Πανεπιστήμιο Αιγαίου
URL: http://www.aegean.gr

Ασκήσεις στη Μιγαδική Ανάλυση

Ευάγγελος Φελουζής
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
832 00 Καρλόβασι
Σάμος

Κεφάλαιο 1

Μιγαδικοί αριθμοί

1.1. Στοιχεία Θεωρίας

Το *επίπεδο των μιγαδικών αριθμών* ορίζεται σαν το σύνολο $\mathbb{C}$ όλων των διατεταγμένων ζευγαριών (x, y) όπου x, y είναι πραγματικοί αριθμοί με πράξεις την *πρόσθεση* και *πολλαπλασιασμό* που ορίζονται

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y)\,(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

Με τις προηγούμενες πράξεις το $\mathbb{C}$ αποτελεί ένα σώμα. Τα στοιχεία του $\mathbb{C}$ τα βλέπουμε γεωμετρικά σαν διανύσματα στο επίπεδο όπου το άθροισμα τους είναι το συνηθισμένο άθροισμα διανυσμάτων.

Αν θέσουμε $i = (0, 1)$ και ταυτίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς x με το $(x, 0)$ τότε ένας μιγαδικός αριθμός $z = (x, y)$ ταυτίζεται με τον $z = x + iy$ και $i^2 = -1$. Ο αριθμός

x λέγεται το *πραγματικό μέρος* του z και συμβολίζεται και με $\Re z$ και ο y το *φανταστικό μέρος* του z και συμβολίζεταιμε $\Im z$. Η *απόλυτη τιμή* ή *μέτρο* του $z = x + iy$ ορίζεται να είναι ο θετικός αριθμός

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Επίπεδο $\mathbb{C}$ αποτελεί πλήρη μετρικό χώρο (δηλαδή οι ακολουθίες Cauchy συγκλίνουν πάντοτε) όπου η *απόσταση* δύο μιγαδικών αριθμών z, z' ορίζεται σαν

$$d(z, z') = |z - z'|.$$

Μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο μιγαδικό αριθμό w αν η ακολουθία των αποστάσεων τους $|z_n - w|$ συγκλίνει στο μηδέν. Αν $z_n = x_n + iy_n$ και $w = a + ib$ αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι η ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο a και η ακολουθία $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο b.

Ένα *όρισμα* ενός μιγαδικού αριθμού είναι η γωνία που σχηματίζει ο μιγαδικός αριθμός (σαν διάνυσμα) με τον ημι-άξονα των θετικών πραγματικών) αριθμών (ή που είναι το ίδιο, με το διάνυσμα (0, 1)). Το όρισμα δεν είναι μοναδικά ορισμένο και δύο ορίσματα διαφέρουν κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π και γι αυτό χρησιμοποιούμε τον όρο «ένα όρισμα». Το όρισμα του z συμβολίζεται και με $\arg z$.

Αν ϑ είναι ένα όρισμα του μιγαδικού αριθμού z και r είναι το μέτρο του τότε μπορούμε να γράψουμε τον z σαν

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$$

.

Ο *συζυγής* ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ ορίζεται να είναι ο αριθμός

$$\bar{z} = x - iy$$

Οι παρακάτω ταυτότητες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες και θα χρησιμοποιούνται συχνά παρακάτω (δες και τις ασκήσεις)

$$|zz'| = |z||z'| \tag{1.1}$$

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \tag{1.2}$$

$$\arg(z^n) = n \arg z \tag{1.3}$$

$$\arg \bar{z} = -\arg z \tag{1.4}$$

$$|z| = |\bar{z}| \tag{1.5}$$

$$|z|^2 = z\bar{z} \tag{1.6}$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \tag{1.7}$$

$$\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}' \tag{1.8}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \tag{1.9}$$

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i} \tag{1.10}$$

1.1.1. Στοιχεία τοπολογίας στο $\mathbb{C}$

Θα λέμε ότι μια ακολουθία $(z_n)_n$ μιγαδικών αριθμών συγκλίνει στον μιγαδικό αριθμό z αν η ακολουθία $(|z - z_n|)_n$ συγκλίνει στο 0. Αν $z_n = x_n + iy_n$ και $z = x + iy$ αυτό είναι ισοδύναμο με το $x_n \to x$ και $y_n \to y$.

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Αν w είναι μιγαδικός αριθμός και $r > 0$ τότε

$$D(w, r) = \{z : |w - z| < r\}$$

είναι ο *ανοικτός δίσκος* με κέντρο w και ακτίνα r. Ο *κλειστός δίσκος* με κέντρο w και ακτίνα r ορίζεται

$$\bar{D}(w, r) = \{z : |w - z| \leq r\}$$

ενώ

$$C(w, r) = \{z : |w - z| = r\}$$

είναι ο *κύκλος* με κέντρο w και ακτίνα r.

Ονομάζουμε ***περιοχή*** ενός σημείου z_0 ένα (ανοικτό) δίσκο $D(z_0, r), r > 0$ με κέντρο το z_0. Ένα υποσύνολο A του μιγαδικού επιπέδου λέγεται ***ανοικτό*** αν είτε είναι κενό είτε για κάθε $a \in A$ υπάρχει μια περιοχή $D(z_0, r)$ του A που περιέχεται στο A. Τα συμπληρώματα των ανοικτών συνόλων λέγονται ***κλειστά*** σύνολα. Είναι εύκολο να δείξουμε πως ένα σύνολο K είναι κλειστό αν τα όρια ακολουθιών σημείων του ανήκουν επίσης σε αυτό.

Έστω S ένα υποσύνολο S του επιπέδου. Ένα υποσύνολο Y του S θα λέγεται ***σχετικά ανοικτό*** αν είναι της μορφής $Y = A \cap S$ όπου A είναι ανοικτό σύνολο.

Ένα υποσύνολο S του επιπέδου θα λέγεται ***συνεκτικό*** αν δεν μπορεί να διασπαστεί σε δύο σχετικά ανοικτά μη-κενά ξένα μεταξύ τους υποσύνολά του.

Μια ***τόξο με άκρα*** z_1, z_2 είναι μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ όπου a, b πραγματικοί αριθμοί και $\gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2$. Αν $x(t), y(t)$ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος του $\gamma(t)$, συνάρτηση $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, λέγεται ***λεία*** αν οι πραγματικές συναρτήσεις $x(t), y(t)$ είναι παραγωγίσιμες. Ειδικά αν $\gamma : [0, 1]\mathbb{C}$ ορίζεται από την

$$\gamma(t) = tz_1 + (1 - t)z_2$$

η γραφική παράσταση του είναι ***ευθύγραμμο τμήμα*** που ξεκινά από το z_1 και καταλήγει στο z_2 και το παριστάνουμε με $[z_1, z_2]$. Μια ***πολυγωνική γραμμή*** είναι ένα σύνολο της μορφής

$$[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_{n-2}.z_{n-1}] \cup [z_{n-1}, z_n].$$

Ένα υποσύνολο S του μιγαδικού επιπέδου λέγεται ***πολυγωνικά συνεκτικό*** αν δύο οποιαδήποτε σημεία του μπορούν να ενωθούν με μια πολυγωνική γραμμή που να περιέχεται εξ ολοκλήρου στο S. Τα ανοικτά πολυγωνικά συνεκτικά σύνολα είναι και κατά-τόξα συνεκτικά σύνολα και αντίστροφα. Υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο του επιπέδου που είναι συνεκτικό αλλά όχι κατά τόξα συνεκτικό.

Ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο θα λέγεται ένα ***χωρίο***. Ένα χωρίο θα συμβολίζεται με Ω.

Αποδεικνύεται ότι κάθε χωρίο είναι και πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο.

Μια ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μιγαδικών αριθμών λέμε ότι ***συγκλίνει*** στον μιγαδικό αριθμό a αν η ακολουθία

$$(|a_n - a|)_{n=1}^{\infty}$$

συγκλίνει στο 0. Σημειώνουμε ότι οι οι ιδιότητες των συγκλινουσών ακολουθιών πραγματικών αριθμών που γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό ισχύουν και για ακολουθίες μιγαδικών αριθμών. Για παράδειγμα το άθροισμα και το γινόμενο συγκλινουσών ακολουθιάων συγκλίνει στο άθροισμα και το γινόμενο, αντίστοιχα, των ορίων τους. Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι η ακολουθία $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ όπου

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n$$

όπου η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι δοθείσα ακολουθία.

1.2. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1.2.1 *Να αποδείξετε την προσεταιριστική και την μεταθετική ιδιότητα των πράξεων της πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών.* ***Υπόδειξη-Λύση***

Άσκηση 1.2.2 *Να βρείτε το πραγματικό και φανταστικό μέρος των αριθμών* $(a)\quad \frac{1}{i} \quad (b)\quad \frac{1+i}{1-i} \quad (c)\quad i^{45} \quad (d)\quad (\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})^{17}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.3 *Να δείξετε ότι ο* z *είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν* $z = \bar{z}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.4 *Να δείξετε ότι για δύο μιγαδικούς αριθμούς* z_1, z_2 *και* $c \in \mathbb{R}$ *ισχύει*

$$\overline{c\ z} = c\ \bar{z} \tag{1.11}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \tag{1.12}$$

$$\overline{z_1\ z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2} \tag{1.13}$$

$$\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ \text{αν } z_2 \neq 0. \tag{1.14}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.5 *Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς* z, z_1, z_2 *ισχύει*

$$|z_1\ z_2| = |z_1|\ |z_2| \tag{1.15}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ \text{αν } z_2 \neq 0. \tag{1.16}$$

$$|\bar{z}| = |z|. \tag{1.17}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.6 *Να βρείτε τον συζυγή και το μέτρο του* $(1+i)^{11}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.7 Αν $z = a + bi$ να βρείτε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς $w = x + iy$ με $w^2 = z$. Εφαρμόστε για $z = -i$ **Υπόδειξη-Λύση**

Να λύσετε την εξίσωση

$$az^2 + bz + c = 0$$

αν $a, b, c, a \neq 0$ μιγαδικοί. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.9 [Η τριγωνική ανισότητα] Να δείξετε ότι

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{1.18}$$

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \tag{1.19}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.10 Να δείξετε πως για κάθε μιγαδικό αριθμό z

$$|z| \leq \ |\Re z| + |\Im z| \ \leq \ \sqrt{2}|z|.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.11 Να βρεθεί αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.12 Αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$. Να δείξετε η ακολουθία δεν συγκλίνει. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.13 *Να βρεθεί αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας*

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.14 *Δείξτε ότι το σώμα των μιγαδικών αριθμών είναι ισομορφικό με το σύνολο όλων των πινάκων της μορφής*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

με $a, b \in \mathbb{R}$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.15 *Έστω* a *μιγαδικός αριθμός με* $|a| < 1$. *Να αποδείξετε ότι*

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = 1 \quad \textit{αν και μόνο αν} \quad |z| = 1$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.16 *Έστω* $z \neq 0$ *μιγαδικός αριθμός. Να δείξετε ότι ο*

$$z + \frac{1}{z}$$

είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν

$$\Im z = 0 \quad \textit{είτε} \quad |z| = 1.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.17 *Δίνεται η απεικόνιση* $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *με*

$$T(z) = az + b, \quad a \neq 0$$

(i) *Δείξτε ότι η* T *απεικονίζει τον κύκλο*

$$C(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}$$

στον κύκλο

$$C\left(T(z_0), r|a|\right) = \{z : |z - T(z_0)| = r|a|\}.$$

(ii) *Να βρείτε για ποια* a, b *η απεικόνιση* T *απεικονίζει τον κύκλο* $C(0, 1)$ *επί του* $C(1+i, 2)$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.18 *Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου*

$$C(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}$$

δίνεται και από την εξίσωση

$$z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 - r^2 = 0$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.19 *Αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε και η ακολουθία των απόλυτων τιμών της συγκλίνει. Ισχύει το αντίστροφο;* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.20 *Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες είναι φραγμένες :*

1. i^n

2. $\left(\frac{i}{1+i}\right)^n$

3. $\left(\frac{i+1}{1-i}\right)^n$

4. $\frac{n}{n+2} + i\frac{n+3}{n+4}$

5. $n(i^n - 1)$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.21 *Δείξτε πώς αν η ακολουθία a_n είναι φραγμένη τότε θα είναι και οι παρακάτω ακολουθίες :*

1.
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

2.
$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.22 *Να εξετάσετε τις παρακάτω σειρές ως προς τη σύγκλισή τους :*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i+n}{ni-3+i}$

Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
Ασκήσεις
Ο τύπος του υπολοίπου
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 11 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n}$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.23 Υπόδειξη-Λύση

Να βρείτε τα αθροίσματα των παρακάτω σειρών:

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(1+i)^n}{2^n}$$

Άσκηση 1.2.24 *Να βρείτε τα (α)* $\sqrt[3]{i}$ *(β)* $\sqrt[5]{i-1}$. Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.25 *Ποια υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις;*

1. $\Re z = \Im z$.
2. $\Re z < 1$
3. $1 \leq \Re z \leq 1$
4. $\Im z \geq 0$
5. $|z| \leq 2$
6. $1 < |z| < 100$

7. $-\pi < \arg z < \pi$

8. $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.26 *(α) Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά;*
(β) Να βρείτε την κλειστή θήκη τους,

1. $\{z : |z| < 3\}$

2. $\{z : 1 < |z| < 3\}$

3. $\{zz : \Im z > 1\}$

4. $\{z : \Re z \leq 5\} \cup \{11\}$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.27 *Ποια από τα σύνολα στην προηγούμενη άσκηση είναι συνεκτικά; Ποια είναι συμπαγή; Ποια έχουν κλειστή θήκη συμπαγές σύνολο;* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.28 *Να δώσετε ένα παράδειγμα συνεκτικού συνόλου που δεν είναι πολυγωνικά συνεκτικό.* **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 2

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ z - ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

2.1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

2.1.1. Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ - ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΩΝ CAUCHY-RIEMANN

Μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ γράφεται πάντα στη μορφή

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{2.1}$$

όπου $u(x, y), v(x, y)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Με Ω θα συμβολίζουμε ένα ανοικτό υποσύνολο μιγαδικών αριθμών. Αν το Ω είναι και κατα-τόξα (πολυγωνικά) συνεκτικό σύνολο θα το λέμε ένα ***χωρίο***. Μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ θα λέγεται *παραγωγίσιμη σε ένα σημείο* z_0 αν το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0}{z - z_0}$$

υπάρχει. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του Ω θα λέγεται *αναλυτική* στο Ω. Αν S είναι ένα μη ανοικτό σύνολο θα λέμε ότι η f είναι *αναλυτική* στο S αν είναι αναλυτική σε κάποιο ανοιχτό σύνολο που περιέχει το S.Έτσι μια συνάρτηση είναι αναλυτική σε ένα σημείο αν είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό δίσκο που έχει κέντρο το σημείο αυτό.

Ας υποθέσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

υπάρχουν σε κάποιο σημείο $(x_0, y_0) \in \Omega$. Ορίζουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

θα λέμε ότι η συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann σε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in \Omega$ αν

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = i\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{2.3}$$

Θεώρημα 2.1.1 *Αν μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(x_0, y_0) \in \Omega$ τότε ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann σε αυτό.*

Αν οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν σε μια περιοχή του σημείου $(x_0, y_0) \in \Omega$ και είναι συνεχείς και η f ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann τότε η $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο $z_0(x_0, y_0)$ και ισχύει.

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Ορισμός 2.1.2 *Μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ θα λέγεται **αναλυτική** σε ένα σύνολο S αν η $f(z)$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το S. Μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ θα λέγεται **ακέραια** αν η $f(z)$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{C}$.*

Έτσι όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι αναλυτική σε ένα σημείο z_0 εννοούμε ότι είναι παραγωγίσιμη δε όλα τα σημεία ενός ανοικτού δίσκου με κέντρο το z_0.

