# Πανεπιστήμιο Αιγαίου

URL: http://www.aegean.gr

# Απειροστικός Λογισμός I

Νίκος Παπαλεξίου
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
832 00 Καρλόβασι
Σάμος

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

# Κεφάλαιο 1

# Πραγματικοί Αριθμοί

## 1.1. Φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί αριθμοί

Το σύνολο των **φυσικών** αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{N}$ και αποτελείται από τους αριθμούς:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Το άθροισμα και το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών είναι φυσικός αριθμός. Αν στους φυσικούς αριθμούς επισυνάψουμε το 0 και τους αντίθετούς τους, παίρνουμε το σύνολο $\mathbb{Z}$ των **ακεραίων** αριθμών:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}.$$

Το άθροισμα, το γινόμενο και η διαφορά δύο ακεραίων αριθμών είναι ακέραιος αριθμός. Στην συνέχεια ορίζουμε το σύνολο $\mathbb{Q}$ των **ρητών** αριθμών, ως το σύνολο όλων των κλασμάτων της μορφής $\frac{m}{n}$, όπου $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Δηλαδή έχουμε:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Το άθροισμα, το γινόμενο, η διαφορά και το πηλίκο δύο ρητών αριθμών είναι ρητός αριθμός.

## 1.2. Πραγματικοί αριθμοί

**Ορισμός 1.2.1** *Ένα μη κενό σύνολο $k$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις $(+)$, $(\cdot)$ ονομάζεται* **σώμα** *αν ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:*

1. *Για κάθε $x, y \in k$, $x + y \in k$.*

1$(i)$ *Για κάθε $x, y, z \in k$,$(x + y) + z = x + (y + z)$.*

1$(ii)$ *Υπάρχει ένα στοιχείο του $k$, που συμβολίζεται με το $0$, τέτοιο ώστε: για κάθε $x \in k$, $0 + x = x + 0 = 0$.*

1$(iii)$ *Για κάθε $x \in k$, υπάρχει ένα στοιχείο του $k$, που συμβολίζεται με $-x$, τέτοιο ώστε: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*

1$(iv)$ *Για κάθε $x, y \in k$, $x + y = y + x$.*

2. *Για κάθε $x, y \in k$, $x \cdot y \in k$.*

2$(i)$ *Για κάθε $x, y, z \in k$,$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.*

2$(ii)$ *Υπάρχει ένα στοιχείο του $k$, που συμβολίζεται με $1$, τέτοιο ώστε $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.*

2$(iii)$ *Για κάθε $x \in k$ με $x \neq 0$ υπάρχει ένα στοιχείο του $k$, που συμβολίζεται με $x^{-1}$, τέτοιο ώστε: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.*

2$(iv)$ *Για κάθε $x, y \in k$, $x \cdot y = y \cdot x$.*

2$(v)$ *Για κάθε $x, y, z \in k$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.*

**Ορισμός 1.2.2** *Ένα σύνολο $k$ ονομάζεται* **διατεταγμένο σώμα** *αν είναι σώμα και επιπλέον ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:*

3. *Υπάρχει ένα υποσύνολο $P$ του $k$, που ονομάζεται σύνολο των θετικών στοιχείων του $k$, τέτοιο ώστε:*

3$(i)$ *Για κάθε $x \in k$ ισχύει ακριβώς μία από τις τρεις σχέσεις: $x \in P$, $-x \in P$, $x = 0$.*

3(ii) *Αν* $x, y \in P$, *τότε* $x + y \in P$ *και* $x \cdot y \in P$.

**Παρατήρηση 1.2.3** *Οι ιδιότητες* $3(i), 3(ii)$ *καθορίζουν τη διάταξη του συνόλου* $k$ *με τον παρακάτω τρόπο:* $x < y$ *αν και μόνον αν* $y - x \in P$.

**Παράδειγμα 1.2.4** *Το σύνολο* $\mathbb{Q}$ *των ρητών αριθμών είναι ένα διατεταγμένο σώμα.*

Παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες 1, $1(i)$, $1(ii)$, $1(iii)$, $1(iv)$, $2(i)$, $2(ii)$, $2(iii)$, $2(iv)$, $2(v)$, $3(i)$, $3(ii)$.

**Ορισμός 1.2.5** *Ένα υποσύνολο* $A$ *του* $k$ *ονομάζεται* **άνω φραγμένο** *αν υπάρχει* $a \in k$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in A$ *να ισχύει,* $x \leq a$. *Κάθε τέτοιο* $a$ *ονομάζεται* **άνω φράγμα** *του* $A$. *Αν το άνω φράγμα* $a$ *του* $A$ *ανήκει στο σύνολο, τότε το* $a$ *ονομάζεται* **μέγιστο** *του συνόλου* $A$ *(συμβολισμός* $a = \max A$*).*

**Ορισμός 1.2.6** *Ένα υποσύνολο* $A$ *του* $k$ *ονομάζεται* **κάτω φραγμένο** *αν υπάρχει* $a \in k$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in A$ *να ισχύει,* $a \leq x$. *Κάθε τέτοιο* $a$ *ονομάζεται* **κάτω φράγμα** *του* $A$. *Αν το κάτω φράγμα του* $A$ *ανήκει στο σύνολο, τότε το* $a$ *ονομάζεται* **ελάχιστο** *του συνόλου* $A$ *(συμβολισμός* $a = \min A$*).*

**Ορισμός 1.2.7** **Άνω πέρας** *ή* **supremum** *ενός άνω φραγμένου συνόλου* $A$ *λέγεται ένα άνω φράγμα* $a$ *του* $A$ *το οποίο έχει την ιδιότητα:* $a \leq a'$ *για κάθε άνω φράγμα* $a'$ *του* $A$ *(συμβολισμός* $a = \sup A$*).*

**Ορισμός 1.2.8** **Κάτω πέρας** *ή* **infimum** *ενός κάτω φραγμένου συνόλου* $A$ *λέγεται ένα κάτω φράγμα* $a$ *του* $A$ *το οποίο έχει την ιδιότητα:* $a' \leq a$ *για κάθε κάτω φράγμα* $a'$ *του* $A$ *(συμβολισμός* $a = \inf A$*).*

Είναι φανερό ότι το supremum, αν υπάρχει, είναι μοναδικό. Πραγματικά, αν $a, a'$ είναι δύο suprema ενός συνόλου $A$ τότε $a \leq a'$ και $a' \leq a$, δηλαδή $a = a'$. Όμοια αποδεικνύουμε και την μοναδικότητα του infimum.

