριση P_n και δείχνουμε π.χ. ότι το $U(f, P_n)$ είναι η ζητούμενη σειρά. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.1

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 70 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Βρείτε διαμέριση P_n με $\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n) - L(g,P_n)] = 0$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.2

Υπόδειξη: Δείξτε ότι αν $f \neq 0$ τότε το $\int_a^b |f| dt$ δεν μπορεί να μηδενίζεται. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.3

Υπόδειξη: Βρείτε κατάλληλη διαμέριση P_n έτσι ώστε π.χ. $U(\frac{1}{x}, P_n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n-1}$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.4

Υπόδειξη: Για κατάλληλη διαμέριση σχηματίστε το άθροισμα *Riemann* και υπολογίστε το όριο του. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.5

Υπόδειξη: Για κατάλληλη διαμέριση σχηματίστε το άθροισμα *Riemann* και υπολογίστε το όριο του. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.6

Υπόδειξη: Για κατάλληλη διαμέριση σχηματίστε το άθροισμα *Riemann*. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.7

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$. για κατάλληλα a και b. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.8

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 77 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx.$ □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.9

Υπόδειξη: Για κατάλληλη διαμέριση εκφράστε το ολοκλήρωμα σαν όριο αθροίσματος *Riemann*. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.10

Υπόδειξη: Επειδή η f είναι συνεχής $f(x) > 0$ σε περιοχή του c. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.11

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το θεμελιώδες θεώρημα απειροστικού λογισμού. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.12

Υπόδειξη: Θέτουμε $f(x) = x + \pi$, $g(x) = \sin(x)$ και εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος για τις f και g. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.13

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.14

Υπόδειξη: Βρείτε τα σημεία τομής των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ και υπολογίστε την επιφάνεια της $f(x) - g(x)$ ανάμεσα σε αυτά. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.15

Υπόδειξη: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin(x)}dx$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.16

Υπόδειξη: Βρείτε τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2$, και της ευθείας $x + y = 2$ $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.17

Υπόδειξη: Βρείτε τα σημεία τομής των δυο καμπυλών. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.18

Υπόδειξη: Εκφράστε την παραβολή σε παραμετρική μορφή και υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.19

Υπόδειξη: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.20

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx.$ □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.21

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον μετασχηματισμό $u = 3x + 4$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.22

Υπόδειξη: Βρείτε τα σημεία τομής των καμπυλών και υπολογίστε το ολοκλήρωμα του απόλυτου της διαφοράς των δυο καμπυλών από $x = 0$ έως $x = \pi/2$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.23

Υπόδειξη: Το εμβαδόν της επιφάνειας από περιστροφή γύρω από τον x - άξονα δίνεται από τη σχέση $E = 2\pi \int_l^m |f(t)| \sqrt{f(t)^2 + g'(t)^2} dt$ για μια καμπύλη με $x = f(t)$, $y = g(t)$, $l \leq t \leq m$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.24

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 93 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Το εμβαδόν της επιφάνειας από περιστροφή γύρω από τον x - άξονα δίνεται από τη σχέση $E = 2\pi \int_l^m |f(t)| \sqrt{f(t)^2 + g'(t)^2} dt$ για μια καμπύλη με $x = f(t)$, $y = g(t)$, $l \leq t \leq m$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.25

Υπόδειξη: Το εμβαδόν της επιφάνειας από περιστροφή γύρω από τον x - άξονα δίνεται από τη σχέση $E = 2\pi \int_l^m |f(t)| \sqrt{f(t)^2 + g'(t)^2} dt$ για μια καμπύλη με $x = f(t)$, $y = g(t)$, $l \leq t \leq m$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.26

Υπόδειξη: Έχουμε ότι ο όγκος που ορίζεται από περιστροφή δύο συνεχών συναρτήσεων $f, g, f(x) \geq g(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$ είναι $V = \pi \int_a^b \{f(x^2) - g(x)^2\} dx$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.27

Υπόδειξη: Έχουμε ότι ο όγκος που ορίζεται από περιστροφή μιας συνάρτησης f, για $x \in [a, b]$ είναι $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.28

Υπόδειξη: Έχουμε ότι ο όγκος που ορίζεται από περιστροφή του γραφήματος μιας συνάρτησης $x = g(t)$, $y = f(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ είναι $V = \pi \int_{t_1}^{t_2} f(t)^2 g'(t) dt$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.29

Υπόδειξη: Θεωρήστε μια διαμέριση του $[0, 1]$ σε 10 ίσα μέρη και χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του τραπεζίου. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.30

Υπόδειξη: Θεωρήστε μια διαμέριση του $[0, 1]$ σε 10 ίσα μέρη και χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του *Simpson*. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.31

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο σύγκρισης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.1

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο λόγου. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.2

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο σύγκρισης. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.3

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 103 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο λόγου. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.4

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο σύγκλισης για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.5

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 105 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο λόγου. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.6

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο ρίζας. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.7

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο λόγου. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.8

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο ρίζας. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.9

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο ρίζας. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.10

Υπόδειξη: Δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$ συγκλίνει εφαρμόζοντας το κριτήριο ρίζας. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.11

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο σύγκρισης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.12

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο σύγκρισης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.13

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το οριακό κριτήριο σύγκρισης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.14

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ολοκληρωτικό κριτήριο. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.15

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο ρίζας. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.16

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο λόγου. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.17

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο ρίζας. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.18

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο ρίζας. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.19

Υπόδειξη: Αρκεί να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}$ συγκλίνει. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.20

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο σύγκρισης. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.21

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο λόγου. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.22

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο σύγκρισης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.23

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ολοκληρωτικό κριτήριο . $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.24

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο για τις εναλλάσσουσες σειρές. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.25

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο για τις εναλλάσσουσες σειρές. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.26

Υπόδειξη: Θεωρήστε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k}$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.27

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο για τις εναλλάσσουσες σειρές. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.28

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.1

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 129 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.2

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.3

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 131 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.4

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.5

Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι $\frac{|\sin(x)|}{x^a} \leq \frac{1}{x^a}$ και $\frac{|\cos(x)|}{x^a} \leq \frac{1}{x^a}$ για $x \geq 1$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.6

Υπόδειξη: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_3^t \frac{dx}{x^2+x-2}$ και κατόπιν υπολογίστε το όριο για $t \to \infty$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.7

Υπόδειξη: Εφαρμόστε παραγοντική ολοκλήρωση. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.8

Υπόδειξη: Βρείτε $\delta > 0$ έτσι ώστε για $x_1, x_2 > \delta$ να έχουμε $|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin(x)}{x} dx| <$ $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.9

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο σύγκρισης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.10

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο σύγκρισης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.11

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το οριακό κριτήριο σύγκρισης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.12

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το οριακό κριτήριο *Cauchy*. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.13

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό των γενικευμένων ολοκληρωμάτων Β′ είδους. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.14

Υπόδειξη: Έχουμε ότι για κατάλληλο $k < 1$ αν $\lim_{x \to a}(x-a)^k f(x) = A < +\infty$ τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ συγκλίνει. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.15

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 143 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το μετασχηματισμό $x = \frac{1}{t}$ και εξετάστε αν συγκλίνει απόλυτα το ολοκλήρωμα που προκύπτει. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.16

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το οριακό κριτήριο σύγκρισης. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.17

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το οριακό κριτήριο σύγκρισης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.18

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το οριακό κριτήριο σύγκρισης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.19

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο σύγκρισης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.20

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος Β′ είδους. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.21

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.22

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας. ◻

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.23

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου. ☐

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.24

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.25

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο σύγκρισης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.26

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο σύγκρισης. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.27

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.28

Υπόδειξη: Για $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ προσδιορίστε την $f(x)$ από τη σχέση $2f(x) + f'(x) = 0$ και εκφράστε την σαν δυναμοσειρά. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.29

Υπόδειξη: Πρέπει να έχουμε $|x^2| < R$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.30

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο λόγου ◻

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.31

Απόδειξη: Έχουμε $(\sqrt{x}+1)(x+\sqrt{x}+1) = 2x + 2\sqrt{x} + x^{\frac{3}{2}} + 1$. Άρα

$$\begin{aligned}
\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx &= \int (2x + 2\sqrt{x} + x^{\frac{3}{2}} + 1)dx \\
&= \int 2xdx + \int 2\sqrt{x}dx + \int x^{\frac{3}{2}}dx + \int dx \\
&= x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + C.
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.1

Απόδειξη: Έχουμε

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int \phi'(x) e^{\phi(x)} dx,$$

όπου $y = \phi(x) = x^3$, άρα

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \int e^y dy = \frac{e^y}{3} + C = \frac{e^{x^3}}{3} + C$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.2

Απόδειξη: Έχουμε

$$\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{(1+e^x)'}{1+e^x},$$

άρα

$$\int \frac{1}{e^x+1}dx = \int dx - \int \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}dx = x - \ln(1+e^x) + C$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.3

Απόδειξη: Έχουμε

$$\frac{x+2}{2x-1} = \frac{1}{2}\frac{2x+4}{2x-1} = \frac{1}{2}\frac{2x-1+5}{2x-1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\frac{1}{2x-1}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{2x-1}dx &= \int (\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\frac{1}{2x-1})dx \\ &= \frac{1}{2}\int dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{2x-1}dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{5}{4}\ln|2x-1| + C.\end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.4

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin(x)}dx &= \int \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}dx \\ &= \int \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{x}{2})}d(\frac{x}{2}) = \int \frac{1}{\tan(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{x}{2})}d(\frac{x}{2}) \\ &= \int \frac{(\tan(\frac{x}{2}))'}{\tan(\frac{x}{2})}d(\frac{x}{2}) = \ln(\tan(\frac{x}{2})) + C,\end{aligned}$$

για $k\pi < x < k\pi + \pi$, $k \in Z$. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.5