2.1.2. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ ορίζουμε

$$\exp(z) = e^z = e^x(\cos x + i \sin y).$$

Η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann σε κάθε σημείο $z_0 = (x_0, y_0)$ του μιγαδικού επιπέδου και συνεπώς είναι παραγωγίσιμη σε κάθε z. Είναι φανερό ότι αν περιοριστούμε στους πραγματικούς αριθμούς η συνάρτηση ταυτίζεται με την συνήθη εκθετική. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1.1 βλέπουμε πως σε κάθε z ισχύει

$$(e^z)' = e^z$$

Επίσης ορίζουμε τις επεκτάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

2.1.3. Πολυώνυμα και δυναμοσειρές

Οι πιο απλές συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής είναι αυτές της μορφής

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

όπου τα $a_0, \ldots, a_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί που τις ονομάζουμε *πολυώνυμα μιας μιγαδικής μεταβλητής* ή και *αναλυτικά πολυώνυμα*. Μια άμεση γενίκευση της έννοιας του πολυωνύμου είναι αυτή της *δυναμοσειράς* που είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2.4}$$

ή γενικότερα

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2.5}$$

η οποία ορίζεται για εκείνα ακριβώς τα z για τα οποία η σειρά (2.5) συγκλίνει. Ο αριθμός z_0 λέγεται και το *κέντρο* της δυναμοσειράς. Συνήθως το κέντρο είναι το 0 (δηλαδή η δυναμοσειρά είναι της μορφής (2.4) αλλά υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που χρειαζόμαστε δυναμοσειρές με άλλο κέντρο.

Θέτουμε

$$L = \overline{\lim}_n |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

Ο αριθμός L υπάρχει πάντοτε και παίρνει τιμές από 0 έως και $+\infty$. Θα συμφωνούμε πως

$$\frac{1}{0} = +\infty, \qquad \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Ο μη-αρνητικός αριθμός (που μπορεί να είναι και $+\infty$)

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}}$$

λέγεται *ακτίνα σύγκλισης* της δυναμοσειράς (2.5) και το σύνολο

$$D = \{z : |z - z_0| < R$$

ο δίσκος σύγκλισης της δυναμοσειράς. Η σημασία της ακτίνας σύγκλισης φαίνεται στο παρακάτω :

Θεώρημα 2.1.3 1. *Αν $R = 0$ τότε η σειρά (2.5) συγκλίνει για $z = z_0$ και μόνο.*

2. *Αν $R = +\infty$ τότε η σειρά (2.5) συγκλίνει για κάθε μιγαδικό z.*

3. *Αν $0 < R < +\infty$ τότε η σειρά (2.5) συγκλίνει για κάθε μιγαδικό z με $|z - z_0| < R$ και αποκλίνει για κάθε μιγαδικό z με $|z - z_0| > R$. Αν $|z - z_0| = R$ τότε η σειρά μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει και δεν γνωρίζουμε τι από τα δύο συμβαίνει εκ των προτέρων. Επιπλέον, αν $R' < R$ η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο*

$$\bar{D}(z_0, R') = \{z : |z - z_0| \geq R'\}.$$

Οι δυναμοσειρές παραγωγίζονται σε κάθε σημείο μέσα στο δίσκο σύγκλισης τους, συγκεκριμένα

Θεώρημα 2.1.4 *Αν η*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

συγκλίνει για κάθε $|z - z_0| < R$ τότε η παράγωγος $f'(z)$ υπάρχει για κάθε $|z - z_0| < R$ και μάλιστα

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Ένα άλλο σημαντικό Θεώρημα που αφορά δυναμοσειρές είναι το εξής :

Θεώρημα 2.1.5 *Αν η δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ μηδενίζεται στα στοιχεία μιας ακολουθίας που συγκλίνει στο z_0 τότε $a_n = 0$ για κάθε n, και συνεπώς η συνάρτηση είναι ταυτοτικά ίση με 0. Από αυτό έχουμε ότι*

Θεώρημα 2.1.6 *Αν δύο δυναμοσειρές ταυτίζονται $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ ταυτίζονται μηδενίζεται στα στοιχεία μιας ακολουθίας που συγκλίνει στο z_0 τότε $a_n = b_n$ για κάθε n.*

2.2. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.2.1 *Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με*

$$f(z) = |z|^2$$

είναι παραγωγίσιμη μόνο για $z = 0$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.2 *Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f(z)$ που είναι συνεχής και σε κάποιο ανοιχτό σύνολο A έχει την ιδιότητα $f^2(z) = z$. Να δείξετε $f'(z) = \frac{1}{f(z)}$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.3 *Να δείξετε πως*

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.4 *Να δείξετε πως για κάθε πολυώνυμο* $P(z)$ *που έχει πραγματικούς συντελεστές ισχύει* $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.5 *Να δείξετε ότι αν* $P(z)$ *είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και* ρ *είναι μια ρίζα του* $P(z)$ *τότε και ο συζυγής* $\bar{\rho}$ *θα είναι ρίζα του* $P(z)$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.6 *Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. *Θέτουμε*

$$\Gamma = \left\{(x,y) : u_x = v_y \text{ και } u_y = -v_x\right\}$$

Να δείξετε ότι αν το σύνολο Γ *έχει κενό εσωτερικό τότε η συνάρτηση δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.7 *Να βρεθεί το σύνολο των σημείων* (x,y) *στα οποία η συνάρτηση* $f(z) = (x^3) + i(y^2)$ *είναι παραγωγίσιμη καθώς και το σύνολο των σημείων στα οποία είναι αναλυτική.*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.8 *Να βρείτε τις σταθερές* a, b, c *ώστε η συνάρτηση*

$$f(z) = (x + ay) + i(bx + cy)$$

να είναι αναλυτική. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.9 *Να δείξετε ότι η συνάρτηση*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2} & \text{αν} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad z = 0 \end{cases}$$

ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann στο $z = 0$ *αλλά δεν υπάρχει το* $f'(0)$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.10 *Χρησιμοποιώντας τον ορισμού της παραγώγου να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης*

$$\frac{z}{z^2+1}$$

στα σημεία w όπου η συνάρτηση ορίζεται. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.11 *Για κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις $f(z)$, να εξετάσετε αν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann ικανοποιούνται:*

$$f(z) = \log(x^2 + y^2) + 2i\cot^{-1}(x/y)$$

$$f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy$$

$$f(z) = x^3 - 3y^2 + 2x + i(3x^2y - y3 + 2y)$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.12 *Δείξτε ότι μια αναλυτική συνάρτηση $f(z)$ σε ένα χωρίο D η οποία παίρνει μόνο πραγματικές τιμές είναι σταθερή.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.13 *Δείξτε ότι μια αναλυτική συνάρτηση $f(z)$ σε ένα χωρίο D και παίρνει μόνο φανταστικές τιμές είναι σταθερή.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.14 *Ας θεωρήσουμε μια μιγαδική συνάρτηση τέτοια ώστε η $f''(z)$ είναι αναλυτική σε ένα χωρίο D. Αν η*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $u(x,y)$, $v(x,y)$ ικανοποιούν την εξίσωση του Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} = 0, \quad (x,y) \in D$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.15 *Να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών*

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} inz^{n^2}$$

$$(b) \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n^3 + 2^n)z^n$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.16 *Να δείξετε ότι*

$$\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.17 *Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.18 *Να δείξετε πως δεν υπάρχει δυναμοσειρά*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

που να ικανοποιεί τα εξής

$$(a) f(z) = 1 \ \text{αν} \ z = \tfrac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$(b) f'(0) = 1.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.19 *Να δείξετε ότι*

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.20 *Να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης*

$$e^z = a$$

όπου a *μιγαδικός.*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.21 *Να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης*

$$e^z = -3$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.22 *Να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης*

$$e^{iz} = a$$

όπου a *μιγαδικός.*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.23 *Να λυθεί η εξίσωση*

$$\sin z = 2i$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.24 *Δίνεται ένα πολυώνυμο*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, n \geq 1$$

με

$$a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0.$$

Να δείξετε ότι όλες οι ρίζες του πολυωνύμου έχουν απόλυτη τιμή ≥ 1.

Υπόδειξη-Λύση

Κεφάλαιο 3

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

3.1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

Έστω $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ να είναι μια κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση από ένα κλειστό διάστημα πραγματικών $[a, b]$ στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Η φ γράφεται και σαν $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$ με u το πραγματικό μέρος της φ και v το φανταστικό μέρος της γ.Το ολοκλήρωμα της γ ορίζεται

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt.$$

Μία ***καμπύλη*** ορίζεται να είναι μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, όπου το $[a, b]$ είναι ένα κλειστό διάστημα πραγματικών αριθμών. Το πεδίο τιμών της γ θα συμβολίζεται με γ^*. Μια καμπύλη θα λέγεται ***κατά τμήματα λεία*** ή ένας ***δρόμος*** αν είναι κατά τμήματα παραγωγίσιμη. Μια καμπύλη (ή δρόμος) γ με $\gamma(a) = \gamma(b)$ ονομάζεται ***κλειστή καμπύλη*** (αντίστοιχα, ***κλειστός δρόμος***). Το μήκος L ενός δρόμου $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

Αν f είναι μια συνεχής μιγαδική συνάρτηση και γ ένας δρόμος πάνω στα σημεία του οποίου η συνάρτηση ορίζεται και είναι συνεχής (δηλαδή η $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής) τότε το ***ολοκλήρωμα της f πάνω (ή κατα μήκος) του δρόμου*** γ ορίζεται να είναι το

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Αν $M = \sup\{|f(z) : z \in \gamma\}$ και L να είναι το μήκος της καμπύλης τότε έχουμε την καλούμενη ML-***ανισότητα***

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq ML$$

Το παρακάτω Θεώρημα είναι το ανάλογο του Θεμελιώδους Θεωρήματος του απειροστικό λογισμού και παίζει σημαντικό ρόλο στους υπολογισμούς μιγαδικών ολοκληρωμάτων

Θεώρημα 3.1.1 *Αν $F : A \to \mathbb{C}$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση στο ανοιχτό σύνολο A και $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ μια κατά τμήματα λεία καμπύλη που περιέχεται στο A τότε*

$$\int_\gamma F'(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Ειδικότερα αν η γ είναι κλειστή καμπύλη τότε

$$\int_\gamma F'(z)dz = 0.$$

3.2. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.2.1 *Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα*

$$\int_C \frac{1}{z} dz$$

όπου το τόξο C *δίνεται από τη συνάρτηση* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *όπου* $\gamma(t) = e^{it}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.2 *Έστω* $C = \{z : |z| = 1\}$ *να είναι ο μοναδιαίος κύκλος με την θετική φορά (αντίθετα με τη φορά του ρολογιού). να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα.*

$$(a) \quad \int_C \frac{1}{z} dz$$

$$(b) \quad \int_C \frac{1}{|z|} dz$$

$$(c) \quad \int_C \frac{1}{\bar{z}} dz$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.3 *Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *είναι ολοκληρώσιμη τότε και η συζυγής της είναι και ισχύει*

$$\overline{\int_a^b f(t)dt} = \int_a^b \overline{f(t)}dt.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.4 *Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα* $\int_C |z|\bar{z}dz$ *όπου ο δρόμος* C *καθορίζεται από το ημικύκλιο* $z = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$ *και το ευθύγραμμο τμήμα* $-R \leq \Re z \leq R$, $\Im z = 0$.
Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.5 *Να δείξετε ότι αν $F : \Omega \to \mathbb{C}$, —όπου Ω είναι ένα χωρίο— είναι μια μιγαδική συνάρτηση με την ιδιότητα $F'(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$ τότε η F είναι σταθερή.* **Υπόδειξη-Λύση**

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int_C z^n dz$$

όπου $n \neq -1$ και C είναι το ημικύκλιο

$$C(t) = Re^{it},\, t \in [0, \pi]$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.7 * *Να δείξετε ότι αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση που παίρνει πραγματικές τιμές και $|f| \leq 1$ τότε*

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq 4.$$

όπου C είναι η περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου

$$C(t) = e^{it},\ \ t \in [0, 2\pi]$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.8 *Η συνάρτηση f είνσι συνεχής σε μια περιοχή του 0. Να δείξετε πώς*

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z} = 2\pi i f(0).$$

όπου C_r είναι ο κύκλος $\{z : |z| = r\}$ με τη θετική φορά **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.9 *Να δείξετε ότι*

$$\left| \int_\gamma (x^2 - iy^2) dz \right| \leq 2.5$$

όπου το γ είναι

1. *Το διάστημα $[-i, i]$ στον άξονα των φανταστικών.*
2. *Το τόξο του κύκλου e^{it}, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.10 *να αποδείξετε πως αν $|a| \neq R$ τότε*

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{dz}{(z-a)(z+a)} \right| \leq \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}$$

Υπόδειξη-Λύση

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 29 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Κεφάλαιο 4

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ CAUCHY-ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR

4.1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

Θυμίζουμε πάλι πως μια μιγαδική συνάρτηση f λέγεται ***αναλυτική*** σε ένα σύνολο S αν είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο ανοικτό σύνολο A το οποίο περιέχει το S.

Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ και $r > 0$ θα συμβολίζουμε με

$$D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$$

$$\bar{D}(z_0, r) = \{z : |z - z_0| \le r\}$$

$$C(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}$$

Το σύνολο $C(z_0, r)$ θα το θεωρούμε πάντα σαν μια λεία καμπύλη που δίνεται από την εξίσωση

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Με Ω θα συμβολίζουμε γενικά ένα ανοικτό πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο[1]

Θεώρημα 4.1.1 **(Ο Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy)** *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ να είναι μια αναλυτική συνάρτηση και z_0, r τέτοια ώστε $\bar{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$ τότε για κάθε $z \in D(z_0, r)$ ισχύει*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Επιπλέον η f έχει παραγώγους κάθε τάξης και ισχύει

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw.$$

Θεώρημα 4.1.2 *Αν $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση στο Ω τότε αυτή αναπαριστάται σα δυναμοσειρά. Αν $D(z_0, R) \subseteq \Omega$ τότε*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad z \in D(z_0, R)$$

Μια συνάρτηση λέγεται ***ακέραια*** αν είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$. Από τα προηγούμενα Θεωρήματα μια συνάρτηση είναι αναλυτική αν και μόνο αν αναπτύσσεται (κατά μοναδικό τρόπο) σε δυναμοσειρά με κέντρο οποιοδήποτε σημείο ή ισοδύναμα αν αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 και άπειρη ακτίνα.

---

[1] Σε αρκετά θεωρήματα η υπόθεση ότι το Ω είναι πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο δεν είναι απαραίτητη αλλά σε άλλα είναι.

Θεώρημα 4.1.3 **(Θεώρημα του Liouville)** *Αν μια ακέραια συνάρτηση είναι φραγμένη τότε είναι σταθερή.*

Από το Θεώρημα του Liouville προκύπτει και το

Θεώρημα 4.1.4 **(Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας)** *Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο μια μιγαδικής μεταβλητής έχει μια ρίζα.*

Θεώρημα 4.1.5 **(Θεώρημα της μοναδικότητας)** *Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σε ένα χωρίο Ω και έχει άπειρες ρίζες σε αυτό που έχουν σημείο συσσώρευσης στο Ω τότε είναι ταυτοτικά ίση με 0. Από αυτό αν έχουμε δύο αναλυτικές συναρτήσεις f, g στο χωρίο Ω που το που το σύνολο*

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

έχει σημείο συσσώρευσης μέσα στο Ω τότε αυτές ταυτίζονται στο Ω.