**Παρατήρηση 1.2.9** *Για μη κενά σύνολα $A$ που δεν είναι άνω φραγμένα, γράφουμε* $\sup A = +\infty$.

**Ορισμός 1.2.10** *Ονομάζουμε σύνολο των πραγματικών αριθμών, το μη κενό σύνολο $\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:*

(a) *Το $\mathbb{R}$ είναι διατεταγμένο σώμα.*

(b) *Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum (αξίωμα συνέχειας).*

**Παραδείγματα 1.2.11** *Εξετάζουμε τα σύνολα:*

$$A = \{0, 1, 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

Τα $A, B$ είναι άνω φραγμένα. Γι' αυτά τα σύνολα βλέπουμε ότι το 3 είναι ένα φράγμα τους. Επίσης βλέπουμε ότι $\max A = 3$. Δείχνουμε ότι $\sup B = 0$. Αν $x \in B$, τότε $x \le 0$ άρα το 0 είναι ένα άνω φράγμα του $B$. Αν $a$ είναι ένα άλλο φράγμα του $B$, τότε αποκλείεται $a < 0$ (διότι τότε $\frac{a}{2} < 0$, άρα και $\frac{a}{2} \in B$, και θα έπρεπε $\frac{a}{2} < a$, οπότε (αφού $a < 0$) και $\frac{1}{2} > 1$, που φυσικά είναι άτοπο). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $0 \le a$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

**Πρόταση 1.2.12** *Έστω $A$ ένα άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $\sup A \notin A$, τότε για κάθε $a' < \sup A$ υπάρχουν άπειρα στοιχεία $x \in A$ με*

$$a' < x < \sup A,$$

*δηλαδή αν το supremum ενός συνόλου $A$ δεν είναι maximum, τότε το σύνολο $A$ έχει άπειρα στοιχεία.*

**Απόδειξη**

## 1.3. Άρρητοι αριθμοί

Ήδη από την αρχαιότητα ήταν γνωστή η ύπαρξη πραγματικών αριθμών που δεν ήταν ρητοί. Για παράδειγμα το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου με πλευρά 1 δεν είναι ρητός αριθμός:

**Πρόταση 1.3.1** *Ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός αριθμός.* *Απόδειξη*

Προφανώς ισχύουν οι εγκλισμοί:

$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}.$$

Οι δύο πρώτοι εγκλισμοί είναι προφανείς ενώ ο τελευταίος είναι η πρόταση 1.3.1.

**Ορισμός 1.3.2** *Το σύνολο των πραγματικών αριθμών που δεν είναι ρητοί θα ονομάζονται* **άρρητοι** *αριθμοί.*

## 1.4. Αρχιμήδεια ιδιότητα

Πρώτα απ' όλα θα παραθέσουμε δύο ταυτότητες που θεωρούμε απαραίτητες για τη συνέχεια του μαθήματος:

• **Διώνυμο του Νεύτωνα:** Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$, ισχύει:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!}a^{n-i}b^i,\end{aligned}$$

όπου $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, με $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ και $0! = 1$.

• **Ανισότητα Bernoulli:**

(α) Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ και για κάθε $x > -1$ με $x \neq 0$ ισχύει:

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

(β) Για κάθε φυσικό αριθμό $n$ και για κάθε $x > -1$ ισχύει:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

**Εφαρμογή 1.4.1** *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$ με $x \neq 0$, $n + x > 0$ ισχύει:*

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

***Απόδειξη***

**Θεώρημα 1.4.2** *(Αρχιμήδεια ιδιότητα) Αν $\alpha > 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ να ισχύει $\beta < n\alpha$. Ειδικότερα, για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n$ με $\beta < n$.* ***Απόδειξη***

**Πόρισμα 1.4.3** *(Θεώρημα Ευδόξου) Για κάθε $\; > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_0$, ισχύει $\frac{1}{n} < \;$.* ***Απόδειξη***

**Παρατήρηση 1.4.4** *Σύμφωνα με το θεώρημα του Ευδόξου, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η ακολουθία $\frac{1}{n}$ έχει όριο το 0.*

**Πρόταση 1.4.5** *Μεταξύ δύο άνισων πραγματικών αριθμών $\alpha$, $\beta$ υπάρχουν άπειροι ρητοί και άρρητοι αριθμοί.* ***Απόδειξη***

## 1.5. Διαστήματα στο $\mathbb{R}$

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \le \beta$, τότε ονομάζουμε **διάστημα** του $\mathbb{R}$ ή απλά διάστημα με άκρα τα $\alpha$ και $\beta$ κάθε ένα από τα παρακάτω σύνολα:

•$I_1 = (\alpha, \beta) := \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$ ανοικτό διάστημα.
•$I_2 = [\alpha, \beta] := \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \le x \le \beta\}$ κλειστό διάστημα.
•$I_3 = [\alpha, \beta) := \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \le x < \beta\}$ κλειστό αριστερά και ανοικτό δεξιά διάστημα.
•$I_4 = (\alpha, \beta] := \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \le \beta\}$ ανοικτό αριστερά και κλειστό δεξιά διάστημα.

Βλέπουμε ότι: $\sup I_1 = \beta$, $\sup I_2 = \max I_2 = \beta$, $\sup I_3 = \beta$ και $\sup I_4 = \max I_4 = \beta$.

**Ορισμός 1.5.1** **Μήκος** *του διαστήματος με άκρα $\alpha$ και $\beta$ ονομάζουμε το μη αρνητικό αριθμό $\beta - \alpha$.*

Είναι φανερό ότι αν $\alpha = \beta$ τότε $(\alpha, \beta) = \emptyset$ (το κενό σύνολο) και $[\alpha, \beta] = \{\alpha\} = \{\beta\}$ (μονοσύνολα).

**Ορισμός 1.5.2** *Για $a \in \mathbb{R}$ ονομάζουμε* **μη φραγμένο διάστημα** *του $\mathbb{R}$ με άκρο $a$ κάθε ένα από τα μη φραγμένα σύνολα:*

•$J_1 = (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ *ανοικτό άνω φραγμένο διάστημα.*
•$J_2 = (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$ *κλειστό άνω φραγμένο διάστημα.*
•$J_3 = (a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < +\infty\}$ *ανοικτό κάτω φραγμένο διάστημα.*
•$J_4 = [a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le +\infty\}$ *κλειστό κάτω φραγμένο διάστημα.*

Είναι φανερό ότι $\sup J_1 = a$, $\sup J_2 = \max J_2 = a$ ενώ $\sup J_3 = \sup J_4 = +\infty$.

# Κεφάλαιο 2

# Ακολουθίες

## 2.1. Ορισμός ακολουθίας πραγματικών αριθμών

**Ορισμός 2.1.1** *Με τον όρο* **ακολουθία πραγματικών αριθμών ή πραγματική ακολουθία** *ονομάζουμε μια πραγματική συνάρτηση $a$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Δηλαδή*

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Η τιμή της ακολουθίας $a$ στο $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζεται $a_n$ (αντί $a(n)$). Η ακολουθία συμβολίζεται

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ή απλά } (a_n),$$

ή αναλυτικότερα

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Συνήθως για να οριστεί η ακολουθία δίνεται η έκφραση του **γενικού όρου της ακολουθίας** $a_n$ από την οποία προκύπτουν οι όροι της ακολουθίας για τις διάφορες τιμές του

$n \in \mathbb{N}$.

**Παράδειγμα 2.1.2** *Η ακολουθία* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *με γενικό όρο* $a_n = 2(n+1)-3$ *έχει τους παρακάτω όρους:*

$$1, 3, 5, \dots, 2(n+1)-3, \dots$$

**Ορισμός 2.1.3** *Μια ακολουθία* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *λέγεται* **γνησίως αύξουσα**, *αν και μόνον αν για κάθε φυσικό* $n \in \mathbb{N}$ *είναι* $a_n < a_{n+1}$.

*Μια ακολουθία* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *λέγεται* **αύξουσα**, *αν και μόνον αν για κάθε φυσικό* $n \in \mathbb{N}$ *είναι* $a_n \leq a_{n+1}$.

*Μια ακολουθία* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *λέγεται* **γνησίως φθίνουσα**, *αν και μόνον αν για κάθε φυσικό* $n \in \mathbb{N}$ *είναι* $a_{n+1} < a_n$.