Απόδειξη: Θέτουμε $x = g(y) = \sin(y)$, για $x \in [-1, 1]$ οπότε $y = \arcsin(x)$, ($y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) άρα $\cos(y) \geq 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}dx &= \int \sqrt{1-g(y)^2}g'(y)dy = \int \cos(y)(\sin(y))'dx \\ &= \int \cos^2(y)dy = \int \frac{1+\cos(2y)}{2}dy \\ &= \frac{y}{2} + \frac{\sin(2y)}{4} + c = \frac{y}{2} + \frac{\sin(y)\cos(y)}{2} + c \\ &= \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c. \qquad (4.1)\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.6

Απόδειξη: Για να ορίζεται το κλάσμα πρέπει $(x-a)(b-x) < 0$ οπότε $a < x < b$ άρα $0 < \frac{x-a}{b-a} < 1$. Θέτουμε $\frac{x-a}{b-a} = \sin^2(u)$ δηλαδή

$$x = g(u) = a + (b-a)\sin^2(u), \quad u \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

έχουμε $b - x = (b-a) - (x-a) = (b-a) - (b-a)\sin^2(u) = (b-a)\cos^2(u)$, άρα

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = (b-a)\sin(u)\cos(u).$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(g(u)-a)(b-g(u))}}du = \\
&= \int \frac{1}{(b-a)\sin(u)\cos(u)}(b-a)\,2\sin(u)\cos(u))du \\
&= 2\int du = 2u + c = 2\arcsin\left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\frac{1}{2}} + c.
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.7

Απόδειξη: Θέτουμε $x = a + (b-a)\sin^2(u)$ και έχουμε

$$\int \sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \int (b-a)\sin(u)\cos(u)(b-a)2\sin(u)\cos(u)du$$
$$= 2(b-a)^2\int \sin^2(u)\cos^2(u)du = \frac{(b-a)^2}{2}\int \sin^2(2u)du.$$

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 165 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Αλλά

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(2u)du &= \frac{1}{2}\int \sin^2(v)dv \qquad (2u = v)\\
&= \frac{1}{4}\int (1-\cos(2v))dv = \frac{1}{4}v - \frac{1}{8}\sin(2v) + c\\
&= \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}\sin(4u) + c = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin(2u)\cos(2u) + c.\\
&= \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\sin(u)\cos(u)(1-2\sin^2(u)) + c.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\sqrt{(x-a)(b-x)} = (b-a)\sin(u)\cos(u)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{(x-a)(b-x)}dx\\
&= \frac{(b-a)^2}{2}\int \sin^2(2u)du\\
&= \frac{(b-a)^2}{4}u - \frac{(b-a)^2}{4}\sin(u)\cos(u)(1-2\sin^2(u)) + c =\\
&= \frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right) - \frac{(b-a)^2}{4}\frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{b-a}(a-2\frac{x-a}{b-a}) + c\\
&= \frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}(b-a-2(x-a)) + c\\
&= \frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{(x-a)(b-x)}\left(x-\frac{b+a}{2}\right) + c.
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.8

Απόδειξη: Θέτουμε $e^x = y$. Άρα $e^x dx = dy$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx &= \int \frac{y}{y^2+1}\frac{1}{y}dy\\ &= \int \frac{1}{y^2+1}dy.\end{aligned}$$

Για $y = \tan(u)$ έχουμε $dy = \frac{1}{\cos^2(u)}du$. Άρα

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y^2+1}dx &= \int \frac{1}{\tan^2(u)+1}\frac{1}{\cos^2(u)}du\\ &= \int du = u + C = \arctan(e^x) + C.\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.9

Απόδειξη: Θέτουμε $x = \sqrt{3}\tan(u)$. Άρα $dx = \sqrt{3}\frac{1}{\cos^2(u)}du$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{3+x^2}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\tan^2(u)+1}\frac{1}{\cos^2(u)}du\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int du = \frac{1}{\sqrt{3}}u + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}}) + C.\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.10

Απόδειξη: Θέτουμε $x = \sqrt{5}\cosh(u)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-5}dx &= \int \sqrt{5}\sinh(u)\sqrt{5}\sinh(u)du \\
&= \int 5\sinh^2(u)du = 5\int \frac{\cosh(2z)-1}{2}du = \frac{5}{4}\sinh(2u) - \frac{5}{2}u \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{5}\sinh(u)\sqrt{5}\sinh(u) - \frac{5}{2}u \\
&= \frac{x\sqrt{x^2-5}}{2} - \frac{5}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{5}}\right) + C.
\end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.11

Απόδειξη: Θέτουμε $x = \frac{1}{2}(1-\cos(u))$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x-x^2}}dx &= \int \frac{x}{\sqrt{2\frac{1}{2}x - x^2}}dx \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(1-\cos(u))}{\frac{1}{2}\sin(u)}\frac{1}{2}\sin(u)du = \frac{1}{2}\int(1-\cos(u))du = \frac{1}{2}(u-\sin(u)) \\
&= \frac{1}{2}\arccos(1-2x) - \sqrt{x-x^2} + C.
\end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.12

Απόδειξη: Θέτουμε $t = ax + b$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int \cos(ax+b)dx &= \frac{1}{a}\int \cos(t)dt \\ &= \frac{1}{a}\sin(t) = -\frac{1}{a}\cos(at+b) + C..\end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.13

Απόδειξη: Αναζητούμε σταθερές a και b έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3},$$

για $x \neq 1$ και $x \neq -3$. Ισοδύναμα έχουμε $5x+3 = a(x+3) + b(x-1)$. Για να ισχύει αυτή η ισότητα για κάθε x, $x \neq 1$ και $x \neq -3$ πρέπει να έχουμε $a = 2$, $b = 3$.
Επομένως

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}dx &= 2\int \frac{1}{x-1}dx + 3\int \frac{1}{x+3}dx \\ &= 2\ln|x-1| + 3\ln|x+3| + c = \ln|(x-1)^2(x+3)^3| + c.\end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση **1.2.14**

Απόδειξη:

Θέτουμε $\frac{x}{2} = \arctan(t)$ και $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx &= \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{1}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1+t^2}{2} \frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int dt = t + C = \tan(\frac{x}{2}) + C.
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση **1.2.15**

Απόδειξη: Θέτουμε $x = 2\tan(u)$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx &= \int \frac{2\tan(u)}{\frac{2}{\cos(u)}} \frac{2}{\cos^2(u)}du = \int \frac{\tan(u)}{\cos(u)}du \\
&= \int \frac{\sin(u)}{\cos^2(u)}du \\
&= -\int \frac{(\cos(u))'}{\cos^2(u)} = 2\frac{1}{\cos(u)} = \sqrt{4+x^2} + C.
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση **1.2.16**

Απόδειξη: Θέτουμε $\sqrt{x} = t$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) dx &= \int \frac{1}{t} \cos(t) 2t dt = 2 \int \cos(t) dt \\ &= 2\sin(t) + C = 2\sin(\sqrt{x}) + C\end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.17

Απόδειξη: Αναζητούμε σταθερές a, b και c έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2},$$

για $x \neq 0$, $x \neq 1$ και $x \neq -2$. Για να ισχύει αυτή η ισότητα πρέπει να έχουμε $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = -\frac{1}{2}$.
Επομένως

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+2| + C = \ln|(x-1)^2 \sqrt{\frac{x}{x+2}}| + C.\end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.18

Απόδειξη: Αναζητούμε σταθερές a, b και c έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2},$$

για $x \neq 1, -1$, Για να ισχύει αυτή η ισότητα πρέπει να έχουμε $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -1$. Επομένως

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}dx &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx \\ &= \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C = \ln\left|\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}}\right| + C.\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.19

Απόδειξη: Αναζητούμε σταθερές a, b και c έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1} = \frac{3x^2+2x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}.$$

Για να ισχύει αυτή η ισότητα πρέπει να έχουμε $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Επομένως

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}dx &= \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{2x+3}{x^2+x+1}dx \\ &= \ln|x-1| + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + 2\int \frac{1}{x^2+x+1}dx \\ &= \ln|x-1| + \ln(x^2+x+1) + 2\int \frac{1}{x^2+x+1}dx\end{aligned}$$

Για το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$ παρατηρούμε ότι $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(y^2+1)$ όπου $y = f(x) = \frac{2}{\sqrt(3)}(x+\frac{1}{2})$ άρα $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx &= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{f'(x)}{\frac{3}{4}(f(x)^2+1)}dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{y^2+1}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(y)+c.\end{aligned}$$

Τελικά

$$\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}dx = \ln|x-1| + \ln(x^2+x+1) + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + C$$

□

Πίσω στην Άσκηση **1.2.20**

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη ταυτότητα $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{\phi(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{\phi_1(x)}{Q_2(x)}dx$. Έχουμε $Q_1(x)$=ΜΚΔ$\{(x^3-1)^2, 6x^2(x^3-1)\} = x^3-1$. Επίσης $\phi(x) = Ax^2+Bx+\Gamma$, $Q_2(x) = x^3-1$, $\phi_1(x) = \Delta x^2+Ex+Z$. Άρα

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2}dx = \frac{Ax^2+Bx+\Gamma}{x^3-1} + \int \frac{\Delta x^2+Ex+Z}{x^3-1}dx.$$

έχουμε

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+\Gamma)}{(x^3-1)^2} + \frac{\Delta x^2+Ex+Z}{x^3-1},$$

ή $(2Ax+B)(x^3-1) - 3x^2(Ax^2+Bx+\Gamma) + (\Delta x^2+Ex+Z)(x^3-1) = 1$. Άρα έχουμε $A = \Gamma = \Delta = E = 0$, $B = -\frac{1}{3}$, $Z = -\frac{2}{3}$. Επομένως

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = -\frac{x}{3(x^3-1)} - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^3-1}dx.$$

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 173 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Για το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^3-1}dx$ έχουμε $\frac{1}{x^3-1} = \frac{l}{x-1} + \frac{mx+n}{x^2+x+1}$, όπου $l = \frac{1}{3}$, $m = -\frac{1}{3}$, $n = -\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3-1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + C.
\end{aligned}$$