4.2. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4.2.1 *Να υπολογίσετε το*

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+1}$$

όπου γ είναι (1) ο κύκλος κέντρου i και ακτίνας 1 (2) ο κύκλος κέντρου $-i$ και ακτίνας 1
Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.2 *Να αναπτύξετε σε σειρά Taylor την $\frac{1}{2z+3}$ με κέντρο το 0* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.3 *Να αναπτύξετε σε σειρά Taylor την $\frac{1}{z}$ με κέντρο το $1-i$ και να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.4 *Να αναπτύξετε την συνάρτηση*

$$f(z) = \frac{z}{z+i}$$

σε δυμανοσειρά με κέντρο δοθέντα μιγαδικό $\upsilon \neq -i$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.5 *Έστω μια άρτια ακέραια συνάρτηση* $f(z)$. *Να δείξετε ότι στο ανάπτυγμα Taylor της* $f(z)$ *με κέντρο το 0 όλοι οι περιττοί όροι είναι ίσοι με μηδέν.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.6 *Αν ένα πολυώνυμο* $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n$ *ικανοποιεί τη σχέση*

$$\sup_{|z|=1} |P(z)| \leq 1$$

τότε

$$|a_k| \leq 1, k = 0, \ldots n.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.7 *Έστω μια ακέραια συνάρτηση* $f(z)$, k *φυσικός αριθμός και* A, B *θετικοί αριθμοί με*

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k$$

για κάθε z , *όταν* $|z| > R_0$ *όπου* R_0 *δοθείς αριθμός. Να δείξετε ότι η* $f(z)$ *είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ* k. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.8 *Δείξτε ότι υπάρχει μία και μόνο μία ακέραια συνάρτηση* $f(z)$ *με* $f(z) = f'(z)$ *και* $f(0) = 1$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.9 *Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σε ένα χωρίο Ω και έχει άπειρες ρίζες σε αυτό που έχουν σημείο συσσώρευσης στο Ω τότε από το θεώρημα της μοναδικότητας είναι ταυτοτικά ίση με 0. Δώστε ένα παράδειγμα μιας μη μηδενικής αναλυτικής συνάρτησης $f(z)$ σε ένα χωρίο Ω που έχει άπειρες ρίζες στο Ω με σημείο συσσώρευσης έξω από το Ω*
Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.10 *Να δείξετε ότι κάθε πολυώνυμο*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0, n \geq 1$$

γράφεται μοναδικά στη μορφή

$$P(z) = a_n (z - \rho_1)^{n_1} \cdots (z - \rho_k)^{n_k}$$

όπου $\rho_1, \ldots, \rho_k$ είναι οι διακεκριμένες ρίζες του πολυωνύμου και $n_1, \ldots, n_k$ θετικοί (μη μηδενικοί) ακέραιοι με $n_1 + \cdots + n_k = n$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.11 *Να δείξετε ότι κάθε πολυώνυμο*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0, n \geq 1$$

με πραγματικούς συντελεστές γράφεται μοναδικά στη μορφή

$$P(z) = a_n (z - \rho_1)^{n_1} \cdots (z - \rho_k)^{n_k} (z^2 + a_1 z + \beta_1^2)^{m_1} \cdots (z^2 + a_j z + \beta_j^2)^{m_j} \tag{4.1}$$

όπου $\rho_1, \ldots, \rho_k, a_1, \beta_1, \ldots, a_j, \beta_j$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $n_1, \ldots, n_k, m_1, \ldots, m_j$ θετικοί (μη μηδενικοί) ακέραιοι με

$$n_1 + \cdots + n_k + 2(m_1 + \cdots + m_j) = n. \tag{4.2}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.12 *Έστω f να είναι μια ακέραια συνάρτηση με $|f(z)| \geq 1$ για κάθε z. Να δείξετε ότι είναι σταθερή.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.13 *Να δείξετε ότι αν f, g είναι δύο αναλυτικές συναρτήσεις σε ένα χωρίο A και για κάθε $z \in A$ ισχύει $f(z)g(z) = 0$ τότε είτε $f = 0$ είτε $g = 0$ ταυτοτικά στο A.*
Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.14 *Ας υποθέσουμε ότι η f είναι μια ακέραια συνάρτηση με $\Im f(z) \geq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.*
Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.15 *Ας υποθέσουμε ότι f, g είναι αναλυτικές συναρτήσεις στον ανοιχτό δίσκο $D(0,1)$ κέντρου 0 και ακτίνας 1, δεν παίρνουν την τιμή 0 και ότι ισχύει*

$$\frac{f'(1/n)}{f(1/n)} = \frac{g'(1/n)}{g(1/n)}$$

για $n = 2, 3, 4, \ldots$. Να δείξετε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι σταθερή στο $D(0,1)$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.16 *Να βρεθεί η μοναδική ακέραια συνάρτηση $f(z)$ η οποία έχει τις ιδιότητες*

1. *$f(0) = 0$.*
2. *Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|f(z) - z^2 \cos z| \leq 1000$.*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.17 *Αν η f είναι αναλυτική σε ένα σημείο z_0 να δείξετε ότι δεν μπορεί να συμβαίνει*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| > n! b_n$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ όπου $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = +\infty.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.18 Έστω $f(z), g(z)$ είναι δύο συναρτήσεις αναλυτικές σε ένα σημείο a που έχουν ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

για $|z-a| < R$ και η $g(z)$ δεν έχει ρίζες στο $\{z : |z-a| \leq R\}$.

Τότε η $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο a και να βρεθεί το ανάπτυγμα της.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.19 Να βρείτε τους 5 πρώτους όρους στο ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{z}{e^z + 1}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.20 να βρεθεί το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 της συνάρτησης

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$$

Υπόδειξη-Λύση

Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
Ασκήσεις
Ο τύπος του υπολοίπου
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 36 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Κεφάλαιο 5

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

5.1. Στοιχεία από τη Θεωρία

Θεώρημα 5.1.1 **(Αρχή του μεγίστου)** *Έστω f να είναι μια μη σταθερή αναλυτική συνάρτηση σε ένα ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο Ω. Τότε για κάθε $z \in \Omega$ υπάρχει $z' \in \Omega$ με $|f(z')| > |f(z)|$.*

Θεώρημα 5.1.2 **(Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης)** *Η εικόνα ενός ανοικτού συνόλου μέσω μιας μη σταθερής αναλυτικής συνάρτησης είναι ανοικτό σύνολο.*

Θεώρημα 5.1.3 **(Λήμμα του Schwarz)** *Έστω f να είναι μια αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο D τέτοια ώστε $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $z \in D$. Τότε*

$$(a)|f(z)| \leq |z|$$

$$(b)|f'(0)| \leq 1$$

όπου η ισότητα μπορεί να ισχύει στα (a) και (b) αν και μόνο αν $f(z) = e^{i\vartheta}z$.

Θεώρημα 5.1.4 **(Θεώρημα του Morera)** *Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα ανοικτό σύνολο D και*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

οποτεδήποτε το Γ είναι το σύνορο ενός κλειστού ορθογωνίου που περιέχεται στο D τότε η f είναι αναλυτική στο D.

Θεώρημα 5.1.5 **(Αρχή της ανάκλασης του Schwarz)** *Ας υποθέσουμε ότι μια συνάρτηση f είναι αναλυτική σε ένα χωρίο D και συνεχής στο $\bar{D}$, όπου το D περιέχεται στο άνω (ή στο κάτω) ημιεπίπεδο και το σύνορό του περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα L του άξονα των πραγματικών αριθμών (το L μπορεί να είναι και όλος ο άξονας). Τότε μπορούμε να ορίσουμε μια αναλυτική επέκταση g της f στο χωρίο $D \cup L \cup D^*$ όπου $D^* = \{\bar{z} : z \in D\}$ είναι το συμμετρικό του D ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών η οποία δίνεται από τον τύπο*

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{αν } z \in D \cup L \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{αν } z \in D^* \end{cases}$$

5.2. Ασκήσεις

Άσκηση 5.2.1 *Θα ονομάζουμε **συμπαγές χωρίο** ένα συμπαγές σύνολο Ω του οποίου το εσωτερικό $\mathrm{Int}(\Omega)$ είναι ένα χωρίο (ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο) Δείξτε πως αν μια μη σταθερή συνάρτηση f είναι αναλυτική σε ένα συμπαγές χωρίο Ω τότε οι συναρτήσεις $\Re f$ και $\Im f$ λαμβάνουν την μέγιστη και ελάχιστη τιμή τους στο σύνορο.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.2 *Έστω μια ακέραια συνάρτηση f και $R > 0$. Θέτουμε*

$$M(R) = \sup\{|f(z)| : |z| < R\}.$$

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Να δείξετε πώς αν υπάρχει κάποιος σταθερός θετικός ακέραιος m *με*

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{M(R)}{R^m} = 0$$

τότε

1. $f^{(n)}(0) = 0$ *για κάθε* $n > m$.
2. *Η* f *είναι πολυώνυμο βαθμού* $\leq m - 1$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.3 *Αν η* f *είναι αναλυτική σε ένα χωρίο* Ω *και η* $|f|$ *είναι σταθερή στο* Ω *τότε και η* f *θα είναι σταθερή σε αυτό.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.4 *Δείξτε ότι η εικόνα ενός χωρίου μέσω μιας μη σταθερής αναλυτικής συνάρτησης είναι επίσης χωρίο.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.5 *Ας υποθέσουμε ότι μια συνάρτηση* f *είναι αναλυτική στο* $C^+ = \{z : \Im z > 0\}$ *και συνεχής στο* $C^+ \cup (0,1)$. *Αν* $f(x) = x^4 - 2x^2$ *για κάθε* $x \in (0,1)$ *να δείξετε πως* $f(i) = 3$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.6 *Αν μια συνάρτηση* $f(z)$ *είναι αναλυτική σε ένα χωρίο* D *και σε κάποιο σημείο* a *του χωρίου ισχύει ότι* $f(a) = 0$ *και για κάθε* n, $f^{(n)}(a) = 0$, *τότε η συνάρτηση είναι ίση με 0 σε όλο το χωρίο* D. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.7 *Υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση* f *είναι φραγμένη και αναλυτική στο* $\Im z \geq$ *και παίρνει πραγματικές τιμές στον πραγματικό άξονα. Να δείξετε ότι είναι σταθερή.* **Υπόδειξη-Λύση**

Μιγαδικοί αριθμοί
➤ Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
➤ Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
➤ Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
➤ Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
➤ Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
➤ Ασκήσεις
Ο τύπος του υπολοίπου
➤ Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 39 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Άσκηση 5.2.8 *Υποθέτουμε πως μια συνάρτηση* f *είναι αναλυτική στον δακτύλιο* $R = \{z : 1 \leq z \leq 2\}$ *ότι* $|f(z)| \leq 1$ *όταν* $|z| = 1$ *και ότι* $|f(z)| \leq 4$ *όταν* $|z| = 2$. *Να δείξετε ότι ισχύει* $|f(z)| \leq |z|^2$ *για κάθε* z *στον δακτύλιο.*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.9 *Έστω* $f(z)$ *να είναι μια ακέραια συνάρτηση που παίρνει πραγματικές τιμές στον πραγματικό άξονα και φανταστικές τιμές στον φανταστικό άξονα. Να δείξετε ότι είναι περιττή, δηλαδή ότι*

$$f(-z) = -f(z).$$

Υπόδειξη-Λύση

Κεφάλαιο 6

ΜΕΜΟΝΩΜΕΝΑ ΑΝΩΜΑΛΑ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ LAURENT

6.1. Στοιχεία από τη Θεωρία

Μια *τρυπημένη περιοχή* ενός μιγαδικού αριθμού z_0 είναι ένα σύνολο της μορφής

$$\{z : |z - z_0| < \delta\}.$$

Μια μιγαδική συνάρτηση f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 αν είναι αναλυτική σε μια τρυπημένη περιοχή του z_0 αλλά όχι στο z_0.

ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΜΕΜΟΝΩΜΕΝΩΝ ΑΝΩΜΑΛΙΩΝ

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 41 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

1. Αν υπάρχει μια αναλυτική συνάρτηση $g(z)$ στο σημείο z_0 η οποία συμπίπτει με την $f(z)$ σε μια τρυπημένη περιοχή του z_0 θα λέμε ι η f έχει μια ***αιρόμενη ανωμαλία*** στο z_0.

2. Αν για $z \neq z_0$ η f γράφεται στη μορφή

$$f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

όπου οι συναρτήσεις A και B είναι αναλυτικές στο z_0 με $A(z_0) \neq 0$ και $B(z_0) = 0$ τότε λέμε ότι η f έχει ***πόλο*** στο z_0. Αν το z_0 είναι ρίζα τάξης k του B τότε λέμε ότι ο ***πόλος έχει τάξη*** k.

3. Αν δεν συμβαίνει καμμία από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις και το z_0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία τότε λέμε ότι η f έχει ***ουσιώδη ανωμαλία*** στο z_0.

Τα βασικά θεωρήματα σχετικά με τις μεμονωμένες ανωμαλίες είναι

Θεώρημα 6.1.1 **(Αρχή του Riemann)** *Αν η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο z_0 και αν $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$ τότε η ανωμαλία είναι αιρόμενη.*

Θεώρημα 6.1.2 *Αν η f είναι φραγμένη σε μια τρυπημένη περιοχή μιας μεμονωμένης ανωμαλίας της τότε η ανωμαλία είναι αιρόμενη.*

Θεώρημα 6.1.3 *Αν η f είναι αναλυτική σε μια τρυπημένη περιοχή του z_0 και υπάρχει ένας θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) \neq 0$ και $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$ τότε η f έχει πόλο τάξης k στο z_0.*

Θεώρημα 6.1.4 **(Casorati-Weierstrass)** *Αν η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο z_0 τότε για κάθε τρυπημένη πειοχή του z_0 το σύνολο*

$$f(D) = \{f(z) : z \in D\}$$

είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Αν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}$ συγκλίνουν τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{-\infty}^{\infty} z_n$ συγκλίνει και γράφουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}$$

Θεώρημα 6.1.5 *Η σειρά*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

συγκλίνει στο χωρίο

$$D = \{z : r < |z| < R\}$$

όπου

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}, \quad R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

και σρτην περίπτωση που $r < R$ ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση σε αυτό.

Θεώρημα 6.1.6 (Ανάπτυγμα Laurent) *Αν η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στο χωρίο*

$$D = \{z : r < |z| < R\}$$

τότε έχει ένα μοναδικό ανάπτυγμα Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

στο D.

Θεώρημα 6.1.7 *Αν η συνάρτηση $f(z)$ έχει μια μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 τότε για κάποιο $\epsilon > 0$ θα έχουμε ότι*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

όπου $|z - z_0| < \epsilon$ και

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

όπου C είναι ο κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας $r < \epsilon$.

6.2. Ασκήσεις

Άσκηση 6.2.1 *Να δείξετε ότι αν $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ και η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 τότε το z_0 είναι πόλος.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.2.2 *Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent των παρακάτω συναρτήσεων στο δακτύλιο όπου ικανοποιείται το Θεώρημα Laurent.*

1. $\dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$

2. $\dfrac{2zi}{(1 - z)(z + i)^2}$

3. $\sin \dfrac{1}{z}$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 6.2.3 *Να βρεθούν οι ανωμαλίες των παρακάτω συναρτήσεων*

Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
Ασκήσεις
Ο τύπος του υπολοίπου
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 44 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

1. $\dfrac{1}{z - z^3}$

2. $\dfrac{z^4}{1 + z^4}$

3. $\dfrac{z^5}{(1 - z)^3}$

4. $\dfrac{e^z}{1 + z^2}$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 6.2.4 *Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της*

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 6.2.5 *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο τρυπημένο επίπεδο $\{z : z \neq 0\}$. Αν η f ικανοποιεί την*

$$|f(z)| \leq \sqrt{|z|} + \frac{1}{\sqrt{|z|}}$$

να δείξετε ότι είναι σταθερή. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.2.6 *Υποθέτουμε ότι οι f, g έχουν πόλους με τάξη m, n αντίστοιχα στο z_0. Τι μπορούμε να πούμε για τους πόλους των $f + g, fg, f/g$ στο z_0;* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.2.7 *Να αναλύσετε σε απλά κλάσματα την παράσταση*

$$\frac{1}{z^4 + z^2}$$

Υπόδειξη-Λύση

Κεφάλαιο 7

Ο ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΙΠΟΥ

7.1. Ο τύπος του υπολοίπου

Το ***υπόλοιπο μιας μιγαδικής συνάρτησης*** f ***στο σημείο*** z_0 η οποία δίνεται από το ανάπτυγμα Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

είναι ο συντελεστής a_{-1} τον οποίο και συμβολίζουμε και

$$\operatorname{Res}(f(z);\ z_0).$$

Αν η f έχει ένα απλό πόλο στο z_0

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

όπου οι συναρτήσεις $g(z), h(z)$ είναι αναλυτικές στο z_0 και το z_0 είναι μια απλή ρίζα της $h(z)$ τότε

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \tag{7.1}$$

.