*Μια ακολουθία* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *λέγεται* **φθίνουσα**, *αν και μόνον αν για κάθε φυσικό* $n \in \mathbb{N}$ *είναι* $a_{n+1} \leq a_n$.

*Αν μια ακολουθία είναι ή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα τότε λέγεται* **γνησίως μονότονη**.

*Αν μια ακολουθία είναι ή αύξουσα ή φθίνουσα τότε λέγεται* **μονότονη**.

**Παρατήρηση 2.1.4** *Είναι φανερό ότι, αν οι όροι μιας ακολουθίας είναι εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί, τότε η ακολουθία* **δεν είναι μονότονη**. *Π.χ. η ακολουθία* $a_n = (-1)^n = 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$ *δεν είναι μονότονη.*

## 2.2. Όριο ακολουθίας

Ίσως η σημαντικότερη έννοια του Απειροστικού Λογισμού είναι η έννοια του ορίου. Μπορούμε να πούμε ότι ο Απειροστικός Λογισμός μελετάει εκείνες τις ιδιότητες των πραγματικών συναρτήσεων που έμμεσα ή άμεσα συνδέονται με τα όρια. Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε τον ορισμό του ορίου μιας ακολουθίας. Πιο συγκεκριμένα:

**Ορισμός 2.2.1** *Μια ακολουθία* $(a_n)$ *λέμε ότι έχει* **όριο** *το* $\ell \in \mathbb{R}$ *ή ότι συγκλίνει στο* $\ell \in \mathbb{R}$*, όταν για κάθε* $> 0$ *υπάρχει φυσικός* $n_0$ *τέτοιος ώστε:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < .$$

*Θα γράφουμε* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ *ή* $a_n \to \ell$*. Οι ακολουθίες μ' αυτή την ιδιότητα θα λέγονται* **συγκλίνουσες** *ακολουθίες. Ειδικότερα οι ακολουθίες που συγκλίνουν στο* $0$ *θα λέγονται* **μηδενικές** *ακολουθίες. Μια ακολουθία* $(a_n)$ *η οποία δεν είναι συγκλίνουσα θα λέγεται* **αποκλίνουσα**.

**Ορισμός 2.2.2** *Μια ακολουθία* $(a_n)$ *λέμε ότι έχει όριο το* $+\infty$ *(αντίστοιχα το* $-\infty$*), αν για κάθε* $M \in \mathbb{R}$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *με* $n \geq n_0$ *να έχουμε* $a_n > M$ *(αντιστ.* $a_n < M$*).*

*Θα γράφουμε* $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ *(αντιστ.* $-\infty$*) ή* $a_n \to +\infty$ *(αντιστ.* $a_n \to -\infty$*.*

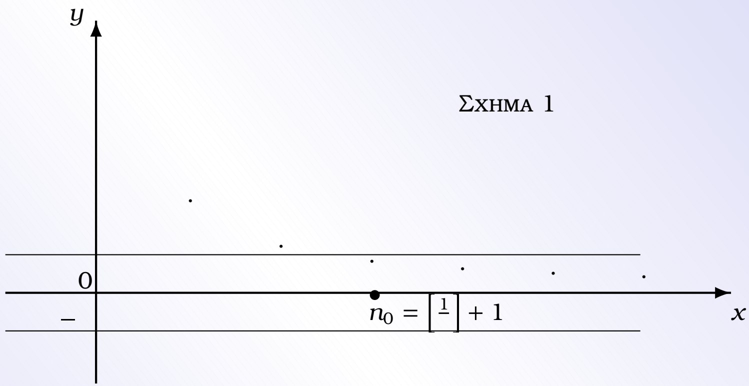
Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για μια αποκλίνουσα ακολουθία μπορούν να συμβούν τα ακόλουθα:

- να έχει όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$,
- να μην έχει όριο.

**Παράδειγμα 2.2.3** *Η ακολουθία με γενικό όρο* $a_n = \frac{1}{n}$ *έχει όριο το* $0$. ***Απόδειξη***



Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 11 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος




Σχημα 1

**Παράδειγμα 2.2.4** *Έστω* $(a_n)$, *με* $a_n = k$ *μια σταθερή ακολουθία. Τότε* $\lim_{n\to+\infty} a_n = k$.
***Απόδειξη***

**Παράδειγμα 2.2.5** *Θεωρούμε την ακολουθία* $a_n = \lambda n$ *με* $\lambda \in \mathbb{R}^*$. *Τότε το όριο της* $(a_n)$ *είναι:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & , \lambda = 0 \\ +\infty & , \lambda > 0 \\ -\infty & , \lambda < 0 \end{cases}$$

***Απόδειξη***

**Πρόταση 2.2.6** *Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό.* ***Απόδειξη***

**Ορισμός 2.2.7** *Μια ακολουθία* $(a_n)$ *λέγεται* **άνω φραγμένη** *αν και μόνον αν (συντ. ανν) υπάρχει* $M \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $a_n \leq M$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*Η* $(a_n)$ *λέγεται* **κάτω φραγμένη** *ανν υπάρχει* $m \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $m \leq a_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*Αν η ακολουθία* $(a_n)$ *είναι άνω και κάτω φραγμένη τότε λέγεται* **φραγμένη**.



Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 12 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

**Παρατηρήσεις 2.2.8** *1) Μια ακολουθία $(a_n)$ είναι άνω (αντιστ. κάτω) φραγμένη αν το σύνολο τιμών της ακολουθίας $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι άνω (αντιστ.) κάτω φραγμένο.*

*2) Μια ακολουθία $(a_n)$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

**Πρόταση 2.2.9** *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(a_n)$ είναι φραγμένη.* ***Απόδειξη***

**Πρόταση 2.2.10** *Αν $(a_n)$ είναι μια συγκλίνουσα ακολουθία με $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, τότε $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\ell|$.* ***Απόδειξη***

**Παρατηρήσεις 2.2.11** *1) Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει εν γένει. Πράγματι, έστω $\gamma_n = (-1)^n$. Τότε έχουμε $\lim_{n\to+\infty} |\gamma_n| = \lim_{n\to+\infty} |1| = 1$, όμως η $(\gamma_n)$ δεν συγκλίνει.*

*2) Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης ισχύει στην περίπτωση όπου $\ell = 0$. Δηλαδή έχουμε*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0.$$

## 2.3. Ιδιότητες ορίων ακολουθιών

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε ότι απλές πράξεις πάνω στους όρους συγκλινουσών ακολουθιών οδηγούν στα αναμενόμενα αποτελέσματα στα όριά τους.