Τελικά

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2}dx = -\frac{x}{3(x^3-1)} + \frac{1}{9}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{(x-1^2)}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + C$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.21

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{x^3} dx &= \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx \\
&= x^2 e^x - 2\int x(e^x)' dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2\int (x)' e^x dx \\
&= x^2 e^x - 2xe^x + 2\int 1 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.22

Απόδειξη: Ολοκληρώνουμε κατά μέρη και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} aC(x) &= \int ae^{ax}\cos(bx)dx = \int (e^{ax})'\cos(bx)dx \\ &= e^{ax}\cos(bx) - \int e^{ax}(\cos(bx))'dx = e^{ax}\int e^{ax}(-b\sin(bx))dx \\ &= e^{ax}\cos(bx) + bS(x) + C_1 \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} aC(x) - bS(x) &= e^{ax}\cos(bx) + C_1 && (4.2) \\ \text{όμοια} \quad bC(x) + aS(x) &= e^{ax}\sin(bx) + C_2. && (4.3) \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (4.2) και (4.3) έχουμε

$$C(x) = \frac{a\cos(bx) + b\sin(bx)}{a^2+b^2}e^{ax} + C_3 \quad S(x) = \frac{a\sin(bx) - b\cos(bx)}{a^2+b^2}e^{ax} + C_4.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.23

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε παραγοντική ολοκλήρωση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int x^2\cos(x)dx &= \int x^2(\sin(x))'dx \\ &= x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)dx = x^2\sin(x) - 2\int x(\cos(x))'dx \\ &= x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\int (x)'\cos(x)dx \\ &= x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C. \end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση **1.2.24**

Απόδειξη: Έχουμε

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}dx = \int \frac{(\ln(x))'}{\ln(x)}dx = \ln(\ln(x)) + C.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση **1.2.25**

Απόδειξη: Έχουμε

$$I = \int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int \frac{1}{x}\ln(x)dx = \int (\ln(x))'\ln(x)dx = \ln^2(x) - \int \frac{\ln(x)}{x}dx = \ln^2(x) - I.$$

Άρα $2I = \ln^2(x) + C \Rightarrow I = \int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + c$ $\square$

Πίσω στην Άσκηση **1.2.26**

Απόδειξη: Έχουμε

$$\int \ln(x)dx = \int (x)'\ln(x)dx = x\ln(x) - \int x(\ln(x))'dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + C.$$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.27

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned}\int (x^2-1)\cos(3x)dx &= \frac{1}{3}(x^2-1)\sin(3x) - \int \sin(3x)2xdx\\ &= \frac{1}{3}(x^2-1)\sin(3x) + \frac{2}{9}\int x(\cos(3x))'dx\\ &= \frac{1}{3}(x^2-1)\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x) - \frac{2}{9}\int \cos(3x)dx\\ &= \frac{1}{3}(x^2-1)\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x) - \frac{2}{27}\sin(3x) + C.\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.28

Απόδειξη: Έχουμε

$$
\begin{aligned}
I &= \int xe^x\cos(x)dx \\
&= \int x\left(\frac{e^x}{2}(\sin(x)-\cos(x))\right)' dx \\
&= \frac{xe^x}{2}(\sin(x)-\cos(x)) - \frac{1}{2}\int e^x\sin(x)dx + \frac{1}{2}\int e^x(\sin(x))' dx \\
&= \frac{xe^x}{2}(\sin(x)-\cos(x)) - \frac{1}{2}\int e^x\sin(x)dx + \frac{1}{2}e^x(\sin(x)) - \frac{1}{2}\int e^x\sin(x)dx \\
&= \frac{xe^x}{2}(\sin(x)-\cos(x)) + \frac{1}{2}e^x\cos(x) + C.
\end{aligned}
$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.29

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη ταυτότητα $\sin(2x)\cos(x) = \frac{1}{2}(\sin(3x)+\sin(x))$ και έχουμε :

$$\int e^x\sin(2x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\int e^x\sin(3x)dx + \frac{1}{2}\int e^x\sin(x)dx.$$

Αλλά

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int e^x \sin(3x)dx = -\frac{1}{3}\int e^x(\cos(3x))' dx \\
&= \frac{1}{3}e^x\cos(3x) + \frac{1}{3}\int (e^x)'\cos(3x)dx = \frac{1}{3}e^x\cos(3x) + \frac{1}{9}\int e^x(\sin(3x))' dx \\
&= \frac{1}{3}e^x\cos(3x) + \frac{1}{9}e^x\sin(3x) - \frac{1}{9}\int (e^x)'\sin(3x)dx \\
&= \frac{1}{3}e^x\cos(3x) + \frac{1}{9}e^x\sin(3x) - I_1.
\end{aligned}
$$

Άρα $I_1 = \frac{1}{10}e^x\sin(3x) - 3cos(3x)$. Όμοια $I_2 = \int e^x\sin(x) = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x))$. Τελικά

$$\int e^x \sin(2x)\cos(x)dx = \frac{1}{20}e^x\sin(3x) - 3cos(3x) + \frac{e^x}{4}(\sin(x) - \cos(x)) + C.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση **1.2.30**

Απόδειξη: Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}dx$. Έχουμε :

$$\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}} \arctan(x)dx &= \int \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\right)' \arctan(x)dx \\
&= \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} \arctan(x) - \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} \arctan'(x)dx \\
&= \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} \arctan(x) - \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} \arctan(x) - 2\sqrt{(x)} + C.
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.31

Απόδειξη: Έχουμε :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n+1}} dx = \frac{4a}{4ac-b^2} \int \frac{ax^2+bx+c-a(x+\frac{b}{2a})}{(ax^2+bx+c)^{n+1}} dx \\
&= \frac{4a}{4ac-b^2} I_n - \int \frac{(2ax+b)^2}{(ax^2+bx+c)^{n+1}} dx \\
&= \frac{4a}{4ac-b^2} I_n - \frac{1}{n(4ac-b^2)} \int (2ax+b) \left(\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\right)' dx
\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση

$$\begin{aligned}
&= \frac{4a}{4ac-b^2} I_n + \frac{1}{n(4ac-b^2)} \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} - \frac{2a}{n(4ac-b^2)} \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} dx \\
&= \frac{4a}{4ac-b^2} I_n + \frac{1}{n(4ac-b^2)} (2ax+b) \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} - \frac{2a}{n(4ac-b^2)^n} I_n
\end{aligned}$$

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 180 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Πίσω στην Άσκηση 1.2.32

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}dx &= \int\frac{1+x}{\sqrt{(1-x)(1-x)}}dx\\ &= \int\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx+\int\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}dx.\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}dx &= -\frac{1}{2}\int\frac{(1-x^2)'}{\sqrt{(1-x^2)}}dx=\\ &= -\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{y}}dy \qquad (y=1-x^2)\\ &= -\sqrt{y}+c=-\sqrt{1-x^2}+c.\end{aligned}$$

Επίσης $\int\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx=\arcsin(x)$. Άρα

$$\int\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}dx=\arcsin(x)-\sqrt{1-x^2}+c$$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.33

Απόδειξη: Έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ με $a<0$ και $c>0$ άρα θέτουμε $\sqrt{4-3x-x^2} = t(x+4)$ και έχουμε :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}}dx &= \int \frac{-\frac{10t}{(1+t^2)^2}}{\frac{5t}{1+t^2}}dt = \\
&= -2\int \frac{1}{1+t^2}dt = -2\arctan(t) + C \\
&= -2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x+4}}\right) + C.
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.34

Απόδειξη: Έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ με $a>0$ άρα θέτουμε $\sqrt{x^2-x-1} = t-x$ και έχουμε :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-x-1}}dx &= \int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt = \\
&= \int\left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}\right)dt \\
&= 2\ln(|t|) - \frac{3}{2}\ln(|2t-1|) - \frac{3}{2}\frac{1}{2t-1} \\
&= 2\ln(|x+\sqrt{x^2-x+1}|) - \frac{3}{2}\ln(|2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}|) \\
&- \frac{3}{2}\ln(\frac{1}{2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}}) + C.
\end{aligned}$$

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 182 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.35

Απόδειξη: Πρέπει να σκεφτούμε μια συνάρτηση της οποίας γνωρίζουμε ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα. Τότε παίρνουμε μια διαμέριση P_n και δείχνουμε π.χ. ότι το $U(f, P_n)$ είναι η ζητούμενη σειρά.
Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^k} &= \frac{1}{n}\sqrt[n]{e} + \frac{1}{n}\sqrt[n]{e^2} + \cdots + \frac{1}{n}\sqrt[n]{e^n} \\ &= \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}e^{\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{n}e^{\frac{n}{n}} \end{aligned}$$

Θεωρούμε την διαμέριση του $[0, 1]$, $P_n = \{x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_1 = \frac{1}{n}, \cdots, x_n = 1\}$ και τη συνάρτηση $f : \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$. Τότε $\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - e^0 = e - 1$.
Υπολογίζουμε το $U(f, P_n)$. $U(f, P_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^k}$ άρα $\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^k}$ και $e - 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^k}$.