Αν το z_0 είναι πόλος τάξης k της $f(z)$ τότε

$$a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right). \tag{7.2}$$

Θεώρημα 7.1.1 **(Το Θεώρημα Υπολοίπων του Cauchy)** *Αν f είναι μια αναλυτική συνάρτηση σε ένα χωρίο D εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο $\{z_1, \ldots, z_n\}$ από μεμονωμένες ανωμαλίες της $f(z)$ και γ είναι ένα κλειστό τόξο που περιέχει κανένα από τα $z_1, \ldots, z_n$ τότε*

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \eta(\gamma, z_k) \mathrm{Res}(f;\ z_k).$$

'Οπου

$$\eta(\gamma, z_k) = \int_\gamma \frac{dz}{z - a}$$

*είναι ένας ακέραιος αριθμός που λέγεται ο **δείκτης στροφής** της γ γύρω από το z_k.*

Θα ονομάζουμε ένα απλό κλειστό τόξο γ ***κανονικό*** αν για κάθε $a \notin \gamma$ ο δείκτης στροφής $\eta(\gamma, a)$ είναι ίσος με 0 ή 1. Σε αυτή την περίπτωση το σύνολο

$$\{z : \eta(\gamma, z) = 1\}$$

λέγεται το ***εσωτερικό*** του γ ενώ το σύνολο

$$\{z : \eta(\gamma, z) = 0\}$$

λέγεται το ***εξωτερικό*** του γ.

Θεώρημα 7.1.2 **(Το Θεώρημα Υπολοίπων του Cauchy)** *Αν f είναι μια αναλυτική συνάρτηση σε ένα χωρίο D εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο $\{z_1, \ldots, z_n\}$ από μεμονωμένες ανωμαλίες της $f(z)$ και γ είναι ένα κανονικό κλειστό τόξο που περιέχει τα $z_1, \ldots, z_n$ στο εσωτερικό του. Τότε*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f\,; z_k).$$

Το επόμενο θεώρημα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για να προσδιορίζουμε τον αριθμό των ριζών μιας συνάρτησης στο εσωτερικό μιας κανονικής καμπύλης :

Θεώρημα 7.1.3 **(Θεώρημα του Rouché)** *υποθέτουμε ότι οι f, g είναι αναλυτικές μέσα και πάνω σε μια μια κανονική κλειστή καμπύλη γ και ότι*

$$|f(z)| > |g(z)|, z \in \gamma$$

Τότε

$$Z(f+g) = Z(f).$$

στο εσωτερικό της γ, όπου με $Z(f)$ συμβολίζουμε το πλήθος των ριζών της f.

7.2. Ασκήσεις

Άσκηση 7.2.1 *να βρείτε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των παρακάτω συναρτήσεων στις μεμονωμένες ανωμαλίες*

1.
$$\frac{1}{z^3 - z^5}$$

2.

$$\frac{z^4}{(z+1)^2}$$

3.

$$\frac{z^{2n+1}}{(z+1)^{n+1}}$$

4.

$$\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$$

5.

$$\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 7.2.2 *Να υπολογιστεί το*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)};\ z_0\right)$$

Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
Ασκήσεις
Ο τύπος του υπολοίπου
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 50 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

αν το z_0 είναι
(α) Ρίζα τάξης n για την $f(z)$

(β) Πόλος τάξης n για την $f(z)$ **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.3 *Να δείξετε ότι αν $a > 0$*

$$\int_0^\pi \tan(t + ai) = \pi i$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 7.2.4 *Να βρείτε τον αριθμό των ριζών του πολυωνύμου*

$$z^4 - 5z + 1$$

στο $|z| < 1.$ **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.5 *Να βρείτε τον αριθμό των ριζών του πολυωνύμου*

$$z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$$

στο $|z| < 1.$ **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.6 *Να βρείτε τον αριθμό των ριζών του πολυωνύμου*

$$z^4 - 7z^3 + 10$$

στο $|z| < 1.$ **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.7 *Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση*

$$e^z - 4z^n + 1 = 0$$

με $|z| < 1$; **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.8 *Να υπολογίσετε το ολόκληρωμα*

$$\int_{|z|=r} \sin \frac{1}{z} dz.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 7.2.9 *Να αποδείξετε ότι*

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} dz.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω να δείξετε ότι

$$\binom{2n}{n} \leq 4^n.$$

Υπόδειξη-Λύση

Αποδείξεις

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι οι ιδιότητες αυτές ισχύουν στους πραγματικούς αριθμούς για τις αντίστοιχες πράξεις. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.1

Υπόδειξη: Για τα $(a), (b)$ πολλαπλασιάστε αριθμητή και παρανομαστή με το συζυγή του παρανομαστή. Για το (c) $44 = 4 \cdot 10 + 1$, για το (d) να γράψετε τον αριθμό σε τριγωνομετρική μορφή. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.2

Υπόδειξη: Εύκολη. ☐

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.3

Υπόδειξη: Να θέσετε $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ και κάντε τις πράξεις. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.4

Υπόδειξη: $|z|^2 = z\,\bar{z}$ και η ΑΣΚΗΣΗ 1.2.4. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.5

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε γενικές ιδιότητες. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.6

Υπόδειξη: □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.7

Υπόδειξη: Λύνουμε όπως στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.8

Υπόδειξη: (α) Να χρησιμοποιήσετε το ότι $|z|^2 = z\bar{z}$. ή (β) Έστω ότι $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$. Για την 1.18, παρατηρούμε ότι αυτή είναι ισοδύναμη με την $x_1x_2 + y_1y_2 \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)\ (x_2^2 + y_2^2)}$.
Για την 1.19, $|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2|$ και εφαρμόζουμε την 1.18. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.9

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.10

Υπόδειξη: Μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.11

Υπόδειξη: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.12

Υπόδειξη: Αν $\lim_n |a_n| = 0$ τότε και $\lim_n a_n = 0$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.13

Υπόδειξη: Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$a + ib \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

είναι ισομορφισμός.

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.14

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.15

Υπόδειξη:

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.16

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$|z - z_0| = r \;\text{ αν και μόνο αν }\; |T(z) - T(z_0)| = r|a|.$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.17

Υπόδειξη:

$$|z - z_0| = r \Longleftrightarrow |z - z_0|^2 = r^2$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.18

Υπόδειξη: ☐

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.20

Υπόδειξη: Η τριγωνική ανισότητα. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.21

Υπόδειξη: Ο τύπος της γεωμετρικής σειράς. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.23

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρική μορφή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.24

Υπόδειξη: □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.25

Απόδειξη: θα δείξουμε την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης: $z = x + iy, z' = x' + iy'$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί τότε

$$z + z' = (x + x') + i(y + y') = (x' + x) + i(y' + y) = z' + z.$$

Για τον πολλαπλασιασμό:

$$zz' = xx' - yy' + i(xy' + x'y) = x'x - y'y + i(x'y + y'x) = z'z$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.1

Απόδειξη:

$$(a)\ \frac{1}{i} = \frac{-i}{(-i)i} = -i = 0 + (-1)i$$

$$(b)\ \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = 0 + 1i$$

$$(c)\ i^{45} = i^{44}i = (i^4)^{10}i = 1^{10}i = i$$

$$(d)\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{17} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{17} = \cos\frac{17\pi}{4} + i\sin\frac{17\pi}{4} =$$

$$= \cos(4\pi + \tfrac{\pi}{4}) + i\sin(4\pi + \tfrac{\pi}{4}) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.2

Απόδειξη: Ένας μιγαδικός αριθμός είναι πραγματικός αν και μόνο αν το φανταστικό του μέρος είναι ίσο με μηδέν. $z = \bar{z} \Leftrightarrow x + iy = x - iy \Leftrightarrow 2yi = 0 \Leftrightarrow y = 0.$ $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.3

Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
Ασκήσεις
Ο τύπος του υπολοίπου
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 79 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη:

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} =$$

$$\overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2) =$$

$$= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \overline{z_1}\ \ \overline{z_2}.$$

$$\frac{\overline{z_1}}{z_2} = \overline{\left(\frac{z_1\ \ \overline{z_2}}{z_2\ \ \overline{z_2}}\right)} = \quad (\text{γιατί};;;) \quad = \frac{1}{z_2\ \ \overline{z_2}}\ \overline{z_1}\ \ \overline{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}\ z_2}{z_2\ \overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.4

Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
Ασκήσεις
O τύπος του υπολοίπου
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Θα δείξουμε την σχέση 1.15 οι άλλες προκύπτουν όμοια. Από τη σχέση 1.13 έχουμε ότι

$$|z_1 z_2|^2 = z_1\ z_2\ \overline{z_1\ z_2} = z_1\ z_2\ \overline{z_1}\ \ \overline{z_2} = (z_1\ \overline{z_1})\ (z_2\ \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

Όμοια για τα υπόλοιπα. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.5

Απόδειξη: $\overline{(1+i)^{11}} = \overline{1+i}^{11} = (1-i)^{11}$

$|(1+i)^{11}| = |1+i|^{11} = (\sqrt{2})^{11} = 2^5\sqrt{2}.$ $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.6

Απόδειξη: Αν $b = 0$ τότε ο z είναι πραγματικός αριθμός και

$$w = \pm\sqrt{a}, \quad \text{αν} \quad a \geq 0$$

και

$$w = \pm i\sqrt{|a|}, \quad \text{αν} \quad a < 0$$

υποθέτουμε λοιπόν πως $b \neq 0$. Τότε $y \neq 0$ γιατί αν $y = 0$ θα είχαμε αναγκαστικά ότι $a = 0$. Θέλουμε

$$(x + iy)^2 = a + bi$$

ή ισοδύναμα

$$x^2 - y^2 + i(2xy) = a + bi$$

που μας οδηγεί να λύσουμε το σύστημα

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b$$

Αφού $y \neq 0$ και $2xy = b$ θα έχουμε ότι

$$x = \frac{b}{2y}$$

οπότε

$$\frac{b^2}{4y^2} - y^2 = a$$

και συνεπώς θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$4y^4 + 4ay^2 - b^2 = 0$$

και να δεχτούμε μόνο τις πραγματικές τιμές του y. Άρα

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{b}{\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{b}{|b|}\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}$$

άρα οι μιγαδικού αριθμοί που ζητάμε είναι

$$w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{b}{|b|}\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}} + i\left(\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right), \quad w_2 = -w_1$$

(ο αριθμός $\frac{b}{|b|}$ που εμφανίζεται είναι το πρόσημο του b.)

Αν $z = i$ τότε $a = 0,\ b = -1$ και αντικαθιστώντας στον προηγούμενο τύπο βρίσκουμε ότι οι «τετραγωνικές ρίζες » του $-i$ είναι

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.7

Απόδειξη: Έστω

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Αν $\sqrt{\Delta}, \ -\sqrt{\Delta}$ είναι οι δύο μιγαδικοί αριθμοί w με την ιδιότητα $w^2 = \Delta$ (που υπολογίζονται όπως στη προηγούμενη άσκηση) τότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \ z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.8

Απόδειξη: (α)

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\ &= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2} = |z_1|^2+|z_2|^2+2\Re(z_1\bar{z}_2)\\ &\le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\bar{z}_2| = (|z_1|+|z_2|)^2.\end{aligned}$$

και παίρνουμε τις τετραγωνικές ρίζες.

(β) Η σχέση 1.18 ισοδυναμεί με την $|z_1+z_2|^2 \le (|z_1|+|z_2|)^2$. Έστω ότι $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$ τότε $|z_1+z_2|^2 = (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2 = (x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)+2(x_1x_2+y_1y_2)$. Επίσης $(|z_1|+|z_2|)^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| = (x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)+2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)\ (x_2^2+y_2^2)}$. Συνεπώς η σχέση 1.18 ισοδυναμεί με την $x_1x_2+y_1y_2 \le \sqrt{(x_1^2+y_1^2)\ (x_2^2+y_2^2)}$. Η τελευταία σχέση προκύπτει άμεσα από τη γνωστή **ανισότητα Cauchy- Schwarz**

$$|x_1x_2+y_1y_2| \le \sqrt{x_1^2+y_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2}. \tag{7.3}$$

Για να αποδείξουμε την 7.3 υψώνουμε στο τετράγωνο αμφότερα τα μέλη της και έχουμε ότι αυτή ισοδυναμεί με την

$$(x_1x_2+y_1y_2)^2 \le (x_1^2+y_1^2)\ (x_2^2+y_2^2)$$

ισοδύναμα

$$x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+2x_1x_2y_1y_2 \le x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2$$

ισοδύναμα

$$0 \le x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+y_1^2x_2^2$$

ισοδύναμα

$$0 \le (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2$$

η οποία προφανώς ισχύει.

Για την 1.19, $|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2|$ και εφαρμόζοντας την 1.18 έχουμε ότι

$$|z_1| \le |z_1 + z_2| + |z_2|$$

δηλαδή

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2|$$

Όμοια

$$|z_2| - |z_1| \le |z_1 + z_2|$$

άρα

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2|$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.9

Απόδειξη: Ας θέσουμε $\Re z = x,\ \Im z = y$.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{|x^2 + y^2 + 2|x|\,|y|} = |x| + |y|.$$

Για το αντίστροφο παρατηρούμε ότι

$$(|x| - |y|)^2 \geq 0$$

άρα

$$x^2 + y^2 \geq 2|x|\,|y|$$

άρα

$$2(x^2 + y^2) \geq x^2 + y^2 + 2|x||y|$$

άρα

$$\sqrt{2(x^2 + y^2)} \geq \sqrt{x^2 + y^2 + 2|x||y|}$$

άρα

$$\sqrt{2}|z| \geq |x| + |y|.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.10

Απόδειξη: Αν βρούμε δύο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια τότε θα έχουμε δείξει ότι η ακολουθία δεν συγκλίνει.