Πρώτα θα δείξουμε ότι το όριο του αθροίσματος δύο ακολουθιών ισούται με το άθροισμα των ορίων τους:

**Πρόταση 2.3.1** *Έστω $(a_n)$ και $(b_n)$ δύο ακολουθίες τέτοιες ώστε $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1$ και $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell_2$. Τότε*

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell_1 + \ell_2.$$

***Απόδειξη***

**Παρατήρηση 2.3.2** *Αν το άθροισμα δύο ακολουθιών συγκλίνει τότε οι ακολουθίες δεν συγκλίνουν απαραίτητα. Αν θέσουμε* $a_n = (-1)^n$ *και* $b_n = (-1)^{n+1}$ *τότε* $a_n + b_n = 0$, *άρα* $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = 0$, *ενώ οι* $(a_n)$ *και* $(b_n)$ *δεν συγκλίνουν.*

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το όριο του γινομένου δύο ακολουθιών ισούται με το γινόμενο των ορίων τους:

**Πρόταση 2.3.3** *Έστω* $(a_n)$ *και* $(b_n)$ *δύο ακολουθίες τέτοιες ώστε* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1$ *και* $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell_2$. *Τότε*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to+\infty} a_n)(\lim_{n\to+\infty} b_n) = \ell_1\ell_2.$$

***Απόδειξη***

**Λήμμα 2.3.4** *Έστω* $(a_n)$ *μια ακολουθία τέτοια ώστε* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \neq 0$. *Τότε υπάρχει* $k \geq 0$ *και* $n_0 \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $|a_n| \geq k$ *για κάθε* $n \geq n_0$. ***Απόδειξη***

**Πρόταση 2.3.5** *Έστω* $(b_n)$ *μια ακολουθία τέτοια ώστε* $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell \neq 0$. *Τότε*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} b_n} = \frac{1}{\ell}.$$

***Απόδειξη***

Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε ότι το όριο του πηλίκου δύο ακολουθιών ισούται με το πηλίκο των ορίων τους.

**Πρόταση 2.3.6** *Έστω* $(a_n)$ *και* $(b_n)$ *δύο ακολουθίες τέτοιες ώστε* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1$ *και* $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell_2 \neq 0$. *Τότε*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

***Απόδειξη***

**Πρόταση 2.3.7** *Το γινόμενο μιας μηδενικής και μιας φραγμένης ακολουθίας είναι μηδενική ακολουθία.* **Απόδειξη**

**Παρατηρήσεις 2.3.8** 1) *Το γινόμενο μηδενικής ακολουθίας με πραγματικό αριθμό είναι μηδενική ακολουθία.*

2) *Το γινόμενο δύο μηδενικών ακολουθιών είναι μηδενική ακολουθία.*

## 2.4. Σύγκλιση και διάταξη

Στην παράγραφο αυτή μελετάμε τη συμβατότητα της διάταξης των όρων μιας ακολουθίας με τη διάταξη των αντίστοιχων ορίων τους.

**Πρόταση 2.4.1** *Έστω $(a_n)$ συγκλίνουσα ακολουθία με $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \neq 0$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ το $a_n$ είναι ομόσημο του $\ell$.* **Απόδειξη**

Άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι το παρακάτω πόρισμα:

**Πόρισμα 2.4.2** *Έστω $(a_n)$ και $(b_n)$ δύο συγκλίνουσες ακολουθίες και έστω ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq k$. Τότε*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

**Απόδειξη**

**Θεώρημα 2.4.3** *(ισοσυγκλινουσών) Έστω $(a_n)$ και $(\gamma_n)$ δύο συγκλίνουσες ακολουθίες με $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \gamma_n = \ell$. Έστω ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq k$ να ισχύει $a_n \leq b_n \leq \gamma_n$. Τότε*

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell.$$

**Απόδειξη**

Στις επόμενες δύο εφαρμογές θα υπολογίσουμε τα όρια τριών χαρακτηριστικών ακολουθιών.

**Εφαρμογή 2.4.4** *Έστω $a > 0$ ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Τότε*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

*Απόδειξη*

**Εφαρμογή 2.4.5** *Έστω $(a_n) > 0$ μια ακολουθία θετικών όρων. Αν $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$ τότε*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

*Απόδειξη*

**Εφαρμογή 2.4.6** *Έχουμε ότι:*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

*Απόδειξη*

## 2.5. Η έννοια της υπακολουθίας

Αν $(a_n)$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $(k_n)$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, δηλαδή μια απεικόνιση $k_n$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και τιμές στο $\mathbb{N}$ έτσι ώστε $k_{n+1} > k_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η σύνθεσή τους $a_{k_n} = (a \circ k)(n)$ είναι μια ακολουθία

$$a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}, \ldots$$

πραγματικών αριθμών που ονομάζεται **υπακολουθία** της $(a_n)$ και συμβολίζεται με $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Είναι προφανές ότι οι όροι της υπακολουθίας $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι και όροι της ακολουθίας $(a_n)$.

**Παράδειγμα 2.5.1** *Έστω* $a_n = \frac{1}{n}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *με όρους*

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots.$$

*Θεωρώ την γνησίως αύξουσα ακολουθία των φυσικών αριθμών* $k_n = 2n$. *Από την σύνθεση αυτών των δύο προκύπτει η υπακολουθία* $a_{k_n}$ *με όρους:*

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots$$

**Πρόταση 2.5.2** *Αν η ακολουθία* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει στο* $a$, *τότε κάθε υπακολουθία της* $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει στο* $a$. ***Απόδειξη***

**Πρόταση 2.5.3** *Έστω η ακολουθία* $a_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$. *Τότε*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & ,\ \text{αν } |a| < 1 \\ 1 & ,\ \text{αν } a = 1 \\ +\infty & ,\ \text{αν } a > 1 \end{cases}$$

*Αν* $a \leq -1$ *τότε δεν υπάρχει το όριο της* $(a_n)$. ***Απόδειξη***

**Πρόταση 2.5.4** *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει στο αντίστοιχο supremum ή infimum του πεδίου τιμών της ακολουθίας.* ***Απόδειξη***

**Θεώρημα 2.5.5** *(Bolzano-Weirstrass) Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.* ***Απόδειξη***

**Πρόταση 2.5.6** *Έστω* $(a_n)$ *ακολουθία. Αν για κάθε* $> 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $n, m \geq n_0$ *να ισχύει* $|a_n - a_m| <$ , *τότε η ακολουθία συγκλίνει.* ***Απόδειξη***

Μια ακολουθία που ικανοποιεί τη συνθήκη της παραπάνω πρότασης ονομάζεται **βασική ακολουθία** ή **ακολουθία Cauchy**. Από την απόδειξη της παραπάνω πρότασης προκύπτει ότι κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει. Επίσης είναι εύκολο να αποδειχθεί το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy, αν χρησιμοποιήσουμε την τριγωνική ανισότητα $|a_n - a_m| \geq |a_n - a| + |a_m - a|$. Επομένως στο σύνολο των πραγματικών αριθμών το σύνολο των συγκλινουσών ακολουθιών είναι ταυτόσημο με το σύνολο των ακολουθιών Cauchy.