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.1

Απόδειξη: Αρκεί να βρεθεί διαμέριση P_n με $\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n) - L(g,P_n)] = 0$. Έχουμε $f \in \mathcal{R}([a,b])$ άρα υπάρχει διαμέριση P_n τέτοια ώστε $\int_a^b f dx = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n)$. Όμοια υπάρχει διαμέριση P'_n τέτοια ώστε $\int_a^b h dx = \lim_{n\to\infty} U(h,P_n)$. Θεωρούμε την $Q_n = P_n \cup P'_n$ (η Q_n είναι εκλέπτυνση της P_n) οπότε

$$L(f,P_n) \leq L(f,Q_n) \leq L(g,Q_n) \leq U(g,Q_n) \leq U(h,Q_n) \leq U(h,P'_n),$$

επειδή $f(t) \leq g(t) \leq h(t)$. Άρα $0 \leq U(g,Q_n) - L(f,Q_n) \leq U(h,P'_n) - L(f,P_n)$ και $\lim_{n\to\infty}[U(h,Q_n) - L(f,Q_n)] = \int_a^b h dx - \int_a^b f dx = 0$. Από το θεώρημα για τις ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}[U(g,Q_n) - L(g,Q_n)] = 0$$

Άρα $g \in \mathcal{R}([a,b])$ και $\int_a^b g dx \lim_{n\to\infty} U(g,Q_n) = \int_a^b f dx$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.2

Απόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε ότι αν $f \neq 0$ τότε το $\int_a^b |f(t)|dt$ δεν μπορεί να μηδενίζεται. Εάν $f \neq 0$ τότε υπάρχει ένα $t_0 \in [a, b]$: $|f(t_0)| = \delta \neq 0$. Άρα επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση υπάρχει μια περιοχή U του t_0 έτσι ώστε $|f(t)| > \frac{\delta}{2}$, $t \in U$. Άρα αν $f \neq 0$ $\int_a^b |f(t)|dt \geq \int_U |f(t)|dt \geq \frac{\delta}{2} \times$ μήκος της $U > 0$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.3

Απόδειξη: Θέλουμε να βρούμε κατάλληλη διαμέριση P_n για την $f(x) = \frac{1}{x}$ έτσι ώστε $U(\frac{1}{x}, P_n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n-1}$ και$L(\frac{1}{x}, P_n) = \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}$.
θεωρούμε τη διαμέριση $P_n = \{1 < 2 < \ldots < n\}$ του $[1, n]$. Έχουμε

$$L(f, P_n) = \sum_{k=2}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} m_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k},$$

$$U(f, P_n) = \sum_{k=2}^{n} M_k(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} M_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.4

Απόδειξη: Έχουμε ότι η συνάρτηση $\sin x$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ άρα θα είναι και ολοκληρώσιμη.
Διαλέγουμε τη διαμέριση $P_n = \{a, a+h, a+2h, \cdots a+nh = b\}$, για $h = \frac{b-a}{n}$. Σχηματίζουμε το κάτω άθροισμα *Riemann*, $L(\sin x, P_n)$. Ξέρουμε ότι $\lim_{n\to\infty} L(\sin x, P_n) = \int_a^b \sin x dx$, και έχουμε

$$L(\sin x, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \sin(a+(k-1)h)h = h\sum_{k=1}^{n} \sin(a+(k-1)h) = h\frac{\cos(a-\frac{h}{2}) - \cos(b-\frac{h}{2})}{2\sin(\frac{h}{2})}.$$

Όμως $\lim_{h\to 0} \frac{h}{2\sin(\frac{h}{2})} = 1$, άρα $\lim_{n\to\infty} L(\sin x, P_n) = \int_a^b \sin x dx = \cos b - \cos a$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.5

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 188 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έχουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[a, b]$ άρα θα είναι και ολοκληρώσιμη.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις α) $m \neq -1$, β) $m = -1$.

α) Διαλέγουμε τη διαμέριση $P_n = \{a, ah, ah^2, \cdots ah^n\}$, με $h = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. Έχουμε ότι $h \to 1$ καθώς $n \to \infty$.
Σχηματίζουμε το άθροισμα *Riemann* με ενδιάμεσα σημεία τα αριστερά άκρα των τμημάτων της διαμέρισης P_n. Έχουμε

$$\begin{aligned} S_n(f, P_n) &= (ah - a)a^m + (ah^2 - ah)a^m h^m + \cdots + (ah^n - ah^{n-1})a^m h^{(n-1)m} \\ &= a^{m+1}(h-1) + a^{m+1}h^{m+1}(h-1) + \cdots + a^{m+1}h^{(n-1)(m-1)(h-1)} \\ &= a^{m+1}(h-1)\{1 + h^{m+1} + \cdots (h^{m+1})^{n-1}\} \end{aligned}$$

$$= a^{m+1}(h-1)\frac{(h^{m+1})^n - 1}{h^{m+1} - 1}\{1 + h^{m+1} + \cdots (h^{m+1})^{n-1}\} = \frac{h-1}{h^{m+1}-1}(b^{m+1} - a^{m+1}).$$

Όμως $\lim_{n\to 1} \frac{h-1}{h^{m+1}-1} = \frac{1}{m+1}$. Άρα $\int_a^b x^m dx = \lim_{n\to\infty} S_n(f, P_n) = \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$.
β) Αν $m = -1$ τότε $m + 1 = 0$ και $S_n(f, P_n) = n(h-1)$. Επίσης $ah^n = b \Rightarrow n = \frac{\ln b - \ln a}{\ln h}$, άρα

$$\int_a^b x^{-1} dx = \lim_{n\to\infty} S_n(f, P_n) = \lim_{h\to 1} \frac{h-1}{\ln h}(\ln b - \ln a).$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.6

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 189 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία διαμερίσεων

$$P_n = \{a,\ a + \frac{b-a}{n},\ a + \frac{2(b-a)}{n}, \cdots,\ a + \frac{n(b-a)}{n} = b\}.$$

Έχουμε ότι $\|P_n\| = \frac{b-a}{n} \to 0$. Σχηματίζουμε το άθροισμα *Riemann* με ενδιάμεσα σημεία τα δεξιά άκρα των τμημάτων της P_n

$$S(P_n, f, \Xi) = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\|P_n\|.$$

Άρα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} S(P_n, f, \Xi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\|P_n\| = \int_a^b f(x)dx.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.7

Απόδειξη: Σύμφωνα με τη σχέση $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$. και για $a = 0$, $b = 1$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}).$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.8

Απόδειξη: Η ακολουθία a_n γράφεται

$$a_n = \frac{1}{n}\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\}.$$

Αυτή η ακολουθία προκύπτει από τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x+1}$ για $x = \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n}{n}$. Για $n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{n}{n} \to 1$. Θεωρούμε το διάστημα $[0,1]$ στο οποίο η f είναι ολοκληρώσιμη επειδή είναι συνεχής. Παίρνουμε την ακολουθία διαμερίσεων $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n} = 1\}$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\}\} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.9

Απόδειξη: Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$. Θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_n = \{x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h, \cdots, x_n = nh = 1\},$$

όπου $h = \frac{1}{n}$. Παίρνοντας ενδιάμεσα σημεία τα $\xi = \{0, h, 2h, \cdots, (n-1)h\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x dx &= \lim_{n\to\infty}\left(h\sum_{k=0}^{n-1} f(kh)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(he^0\sum_{k=0}^{n-1} e^{h^k}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(h\frac{e^{h^n}-1}{e^h-1}\right) = (e-1)\lim_{n\to\infty}\frac{h}{e^h-1} = (e-1). \end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.10

Απόδειξη: Έστω C με $0 < C < f(c)$. Τότε επειδή η f είναι συνεχής υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [c-\delta, c+\delta] \cap [a,b]$ να ισχύει $f(c) > C$. Επομένως

$$\int_a^b f(x)dx > 0 = \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \geq 0 + 2\delta C + 0 > 0.$$

Αν $c = a$ (αντίστοιχα $c = b$) παίρνουμε το διάστημα $[a, a+\delta]$ (αντίστοιχα $[b-\delta, b]$). $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.11

Απόδειξη:
α) Έχουμε

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

β) Έχουμε

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{0}{4} = \frac{1}{4}$$

γ) Έχουμε

$$\int_0^\pi \cos(x)dx = \sin(x)|_0^\pi = \sin(\pi) - \sin(0) = 1 - 0 = 1.$$

δ) Έχουμε

$$\int_{-1}^1 (2x^2 - x^3)dx = 2\int_{-1}^1 x^2 dx - \int_{-1}^1 x^3 dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 - \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^1 = 2(\frac{1}{3} - \frac{-1}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = \frac{4}{3}$$

ε)Έχουμε

$$\int_2^3 e^{-x/2}dx = -2e^{-x/2}|_2^3 = -2(e^{-3/2} - e^{-1}) = \frac{2}{e}(1 - e^{-1/2}).$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.12

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Θέτουμε $f(x) = x + \pi$ και $g(x) = \sin(x)$ για $x \in [0, \pi]$. Έχουμε ότι η f είναι συνεχής και η g σταθερού προσήμου αφού $g(x) \geq 0$ στο $[0, \pi]$. Συνεπώς από το πρώτο θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^{\pi} (x + \pi) \sin(x) dx = (\xi + \pi) \int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.13

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής θέτοντας $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \sin(x)$ για $x \in [a, b]$. Έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιες ώστε

$$\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{a} \int_a^{\xi} \sin(x) dx + \frac{1}{\beta} \int_{\xi}^b \sin(x) dx.$$

Επειδή $\int_a^{\xi} \sin(x)dx = \cos(a) - \cos(\xi)$, $\int_{\xi}^b \sin(x)dx = \cos(\xi) - \cos(b)$ και $|\int_a^{\xi} \sin(x)dx| \leq 2$, $|\int_{\xi}^b \sin(x)dx| \leq 2$, έχουμε

$$|\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx| \leq \frac{2}{b} + \frac{2}{a} \leq \frac{2}{a} + \frac{2}{a} = \frac{4}{a}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.14

Απόδειξη: Βρίσκουμε τα σημεία τομής, λύνοντας την εξίσωση $f(x) = g(x)$ δηλαδή $x^3 - x^2 - x + 1 = x + 1$. Αυτά είναι τα σημεία $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$. Έχουμε ότι $g(x) \leq f(x)$ για $-1 \leq x \leq 0$ και $f(x) \leq g(x)$ για $0 \leq x \leq 2$. Άρα

$$E = \int_{-1}^{2} |f(x)-g(x)|dx = \int_{-1}^{0} [(x^3-x^2-x+1)-(x+1)]dx + \int_{0}^{2} [(x+2)-(x^3-x^2-x+1)]dx = \frac{37}{12}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.15

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 198 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin(x)}dx$.

$$E = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\sin(x))}dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos(x+\frac{\pi}{2}})dx,$$

για $t = x + \frac{\pi}{2}$ έχουμε

$$E = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{1+\cos(2t)}dt = 2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} |\cos(t)|dt = 2\sqrt{2}[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(t)dt] = 4\sqrt{(2)}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.16