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$z^n = \cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}$$

Αν $n_k = 8k, k = 1, 2, \ldots$

$$a_{n_k} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1, \quad n_k = 8k, k = 1, 2, \ldots$$

Συνεπώς

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 1$$

Αν $m_k = 8k + 2, k = 1, 2, \ldots$

$$a_{m_k} = i, k = 1, 2, \ldots$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{m_k} = i$$

Η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ έχει δύο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια. Συνεπώς δεν συγκλίνει. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.11

Απόδειξη: Αν η ακολουθία συνέκλινε σε κάποιο όριο τότε θα ήταν φραγμένη. Αλλά $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ που συνεπάγεται ότι η ακολουθία δεν είναι φραγμένη. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.12

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 90 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έστω

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{13}{18}} < 1.$$

Συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

Που συνεπάγεται πως

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.13

Απόδειξη: Έστω M να είναι το σύνολο των πινάκων της μορφής

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

και $f : \mathbb{C} \to M$ η απεικόνιση με

$$f(z) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, a = \Re z, b = \Im z.$$

Αν $z = a + ib, z' = a' + ib'$ τότε

$$f(z+z') = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ -b-b' & a+a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b \\ -b' & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{bmatrix} = f(z) + f(z')$$

και

$$f(zz') = \begin{bmatrix} aa' - bb' & ab' + a'b \\ -(ab' + a'b) & aa' - bb' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b \\ -b' & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{bmatrix} = f(z)f(z')$$

Η f είναι 1-1 και επί και συνεπώς είναι ισομορφισμός. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.14

Απόδειξη :

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.15

Απόδειξη: Ο $z+\frac{1}{z}$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν

$$z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}$$

Θα έχουμε

$$z+\tfrac{1}{z}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}} \Longleftrightarrow$$

$$z+\tfrac{1}{z}-\bar{z}-\frac{1}{\bar{z}}=0 \Longleftrightarrow$$

$$(z-\bar{z})-\frac{z-\bar{z}}{|z|^2}=0 \Longleftrightarrow$$

$$(z-\bar{z})\left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2}\right)=0 \Longleftrightarrow$$

$$z=\bar{z} \quad \text{ειτε} \quad |z|^2=1 \Longleftrightarrow$$

$$\Im z=0 \text{ειτε} \quad |z|=1$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.16

Απόδειξη:

Παρατηρούμε ότι

$$|z - z_0| = r \ \text{ αν και μόνο αν } \ |T(z) - T(z_0)| = r|a|.$$

πράγματι, αφού $a \neq 0$

$$|z - z_0| = r \Longleftrightarrow$$

$$|a||z - z_0| = r|a| \Longleftrightarrow$$

$$|az - az_0| = r|a| \Longleftrightarrow$$

$$|az + b - (az_0 + b)| = r|a| \Longleftrightarrow |T(z) - T(z_0)| = r|a|.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.17

Απόδειξη:

$$|z - z_0| = r \iff$$

$$|z - z_0|^2 = r^2 \iff$$

$$(z - z_0)\overline{z - z_0} = r^2 \iff$$

$$z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 - r^2 = 0$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.18

Απόδειξη: Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία που συγκλίνει στο a. Έστω $\epsilon > 0$ και έστω n_0 τέτοιο ώστε

$$|a_n - a| < \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Αλλά τότε από την τριγωνική ανισότητα για μιγαδικούς

$$||z| - |w|| \leq |z - w| \leq |z| + |w|$$

θα έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$,

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \epsilon.$$

Συνεπώς, η ακολουθία $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ που συγκλίνει στο $|a|$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού η ακολουθία $(-1)^n$ δεν συγκλίνει αλλά ακολουθία των απόλυτων τιμών της συγκλίνει. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.19

Απόδειξη:

1. Είναι φραγμένη αφού
$$|i^n| = |i|^n = 1^n = 1.$$

2. Είναι φραγμένη αφού
$$\left|\frac{i}{1+i}\right|^n = \frac{|i|^n}{|1+i|^n} = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \leq 1$$

3. Είναι φραγμένη αφού
$$\left|\frac{i+1}{1-i}\right|^n = 1$$

4. Είναι φραγμένη αφού
$$\left|\frac{n}{n+2} + i\frac{n+3}{n+4}\right| = \sqrt{\frac{n^2}{(n+2)^2} + \frac{(n+3)^2}{(n+4)^2}} \leq \sqrt{2}$$

5. Δεν είναι φραγμένη αφού αν το n είναι της μορφής $n = 4k+2$ (δηλαδή όταν διαιρείται με 4 αφήνει υπόλοιπο 2) ο όρος της ακολουθίας θα είναι
$$-2n$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.20

Απόδειξη: Έστω

$$M = \sup\{|a_n| : n = 1, 2, \dots\}.$$

1.

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \frac{1}{n} nM = M.$$

2.

$$\left| \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \right| = \sqrt[n]{|a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n|} \leq \sqrt[n]{M^n} = M.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.21

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 99 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη:

1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i+n}{ni-3+i}$ σεν συγκλίνει γιατί η ακολουθία που την ορίζει, $\left(\frac{i+n}{ni-3+i}\right)_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι μηδενική.

2. Δεν συγκλίνει.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.22

Απόδειξη:

1. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ συγκλίνει όταν $|z| < 1$ και έχουμε
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$
Συνεπώς αφού
$$\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$
Θα έχουμε πως
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = \frac{1}{1-i} = 1+i$$
2. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του γινομένου Cauchy. Πολλαπλασιάζουμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$ με τον εαυτό της και έχουμε
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\frac{(1+i)^n}{2^n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(1+i)^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$$
Απ το προηγούμενο ερώτημα
$$(1+i)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(1+i)^n}{2^n} + 1 + i$$
και συνεπώς
$$\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(1+i)^n}{2^n} = (1+i)^2 - (1+i) = -1+i.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.23

Απόδειξη: (α)

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{i} \qquad &= \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} \\
&= \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}2
\end{aligned}
$$

$k = 0, 1, 2.$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.24

Απόδειξη:

1. Αφού σε αυτή την περίπτωση $x = y$ το σύνολο είναι η ευθεία

$$y = x$$

2. Είναι το ανοικτό ημιεπίπεδο αριστερά από την ευθεία $x = 1$.
3. Είναι η ανοιχτή λωρίδα μεταξύ των ευθειών $x = 1$ και $x = -1$.
4. Είναι το ανοιχτό ημιεπίπεδο πάνω από από τον πραγματικό άξονα.
5. Ο ανοιχτός δίσκος με κέντρο το 0 και ακτίνα 2.
6. Ο ανοικτός δακτύλιος που περικλείεται μεταξύ του κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας 100 και του κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας 1.
7. Όλο το επίπεδο εκτός από την ημιευθεία των αρνητικών αριθμών.
8. Είναι το μέρος του επιπέδου που περικλείεται μεταξύ των ευθειών $y = \tan\frac{\pi}{6}x$ και $y = \tan\frac{\pi}{4}x$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.25

Απόδειξη: Τα τρία πρώτα είναι ανοικτά. Το τέταρτο όχι. Οι κλειστές θήκες τους είναι αντίστοιχα:

1. $\{z : |z| \leq 3\}$
2. $\{z : 1 \leq |z| \leq 3\}$
3. $\{zz : \Im z \geq 1\}$
4. $\{z : \Re z \leq 5\} \cup \{11\}$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.26

Απόδειξη: Είναι όλα συνεκτικά εκτός από το (4).

Κανένα δεν είναι συμπαγές γιατί ένα σύνολο είναι συμπαγές υποσύνολο του επιπέδου αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Τα (1) και (2) έχουν κλειστή θήκη συμπαγές σύνολο γιατί είναι φραγμένα. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.27

Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
Ασκήσεις
Ο τύπος του υπολοίπου
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 106 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Το σύνολο

$$C = \{z : |z| = 1\}$$

είναι συνεκτικό αλλά όχι πολυγωνικά συνεκτικό, αφού δεν είναι δυνατόν να περιέχει ευθύγραμμα τμήματα (ΓΙΑΤΙ ;). □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.28

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τις εξισώσεις Cauchy-Riemann. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.1

Υπόδειξη: □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.2

Υπόδειξη: Να γράψετε το z σε πολική μορφή. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.5

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.4

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την άσκηση 2.2.4 □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.5

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.6

Υπόδειξη: Εξισώσεις των Cauchy Riemann $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.7

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.8

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.9

Υπόδειξη: Ιδιότητες των ορίων. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.10

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.11

Υπόδειξη: Η $f(z)$ θα είναι $f(z) = u(x, y) + iv(y, y)$ με $v(y, y) = 0$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.12

Υπόδειξη: Δουλεύουμε όπως ακριβώς στην προηγούμενη άσκηση. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.13

Υπόδειξη: Να γράψετε τις τις εξισώσεις Cauchy-Riemann για την $f(z)$ και για την $f'(z)$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.14

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.15

Υπόδειξη :Αρκεί να δείξουμε πως για κάθε φυσικό N υπάρχει ένα n με $\sqrt[n]{n!} > N$. Αν $n > M$ τότε

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots M - 1 \cdot (M \cdot M + 1 \cdots n) > (M - 1)! M^{n-M+1}.$$

Επίσης χρησιμοποιήσετε το ότι για κάθε θετικό αριθμό ϑ

$$\lim_n \sqrt[n]{\vartheta} = 1.$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.16

Υπόδειξη: Δουλεύουμε όπως στην άσκηση 2.2.15 □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.17

Υπόδειξη: Το Θεώρημα 2.1.6. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.18

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τους ορισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.19

Υπόδειξη: Γράφουμε το a σε τριγωνομετρική μορφή

$$a = re^{i\vartheta}.$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.20

Υπόδειξη: Εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.24

Υπόδειξη: Γράφουμε το a σε τριγωνομετρική μορφή

$$a = re^{i\vartheta}.$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.22

Υπόδειξη: Να θέσετε

$$w = e^{iz}$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.23

Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
Ασκήσεις
Ο τύπος του υπολοίπου
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Αν z είναι ρίζα του πολυωνύμου τότε

$$(1-z)P(z)=0$$

που συνεπάγεται ότι

$$-a_0+(a_0-a_1)z+(a_1-a_2)z^2+\cdots+(a_{n-1}-a_n)z^n+a_nz^n=0.$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.24

Απόδειξη: Έχουμε ότι

$$f(z) = x^2 + y^2 + 0i$$

συνεπώς

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)2y_0, \quad i\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2ix_0$$

και θα ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = i\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

αν και μόνο αν $x_0 = y_0 = 0$. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.1

Απόδειξη: $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.2

Απόδειξη :Αν

$$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

τότε

$$\bar{z} = \rho(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)$$

και

$$z^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$$

συνεπώς

$$\overline{z^n} = \overline{\rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta} = \rho^n(\cos n\vartheta - i\sin n\vartheta) = \bar{z}^n$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.5

Απόδειξη:Αν

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

τότε

$$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{N} a_n z^n} = \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n z^n} = \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n}\,\overline{z^n} = \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n}\,\overline{z}^n$$

Αλλά κάθε a_n είναι πραγματικός αριθμός και συνεπώς $\overline{a_n} = a_n$. Καταλήγουμε πως

$$\overline{P(z)} = \sum_{n=0}^{N} a_n \overline{z}^n = P(\bar{z}).$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.4

Απόδειξη: Από την άσκηση 2.2.4, αν ένα πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές θα ισχύει

$$P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$$

Συνεπώς αν ρ είναι μια ρίζα του $P(z)$

$$P(\bar{\rho}) = \overline{P(\rho)} = \bar{0} = 0.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.5

Απόδειξη: Από την **Πρόταση 3.1** το σύνολο A των σημείων όπου η $f(z)$ παραγωγίζεται είναι υποσύνολο του συνόλου Γ. Από τον ορισμό η f λέγεται αναλυτική σε ένα σημείο αν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αλλά και σε μια ολόκληρη περιοχή του σημείου (ισοδύναμα, σε έναν ανοιχτό δίσκο με κέντρο το σημείο αυτό). Συνεπώς η f είναι αναλυτική σε ένα σημείο z αν και μόνο αν το z ανήκει στο εσωτερικό του A. Αλλά αν το Γ δεν έχει εσωτερικό δεν θα έχει ούτε και το A. Συνεπώς η f δεν θα είναι αναλυτική σε κανένα σημείο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.6

Απόδειξη: Από τις εξισώσεις των Cauchy Riemann θα έχουμε ότι

$$3x^2 = 2y, \quad 0 = -0$$

και καταλήγουμε ότι η $f(z)$ είναι παραγωγίσιμη σε αυτά τα $z = x + iy$ με $y = \frac{3}{2}x^2$ δηλαδή στα σημεία που βρίσκονται πάνω στην παραβολή με εξίσωση $y = \frac{3}{2}x^2$. Επειδή το σύνολο

$$\Gamma = \{(x, y) : y = \frac{3}{2}x^2\}$$

των σημείων αυτών δεν έχει εσωτερικό στο επίπεδο συμπεραίνουμε ότι η $f(z)$ δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο του επιπέδου. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.7

Απόδειξη: Έστω

$$u(x,y) = x + ay, \quad v(x,y) = bx + cy$$

Τότε η f θα είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $z = x + iy$ αν και μόνο αν στο σημείο αυτό ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy Riemann

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

Αντικαθιστώντας

$$1 = c \qquad b = -a$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική

$$f(z) = x + ay + i(-ax + y) = x + iy + a(-ix + y) = x + iy - ai(x + iy) = (1 - ai)z.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.8

Απόδειξη: Αν $f(z) = u + iv$ τότε

$$u = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$u(0,0) = v(0,0) = 0$$

και

$$u_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$v_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = \lim_{x \to 0} \frac{-y}{y} = -1$$

και όμοια

$$v_x(0,0) = 1, \quad v_y(0,0) = 1$$

και συνεπώς οι εξισώσεις Cauchy-Riemann ικανοποιούνται. Θα δείξουμε ότι το όριο

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{(x^2+y^2)(x+iy)} = \lim_{z \to 0} \frac{(1+i)(x^4 + y^4 + ixy(y^2 - x^2))}{(x^2+y^2)^2}$$

δεν υπάρχει. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει.

Αν πάρουμε το $z \to 0$ κατα μήκος της ευθείας $y = x$ θα έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{(1+i)2x^4}{4x^4} = \frac{1+i}{2}$$

Αν πάρουμε το $z \to 0$ κατα μήκος της ευθείας $y = 0$ θα έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{(1+i)x^4}{x^4} = 1 + i$$

που αντιφάσκει στην μοναδικότητα του ορίου. Συνεπώς το $f'(0)$ δεν υπάρχει. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.9

Απόδειξη: Τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν ορίζεται είναι τα $i, -i$ Θεωρώ ένα μιγαδικό $w \neq i, -i$. Από τον ορισμό της παραγώγου

$$\left(\frac{z}{z^2+1}\right)'_{z=w} = \lim_{z\to w} \frac{\dfrac{z}{z^2+1} - \dfrac{w}{w^2+1}}{z-w} =$$

$$= \lim_{z\to w} \frac{-wz(z-w)+(z-w)}{(z-w)(z^2+1)(w^2+1)} =$$

$$= \lim_{z\to w} \frac{(z-w)(-wz+1}{(z-w)(z^2+1)(w^2+1)} =$$

$$= \frac{1-w^2}{(w^2+1)^2}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.10

Απόδειξη: Αφήνετε σαν άσκηση. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.11

Απόδειξη :Αφού η συνάρτηση είναι αναλυτική στο D θα είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του D και θα ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Αν $f(z) = u(x, y) + iv(y, y)$ επειδή η f παίρνει μόνο πραγματικές τιμές θα έχουμε $v(x, y) = 0$

$$u_x = 0 \qquad u_y = 0$$

Το οποίο συνεπάγεται ότι η $U(x, y)$ θα είναι σταθερή. Συνεπώς η $f(z)$ θα είναι σταθερή στο D. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.12

Απόδειξη :Αφού η συνάρτηση είναι αναλυτική στο D θα είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του D και θα ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Αν $f(z) = u(x, y) + iv(y, y)$ επειδή η f παίρνει μόνο μιγαδικές τιμές θα έχουμε $u(x, y) = 0$ και συνεπώς

$$v_x = 0 \qquad v_y = 0$$

Το οποίο συνεπάγεται ότι η $v(x, y)$ θα είναι σταθερή. Συνεπώς η $f(z)$ θα είναι σταθερή στο D. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.13

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 144 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη:Αφού η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγώγισμη τότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{7.4}$$

Επιπλέον η παράγωγος της $f(z)$ είναι

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{7.5}$$

Οι εξισώσεις Cauchy-Riemann που αντιστοιχούν στην $f'(z)$ μέσω της παράστασης (7.5) είναι

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{7.6}$$

Αντικαθιστώντας στην (7.4) θα έχουμε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} = 0, \quad (x, y) \in D$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.14

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε πως για κάθε φυσικό N υπάρχει ένα n με $\sqrt[n]{n!} > N$. Αν M οποιοσδήποτε φυσικός και n με $n > M$ τότε

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots M - 1 \cdot (M \cdot M + 1 \cdots n) > (M-1)! M^{n-M+1}.$$

Αν N είναι ένας δοσμένος φυσικός και $M = 2N$ αν πάρω $n > M$

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt[n]{(M-1)!} M^{1-\frac{M-1}{n}} = M \sqrt[n]{\frac{(M-1)!}{M^{M-1}}}.$$

Αλλά $\vartheta = \frac{(M-1)!}{M^{M-1}}$ είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός και συνεπώς

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{(M-1)!}{M^{M-1}}} = 1$$

και άρα μπορούμε να βρούμε n με

$$\sqrt[n]{\frac{(M-1)!}{M^{M-1}}} > \frac{1}{2}.$$

Για το n αυτό

$$\sqrt[n]{n!} > \frac{1}{2} M = N$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.16