**Εφαρμογή 2.5.7** (**Ο αριθμός** *e*) *Ο αριθμός e, που ονομάζεται* **αριθμός Euler**, *είναι το κοινό όριο των ακολουθιών με γενικούς όρους:*

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad \beta_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N},$$

*και αποτελεί τη βάση των Νεπέρειων λογαρίθμων.* ***Απόδειξη***

**Παρατήρηση 2.5.8** *Σύμφωνα με τον τύπο του Euler που προέκυψε από τις εργασίες του A. de Moivre έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

*Συνεπώς για $x = \pi$ προκύπτει η σχέση μεταξύ των αριθμών e και π:*

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

## 2.6. Πράξεις μεταξύ ακολουθιών στο $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Στον παρακάτω πίνακα θα παραθέσουμε εποπτικά τις πράξεις μεταξύ ακολουθιών που συγκλίνουν ή έχουν όριο το $\pm\infty$. Η απόδειξή τους αφήνεται στον αναγνώστη.

| | | |
|---|---|---|
| $a_n \to \pm\infty \;\; \text{και} \;\; b_n \to \pm\infty$ | $\Longrightarrow$ | $(a_n + b_n) \to \pm\infty$ |
| $a_n \to a \in \mathbb{R} \;\; \text{και} \;\; b_n \to \pm\infty$ | $\Longrightarrow$ | $(a_n + b_n) \to \pm\infty$ |
| $a_n \to \pm\infty \;\; \text{και} \;\; b_n \to \pm\infty$ | $\Longrightarrow$ | $(a_n b_n) \to \pm\infty$ |
| $a_n \to -\infty \;\; \text{και} \;\; b_n \to +\infty$ | $\Longrightarrow$ | $(a_n b_n) \to -\infty$ |
| $a_n \to a \in \mathbb{R} \;\; \text{και} \;\; b_n \to \pm\infty$ | $\Longrightarrow$ | $(a_n b_n) \to \begin{cases} \pm\infty & , \text{αν } a > 0 \\ \mp\infty & , \text{αν } a < 0 \end{cases}$ |
| $a_n \to a \in \mathbb{R} \;\; \text{και} \;\; b_n \to \pm\infty$ | $\Longrightarrow$ | $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ |
| $a_n \to a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\; \text{και} \;\; b_n \to 0 \;\; (b_n > 0)$ | $\Longrightarrow$ | $\frac{a_n}{b_n} \to \begin{cases} +\infty & , \text{αν } a > 0 \\ -\infty & , \text{αν } a < 0 \end{cases}$ |
| $a_n \to a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\; \text{και} \;\; b_n \to 0 \;\; (b_n < 0)$ | $\Longrightarrow$ | $\frac{a_n}{b_n} \to \begin{cases} -\infty & , \text{αν } a > 0 \\ +\infty & , \text{αν } a < 0 \end{cases}$ |
| $a_n \to +\infty \;\; \text{και} \;\; x_n \to +\infty$ | $\Longrightarrow$ | $a_n^{x_n} \to +\infty$ |
| $a_n \to +\infty \;\; \text{και} \;\; x_n \to -\infty$ | $\Longrightarrow$ | $a_n^{x_n} \to 0$ |
| $a_n \to a \;\; \text{και} \;\; x_n \to +\infty$ | $\Longrightarrow$ | $a_n^{x_n} \to \begin{cases} +\infty & , \text{αν } a > 1 \\ 0 & , \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$ |
| $a_n \to 0 \;\; \text{και} \;\; x_n \to +\infty$ | $\Longrightarrow$ | $a_n^{x_n} \to 0$ |
| $a_n \to +\infty \;\; \text{και} \;\; x_n \to x$ | $\Longrightarrow$ | $a_n^{x_n} \to \begin{cases} +\infty & , \text{αν } x > 0 \\ 0 & , \text{αν } x < 0 \end{cases}$ |

Από τον παραπάνω πίνακα δεν προκύπτει κανένα συμπέρασμα για το όριο:

• Του αθροίσματος $(a_n + b_n)$, όταν $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ και $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι η $(a_n + b_n)$ παρουσιάζει την απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) + (-\infty)$.

• Του γινομένου $(a_n b_n)$ όταν $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$. Θα λέμε ότι έχουμε την απροσδιόριστη μορφή $0 \cdot \pm\infty$.

• Του πηλίκου $\frac{a_n}{b_n}$ όταν $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$ και $\lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$ (απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$) ή $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ (απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$).

• Της εκθετικής $a_n^{x_n}$ όταν $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (απροσδιόριστη μορφή $1^{+\infty}$)

Όπως φένεται στα επόμενα παραδείγματα, από τις ακολουθίες που παρουσιάζουν μια από τις παραπάνω απροσδιόριστες μορφές, άλλες δεν έχουν όριο και άλλες έχουν όριο, όχι όλες το ίδιο, πεπερασμένο ή άπειρο.

**Παραδείγματα 2.6.1** 1) *Έστω οι ακολουθίες με γενικούς όρους* $a_n = 5n$ *και* $b_n = -n$. *Είναι* $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ *και* $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} 4n = +\infty$.

*Αν* $a_n = n$ *και* $b_n = (-1)^n - n$ *είναι πάλι* $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, *αλλά τώρα η* $(a_n + b_n) = (-1)^n$ *δεν έχει όριο.*

2) *Αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες* $a_n = \frac{1}{n}$ *και* $b_n = 3n$. *Είναι λοιπόν* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ *και* $\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = 3$.

*Ας πάρουμε όμως την* $a_n = \frac{2}{n^3}$ *και την* $b_n = 3n$, *έχουμε πάλι* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ *και* $\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n^2} = 0$.

# Κεφάλαιο 3

# Συναρτήσεις-Όρια Συναρτήσεων

## 3.1. Γενικά

Οι συναρτήσεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε στα επόμενα είναι **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής**, δηλαδή $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου $A$ μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Το σύνολο $A$ ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης $f$. Επίσης το σύνολο των εικόνων των στοιχείων του $A$ συμβολίζεται με $f(A)$ και λέγεται **εικόνα** του $A$. Δηλαδή

$$f(A) := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A \text{ τέτοιο ώστε } f(x) = y\}.$$

Μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση '' **επί** '', όταν $f(A) = B$.

Μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση '' **1-1** '', όταν:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ή, με αντιθετοαντιστροφή:

$$\forall\ x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Έστω $f_1, f_2$ δύο πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στα $A$ και $B$ αντιστοίχως. Εάν $f_1(A) \subseteq B$ τότε ορίζουμε την σύνθεση $f_2 \circ f_1$ τη συνάρτηση:

$$f_2 \circ f_1 : A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ με } (f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)).$$

**Παράδειγμα 3.1.1** *Έστω οι συναρτήσεις $f_1$ και $f_2$ με $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ και $f_2(x) = 3x + 2$ που είναι ορισμένες στο $A = [-1, 1]$ και $B = \mathbb{R}$ αντιστοίχως. Θα εξετάσουμε αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f_2 \circ f_1$ και $f_1 \circ f_2$.*

Έχουμε: $f_1(A) \subseteq \mathbb{R}$ και επομένως ορίζεται η $f_2 \circ f_1$ και είναι: $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = 3\sqrt{1 - x^2} + 2$ με $x \in A$.

Επίσης αν περιορίσουμε την $f_2$ στο $B' = [-1, -\frac{1}{3}]$ τότε $f_2(B') = [-1, 1]$ κι έτσι μπορούμε να ορίσουμε την σύνθεση: $f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \sqrt{1 - (3x + 2)^2}$ με $x \in B'$. Είναι φανερό ότι $f_2 \circ f_1 \neq f_1 \circ f_2$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $f$ είναι μία '' **1-1** '' συνάρτηση τέτοια ώστε $f(A) = B$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f^{-1} : B \longrightarrow \mathbb{R}$ που σε κάθε στοιχείο $y \in B$ αντιστοιχούμε το μοναδικό στοιχείο $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Η συνάρτηση $f^{-1}$ ονομάζεται **αντίστροφη** της $f$. Η αντίστροφη συνάρτηση ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις:

(1) $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

(2) $f(f^{-1}(y)) = y$ για κάθε $y \in B$.