Απόδειξη: Βρίσκουμε τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2$, και της ευθείας $x + y = 2$, δηλαδή λύνουμε την εξίσωση $x^2 = 2 - x$ και $x = 1$ ή $x = 4$. Τα σημεία τομής είναι τα $(1, 1)$ και $(4, 2)$. Στο διάστημα $0 \le x \le 1$ έχουμε ως άνω και κάτω καμπύλη τη παραβολή ενώ στο διάστημα $1 \le x \le 4$ έχουμε ως άνω καμπύλη την ευθεία και κάτω τη παραβολή. Άρα

$$E = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]dx + \int_1^4 [(2 - x) - (-\sqrt{x})]dx = \frac{9}{2}.$$

Εναλλακτικά μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς y και

$$E = \int_{-2}^{1} [(2 - y) - y^2]dy = \frac{9}{2}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.17

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Για $0 \leq \vartheta \leq \pi$ οι καμπύλες τέμνονται στον πόλο και στο σημείο $(3, \frac{2\pi}{3})$. Παρατηρούμε ότι το σημείο $(3, \frac{2\pi}{3})$ έχει τις ίδιες συντεταγμένες και στην καρδιοειδή και στον κύκλο, ενώ ο πόλος έχει συντεταγμένες $(0,0)$ στην καρδιοειδή και $(0, \frac{\pi}{2})$ στον κύκλο. Άρα

$$
\begin{aligned}
E &= 2\left[\int_0^{\frac{2\pi}{3}} (2-2\cos(\vartheta))^2 d\vartheta - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} (-6\cos(\vartheta))^2 d\vartheta\right] \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (6 - 8\cos(\vartheta) + 2\cos(2\vartheta))d\vartheta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} (1+\cos(2\vartheta))d\vartheta \\
&= [6\vartheta - 8\sin(\vartheta) + \sin(2\vartheta)]_0^{2\pi/3} - 18[\vartheta + \frac{\sin(2\vartheta)}{2}]_{\pi/2}^{2\pi/3} = \pi.
\end{aligned}
$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.18

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 201 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Εκφράζουμε την εξίσωση της παραβολής $y = x^2$ σε παραμετρική μορφή $x = t^2$, $y = 2t$, $t \in [0, 1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + 4}dt = 2\int \sqrt{t^2 + 1}dt \\ &= 2[\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln|t + \sqrt{t^2+1}|]_0^1 = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.19

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t) - \sin(2t))^2 + (\cos(t) + \cos(2t))^2}dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1+\cos(t))}dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(\frac{t}{2})}dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} |\cos(\frac{t}{2})|dt = 2\int_0^{\pi} \cos(\frac{t}{2})dt - 2\int_{\pi}^{2\pi} \cos(\frac{t}{2})dt = 8 \end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.20

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$. και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_1^4 (2x^3 - 5x)dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{3i}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[2\left(1 + \frac{3i}{n}\right)^3 - 5\left(1 + \frac{3i}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[-3 + 3\frac{i}{n} + 54\frac{i^2}{n^2} + 54\frac{i^3}{n^3}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} (-3) + \frac{9}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{162}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{162}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{3}{n}(-3)n + \frac{9}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{162}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{162}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{-9 + \frac{9}{2}1(1 + \frac{1}{n}) + 27(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n}) + \frac{81}{2}(1 + \frac{1}{n})^2\right\} \\
&= -9 + \frac{9}{2} + 27 \cdot 2 + \frac{81}{2} = 90
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.21

Απόδειξη: Θέτουμε $u = 3x + 4$ και $du = 3dx$. Επίσης για $x = 0$, $u = 4$ και για $x = 4$, $u = 16$.

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{3x+4}dx &= \frac{1}{3}\int_4^1 6\sqrt{u}du = \frac{1}{3}\frac{2}{3}[u^{3/2}]_4^1 6 \\ &= \frac{2}{9}(16^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{112}{9}.\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.22

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 205 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Το σημείο τομής των καμπυλών $y = \sin(x)$ και $y = \cos(x)$ στο $[0, \pi/2]$ είναι το $pi/4, \sqrt(2)/2$. Παρατηρούμε ότι $\cos(x) \geq \sin(x)$ για $0 \leq x \leq \pi/4$ και $\cos(x) \leq \sin(x)$ για $\pi/4 \leq x \leq \pi/2$. Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^{\pi/2} |\cos(x) - \sin(x)| dx \\
&= \int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x)) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin(x) - \cos(x)) dx \\
&= [\sin(x) + \cos(x)]_0^{\pi/4} + [-\cos(x) - \sin(x)]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1) + (-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2} - 2.
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.23

Απόδειξη: Έχουμε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας από περιστροφή δίνεται από τη σχέση $E = 2\pi \int_l^m |f(t)| \sqrt{f(t)^2 + g'(t)^2} dt$ για μια καμπύλη με $x = f(t)$, $y = g(t)$, $l \leq t \leq m$. Άρα θέτοντας $e = \frac{a^2-b^2}{a^2} < 1$ και $e\cos(t) = u$ έχουμε

$$\begin{aligned} E &= 2\pi ab \int_0^{\pi} \sin(\sqrt{1-e^2\cos^2(t)})dt = 2\pi \frac{ab}{e} \int_{-e}^{e} \sqrt{1-u^2} du \\ &= 2\pi ab\left[\frac{\arcsin(e)}{e} + \sqrt{1-e^2}\right]. \end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.24

Απόδειξη: Έχουμε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας από περιστροφή δίνεται από τη σχέση $E = 2\pi \int_l^m |f(t)| \sqrt{f(t)^2 + g'(t)^2} dt$ για μια καμπύλη με $x = f(t)$, $y = g(t)$, $l \le t \le m$. Άρα

$$\begin{aligned} E &= 2\pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos(t)) \sqrt{2(1-\cos(t))} dt \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos(t)) \sin(\frac{t}{2}) dt = \frac{64}{3}\pi a^2. \end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.25

Απόδειξη: Έχουμε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας από περιστροφή δίνεται από τη σχέση $E = 2\pi \int_l^m |f(t)| \sqrt{f(t)^2 + g'(t)^2} dt$ για μια καμπύλη με $x = f(t)$, $y = g(t)$, $l \leq t \leq m$. Για να προσδιορίσουμε σε αυτή την περίπτωση τα l, m πρέπει να βρούμε τα σημεία τομής της καμπύλης με τον x άξονα. Θέτουμε $y = 0$ οπότε $t = 0$ ή $t = \pm\sqrt{3}$. Τότε $x = 0$ ή $x = 3$. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη τέμνει τον x- άξονα στα σημεία $(0, 0)$ και $(3, 0)$. Επίσης η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον x - άξονα. Άρα

$$\begin{aligned} E &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} |y(t)| \sqrt{x'(t) + y'(t)} dt \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} -\frac{t}{3}(t^2 - 3) \sqrt{(4t^2 + (t^2 - 1)^2)} dt \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} -\frac{t}{3}(t^2 - 3)(1 + t^2) dt = 3\pi. \end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.26

Απόδειξη: Έχουμε ότι ο όγκος που ορίζεται από περιστροφή δύο συνεχών συναρτήσεων $f, g, f(x) \geq g(x) \geq 0,\ x \in [a, b]$ είναι $V = \pi \int_a^b \{f(x^2) - g(x)^2\} dx$. Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \{(x+2)^2 - x^4\} dx = \frac{72\pi}{5}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.27

Απόδειξη: Έχουμε ότι ο όγκος που ορίζεται από περιστροφή του γραφήματος μιας συνάρτησης f, για $x \in [a, b]$ είναι $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$. Άρα

$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.28

Απόδειξη: Έχουμε ότι ο όγκος που ορίζεται από περιστροφή του γραφήματος μιας συνάρτησης $x = g(t)$, $y = f(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ είναι $V = \pi \int_{t_1}^{t_2} f(t)^2 g'(t)dt$. Έχουμε

$$V = 2\pi \int_0^a y^2 dx$$

Όμως $x(t_1) = 0$ και $t = \frac{\pi}{2}$ ενώ $x(t_2) = a$ και $t = 0$ άρα

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = 2\pi \int_{\pi/2}^{0} a^2 \sin^6(t)(-3a\cos^2(t)\sin(t)) \\ &= 6\pi a^3 [\int_0^{\pi/2} \sin^7(t)dt - \int_0^{\pi/2} \sin^9(t)dt] \\ &= 6\pi a^3 \left(\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3} + \frac{8}{9}\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{105}\pi a^3. \end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.29

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 212 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Διαιρούμε το διάστημα $[0, 1]$ σε 10 ίσα μέρη. Τότε $x_i = \frac{i}{10}$, για $i = 1, \cdots, 10$ και βρίσκουμε : $f(0) = 1$, $f(x_1) = 1.00005$, $f(x_2) = 1.00080$, $f(x_3) = 1.00404$, $f(x_4) = 1.01272$, $f(x_5) = 1.03078$, $f(x_6) = 1.026283$, $f(x_7) = 1.11360$, $f(x_8) = 1.18727$, $f(x_9) = 1.28690$, $f(x_10) = 1.41421$. Έτσι

$$T_{10} = \frac{1}{20}[f(0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(9) + f(1)] = 1.09061$$

. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.30

Απόδειξη: Διαιρούμε το διάστημα $[0,1]$ σε 10 ίσα μέρη. Τότε $x_i = \frac{i}{10}$, για $i = 1, \cdots, 10$ και βρίσκουμε : $f(0) = 1$, $f(x_1) = 1.00005$, $f(x_2) = 1.00080$, $f(x_3) = 1.00404$, $f(x_4) = 1.01272$, $f(x_5) = 1.03078$, $f(x_6) = 1.026283$, $f(x_7) = 1.11360$, $f(x_8) = 1.18727$, $f(x_9) = 1.28690$, $f(x_10) = 1.41421$. Έτσι