Απόδειξη: Δουλεύουμε όπως στην άσκηση 2.2.15 και έχουμε ότι

$$R = \lim_n \sqrt[2n]{n!} = \lim_n \sqrt{\sqrt[n]{n!}} = +\infty$$

Σημειώνουμε το γεγονός ότι αν $\lim_n a_n = +\infty$ τότε $\lim_n \sqrt[k]{a_n} = +\infty$ για κάθε φυσικό $k > 1$.
□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.17

Απόδειξη: Αν υπήρχε μια τέτοια δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αυτή από το (a) θα συνέπιπτε την

$$g(z) = 1$$

στα στοιχεία μιας ακολουθίας που συγκλίνει στο 0 και άρα από το Θεώρημα 2.1.6. $f(z) = 1$ οπότε θα έπρεπε $f'(0) = 0$ που αντιφάσκει στο (b). □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.18

Απόδειξη:

$$\sin z \cos w + \sin w \cos z =$$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}+\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} =$$

$$= \frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}+e^{i(z-w)}-e^{i(w-z)}+e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}+e^{i(w-z)}-e^{i(z-w)}}{4i} =$$

$$\frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}}{2i} =$$

$$\sin(z+w).$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.19

Απόδειξη:Γράφουμε το a σε τριγωνομετρική μορφή

$$a = re^{i\vartheta}$$

και θα έχουμε

$$e^z = a \Longleftrightarrow e^x e^{iy} = re^{i\vartheta}$$

απ όπου

$$x = \ln r, \quad y = \vartheta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

δηλαδή

$$z = \ln r + i(\vartheta + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.20

Απόδειξη:

$$z = \ln 3 + (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.24

Απόδειξη:Γράφουμε το a σε τριγωνομετρική μορφή

$$a = re^{i\vartheta}$$

και θα έχουμε

$$e^{iz} = a \Longleftrightarrow e^{ix}e^{-y} = re^{i\vartheta} \Longleftrightarrow$$

απ όπου

$$-y = \ln r, \quad x = \vartheta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

δηλαδή

$$z = (\vartheta + 2k\pi) - i\ln r, \ k \in \mathbb{Z}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.22

Απόδειξη: Θέτουμε

$$w = e^{iz}.$$

Αφού

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Η εξίσωση $\sin z = 2i$ γράφεται

$$w - \frac{1}{w} = -4 \Leftrightarrow w^2 + 4w - 1 = 0$$

που έχει λύσεις

$$w = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Στη συνέχεια προχωρούμε όπως στην άσκηση 2.2.22 για να βρούμε το z από το w. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.23

Απόδειξη: Αν z είναι ρίζα του πολυωνύμου τότε

$$(1-z)P(z) = 0$$

που συνεπάγεται ότι

$$-a_0 + (a_0 - a_1)z + (a_1 - a_2)z^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)z^n + a_n z^n = 0.$$

Συνεπώς

$$|(a_0 - a_1)z + (a_1 - a_2)z^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)z^n + a_n z^n| = a_0.$$

Παρατηρούμε ότι από την υπόθεση $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0$ ισχύει $a_0 - a_1 \geq 0, \ldots a_{n-1} - a_n \geq 0$.

Από την τριγωνική ανισότητα και την προηγούμενη παρατήρηση θα έχουμε ότι για κάθε ρίζα z.

$$a_0 \leq (a_0 - a_1)|z| + (a_1 - a_2)|z|^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)|z|^n + a_n|z|^n.$$

Αλλά αν $|z| < 1$ η προηγούμενη εξίσωση δίνει ότι

$$a_0 < (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + a_n = a_0,$$

άτοπο. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.24

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.1

Υπόδειξη: Το τόξο C δίνεται από τη συνάρτηση $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ όπου $\gamma(t) = e^{it}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.2

Υπόδειξη:

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.3

Υπόδειξη:

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.4

Υπόδειξη:Το Θεώρημα 3.1.1. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.5

Υπόδειξη: Το Θεώρημα 3.1.1. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.6

Υπόδειξη: Το ολοκλήρωμα $\int_C f(z)dz$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός που τον γράφουμε σε τριγωνομετρική μορφή:

$$\int_C f(z)dz = Re^{i\vartheta}.$$

Υπολογίζουμε από τον ορισμό το $\int_C f(z)dz$ και διαιρούμε με $e^{i\vartheta}$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.7

Υπόδειξη: Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής σε μια περιοχή του $z = 0$ θα έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ θα υπάρχει ένα $\delta > 0$ ώστε

$$|f(re^{it}) - f(0)| < \epsilon$$

όταν $r < \delta$ και $t \in [0, 2\pi]$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.8

Υπόδειξη: Η ανισότητα M-L. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.9

Υπόδειξη:

$$z = Re^{i\vartheta}, \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.10

Απόδειξη:

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_a^b \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = i(b-a).$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.1

Απόδειξη: Έχουμε ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{int}\, dt = \int_0^{2\pi} \cos nt\, dt + i\int_0^{2\pi} \sin nt\, dt$$
$$= \left[\frac{\sin nt}{n} - i\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i$$
$$\int_C \frac{1}{|z|} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{|\gamma(t)|} dt = \int_0^{2\pi} ie^{it} dt = 0$$
$$\int_C \frac{1}{\bar{z}} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{-it}} dt = \int_0^{2\pi} ie^{2it} = 0$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.2

Απόδειξη: Αν

$$f(t) = u(t) + iv(t)$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b f(t)dt} &= \overline{\int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt} \\
&= \int_a^b u(t)dt - i\int_a^b v(t)dt \\
&= \int_a^b (u(t) - iv(t))dt \\
&= \int_a^b \overline{f(t)}dt.
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.3

Απόδειξη: Ο δρόμος είναι το ημικύκλιο του κύκλου με κέντρο 0 και ακτίνα R που βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $\Im z \leq 0$.

$$\begin{aligned}
\int_C |z|\bar{z}dz &= \int_{-R}^{R} |x|x dx + i\int_0^{\pi} R^3 e^{-it} e^{it} dt \\
&= -\int_{-R}^{0} x^2 dx + \int_0^{R} x^2 dx = iR^3 \int_0^{\pi} dt \\
&= \pi R^3 i
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.4

Απόδειξη: Θεωρήστε ένα σημείο $z_0 \in \Omega$. Αν $z \in \Omega$, επειδή το Ω είναι κατά τόξα συνεκτικό υπάρχει μια πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα z_0, z συνεπώς και ένας δρόμος (= κατά τμήματα λεία καμπύλη) $\gamma : [0,1] \to \Omega$ με $\gamma(0) = z_0$ και $\gamma(1) = z$. Το Θεώρημα 3.1.1 συνεπάγεται πως

$$0 = \int_\gamma F'(z)dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(z) - F(z_0)$$

δηλαδή

$$F(z) = F(z_0)$$

για κάθε $z \in \Omega$. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.5

Απόδειξη: Αν $n \neq -1$ τότε

$$\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)' = z^n.$$

Από το Θεώρημα 3.1.1

$$\int_C z^n dz = \frac{R^{n+1}}{n+1}(e^{(n+1)i\pi} - 1)$$

και συνεπώς

$$\int_C z^n dz = \begin{cases} 0 & \text{αν το } n \text{ είναι περιττός} \\ -\dfrac{2R^{n+1}}{n+1} & \text{αν το } n \text{ είναι άρτιος} \end{cases}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.6

Απόδειξη: Το ολοκλήρωμα $\int_C f(z)dz$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός που τον γράφουμε σε τριγωνομετρική μορφή:

$$\int_C f(z)dz = Re^{i\vartheta}.$$

Αλλά

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it})ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} g(t)ie^{it}dt.$$

Συνεπώς

$$\int_0^{2\pi} g(t)ie^{it}dt = Re^{i\vartheta}.$$

όπου για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ θέτουμε $g(t) = f(e^{it})$ που είναι πραγματικός αριθμός από υπόθεση. Διαιρώντας με $e^{i\vartheta}$

$$i\int_0^{2\pi} g(t)e^{i(t-\vartheta)}dt = R.$$

ή

$$i\int_0^{2\pi} g(t)\cos(t-\vartheta)dt - \int_0^{2\pi} g(t)\sin(t-\vartheta)dt = R.$$

ο R είναι πραγματικός αριθμός και από υπόθεση οι $\int_0^{2\pi} g(t)\cos(t-\vartheta)dt$, $\int_0^{2\pi} g(t)\sin(t-\vartheta)dt$ είναι πραγματικοί αριθμοί και συνεπώς

$$\int_0^{2\pi} g(t)\cos(t-\vartheta) = 0$$

και έχουμε αφού $|g(t)| \leq 1$

$$R = \left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} g(t)\sin(t-\vartheta)dt\right| \leq \int_0^{2\pi} |\sin(t-\vartheta)|\, dt$$

Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
Ασκήσεις
Ο τύπος του υπολοίπου
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 171 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Όμως

$$\int_0^{2\pi} |\sin(t-\partial)|\,dt = \int_{-\partial}^{2\pi-\partial} |\sin t|\,dt =$$

$$\int_{-\partial}^{0} |\sin t|\,dt + \int_0^{2\pi} |\sin t|\,dt - \int_{2\pi-\partial}^{2\pi} |\sin t| =$$

$$\int_{-\partial}^{0} |\sin t|\,dt + \int_0^{2\pi} |\sin t|\,dt - \int_{-\partial}^{0} |\sin t| =$$

$$\int_0^{2\pi} |\sin t|\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \sin t dt = 4$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.7

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής σε μια περιοχή του $z = 0$ θα έχουμε θα υπάρχει ένα $\delta > 0$ ώστε

$$|f(re^{it}) - f(0)| < \frac{\epsilon}{2\pi}.$$

όταν $r < \delta$ και $t \in [0, 2\pi]$. Συνεπώς αν $r < \delta$

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} \tfrac{f(z)}{z} dz - 2\pi f(0) \right| &= \left| \int_0^{2\pi} \tfrac{f(re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt - i \int_0^{2\pi} f(0) dt \right| = \\ &= \left| \int_0^{2\pi} (f(re^{it}) - f(0)) dt \right| \le \\ &\le \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f(0)| \, dt \le \\ &\le \epsilon \int_0^{2\pi} dt < \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z} = 2\pi i f(0).$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.8

Απόδειξη:

1. Στο διάστημα $[-i, i]$ θα έχουμε ότι $x = 0$, $|y| \leq 1$ και άρα $|x^2 - iy^2| = |iy^2| \leq 1$. Το τόξο γ έχει μήκος $L = 2$ και συνεπώς .

$$\left|\int_\gamma (x^2 - iy^2)dz\right| \leq 1 \cdot 2 = 2 \leq 2.5$$

2. $x = \cos t, y = \sin t$ με απλούς υπολογισμούς

$$\int_\gamma (x^2 - iy^2)dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - i\sin^2 t)(-\cos t + i\sin t)dt = \frac{2}{3} + i\frac{4}{3}$$

άρα

$$\left|\int_\gamma (x^2 - iy^2)dz\right| = \frac{2}{3}\sqrt{5} \leq 2.5.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.9

Απόδειξη:

$$\left|\int_{|z|=R} \frac{dz}{(z-a)(z+a)}\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\vartheta}d\vartheta}{(Re^{i\vartheta}-a)(Re^{i\vartheta}+a)}\right|$$

Αλλά από την τριγωνική ανισότητα

$$|R-|a|| \leq |Re^{i\vartheta}-a|, \qquad |R+|a|^2| \leq |Re^{i\vartheta}+a|$$

και συνεπώς

$$\left|\frac{Re^{i\vartheta}}{(Re^{i\vartheta}-a)(Re^{i\vartheta}+a)}\right| \leq \frac{R}{|R^2-|a|^2|}.$$

Από την $M-L$ ανισότητα προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.10

Μιγαδικοί αριθμοί
➤ Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
➤ Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
➤ Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
➤ Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
➤ Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
➤ Ασκήσεις
Ο τύπος του υπολοίπου
➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 175 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.1

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλα την ταυτότητα

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

όπου η σύγκλιση ισχύει αν $|z| < 1$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.2

Υπόδειξη:Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλα την ταυτότητα

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

όπου η σύγκλιση ισχύει αν $|z| < 1$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.3

Υπόδειξη: □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.4

Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
Ασκήσεις
Ο τύπος του υπολοίπου
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 179 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.5

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.6

Υπόδειξη: Να θυμηθείτε την απόδειξη του Θεωρήματος του Liouville. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.7

Υπόδειξη: ☐

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.8

Υπόδειξη: □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.9

Υπόδειξη :Κάντε χρήση της ταυτότητας της διαίρεσης και του θεμελιώδους θεωρήματος της Άλγεβρας. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.11

Υπόδειξη : Να χρησιμοποιήσετε την άσκηση 2.2.5. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.11

Υπόδειξη: Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Liouville για την $\frac{1}{f}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.12

Υπόδειξη : Θεώρημα Μοναδικότητας □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.13

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιείστε την συνάρτηση $g(z) = e^{if(z)}$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.14

Υπόδειξη:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{f^2}.$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.15

Υπόδειξη: □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.16

Υπόδειξη :Αφού η σειρά είναι αναλυτική στο z_0 τότε θα έχει ένα ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά γύρω από το z_0. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.17

Υπόδειξη: Έστω $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ για $|z-a| < R$ τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n}.$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.18

Υπόδειξη :Να εφαρμόσετε την άσκηση 4.2.18. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.19

Υπόδειξη:Να θέσετε $w = \frac{z}{z-1}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.20

Απόδειξη: θα υπολογίσουμε την πρώτη περίπτωση και για την δεύτερη να εργαστείτε με εντελώς ανάλογο τρόπο.