**Παρατήρηση 3.1.2** *Αν σε μια '' **1-1** '' συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ μας δίνεται ο τύπος της, τότε μπορούμε πολλές φορές τον τύπο της αντίστροφής της ως εξής:*

*Λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς $x$ (αν αυτό είναι δυνατό), οπότε παίρνουμε την εξίσωση $x = g(y)$, που δίνει την εξίσωση της αντίστροφης. Κατόπιν αντικαθιστούμε στην $x = g(y)$ το $x$ με το $y$ και το $y$ με το $x$, οπότε παίρνουμε την $y = g(x)$.*

**Πρόταση 3.1.3** *Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση γνησίως μονότονη. Τότε υπάρχει η $f^{-1}$ με πεδίο ορισμού το $B = f(A)$, η οποία έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.* ***Απόδειξη***

## 3.2. Είδη συναρτήσεων

(1) **Πολυωνυμικές συναρτήσεις:** Με τον όρο αυτό εννοούμε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ που ορίζονται από τους τύπους της μορφής:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου $a_0, a_1, \ldots a_n$ είναι δεδομένοι πραγματικοί αριθμοί και $a_n \neq 0$. Ο αριθμός $n$ λέγεται βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης. Αν $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, δηλαδή αν $f(x) = a_0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση λέγεται **σταθερά** και ο βαθμός της είναι 0 αν $a_0 \neq 0$, ενώ δεν ορίζεται βαθμός αν $a_0 = 0$. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις πρώτου βαθμού λέγονται συνήθως γραμμικές.

(2) **Ρητές συναρτήσεις:** Με το όρο αυτό εννοούμε συναρτήσεις $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ που ορίζονται από τους τύπους της μορφής:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m},$$

δηλαδή είναι πηλίκα δύο πολυωνύμων. Το $A$ εδώ είναι το σύνολο των πραγματικών $x$ για τους οποίους $Q(x) \neq 0$ και υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $Q$ δεν είναι ταυτοτικά ίσο με μηδέν. Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν το πολύ $m$ πραγματικοί αριθμοί $x$ για τους οποίους ισχύει $Q(x) = 0$. Οι αριθμοί αυτοί λέγονται ρίζες του $Q$.

(3) **Τριγωνομετρικές συναρτήσεις:** Θεωρούμε δύο κάθετους άξονες $x'Ox$, $y'Oy$ στο επίπεδο και θυμόμαστε ότι σε κάθε (διατεταγμένο) ζευγάρι πραγματικών αριθμών $(x, y)$


Πραγματικοί Αριθμοί
Ακολουθίες
Συναρτήσεις-Όρια ...
Γενικά
Είδη συναρτήσεων
Όρια συναρτήσεων
Πλευρικά όρια
Μελέτη του ορίου ...
Ιδιότητες ορίων
Συνέχεια Συναρτήσεων
Παράγωγος Συναρτήσεων
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 23 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

αντιστοιχεί μονοσήμαντα ένα σημείο του επιπέδου με τετμημένη $x$ (δηλ. προσημασμένη προβολή στον άξονα $x'Ox$) και τεταγμένη (δηλ. προσημασμένη προβολή στον άξονα $y'Oy$) $y$.

Θεωρούμε επίσης μια περιφέρεια με κέντρο 0 και ακτίνα 1 διαγραμμένη με φορά αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ωρολογίου. Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι για κάθε πραγματικό $\vartheta$ υπάρχει ένα σημείο $M(x, y)$ πάνω στην περιφέρεια τέτοιο ώστε το τόξο $AM$ να είναι $\vartheta$ ακτίνια. Φυσικά σε δύο διαφορετικούς αριθμούς $\phi, \vartheta$ είναι δυνατόν να αντιστοιχεί το ίδιο σημείο $M$. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη γι' αυτό είναι: " $\vartheta - \phi$=ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi$ ".

Οι συναρτήσεις sin (ημίτονο), cos (συνημίτονο) και tan (εφαπτομένη) ορίζονται τώρα ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\sin\vartheta = y, \quad \vartheta \in \mathbb{R}\\
&\cos\vartheta = x, \quad \vartheta \in \mathbb{R}\\
&\tan\vartheta = y/x, \quad \vartheta \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

(4) **Εκθετικές συναρτήσεις:** Για κάθε $a > 0$ μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $f$ η οποία σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί το θετικό αριθμό $a^x$. Δηλαδή μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $f$ του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ με

$$f(x) = a^x.$$

Η $f$ λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση $a$. Όταν η βάση είναι το $e$, τότε η συνάρτηση

$$f(x) = e^x$$

ονομάζεται **εκθετική συνάρτηση** (χωρίς να αναφέρεται η βάση).

Για την εκθετική συνάρτηση με βάση $a$ αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

(*i*) Αν $a > 1$, τότε η $f(x) = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα.

(*ii*) Αν $a < 1$, τότε η $f(x) = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

(*iii*) Αν $a = 1$, τότε η $f(x) = a^x$ είναι σταθερή συνάρτηση με τιμή 1.
(*iv*) Αν $x > 0$, τότε $a > b \Rightarrow a^x > b^x$
(*v*) Αν $x < 0$, τότε $a > b \Rightarrow a^x < b^x$.

(5) **Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:** Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Αν περιορίσουμε την $f$ στο $[-\pi/2, \pi/2]$ τότε είναι " 1-1 " και έχει σύνολο τιμών πάλι το $[-1, 1]$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση της $f$, στο $[-1, 1]$, που ονομάζεται **τόξο ημιτόνου** και συμβολίζεται με $\arcsin x$. Δηλαδή για έναν αριθμό $x \in [-1, 1]$ με $\arcsin x$ συμβολίζουμε το τόξο από $-\pi/2$ ως $\pi/2$ που έχει ημίτονο το $x$. Όμοια ο περιορισμός της συνάρτησης $g(x) = \cos x$ στο $[0, \pi]$ είναι " 1-1 " και έχει σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση της $g$, στο $[-1, 1]$ η οποία ονομάζεται **τόξο συνημιτόνου** και συμβολίζεται με $\arccos x$. Δηλαδή για έναν αριθμό $x \in [-1, 1]$ με $\arccos x$ συμβολίζουμε το τόξο από 0 ως $\pi$ που έχει συνημίτονο το $x$. Κατά τον ίδιο τρόπο ορίζουμε τις αντίστροφες συναρτήσεων των συναρτήσεων $\tan x$ και $\cot x$. Δηλαδή $\arctan = \tan^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση **τόξο εφαπτομένης** και $\text{arccot} = \cot^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση **τόξο συνεφαπτομένης**.

(6) **Λογαριθμικές συναρτήσεις:** Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι γνησίως μονότονη για $a > 0$, $a \neq 1$. Επομένως σύμφωνα με την πρόταση ;;; ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ στο $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την $f$. Την αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης με βάση $a$ τη συμβολίζουμε $f(x) = \log_a(x)$ και την ονομάζουμε λογαριθμική συνάρτηση με βάση $a$. Όταν η βάση είναι το $e$ τότε η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = e^x$ ονομάζεται **λογαριθμική συνάρτηση** και συμβολίζεται με $f(x) = \log(x)$.