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{30}[f(0) + \{f(\frac{1}{10}) + f(\frac{3}{10}) + f(\frac{5}{10}) + f(\frac{7}{10}) + f(\frac{9}{10})\} \\ &\quad + \{f(\frac{2}{10}) + f(\frac{4}{10}) + f(\frac{6}{10}) + f(\frac{8}{10})\} + f(1)] \\ &= \frac{32.68473}{30} = 1.08949. \end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.31

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $\frac{n}{n+3} < 1$ άρα $\frac{n}{2^n(n+3)} < \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Η σειρά όμως $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει στο 1, επειδή είναι γεωμετρική με λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$ και συγκλίνει στο $\frac{\lambda}{1-\lambda} = 1$. Συνεπώς από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+3)}$ συγκλίνει.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.1

Απόδειξη: Έχουμε ότι $a_n = \frac{3^n}{n!} \neq 0$ και

$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0.$ Επομένως από το κριτήριο λόγου η σειρά συγκλίνει. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.2

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ έπεται από το κριτήριο σύγκρισης ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.3

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)^p x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^p x^n}{n!}}\right| = |x|\left(\frac{n+1}{n}\right)^p \frac{1}{n+1} \to 0 < 1 \text{ για } n \to \infty, \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ και } p \in \mathbb{Z}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.4

Απόδειξη: Ξέρουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ συγκλίνει αν $k > 1$ και αποκλίνει αν $k \leq 1$. Έχουμε $\frac{\sqrt{n}+2}{n^3} = \frac{\sqrt{n}}{n^3} + 2\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^{5/2}} + 2\frac{1}{n^3}$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Επειδή $\frac{5}{2} > 1$ και $3 > 1$ έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n^3}$ είναι συγκλίνουσα.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.5

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου. Θέτουμε $a_n = \frac{3^n}{n^{10}}$, $a_n \neq 0 \ \forall \in \mathbb{N}$.

$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^{10}}}{\frac{3^n}{n^{10}}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^{10}}{(n+1)^{10}} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{(n+1)^{10}} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{n+1}{n})^{10}} =$
$3\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{10}} = 3 > 1.$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{10}}$ αποκλίνει. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.6

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 220 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας. Θέτω $a_n = \frac{n}{5^{n/2}} \geq 0$ άρα $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{5^{n/2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$. Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^{n/2}}$ συγκλίνει. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.7

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου. Θέτω $a_n = \frac{9^n}{n!} \neq 0$ άρα $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{\frac{9^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{9^n}{n!}}| = |\frac{9^{n+1}n!}{9^n(n+1)!}| = |\frac{9}{n+1}| = \frac{9}{n+1} \to 0$ καθώς $n \to \mathbb{N}$. Επομένως από το κριτήριο λόγου η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n!}$ συγκλίνει. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.8

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 222 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας. Θέτω $a_n = \frac{n^n}{(3n+1)^n}$ άρα $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt[n]{(3n+1)^n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{|n|}{|3n+1|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{3n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$. Άρα από το κριτήριο ρίζας έπεται ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(3n+1)^n}$ συγκλίνει.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.9

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 223 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας. Θέτουμε $a_n = \frac{1+\cos^2(nx)}{2^n}$ άρα $|a_n|^{\frac{1}{n}} = a_n^{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt[n]{1+\cos^2(nx)}}{2}$. Ισχύει ότι $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{2}\sqrt[n]{2}$, επειδή η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $\sqrt[n]{1+\cos^2(nx)}$ είναι $\sqrt[n]{2}$. Από το θεώρημα για τις ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες έχουμε $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{2}$. Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos^2(nx)}{2^n}$ συγκλίνει.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.10

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 224 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$ και θέτουμε $a_n = \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Έχουμε $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ και $|a_n| = a_n$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας.

$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n!)^n}}{\sqrt[n]{n^{nn}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|n!|}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = p \in \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $0 \le p < 1$ διότι τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $a_n = \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} \to 0$ για $n \to \infty$.

Συνεπώς πρέπει $p = 0$ ή ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = p = 0$.

Θεωρούμε $b_n = \frac{n!}{n^n}$. Αρκεί η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ να συγκλίνει οπότε $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου. Ισχύει $b_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\right| = \left|\frac{n^n (n+1) n!}{(n+1)^{n+1} n!}\right| = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} < 1$ για $n \to \infty$. Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0$.

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.11

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 225 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$, για την οποία έχουμε

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-(\frac{1}{2})^n} \to \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ για } n \to \infty,$$

ως άθροισμα n όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο $\frac{1}{2}$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$. Επίσης $0 \leq \frac{1}{1+2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Επομένως από το θεώρημα σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^{n-1}}$ συγκλίνει.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.12

Απόδειξη: Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, (αρμονική σειρά) για την οποία γνωρίζουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Ισχύει ότι $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{2^{n-1}}{n}$ και από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n}$ αποκλίνει.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.13

Απόδειξη: Θεωρούμε τις ακολουθίες $b_n = \frac{1}{2n-1}$ και $a_n = \frac{1}{n}$. Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει. Εφαρμόζουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} (2 - \frac{1}{n}) = 2.$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ αποκλίνει.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.14

Απόδειξη: Για $a \leq 0$ η σειρά συγκλίνει στο $+\infty$ γιατί είναι θετικών όρων και $\frac{1}{n^a} \to\neq 0$. Ενώ για $a = 1$ η σειρά είναι αρμονική και συγκλίνει στο $+\infty$. Για $a > 0$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^a}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και για $a \neq 1$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} \int_1^n t^{-a} dt = \lim_{n\to\infty} [\frac{1}{1-a} n^{1-a} - \frac{1}{1-a}] = \begin{cases} \infty & a < 1 \\ \frac{1}{1-a} & a > 1 \end{cases}$$

Επομένως σύμφωνα με το ολοκληρωτικό κριτήριο, η σειρά συγκλίνει μόνον, όταν $a > 1$. Από την απόδειξη του κριτηρίου προκύπτει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \leq \frac{1}{a-1} + 1 = \frac{a}{a-1}$.

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.15

Απόδειξη: θέτουμε $a_n = \frac{n}{2^n}$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|\frac{n}{2^n}|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \to \frac{1}{2} \text{ για } n \to \infty.$$

Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ συγκλίνει. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.16

Απόδειξη: θέτουμε $a_n = \frac{n^n}{n!} \neq 0$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου.

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}| = |\frac{n!(n+1)^{n+1}}{n!(n+1)n^n}| = |\frac{(n+1)^n}{n^n}| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1,$$

για $n \to \infty$. Επομένως η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ αποκλίνει.

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.17

Απόδειξη: θέτουμε $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας.

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = a_n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to e > 1,$$

για $n \to \infty$. Επομένως η $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ αποκλίνει.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.18

Απόδειξη: Έχουμε $3^n \geq 2^n \Leftrightarrow \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{2^n}$. Προσθέτουμε $\frac{1}{2^n}$ και στα δυο μέλη και έχουμε $0 \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \leq \frac{2}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Χρησιμοποιούμε το κριτήριο ρίζας για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n}$.

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2}{2^n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{2} \to \frac{1}{2} < 1 \text{ για } n \to \infty.$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ συγκλίνει. Επίσης

$$S_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} + \frac{1}{3}\frac{(\frac{1}{3})^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} \to \frac{3}{2} \text{ για } n \to \infty.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.19

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}$ συγκλίνει. Θέτουμε $a_n = \frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)} \neq 0$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}}{\frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}} = \frac{n+1}{n(2n+1)} \to 0 \text{ για } n \to \infty.$$

Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}$ συγκλίνει και $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)} = 0$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.20

Απόδειξη: Έχουμε $0 \leq a_n \leq 9$ η $0 \leq \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$.
Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 9\frac{1}{9} = 1$, επειδή είναι γεωμετρική με λόγο $\lambda = \frac{1}{10} < 1$. Από το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ συγκλίνει και μάλιστα σε έναν αριθμό που ανήκει στο $[0, 1]$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.21

Απόδειξη: Θέτουμε $a_n = \frac{5^n}{7^n n^{\frac{3}{2}}} \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ και εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{5^{n+1}}{7^{n+1}(n+1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{5^n}{7^n(n)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{5^{n+1}7^n n^{\frac{3}{2}}}{5^n 7^{n+1}(n+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5n^{\frac{3}{2}}}{7(n+1)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{5}{7}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{7}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{7}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{3}{2}} \to \frac{5}{7} < 1 \text{ για } n \to \infty.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.22

Απόδειξη: Θέτουμε $a_n = \sin(\frac{1}{n})$. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και θέτουμε $b_n = \frac{1}{n}$. Εφαρμόζουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης. Έχουμε $b_n > 0$, a_n $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \to 1 > 0$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ αποκλίνει έχουμε από το κριτήριο σύγκρισης ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$ αποκλίνει.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.23

Απόδειξη: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^a}$, για $a > 0$ και $x \in [2, +\infty)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ολοκληρωτικού κριτηρίου. Εξάλλου για $a \neq 1$ ισχύει

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F(n) &= \lim_{n\to\infty}\int_2^n \frac{1}{t(\ln(t))^a}dt = \frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}[\ln(n)^{1-a} - \ln(2)^{1-a}] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a-1}(\ln(2))^{1-a}, & a > 1 \\ +\infty, & a < 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Για $a = 1$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty}[\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))] = +\infty$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.24

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 238 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{2n^3+n-1}$ είναι εναλλάσσουσα. Θεωρούμε την $a_n = \frac{n^2+1}{2n^3+n-1}$. Η a_n είναι φθίνουσα και $a_n \to 0$ για $n \to \infty$. Συνεπώς η σειρά συγκλίνει. Στη συνέχεια παίρνουμε τη σειρά των απόλυτων όρων, δηλαδή τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2n^3+n-1}$. Συγκρίνουμε αυτή τη σειρά με την αρμονική και παρατηρούμε ότι

$$\frac{n^2+1}{2n^3+n-1} \geq \frac{n^2}{2n^3+n-1} \geq \frac{2n^2}{2n^3+2n^3+2n^3} = \frac{1}{4n}.$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2n^3+n-1}$ αποκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{2n^3+n-1}$ συγκλίνει κατά συνθήκη. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.25