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+1} = \int_\gamma \frac{e^z}{z+i}\frac{dz}{z-i}$$

και εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για την συνάρτηση

$$f(z) = \frac{e^z}{z+i}$$

στο σημείο $z_0 = i$ θα έχουμε

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+1} = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{e^i}{2i} \pi(\cos 1 + i \sin 1).$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.1

Απόδειξη:

$$\frac{1}{2z+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{2z}{3}+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{-2z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n z^n$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.2

Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
Ασκήσεις
Ο τύπος του υπολοίπου
Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-(1-i)+1-i}=\frac{1}{1-i}\frac{1}{1-\frac{z-(1-i)}{i-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(i-1)^{n+1}}(z-(1-i))^{n}.$$

Η ακτίνα σύγκλισης είναι

$$R=\lim\sqrt[n]{(|i-1|)^{n+1}}=|i-1|=\sqrt{2}.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.3

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z+i} \\ &= 1 - \frac{i}{z+i} \\ &= 1 - \frac{i}{(z-v)+v+i} \\ &= 1 - \frac{i}{v+i}\frac{1}{\frac{z-v}{v+i}+1} \\ &= 1 - i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-v)^n}{(v+i)^{n+1}} \end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.4

Απόδειξη:Μια συνάρτηση $f(z)$ λέγεται άρτια αν ισχύει για κάθε z

$$f(z) = f(-z)$$

Αν το ανάπτυγμα της $f(z)$ με κέντρο το 0 είναι

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

τότε

$$f(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n$$

Αφού

$$f(z) = f(-z)$$

Θα έχουμε ότι για n **περιττό**

$$a_n = -a_n$$

δηλαδή

$$a_n = 0.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.5

Απόδειξη: Έχουμε ότι για κάθε $k = 0, \ldots, n$

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy, αν C είναι ο μοναδιαίος κύκλος $C(0,1)$,και χρησιμοποιώντας την ανισότητα $M - L$ θα έχουμε

$$|a_k| = \left|\frac{P^{(k)}(0)}{k!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P(w)}{w^{n+1}}dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}2\pi = 1.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.6

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 201 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έστω

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

να είναι το ανάπτυγμα της $f(z)$ με κέντρο το 0 τότε αν $n > k$ και $C(0, R) = \{z : |z| = R\}$,

$$|a_n| = \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{C(0,R)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{A + BR^k}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{A + BR^k}{R^n}.$$

Επειδή $n > k$

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{A + BR^k}{R^n} = 0.$$

Συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να διαλέξουμε ένα $R > R_0$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$|a_n| \le \frac{A + BR^k}{R^n} < \epsilon$$

που σημαίνει ότι

$$a_n = 0, n > k$$

Άρα το $f(z)$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ k. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.7

Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
Ασκήσεις
Ο τύπος του υπολοίπου
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 202 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \ldots$$

να είναι το ανάπτυγμα της $f(z)$ με κέντρο το 0. Επειδή $f(0) = 1$ έχουμε ότι

$$a_0 = 1.$$

οπότε το ανάπτυγμα της $f'(z)$ με κέντρο το 0 θα είναι

$$f(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + (n+1)a_{n+1} z^n + \ldots.$$

Αφού $f(z) = f'(z)$ θα έχουμε ότι

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n}.$$

Οι προηγούμενες σχέσεις δίνουν ότι

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

για κάθε n, δηλαδή οι συντελεστές της σειράς είναι μοναδικά καθορισμένοι και

$$f(z) = e^z.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.8

Απόδειξη: Η συνάρτηση

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

που είναι αναλυτική στο $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ έχει ρίζες

$$\frac{1}{2\pi n} \in \Omega, \quad n = 1, 2, \ldots$$

που έχουν σημείο συσσώρευσης το 0. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.9

Απόδειξη: Ας υποθέσω ότι $a_n = 1$. Έστω ρ_1' να είναι μια ρίζα του πολυωνύμου, που γνωρίζουμε πως υπάρχει από το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας. Τότε διαιρώντας με $z - \rho_1'$

$$P(z) = (z - \rho_1')Q_1(z) + u$$

όπου $Q_1(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n - 1$ και μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1 και u σταθερός αριθμός που πρέπει να είναι ίσος με 0 αφού $P(\rho_1') = 0$. Άρα

$$P(z) = (z - \rho_1)Q_1(z)$$

Αν $n = 1$ φανερά $Q_1(z) = 1$ και η διαδικασία σταματά. Αν $n > 1$ το $Q_1(z)$ είναι μη σταθερό πολυώνυμο και συνεπώς έχει μια ρίζα ρ_2' και όπως πριν

$$Q_1(z) = (z - \rho_2')Q_2(z)$$

οπότε

$$P(z) = (z - \rho_1')(z - \rho_2')Q_2(z)$$

Φανερά η διαδικασία θα σταματήσει σε n βήματα δίνοντας μια ακολουθία από n αριθμούς (που κάποιοι μπορεί να είναι ίσοι μεταξύ τους)

$$\rho_1', \ldots, \rho_n'$$

με

$$P(z) = (z - \rho_1') \cdots (z - \rho_n').$$

Μαζεύοντας σε ομάδες τους ίσους όρους

$$P(z) = a_n(z - \rho_1)^{n_1} \cdots (z - \rho_k)^{n_k}$$

όπου $\rho_1, \ldots, \rho_k$ θα είναι οι διακεκριμένες ρίζες του πολυωνύμου και $n_1, \ldots, n_k$ θετικοί (μη μηδενικοί) ακέραιοι με $n_1 + \cdots + n_k = n$. Αν $a_n \neq 1$ τότε

$$P(z) = a_n(a_0/a_n + \cdots + z^n) = a_n P'(z)$$

και εφαρμόζω τα προηγούμενα στο $P'(z)$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.11

*Απόδειξη:*Έστω

$$P(z) = a_n(z-\rho_1')\cdots(z-\rho_n') \tag{7.7}$$

όπου $\rho_1', \ldots, \rho_n'$ οι n μη διακεκριμένες ρίζες του πολυωνύμου. Από την άσκηση 2.2.5 αν το ρ είναι μη πραγματική ρίζα του $P(z)$ τότε θα είναι και το $\bar{\rho}$, ο συζυγής μιγαδικός του. και συνεπώς στην παράσταση (7.7) οι μη πραγματικές ρίζες θα εμφανίζονται σε ζευγάρια

$$(z-\rho)(z-\bar{\rho}) = (z^2 - z(\rho+\bar{\rho}) + |\rho|^2)$$

που είναι πολυώνυμα δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές. Από αυτό προκύπτει η εξίσωση (4.1). Τέλος η εξίσωση (4.2) προκύπτει εξισώνοντας τους βαθμούς των πολυωνύμων στο πρώτο και δεύτερο μέλος της εξίσωσης (4.1). □

Πίσω στην Άσκηση 4.2.11

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 207 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ δεν μηδενίζεται για κανένα z και συνεπώς είναι ακέραια. Αφού $|f(z)| \geq 1$ για κάθε z θα έχουμε ότι $\frac{1}{|f(z)|} \leq 1$ για κάθε z δηλαδή η $\frac{1}{f}$ είναι ακέραια και φραγμένη και συνεπώς από το θεώρημα του Liouville θα είναι σταθερή. Άρα και η $f(z)$ θα είναι σταθερή. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.12

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι ταυτοτικά 0 στο A τότε θα υπάρχει $a \in A$ με $f(a) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A θα υπάρχει ένας ανοικτός δίσκος

$$D(a,r) = \{z : |z-a| < r\}$$

με

$$D(a,r) \subseteq A$$

και $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(a,r)$. Αλλά τότε $g(z) = 0$ για κάθε $z \in D(a,r)$ και από το θεώρημα μοναδικότητας (το A είναι συνεκτικό) η g θα είναι ταυτοτικά 0 σε όλο το A.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.13

Απόδειξη: Έστω

$$g(z) = e^{if(z)}$$

Η $g(z)$ είναι ακέραια σαν σύνθεση ακέραιων συναρτήσεων. Επειδή το φανταστικό μέρος $\Im f(z)$ της $f(z)$ είναι θετικό θα έχουμε ότι $e^{-\Im f(z)} \leq 1$ και συνεπώς.

$$|g(z)| = \left|e^{-\Im f(z) + i\Re f(z)}\right| = e^{-\Im f(z)} \leq 1.$$

Η $g(z)$ είναι ακέραια και φραγμένη και συνεπώς θα είναι σταθερή από το θεώρημα του Liouville. Συνεπώς η $|g(z)| = e^{-\Im f(z)}$ θα είναι σταθερή και συνεπώς το φανταστικό μέρος $\Im f(z)$ της $f(z)$ θα είναι σταθερό. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Cauchy-Riemann ακριβώς όπως και στην άσκηση 2.2.12 δείχνουμε ότι και το πραγματικό μέρος της $f(z)$ είναι σταθερό και συνεπώς και η $f(z)$ θα είναι σταθερή συνάρτηση. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.14

Απόδειξη: Η συνθήκη

$$\frac{f'(1/n)}{f(1/n)} = \frac{g'(1/n)}{g(1/n)}$$

για $n = 2, 3, 4, \ldots$ μας λέει ότι η αναλυτική συνάρτηση

$$h(z) = f'(z)g(z) - f(z)g'(z)$$

μηδενίζεται στα σημεία

$$z_n = \frac{1}{n}$$

για $n = 2, 3, \ldots$ τα οποία αποτελούν μηδενική ακολουθία που συγκλίνει στο 0 και από το θεώρημα της μοναδικότητας θα είναι ταυτοτικά ίση με 0 στο $D(0, 1)$.

Άρα η

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{f^2}$$

θα είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν στο $D(0, 1)$ και συνεπώς η $\frac{f}{g}$ είναι σταθερή στο $D(0, 1)$. □

Πίσω στην Άσκηση 4.2.15

Απόδειξη:Η συνάρτηση $g(z) = f(z) - z^2 \cos z$ είναι ακέραια αφού οι $f(z)$ και $z^2 \cos z$ είναι ακέραιες και από υπόθεση είναι φραγμένη και συνεπώς σταθερή. Άρα για κάποια σταθερά C θα έχουμε

$$f(z) = z^2 \cos z + C.$$

Επειδή $f(0) = 0$ θα έχουμε $C = 0$ και συνεπώς

$$f(z) = z^2 \cos z.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.16

Απόδειξη:Αφού η σειρά είναι αναλυτική στο z_0 τότε θα έχει ένα ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

όπου $|z - z_0| < R$ για κάποιο $R > 0$ και

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Αν συνέβαινε

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| > n! b_n$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ όπου $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = +\infty$$

τότε

$$\limsup \sqrt[n]{\frac{\left|f^{(n)}(z_0)\right|}{n!}} = +\infty$$

και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς θα ήταν ίση με 0 (δηλαδή δεν θα υπήρχε το ανάπτυγμα της $f(z)$ γύρω από το z_0) που είναι άτοπο αφού η δυναμοσειρά έχει θετική ακτίνα.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.17

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 213 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έστω $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ για $|z-a| < R$ τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n}.$$

Εξισώνοντας

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

Αυτό μας δίνει ένα άπειρο σύστημα εξισώσεων με άπειρους γνωστούς

$$a_0, a_1, \ldots, \qquad a_0, a_1, \ldots,$$

και άπειρους άγνωστους

$$c_0, c_1, c_2 \ldots$$

$$c_0 b_0 = a_0$$

$$c_0 b_1 + c_1 b_0 = a_1$$

$$c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 = a_2$$

$$c_0 b_3 + c_1 b_2 + c_2 b_1 + c_3 b_0 = a_3$$

....

$$c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \cdots + c_n b_0 = a_n$$

....

Παρατηρείστε ότι από τη μορφή του συστήματος η πρώτη εξίσωση δίνει το c_0, η πρώτη με τη δεύτερη το c_1 και γενικά οι πρώτες $n+1$ εξισώσεις προσδιορίζουν τα $c_0, \ldots, c_n$. Με τον κανόνα του Cramer (δηλαδή με ορίζουσες) βρίσκουμε

$$c_n = \frac{1}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ b_0 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & 0 & a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & a_n \end{vmatrix} \tag{7.8}$$

αφού

$$\begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{b_0^{n+1}} \neq 0$$

αφού η $g(a) = b_0 \neq 0$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.18

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 215 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Τα αναπτύγματα των $z, e^z + 1$ είναι αντίστοιχα:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 0, n \neq 1$$

$$e^z + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad b_0 = 2, \quad b_n = \frac{1}{n!}, n \neq 0.$$

Αν

$$\frac{z}{e^z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Θα έχουμε από την άσκηση 4.2.18

$$c_0 = 0$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.19

Απόδειξη:Θέτουμε

$$w = \frac{z}{z-1}.$$

και θα έχουμε ότι

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-1}} = e^{w+1} = e \cdot e^{w} = e \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}. \tag{7.9}$$

Επίσης

$$w = \frac{z}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad \text{αν} \quad |z| < 1$$

Αρα

$$w^k = z^k(1-z)^{-k} = z^k \sum_{0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n = \sum_{0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^{n+k}.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση 7.9 και θα έχουμε ότι ο n συντελεστής στο ανάπτυγμα Taylor της

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

θα είναι ο

$$a_n = e \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{1}{k!}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.20

Υπόδειξη: Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.1

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.2

Υπόδειξη: Άμεση συνέπεια της αρχής του μεγίστου. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.3

Υπόδειξη: □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.4

Υπόδειξη: Αρχή ανάκλασης του Schwarz. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.5

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.6

Υπόδειξη: Αρχή ανάκλασης Schwarz. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.7

Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση $g(z) = \frac{f(z)}{z^2}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.8

Υπόδειξη: Η αρχή ανάκλασης του Schwarz λέει ότι αν g είναι ακέραια συνάρτηση που παίρνει πραγματικές τιμές στους πραγματικούς τότε

$$g(z) = \overline{g(\bar{z})}.$$

Εφαρμόστε για την

$$g(z) = if(iz).$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.9

Απόδειξη: Ας κάνουμε μια απλή παρατήρηση: Αν A είναι ένα ανοικτό σύνολο τότε για κάθε $a \in A$ υπάρχουν $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ με $|\Re a_1| > |\Re a|$, $|\Re a_2| < |\Re a|$, $|\Im a_3| > |\Im a|$ και $|\Im a_4| < |\Im a|$. Αυτό προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι υπάρχει $r > 0$ ώστε ο δίσκος $D(a, r) = \{z' : |z - a| < r\}$ να περιέχεται στο A και το ζητούμενο a' είναι στο $D(a, r)$ (κάντε ένα σχήμα).

Αφού το Ω είναι συμπαγές σύνολο και οι $\Re f$ και $\Im f$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο Ω θα λαμβάνουν μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε κάποια σημεία του Ω. Θα δείξουμε ότι αυτά είναι στο σύνορο. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι η $\Re f$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο a και ότι το a δεν είναι στο σύνορο του Ω αλλά στο εσωτερικό του A. Το A είναι ανοικτό σύνολο και από το θεώρημα της ανοικτής απεικόνισης το $f(A)$ θα είναι ανοικτό και συνεπώς - αφού $f(a) \in f(A)$ θα μπορούμε να βρούμε ένα στοιχείο $b = f(a') \in f(A)$ με $|\Im f(a')| < |\Im f(a)|$ που είναι άτοπο γιατί η $\Im f$ παίρνει ελάχιστη τιμή στο a. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.1

Απόδειξη: Αφού η f είναι μια ακέραια συνάρτηση θα έχουμε πώς για κάθε n

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(u)}{u^{n+1}}du$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\vartheta})}{R^{n+1}e^{(n+1)\vartheta}}iRe^{i\vartheta}d\vartheta$$

Εφαρμόζοντας την αρχή του μεγίστου

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(Re^{i\vartheta})|}{R^n}d\vartheta \leq n!\frac{M(R)}{R^n}$$

Ας υποθέσουμε ότι $n \geq m$. Σε αυτή την περίπτωση

$$\lim_{R\to+\infty} n!\frac{M(R)}{R^n} = n!\lim_{R\to+\infty}\frac{M(R)}{R^m}\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R^{n-m}} = 0.$$

Συνεπώς αν $n \geq m$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Αν πάρουμε το ανάπτυγμα σε σειρά της ακέραιης συνάρτησης $f(z)$ με κέντρο το 0 τότε όλοι οι όροι τάξης μεγαλύτερης από $n-1$ θα είναι ίσοι με 0, που συνεπάγεται ότι η $f(z)$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n-1$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.2

Απόδειξη: Αν η f δεν ήταν σταθερή στο Ω τότε ούτε και η $|f|$ θα μπορούσε να είναι από την αρχή του μεγίστου αφού για κάθε $z \in \Omega$ υπάρχει $z' \in \Omega$ με $|f(z')| > |f(z)|$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.3

Απόδειξη: Ένα χωρίο είναι ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο. Αν f είναι μια αναλυτική συνάρτηση μη σταθερή ορισμένη σε ένα χωρίο Ω η εικόνα $f(\Omega)$ του Ω θα είναι ανοικτό σύνολο από το Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης και συνεκτικό αφού η εικόνα συνεκτικού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι συνεκτικό (γνωστό θεώρημα της τοπολογίας). Άρα το $f(\Omega)$ είναι χωρίο. □

Πίσω στην Άσκηση 5.2.4

Απόδειξη: Η Αρχή ανάκλασης του Schwarz μας λέει ότι η συνάρτηση f μπορεί να επεκταθεί σε μια συνάρτηση f^* που είναι αναλυτική στο $C^+ \cup (0,1) \cup \{z : \Im z < 0\}$.