Για τη λογαριθμική συνάρτηση με βάση $a$ αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:
(*i*) Αν $a > 1$, τότε η $f(x) = \log_a(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.
(*ii*) Αν $a < 1$, τότε η $f(x) = \log_a(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.
(*iii*) Αν $a = 1$, τότε η $f(x) = a^x$ είναι σταθερή συνάρτηση με τιμή 1.
(*iv*) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

(υ) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

(7) **Υπερβολικές συναρτήσεις:** Στη συνέχεια θα ορίσουμε τις **υπερβολικές συναρτήσεις** οι οποίες έχουν ιδιότητες παρόμοιες με αυτές των τριγονομετρικών συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις αυτές είναι:

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ υπερβολικό ημίτονο} \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ υπερβολικό συνημίτονο} \\
\tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \text{ υπερβολική εφαπτομένη.}
\end{aligned}$$

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Παραθέτουμε μερικές ιδιότητες των υπερβολικών συναρτήσεων (οι αποδείξεις είναι απλές και αφήνονται στον αναγνώστη):

$$\begin{aligned}
&\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \\
&\sinh(-x) = -\sinh x, \\
&\cosh(-x) = \cosh x, \\
&\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \\
&\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x, \\
&\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x.
\end{aligned}$$

## 3.3. Όρια συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε το " όριο " μιας συνάρτησης $f(x)$ όταν το $x$ τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό ή στο $\pm\infty$. Η διαισθητική εικόνα που έχουμε στο μυαλό μας είναι η εξής: ‟ Η $f(x)$ συγκλίνει στον αριθμό $a$, όταν το $x$ τείνει στο $x_0$, αν και μόνον αν η παράσταση $|f(x) - a|$ μπορεί να γίνει όσο θέλουμε μικρή, όταν το $x$ είναι αρκετά κοντά στο $x_0$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 3.3.1** *Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f$ μια συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού $A$ περιέχει τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα με άκρο $x_0$. Θα λέμε ότι* **η $f$ έχει στο $x_0$ όριο**:

- *το $\ell \in \mathbb{R}$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε*

$$\forall x \in A,\ \text{με } 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

*Στην περίπτωση αυτή γράφουμε*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

- *το $+\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε*

$$\forall x \in A,\ \text{με } 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > M.$$

*Στην περίπτωση αυτή γράφουμε*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

- *το $-\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε*

$$\forall x \in A,\ \text{με } 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -M.$$

*Στην περίπτωση αυτή γράφουμε*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό του ορίου μιας συνάρτησης στο $+\infty$:

**Ορισμός 3.3.2** *Έστω $f$ συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού $A$ δεν είναι φραγμένο άνω. Θα λέμε ότι $f$ έχει στο $+\infty$ όριο:*

- *το $\ell \in \mathbb{R}$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο ώστε*

$$\forall x \in A,\ \text{με}\ x > X_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

*Στην περίπτωση αυτή γράφουμε*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell.$$

- *το $+\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο ώστε*

$$\forall x \in A,\ \text{με}\ x > X_0 \Longrightarrow f(x) > M.$$

*Στην περίπτωση αυτή γράφουμε*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

- *το $-\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $X_0 > 0$, τέτοιο ώστε*

$$\forall x \in A,\ \text{με}\ x > X_0 \Longrightarrow f(x) < -M.$$

*Στην περίπτωση αυτή γράφουμε*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

**Πρόταση 3.3.3** *Αν μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει στο σημείο $x_0$ όριο, τότε αυτό είναι μοναδικό.* ***Απόδειξη***

## 3.4. Πλευρικά όρια

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την συμπεριφορά μιας συνάρτησης $f$ που δεν έχει όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζουμε το όριο του περιορισμού της $f$ σ' ένα διάστημα της μορφής $(x_0, b)$ ή της μορφής $(a, x_0)$. Γενικά δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

**Ορισμός 3.4.1** *Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού $A$.*

*• Αν το $A$ περιέχει τουλάχιστον ένα διάστημα της μορφής $(x_0, b)$ και ο περιορισμός $f_1$ της $f$ στο $(x_0, b)$ έχει στο $x_0$ όριο $\ell$, θα λέμε ότι η $f$ έχει στο $x_0$* **όριο από δεξιά** *το $\ell$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell.$$

*• Αν το $A$ περιέχει τουλάχιστον ένα διάστημα της μορφής $(a, x_0)$ και ο περιορισμός $f_2$ της $f$ στο $(a, x_0)$ έχει στο $x_0$ όριο $\ell$, θα λέμε ότι η $f$ έχει στο $x_0$* **όριο από αριστερά** *το $\ell$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell.$$

**Παράδειγμα 3.4.2** *Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

*Υπολογίστε το $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ και το $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.*

Ο περιορισμός $f_1$ της $f$ στο $(0, +\infty)$ είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή 1 και συνεπώς $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$. Επίσης ο περιορισμός $f_2$ της $f$ στο $(-\infty, 0)$ είναι σταθερή συνάρτηση $-1$ και συνεπώς $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

Σχετικά με τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 3.4.3** *Έστω $f$ μια συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού $A$ περιέχει ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Η $f$ έχει στο $x_0$ όριο $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, αν και μόνον αν υπάρχουν τα πλευρικά της όρια στο $x_0$ και είναι ίσα με $\ell$.* ***Απόδειξη***

Ας εξετάσουμε τώρα για λίγο τη σχέση μεταξύ υπάρξεως ορίου και υπάρξεως πλευρικών ορίων.

**Παράδειγμα 3.4.4** *Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$ δεν έχει όριο στο $\pi/2$ γιατί:*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \textit{ και } \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty.$$

Είναι κατ' αρχήν τετριμμένο ότι « **η ύπαρξη του** $\lim_{x \to x_0} f(x)$ **(πεπερασμένου ή απείρου) συνεπάγεται και την ύπαρξη των** $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ **και** $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$». **Το αντίστροφο δεν ισχύει,** όπως μπορεί κανείς να διαπυστώσει εξετάζοντας τα παρακάτω παραδείγματα:

**Παραδείγματα 3.4.5** *1) Έστω $f(x) = [x]$ και $x_0 \in \mathbb{Z}$. Για να υπολογίσουμε το όριο της $f$ στο $x_0 \in \mathbb{Z}$ θεωρούμε τα ανοικτά διαστήματα $(x_0 - 1, x_0)$ και $(x_0, x_0 + 1)$ αντίστοιχα αριστερά και δεξιά του σημείου $x_0$. Επομένως έχουμε:*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)|_{(x_0-1,x_0)} = \lim_{x \to x_0} x = x_0,$$

*ενώ*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)|_{(x_0,x_0+1)} = \lim_{x \to x_0} (x + 1) = x_0 + 1,$$

*άρα το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει.*

*2) Έστω*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x} & , x > 0 \end{cases}$$

*Εύκολα δείχνουμε ότι $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$. Θα δείξουμε ότι το όριο από δεξιά $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ δεν υπάρχει. Διαισθητικά, κοιτώντας τη γραφική παράσταση (σχήμα ;;;), βλέπουμε ότι όταν το $x \to 0^+$ από δεξιά, η $f(x)$ πλησιάζει όλο το ευθύγραμμο τμήμα: $x = 0, -1 \leq y \leq 1$.*

*Ας υποθέσουμε λοιπόν, για να φτάσουμε σε άτοπο, ότι το $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ υπάρχει και ισούται με $a$. Θα υπάρχει τότε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$0 < x < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| < \frac{1}{2}.$$

*Αν πάρουμε τώρα* $k = [\frac{1}{\delta}] + 1$, *τότε* $\frac{1}{k\pi} < \delta$ *και* $\frac{1}{k\pi+\pi/2} < \delta$. *Άρα στο διάστημα* $(0, \delta)$ *υπάρχουν* $x_1, x_2$ *τέτοια ώστε* $\frac{1}{x_1} = k\pi$ *και* $\frac{1}{x_2} = 2k\pi + \pi/2$. *Τότε,* $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 1$ *και επομένως* $|0 - a| < \frac{1}{2}$, $|1 - a| < \frac{1}{2}$ *οπότε και*

$$1 = |(0-a) - (1-a)| \leq |0-a| + |1-a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

*που είναι φυσικά άτοπο.*

## 3.5. Μελέτη του ορίου συνάρτησης με ακολουθίες

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε μια πρόταση που ανάγει την μελέτη του ορίου συνάρτησης, στη μελέτη ακολουθιών και αποτελεί ένα εύχρηστο κριτήριο κυρίως για την μη ύπαρξη ενός ορίου.