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ είναι εναλλάσσουσα. Θεωρούμε την $a_n = \frac{1}{2^n}$. Η $a_n = \frac{1}{2^n}$ είναι φθίνουσα και $a_n \to 0$ για $n \to \infty$. Συνεπώς η σειρά συγκλίνει. Στη συνέχεια παίρνουμε τη σειρά των απόλυτων όρων, δηλαδή τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Αυτή είναι η γεωμετρική σειρά και ο λόγος δύο διαδοχικών όρων της είναι $r = 1/2 < 1$ άρα η σειρά συγκλίνει απόλυτα. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.26

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$, τότε $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k}$. Έχουμε $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Τώρα όσων αφορά την ακολουθία $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k}$ έχουμε

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} (-\frac{1}{2})^k = -\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})^2 + \cdots + (-\frac{1}{2})^n \\ &= -\frac{1}{2}[1 + (-\frac{1}{2}) + \cdots + (-\frac{1}{2})^{n-1}] = -\frac{1}{2}\frac{(-\frac{1}{2})^n - 1}{-\frac{1}{2} - 1}. \end{aligned}$$

Άρα $T_n = \frac{(-\frac{1}{2})-1}{3}$, και $\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$
Επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.27

Απόδειξη: Η εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει αφού $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(1) = 0$, και είναι φθίνουσα $\frac{1}{n} > \ln(\frac{n+1}{n}) > \frac{1}{n+1}$. (Το άθροισμα της c ονομάζεται σταθερά *Euler*, $c = 0.577215$).

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.28

Απόδειξη: Για $s > a$ και για $k \neq 1$ έχουμε

$$\lim_{s\to\infty}\int_a^s \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{1-k}\lim_{s\to\infty}[s^{1-k} - a^{1-k}] = \begin{cases} \frac{1}{1-k}a^{1-k} & k > 1 \\ +\infty & k < 1. \end{cases}$$

Άρα το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $k > 1$ και αποκλίνει για $k < 1$.
Για $k = 1$ το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει γιατί

$$\lim_{s\to\infty}\int_a^s \frac{dx}{x} = \lim_{s\to\infty}[\ln(s) - \ln(a)] = +\infty.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.1

Απόδειξη: Έχουμε

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\lim_{t\to-\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.2

Απόδειξη: Έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{s\to\infty} \int_{0}^{s} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= -\lim_{t\to-\infty} \arctan(t) + -\lim_{s\to\infty} \arctan(s) = -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.3

Απόδειξη: α) Έχουμε

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \lim_{t\to\infty}[\sqrt{1+t^2}-\sqrt{2}] = +\infty.$$

Άρα το ολοκλήρωμα αυτό δεν συγκλίνει.

β) Έχουμε

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \cos(t) = \lim_{t\to\infty}\sin(t).$$

Το όριο $\lim_{t\to\infty}\sin(t)$ δεν υπάρχει. Άρα το ολοκλήρωμα αυτό δεν συγκλίνει.

γ) Έχουμε

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}[1-e^{-t}] = 1.$$

Άρα το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει.

δ) Έχουμε

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\ln(x)}{x}dx = \lim_{t\to\infty}(\frac{1}{2}\ln(t)^2) = +\infty.$$

Άρα το ολοκλήρωμα αυτό δεν συγκλίνει.

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.4

Απόδειξη: Έχουμε ότι η συνάρτηση e^{-x^2} είναι συνεχής στο $[0, +\infty]$. Το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ συγκλίνει αφού για κάθε $t \in [1, +\infty]$ έχουμε $e^{-t^2} < e^{-t}$ και $F(t) = \int_1^t e^{-x^2} dx \leq \int_1^t e^{-x} dx$ όμως το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ συγκλίνει γιατί

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty} [1 - e^{-t}] = 1.$$

Άρα και το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ συγκλίνει. Επομένως επειδή

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

και το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ συγκλίνει.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.5

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έχουμε ότι $\frac{|\sin(x)|}{x^a} \leq \frac{1}{x^a}$ και $\frac{|\cos(x)|}{x^a} \leq \frac{1}{x^a}$ για $x \in [a, b]$. Όμως το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx$ συγκλίνει για $a > 1$ και άρα τα ολοκληρώματα $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^a} dx$ και $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^a} dx$ συγκλίνουν απολύτως για $a > 1$.

Επίσης για $t > 1$ έχουμε

$$\int_1^t \frac{\sin(x)}{x^a} dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x^a}\right]_1^t - a \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^{1+a}} dx.$$

Το ολοκλήρωμα $\int_1^t \frac{\cos(x)}{x^{1+a}} dx$ συγκλίνει για $1 + a > 1$ ή $a > 0$ παίρνουμε

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^a} dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{\cos(x)}{x^a}\right]_1^t - a \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^{1+a}} dx = \cos(1) - a \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^{1+a}}.$$

Επομένως για $a > 0$ τα ολοκληρώματα συγκλίνουν.

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.6

Απόδειξη: Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_3^t \frac{dx}{x^2+x-2}$, $t > 3$ και έχουμε

$$\int_3^t \frac{dx}{x^2+x-2} = -\frac{1}{3}\int_3^t \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3}\int_3^t \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{3}\ln(\frac{5}{2}\frac{t-1}{t+2}).$$

Παίρνουμε το όριο για $t \to \infty$ και έχουμε

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\ln(\frac{5}{2}).$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.7

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 249 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)}dx &= -\int_1^{\infty} \sqrt{x} d\frac{1}{(1+x^2)} \\
&= -\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x} - \frac{1}{2}\right) + \int_1^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{2tdt}{t(1+t^2)} \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x\to\infty}(\arctan\sqrt{(x)} - \frac{\pi}{4}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.8

Απόδειξη: Σύμφωνα με το κριτήριο *Cauchy* για $a < x_1 < x_2$ έχουμε

$$\int_{x_1}^{x^2} \frac{\sin(x)}{x} dx = -\int_{x_1}^{x^2} \frac{1}{x} d\cos(x) = \frac{\cos(x_1)}{x_1} - \frac{\cos(x_2)}{x_2} - \int_{x_1}^{x^2} \frac{\cos(x)}{x^2} dx.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \left|\int_{x_1}^{x^2} \frac{\sin(x)}{x} dx\right| &\leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \left|\int_{x_1}^{x^2} \frac{\cos(x)}{x^2} dx\right| \\ &\leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \int_{x_1}^{x^2} \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{x_1} < . \qquad (4.4) \end{aligned}$$

Άρα μπορούμε να διαλέξουμε $\delta = \frac{2}{}$ και από το κριτήριο *Cauchy* το ολοκλήρωμα $\int_a^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ συγκλίνει.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.9

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 251 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Θέτουμε $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$ και έχουμε

$$0 < f(x) = \frac{1}{1+x^4} < \frac{1}{x^4} = g(x),$$

για $x \in [a, +\infty]$. Το ολοκλήρωμα όμως $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$ συγκλίνει (έχουμε $p = 4 > 1$) και από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και το ολοκλήρωμα $\int_a^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ συγκλίνει. □

Πίσω στην Άσκηση 4.2.10

Απόδειξη: Θέτουμε $f(x) = \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}}$ και έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}} > \frac{1}{1+x} = g(x),$$

για $x \in [0, +\infty]$. Το ολοκλήρωμα όμως $\int_a^\infty \frac{1}{1+x}dx = +\infty$ και από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και το ολοκλήρωμα $\int_a^\infty \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}}dx = +\infty$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.11

Απόδειξη: Θέτουμε $f(x) = \frac{x^2}{2x^4-x^2+1}$ και διαλέγουμε $g(x) = \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$ (παίρνουμε από την f τις μεγαλύτερες δυνάμεις του αριθμητή και του παρανομαστή). Επειδή $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$ και $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < +\infty$ άρα από το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι $\int_0^\infty \frac{x^2}{2x^4-x^2+1}dx < +\infty$
$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.12

Απόδειξη: Σύμφωνα με το κριτήριο *Cauchy* θέλουμε $\delta > 0$ έτσι ώστε για $x_1, x_2 > \delta$ να έχουμε $|\int_{x_1}^{x_2} x\sin(x^4)dx| <$ για κάθε > 0. Έχουμε $\int_0^{\infty} x\sin(x^4)dx = \int_0^1 x\sin(x^4)dx + \int_1^{\infty} x\sin(x^4)dx$ και

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} x\sin(x^4)dx &= \frac{1}{4}\int_{x_1^4}^{x_2^4} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt \\
&= -\frac{1}{4}\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\Big|_{x_1^4}^{x_2^4} - \frac{1}{8}\int_{x_1^4}^{x_2^4} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}dt \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{\cos(x_2^2)}{x_2^2} - \frac{\cos(x_1^2)}{x_1^2}\right] - \frac{1}{8}\int_{x_1^4}^{x_2^4} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}dt.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_1}^{x_2} x\sin(x^4)dx\right| &\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1^2}\right) + \frac{1}{8}\int_{x_1^4}^{x_2^4} \frac{dt}{t^{3/2}} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2}\right) = \frac{1}{2x_1^2} < . \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Διαλέγοντας $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ από το κριτήριο *Cauchy* συμπεραίνουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} x\sin(x^4)dx$, συγκλίνει.