Επειδή η f^* συμπίπτει με την $z^4 - 2z^2$ $(0,1)$ στο $(0,1)$ θα συμπίπτει με την $z^4 - 2z^2$ σε όλο το $C^+ \cup (0,1) \cup \{z : \Im z < 0\}$, λόγω του θεωρήματος μοναδικότητας **;;** και συνεπώς

$$f(i) = i^4 - 2i^2 = 1 - 2(-1) = 3.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.5

Απόδειξη: Αναπτύσσουμε την συνάρτηση $f(z)$ σε μια περιοχή $U = \{z : |z - z_0| < r\} \subseteq D$ γύρω από το σημείο a (το οποίο γίνεται αφού η συνάρτηση είναι αναλυτική σε όλο το ανοιχτό σύνολο D) και έχουμε:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n, \quad z \in U$$

Αφού $f^n(a) = 0$ για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ θα έχουμε πως η συνάρτηση θα είναι ταυτοτικά μηδέν στο U και συνεπώς και σε όλο το χωρίο D. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.6

Απόδειξη: Από την αρχή ανάκλασης του Schwarz. η συνάρτηση f μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά σε όλο το $\mathbb{C}$ όπου αν z είναι μιγαδικός αριθμός με $\Im z < 0$ τότε $\Im \bar{z} > 0$ και ορίζουμε

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

Επειδή για κάποιο $M > 0$ ισχύει $|f(z)| < M$ όταν $\Im z \geq 0$ θα έχω ότι και για z με $\Im z < 0$ θα ισχύει

$$|f(z)| = |\overline{f(\bar{z})}| = |f(\bar{z})| < M.$$

Συνεπώς η επέκταση της f είναι αναλυτική και φραγμένη σε όλο το $\mathbb{C}$ συνεπώς θα είναι σταθερή. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.7

Απόδειξη: Έστω

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^2}.$$

Η συνάρτηση $g(z)$ είναι αναλυτική στον δακτύλιο στο δακτύλιο R. Αν z ανήκει στο σύνορο του R τότε είτε $|z| = 1$ είτε $|z| = 2$ και από υπόθεση σε κάθε περίπτωση θα έχουμε

$$|g(z)| \leq 1.$$

Αλλάά από την αρχή του μεγίστου η $|g(z)| \leq 1$ για κάθε $z \in R$ άρα

$$|f(z)| \leq |z|^2$$

για κάθε $z \in R$. □

Πίσω στην Άσκηση 5.2.8

Απόδειξη: Από την αρχή ανάκλασης του Schwarz αν μια ακέραια συνάρτηση παίρνει πραγματικές τιμές στον πραγματικό άξονα τότε θα πρέπει να ισχύει

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})}. \tag{7.10}$$

Η συνάρτηση

$$g(z) = if(iz)$$

παίρνει πραγματικές τιμές στον πραγματικό άξονα γιατί από υπόθεση η f παίρνει φανταστικές τιμές στον φανταστικό άξονα. Άρα

$$g(z) = \overline{g(\bar{z})} \Leftrightarrow if(iz) = \overline{if(i\bar{z})} \Leftrightarrow f(iz) = -\overline{f(-i\bar{z})}.$$

αρα

$$f(iz) = -\overline{f(-i\bar{z})}.$$

Αν θέσουμε στη θέση του z το iz στην προηγούμενη εξίσωση θα έχουμε

$$f(-z) = -\overline{f(-i\overline{iz})} = -\overline{f(\bar{z})} = -f(z)$$

λόγω της εξίσωσης 7.10. □

Πίσω στην Άσκηση 5.2.9

Υπόδειξη: Θεώρημα Casorati-Weierstrass □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 6.2.1

Υπόδειξη: Σπάμε την παράσταση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 6.2.2

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 238 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 6.2.3

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το ανάπτυγμα της $\cos z$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 6.2.4

Υπόδειξη: Αρχή του Riemann. και Άσκηση 4.2.7. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 6.2.5

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 6.2.6

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 6.2.7

Απόδειξη: Η ανωμαλία στο z_0 δεν μπορεί να είναι αιρόμενη γιατί σε αυτή την περίπτωση το όριο $\lim_{z\to z_0} f(z)$ δεν μπορεί να είναι άπειρο (Θεώρημα 6.1.2) . Επειδή $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ θα υπάρχει μια τρυπημένη περιοχή D του z_0 όπου $|f(z)| > 1000$ για κάθε $z \in D$, και συνεπώς το σύνολο τιμών της f στο D δεν μπορεί να είναι πυκνό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, Από το Θεώρημα Casorati-Weierstrass η f δεν μπορεί να έχει ουσιώδη ανωμαλία στο z_0 και συνεπώς θα έχει πόλο. □

Πίσω στην Άσκηση 6.2.1

Απόδειξη:

1. Σπάμε την παράσταση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Αν $|z| < 1$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-3z+2} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \\
&= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n
\end{aligned}$$

Αν $1 < |z| < 2$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-3z+2} &= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{1}{z}}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{1}{z}}} \\
&= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n.
\end{aligned}$$

Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
Συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής z-Δυναμοσειρές
Ασκήσεις
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
Ασκήσεις
Αναλυτικές συναρτήσεις-τύπος του Cauchy-σειρές Taylor
Ασκήσεις
Ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων
Ασκήσεις
Μεμονωμένα ανώμαλα σημεία και σειρές Laurent
Ασκήσεις
Ο τύπος του υπολοίπου
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 245 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Αν $|z| > 2$ θα έχουμε πως

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-3z+2} &= -\frac{1}{z}\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{1}{z}}} + \frac{1}{z}\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{2}{z}}} \\
&= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 6.2.2

Απόδειξη:

1. Οι ρίζες της $z - z^3 = z(1-z)(1+z)$ είναι οι $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$ που είναι πόλοι πρώτης τάξης.
2. Οι ρίζες της $1 + z^4 = z^4 - i^2 = (z^2 + i)(z^2 - i)$ είναι οι
$$z = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}$$
που είναι πόλοι πρώτης τάξης.
3. Το $z = 1$ είναι πόλος τρίτης τάξης και το $z = \infty$ πόλος τάξης 5.
4. Τα $z = i$ και $z = -i$ είναι πόλοι τάξης 1.

□

Πίσω στην Άσκηση 6.2.3

Απόδειξη: Χρησιμοποιείστε το ανάπτυγμα της $\cos z$ και διαιρώντας με z^2 θα έχουμε

$$\frac{\cos z}{z^2} = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n+2)!}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 6.2.4

Απόδειξη: Έχουμε πως

$$0 \leq \lim_{z\to 0} |zf(z)| \leq \lim_{z\to 0}\left(|z|\sqrt{|z|} + \frac{z}{\sqrt{|z|}}\right) = 0$$

Συνεπώς

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$$

Από την αρχή του Riemann η ανωμαλία είναι αιρόμενη και συνεπώς η $f(z)$ επεκτείνεται σε αναλυτική συνάρτηση σε όλο το επίπεδο θέτοντας $f(0) = 0$. Παρατηρείστε ότι αν $|z| > 100$ τότε

$$|f(z)| \leq \frac{1}{10} + \sqrt{z} \leq 2\sqrt{|z|} \leq 2|z|$$

και συνεπώς από άστηση 4.2.7 η $f(z)$ θα είναι πολυώνυμο το πολύ πρώτου βαθμού. Αλλά αφού

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|f(z)|}{\sqrt{|z|}} \leq 2$$

θα πρέπει να είναι σταθερή. □

Πίσω στην Άσκηση 6.2.5

Απόδειξη: Αν $m < n$ τότε η $f + g$ έχει πόλο τάξης n αφού

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n (f(z) = 0, \ \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n g(z) \neq 0$$

θα έχουμε ότι

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n (f(z) + g(z)) \neq 0.$$

και αφού

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{n+1} (f(z) + g(z)) = 0$$

συμπεραίνουμε ότι η $f + g$ έχει πόλο τάξης n. Άρα γενικά αν $m \neq n$ η $f + g$ έχει πόλο τάξης $\max n, n$. Αν $m = n$ το μόνο που μπορούμε να συμπεράνουμε είναι ότι $f + g$ έχει πόλο τάξης $\leq m$ στο z_0(γιατι;).

Με τον ίδιο συλλογισμό δείχνουμε ότι η fg θα έχει γενικά πόλο τάξης $m + n$. Αν $m > n$ τότε η f/g θα έχει πόλο τάξης $m - n$ στο z_0.

Αν $m < n$ τότε η f/g θα έχει πόλο τάξης $n - m$ στο z_0.

Αν $m = n$ τότε η f/g θα έχει αιρόμενη ανωμαλία στο z_0. □

Πίσω στην Άσκηση 6.2.6

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 250 από 270
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Οι ρίζες της

$$z^4 + z^2 = z^2(z^2 + 1)$$

είναι $0, i, -i$ και συνεπώς

$$\frac{1}{z^4 + z^2} = \frac{A}{z} + \frac{A'}{z^2} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z+i}$$

με κατάλληλα A, A', B, C. Συγκρίνοντας τους παρανομαστές θα έχουμε $A = 0$ και άρα θα είναι

$$\frac{1}{z^4 + z^2} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z+i}$$

με κατάλληλα A, B, C. λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$A = 1, B = -\frac{1}{2i}, C = \frac{1}{2i}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 6.2.7

Υπόδειξη: Να εφαρμόσετε τους τύπους 7.1 και 7.2. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 7.2.2

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 7.2.2

Υπόδειξη :Να θέσετε

$$z = e^{ti}, t \in [0, 2\pi].$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 7.2.3

Υπόδειξη: □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 7.2.6

Υπόδειξη : Θεώρημα του Rouché. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 7.2.7

Υπόδειξη: Θεώρημα του Rouché. ☐

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 7.2.6

Υπόδειξη: ☐

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 7.2.7

Υπόδειξη: □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 7.2.8

Υπόδειξη: Το διώνυμο του Νεύτωνα. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 7.2.9

Απόδειξη:

1. Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$$

έχει πόλους στις ρίζες του $z^3 - z^5 = z^3(1 - z^2)$ που είναι η $z = 0$ με πολλαπλότητα 3, η $z = 1$ και η $z = -1$. Η

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

όπου

$$g(z) = 1$$

και

$$h(z) = z^3 - z^5.$$

Θα έχουμε

$$h'(z) = 3z^2 - 5z^4,$$

$$(z^3 f(z))'' = 2\frac{(1 - z^2)^2 + 4z}{(1 - z^2)^3}$$

Συνεπώς εφαρμόζοντας τους τύπους 7.1 και 7.2 θα έχουμε

$$\mathrm{Res}(f(z);\ 1) = \frac{1}{3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}(f(z);\ -1) = \frac{1}{3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1)^4} = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}(f(z);\ 0) = \frac{1}{2!}2 = 1$$

2. Έστω $f(z) = \dfrac{z^4}{(z+1)^2}$ Η $f(z)$ έχει ένα πόλο τάξης 2 στο $z = -1$. Αν θέσω

$$g(z) = (z+1)^2 f(z) = z^4$$

τότε

$$\mathrm{Res}(f(z);\ -1) = g'(z_0) = 3(-1)^3 = -3.$$

3. $f(z) = \dfrac{z^{2n+1}}{(z+1)^{n+1}}$ Η $f(z)$ έχει ένα πόλο τάξης $n+1$ στο $z = -1$. Αν θέσω

$$g(z) = (z+1)^{n+1} f(z) = z^{2n+1}$$

Επειδή

$$\frac{d^k}{dz^k} z^n = n(n-1)\cdots(n-k+1)z^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} z^{n-k}$$

Θα έχω

$$\frac{d^n}{dz^n} z^{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{(n-k)!} z^{n+1}$$

και τότε από τον τύπο 7.2

$$\mathrm{Res}(f(z);\ -1) = \frac{(2n+1)!}{n!(n-k)!} (-1)^{n+1}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 7.2.2

Απόδειξη: (α) Θα έχουμε ότι

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

όπου η $g(z)$ είναι μια κανονική συνάρτηση σε μια περιοχή του z_0 και $g(z_0) \neq 0$. Συνεπώς

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)};\ z_0\right) = n.$$

(β) Θα έχουμε ότι

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = -\frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

όπου η $g(z)$ είναι μια κανονική συνάρτηση σε μια περιοχή του z_0 και $g(z_0) \neq 0$. Συνεπώς

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)};\ z_0\right) = -n.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.2

Απόδειξη: θα έχουμε ότι

$$\int_0^{\pi} \tan(t + ai) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tan(t + ai)$$

Αν πάρουμε

$$z = e^{ti}, t \in [0, 2\pi]$$

θα έχουμε

$$\sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad dt = \frac{dz}{iz}.$$

Από αυτό παίρνουμε

$$\int_0^{\pi} \tan(t + ai) = -\frac{1}{2} \int_{|z|=1} \frac{z^2 - e^{2a}}{z^2 + e^{2a}} \frac{dz}{z}.$$

Αφού $a > 0$ στο εσωτερικό του κύκλου έχουμε ένα πόλο και μόνο στο 0. Συνεπώς

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^2 - e^{2a}}{z^2 + e^{2a}} \frac{1}{z};\ 0\right) = -1.$$

Από το Θεώρημα του υπολοίπου

$$\int_0^{\pi} \tan(t + ai) = -\frac{1}{2} 2\pi i(-1) = \pi i.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.3

Απόδειξη:αν πάρουμε $f(z) = -5z$ και $g(z) = z^4 + 1$
όταν $|z| = 1$
$$|f(z)| = 5$$
ενώ
$$|g(z)| \leq |z|^4 + 1 = 2$$
Συνεπώς
$$|g(z)| < |f(z)|$$
και από το θεώρημα του Rouché θα έχουμε η συνάρτηση $f(z) + g(z) = z^4 - 5z + 1$ θα έχει τόσες ρίζες όσες και η $-5z$ όταν $|z| < 1$, δηλαδή ακριβώς μία. □

Πίσω στην Άσκηση 7.2.6

Απόδειξη:αν πάρουμε $f(z) = -5z^4$ και $g(z) = z^7 + z^2 - 2$ θα έχουμε για $|z| = 1$

$$|f(z)| = 5|z|^4 = 5$$

ενώ

$$|g(z)| \leq |z|^7 + |z|^2 + 2 = 4$$

Συνεπώς

$$|g(z)| < |f(z)|$$

και από το θεώρημα του Rouché θα έχουμε η συνάρτηση $f(z) + g(z) = z^4 - 5z + 1$ θα έχει τόσες ρίζες όσες και η $-5z^4$ όταν $|z| < 1$, δηλαδή ακριβώς τέσσερις. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.7

Απόδειξη: Αν πάρουμε $f(z) = 10$ και $g(z) = z^4 - 7z^3$ όταν $|z| = 1$

$$|f(z)| = 10$$

ενώ

$$|g(z)| \leq 8$$

Συνεπώς

$$|g(z)| < |f(z)|$$

και από το θεώρημα του Rouché θα έχουμε η συνάρτηση $f(z)+g(z) = z^4-7z^3+10z^4-5z+1$ θα έχει τόσες ρίζες όσες και η 10 όταν $|z| < 1$, δηλαδή δεν θα έχει ρίζες με $|z| < 1$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.6

Απόδειξη: Αν πάρουμε $f(z) = -4z^n$ και $g(z) = e^z + 1$
όταν $|z| = 1$
$$|f(z)| = 4$$
ενώ
$$|g(z)| \leq 2.8 + 1 = 3.8$$
Συνεπώς
$$|g(z)| < |f(z)|$$
και από το θεώρημα του Rouché θα έχουμε η συνάρτηση $f(z)+g(z) = z^4-7z^3+10z^4-5z+1$ θα έχει τόσες ρίζες όσες και η $-4z^n$ όταν $|z| < 1$, Συνεπώς έχει n ρίζες. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.7

Απόδειξη:Το σημείο $z = 0$ είναι ουσιώδης ανωμαλία της συνάρτησης $\sin\frac{1}{z}$. η σειρά Laurent της συνάρτησης αυτής υπολογίζεται εύκολα από αυτήν του $\sin z$ με αντικατάσταση του z με $\frac{1}{z}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Συνεπώς $a_{-1} = 1$ και

$$\int_{|z|=r} \sin\frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.8

Απόδειξη: Ο αριθμός $\binom{n}{k}$ είναι ο συντελεστής του z^k στο ανάπτυγμα του $(1+z)^n$ και συνεπώς από το θεώρημα του υπολοίπου θα έχουμε ότι:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} dz.$$

Επίσης από την προηγούμενη σχέση

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz \leq 4^n.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 7.2.9