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.13

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 255 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Η συνάρτηση $\frac{1}{(x-a)^k}$ είναι συνεχής και δεν είναι φραγμένη στο $(a, b]$. Για $a < t < b$ και $k \neq 1$ έχουμε

$$\int_t^b \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{1-k}\left[\frac{1}{(b-a)^{k-1}} - \frac{1}{(t-a)^{k-1}}\right],$$

οπότε

$$\lim_{t\to a}\int_t^b \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \frac{1}{1-k}(b-a)^{1-k} & k < 1 \\ +\infty & k > 1. \end{cases}$$

Άρα το ολοκλήρωμα $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$ συγκλίνει για $k < 1$ και αποκλίνει $k > 1$. Για $k = 1$ έχουμε $\lim_{t\to a}\int_t^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{t\to a}[\ln|b-a| - \ln|t-a|] = -\infty$, δηλαδή αποκλίνει.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.14

Αόριστο Ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Ολοκλήρωμα Riemann
Ασκήσεις
Σειρές
Ασκήσεις
Γενικευμένα ολοκληρώματα
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 256 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι συγκλίνουν τα ολοκληρώματα $\int_a^c \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $\int_c^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$. Αυτό πράγματι ισχύει αφού

$$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)^{1/2}}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{\sqrt{(b-a)}},$$

και

$$\lim_{x\to b} \frac{(b-x)^{1/2}}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{\sqrt{(b-a)}}.$$

Επίσης αν θέσουμε $x = a\cos^2(t) + b\sin^2(t)$ έχουμε

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\int_0^{\pi/2} dt = \pi.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.15

Απόδειξη: Θέτουμε $x = \frac{1}{t}$ και έχουμε

$$\int_0^1 \sin(\frac{1}{x})dx = \int_l^\infty \frac{\sin(t)}{t^2}dt.$$

Το ολοκλήρωμα $\int_l^\infty \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ συγκλίνει απόλυτα αφού

$$|\int_l^\infty \frac{\sin(t)}{t^2}dt| \leq \int_l^\infty \frac{1}{t^2}dt < +\infty.$$

Επομένως το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sin(\frac{1}{x})dx$ συγκλίνει.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.16

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\sin^p(x)} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p(x)} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sin^p(x)}.$$

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \pi - t$ έχουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sin^p(x)}$ είναι το ίδιο με το $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p(x)}$. Επίσης $\lim_{x\to 0+} x^p \frac{1}{\sin^p(x)} = 1$ και από αυτό συμπεραίνουμε,από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $0 < p < 1$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.17

Απόδειξη: Θέτουμε

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις α) $x \geq 1$ β)$x < 1$ και έχουμε

α) $x \geq 1$: Σε αυτή τη περίπτωση το ολοκλήρωμα $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ είναι ορισμένο και όσων αφορά το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ εφαρμόζουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης και έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0,$$

και $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}dt < \infty$. Επομένως και το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ συγκλίνει και άρα και η $\Gamma(x)$ για $x \geq 1$

β) $x > 1$: Σε αυτή τη περίπτωση το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ συγκλίνει όπως και στη περίπτωση α). Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα Β′ είδους. Θέτουμε $t = \frac{1}{s}$ και έχουμε

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt = \int_1^{+\infty} t^{-s-1}e^{-1/s}ds.$$

Επειδή όμως

$$\lim_{s\to\infty} \frac{t^{-s-1}e^{-1/s}}{s^{-x-1}} = 1,$$

και $\int_1^{\infty} s^{-x-1}ds < \infty$ για $x > 0$ από το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και το ολοκλήρωμα $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ συγκλίνει και άρα και η $\Gamma(x)$ για $x > 1$.

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.18

Απόδειξη: Έχουμε

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^c t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt + \int_c^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

για $0 < c < 1$.
Επειδή έχουμε για $f(t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-x} f(t) = \lim_{t\to\infty}(1-t)^{y-1} = 1,$$

και

$$\lim_{t\to\infty}(1-t)^{1-y} f(t) = \lim_{t\to\infty} t^{x-1} = 1.$$

Επομένως από το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^c t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ συγκλίνει για $0 < 1-x < 1$ και το ολοκλήρωμα $\int_c^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ συγκλίνει για $0 < 1-y < 1$. Άρα το $B(x,y)$ συγκλίνει αν $0 < x < 1$ και $0 < y < 1$.

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.19

Απόδειξη: Έχουμε

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx + \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx.$$

Το ολοκλήρωμα $I_1 = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx$ είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα Β′ είδους ενώ το ολοκλήρωμα $I_2 = \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx$ είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα Α′ είδους. Όσων αφορά το I_1 έχουμε $| \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} | \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, για $x \in (0, 1]$. Όμως

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{k\to 0+} \int_k^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{k\to 0+} 2(1 - \sqrt{k}) = 2,$$

και άρα το ολοκλήρωμα I_1 συγκλίνει.
Επίσης για το ολοκλήρωμα I_2 έχουμε

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx < \infty.$$

Άρα το I_2 συγκλίνει.
Επομένως αφού τα I_1 και I_2 συγκλίνουν έχουμε ότι και το ολοκλήρωμα $I_1 + I_2 = \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx$ συγκλίνει.

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.20

Απόδειξη: Έχουμε

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to 1-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to 1-}[\arcsin(t)-\arcsin(0)] = \frac{\pi}{2}.$$

Άρα πράγματι το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ συγκλίνει. □

Πίσω στην Άσκηση 4.2.21

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου. Αν $x = 2$ τότε η σειρά συγκλίνει (είναι ίση με μηδέν). Θεωρούμε ότι $x \neq 2$ και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2+1}|(x-2)^n|.\frac{n^2+1}{n+1}\frac{1}{|x-2|^n} = |x-2|.$$

Επομένως η σειρά συγκλίνει απόλυτα και συνεπώς συγκλίνει αν $|x-2| < 1$ ή ισοδύναμα αν $1 < x < 3$ και αποκλίνει αν $x < 1$ ή $x > 3$. Πρέπει να διερευνήσουμε τη συμπεριφορά της σειράς για $x = 1$ ή $x = 3$. Για $x = 1$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}(-1)^n$, η οποία από το κριτήριο για τις εναλλάσσουσες σειρές (η ακολουθία $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ είναι φθίνουσα και μηδενική) έχουμε ότι η σειρά συγκλίνει. Αν $x = 3$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ η οποία αποκλίνει.
Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}(x-2)^n$ έχει διάστημα σύγκλισης το $[1, 3)$ και ακτίνα σύγκλισης $R = \frac{3-1}{2} = 1$.

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.22

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{2^{n+4}}|x^n|} = \frac{3}{2}|x|.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απόλυτα για $|x| < \frac{2}{3}$ ή για $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$ και αποκλίνει για $x > \frac{2}{3}$ ή για $x < -\frac{2}{3}$. Πρέπει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις όπου $x = -\frac{2}{3}$ και $x = \frac{2}{3}$.

Για $x = -\frac{2}{3}$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8}(-1)^n$. Αυτή είναι εναλλάσσουσα σειρά η οποία αποκλίνει.

Για $x = \frac{2}{3}$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8}$. Η σειρά αυτή επίσης αποκλίνει.

Επομένως η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+4}} x^n$ έχει διάστημα σύγκλισης το $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ και ακτίνα σύγκλισης $R = \frac{2}{3}$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.23

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0,$$

για $x \neq 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ για $x = 0$. Άρα η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει διάστημα σύγκλισης το $(-\infty, +\infty)$ και ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.24

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας για $x \neq 1$ και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n(x-1)^n} = \lim_{n\to\infty} n|x-1| = +\infty.$$

Αν $x = 1$ έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(x-1)^n = 0$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει. Επομένως η δυναμοσειρά έχει διάστημα σύγκλισης το $[1, 1]$ και ακτίνα σύγκλισης $R = 0$.

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.25

Απόδειξη: Θέτουμε $f_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ και έχουμε για $x \in [0, a]$ με $a < 1$,

$$|f_n(x)| = |(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}| = \frac{x^n}{n} \leq \frac{a^n}{n}.$$

Όμως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$ για $0 \leq a < 1$ συγκλίνει και από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (-1, 1)$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.26

Απόδειξη: Θέτουμε $f_n(x) = \frac{x^n \ln(x)}{n}$ και έχουμε για $x \in [0,1]$ ότι η σειρά συγκλίνει. Πράγματι για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε ότι $|f_n(x)| = -f_n(x)$ και η συνάρτηση $-f_n(x)$ έχει μέγιστο στο σημείο $x_m = \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$ και $-f_n(x_m) = \frac{1}{n^2 e}$ άρα

$$|f_n(x)| = -\frac{x^n \ln(x)}{n} \leq \frac{1}{n^2 e}.$$

Όμως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 e}$ συγκλίνει και από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά συγκλίνει για $x \in [0,1]$.

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.27

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n x^n} = \lim_{n\to\infty} a|x| = a|x|.$$

Επομένως για να συγκλίνει η σειρά πρέπει να έχουμε $a|x| < 1$ η $|x| < \frac{1}{a}$. Άρα η δυναμοσειρά έχει διάστημα σύγκλισης το $(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$ και ακτίνα σύγκλισης $R = \frac{1}{a}$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.28

Απόδειξη: Έστω η συνάρτηση $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Τότε έχουμε ότι $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$. Από τη υπόθεσή μας έχουμε

$$\begin{aligned} 2f(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} f(x) + e^{2x} f'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{2x})' f(x) + e^{2x} f'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow (e^{2x} f(x))' = 0 \Leftrightarrow e^{2x} f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = ce^{-2x}. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ άρα $e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!}$ και $f(x) = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n$. Επομένως

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c \frac{(-2)^n}{n!} \right) x^n.$$

Επομένως $a_n = c\frac{(-2)^n}{n!}$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.29

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 271 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έχουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ είναι R, δηλαδή η σειρά συγκλίνει για $|x| < R$. Επομένως για τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^2)^n$ συμπεραίνουμε ότι συγκλίνει για $|x^2| < R$ ή $|x| < \sqrt{R}$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ είναι $\sqrt{R}$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.30

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^a x^{n+1}}{n^a x^n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{(n+1)}{n})^a x = x.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της σειράς είναι $R = 1$. Για $x = -1$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} n^a(-1)^n$ η οποία για $a < 0$ συγκλίνει. Για $x = 1$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} n^a$ η οποία συγκλίνει για $a < -1$.
Επομένως για $a < -1$ το διάστημα σύγκλισης είναι $[-1, 1]$, για $-1 \leq a < 0$ το διάστημα σύγκλισης είναι $[-1, 1)$ και τέλος για $a \geq 0$ το διάστημα σύγκλισης είναι $(-1, 1)$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.31