**Πρόταση 3.5.1** *Μια συνάρτηση* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *έχει στο σημείο* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *όριο* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, *αν και μόνον αν, για κάθε ακολουθία* $(x_n)$ ($x_n \in A$ *και* $x_n \neq x_0$), *με* $x_n \to x_0$, *ισχύει* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$. **Απόδειξη**

**Παρατήρηση 3.5.2** *Για να ισχύει η πρόταση 3.5.1 θα πρέπει για κάθε ακολουθία* $x_n \to x_0$ *να ισχύει* $f(x_n) \to \ell$. *Έτσι, αν υπάρχουν δύο ακολουθίες* $(x_n) \to x_0$ *και* $(x'_n) \to x_0$ *για τις οποίες*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(x'_n)$$

*τότε το όριο της* $f$ *στο* $x_0$ *δεν υπάρχει.*

**Παράδειγμα 3.5.3** *Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}.$$

*Θα δείξουμε ότι το* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *δεν υπάρχει. Θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω πρόταση: Θεωρούμε τις ακολουθίες του* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x_n = \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ *και* $x'_n = \frac{1}{2\pi n}$. *Έχουμε* $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x'_n = 0$. *Όμως,* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$ *και* $\lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin(2\pi n) = 0$. *Άρα σύμφωνα με την πρόταση 3.5.1 και την παρατήρηση 3.5.2 το* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *δεν υπάρχει.*

## 3.6. Ιδιότητες ορίων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε κάποιες ιδιότητες των ορίων.

**Πρόταση 3.6.1** *Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g$ και $h$, ορισμένες στο $A$ και υπάρχουν τα όρια στο $x_0$, $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$.*

*(i) Αν για κάποιο $\delta > 0$ και κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει $f(x) \le g(x)$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$. Ειδικότερα, αν $f(x) = c$ (αντ. $g(x) = c'$) σταθερή συνάρτηση, τότε $c \le \lim_{x\to x_0} g(x)$ (αντ. $\lim_{x\to x_0} \le c'$).*

*(ii) Αν για κάποιο $\delta > 0$ και κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει $f(x) \le h(x) \le g(x)$ και $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$, τότε υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} h(x)$ στο $x_0$ και τα τρία όρια είναι ίσα.*

**Παραδείγματα 3.6.2** 1) *Δείξτε ότι ισχύει:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

*Για κάθε $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν $|\sin x| \le |x| \le |\tan x|$, οπότε για κάθε $x \neq 0$ έχουμε*

$$\frac{|\cos x|}{|\sin x|} \le \frac{1}{|x|} \le \frac{1}{|\sin x|}$$

*και κατά συνέπεια πολλαπλασιάζοντας με $|\sin x|$ έχουμε*

$$|\cos x| \le \frac{|\sin x|}{|x|} \le 1.$$

*Επειδή όμως* $\lim_{x\to 0}|\cos x| = 1$, *από την πρόταση* 3.6.1*(ιι) παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση.*

2) *Υπολογίστε το όριο:* $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

*Θέτουμε* $y = \frac{1}{x}$. *Αν* $x \to 0^+$, *τότε* $y \to +\infty$. *Συνεπώς,* $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y = e$. *Αντίστοιχα, αν* $x \to 0^-$, *τότε* $y \to -\infty$ *και κατά συνέπεια* $\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty}(1+\frac{1}{y})^y = e$. *(σεε εξαμπλε;;;)*

3) *Υπολογίστε το όριο* $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$.

*Από τις ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης έχουμε:* $\frac{\log(1+x)}{x} = \log((1+x)^{\frac{1}{x}})$. *Άρα*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\log((1+x)^{\frac{1}{x}}) \\
&= \log(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) \quad (pr'otash???) \\
&= \log e \\
&= 1.
\end{aligned}$$

4) *Για κάθε* $a > 0$, *υπολογίστε το όριο:* $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$.

*Θέτουμε* $y = a^x - 1$. *Αν* $x \to 0$, *τότε* $y \to 0$. *Επίσης*

$$\begin{aligned}
y = a^x - 1 &\leftrightarrow y + 1 = a^x \\
&\leftrightarrow \log(y+1) = \log(a^x) \\
&\leftrightarrow \log(y+1) = x\log(a) \\
&\leftrightarrow x = \frac{\log(y+1)}{\log a} \quad (1).
\end{aligned}$$

*Τελικά έχουμε*

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} &= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{\log(y+1)}{\log a}} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{y\log a}{\log(y+1)} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(y+1)}\log a \\
&= \log a.
\end{aligned}
$$

| | |
|---|---|
| $f(x)=x^a,\ a>0,\ A=[0,+\infty)$ | $\lim_{x\to x_0} x^a = x_0^a,\ x_0\in[0,+\infty)$<br>$\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$ |
| $f(x)=x^a,\ a<0,\ A=(0,+\infty)$ | $\lim_{x\to x_0} x^a = x_0^a,\ x_0\in(0,+\infty)$<br>$\lim_{x\to+\infty} x^a = 0$<br>$\lim_{x\to0} x^a = +\infty$ |
| $f(x)=a^x,\ a>1,\ A=\mathbb{R}$ | $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0},\ x_0\in\mathbb{R}$<br>$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$<br>$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ |
| $f(x)=a^x,\ (0<a<1),\ A=\mathbb{R}$ | $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0},\ x_0\in\mathbb{R}$<br>$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$<br>$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ |
| $f(x)=\log x,\ A=(0,+\infty)$ | $\lim_{x\to x_0}\log x = \log x_0,\ x_0\in(0,+\infty)$<br>$\lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty$<br>$\lim_{x\to-\infty}\log x = -\infty$ |
| $f(x)=\frac{\log x}{x^a},(a>0),\ A=(0,+\infty)$ | $\lim_{x\to x_0}\frac{\log x}{x^a} = \frac{\log x_0}{x_0^a},\ x_0\in(0,+\infty)$<br>$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^a} = 0$<br>$\lim_{x\to-\infty}\log x = -\infty$ |
| $f(x)=\frac{e^x}{x^a},\ (a>0),\ A=(0,+\infty)$ | $\lim_{x\to x_0}\frac{e^x}{x^a} = \frac{e^{x_0}}{x_0^a},\ x_0\in(0,+\infty)$<br>$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a} = +\infty$ |
| $f(x)=\frac{e^x}{x},\ (a>0),\ A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ | $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$<br>$\lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{x} = +\infty \lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{x} = -\infty$<br>$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x} = 0$ |
| $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ | $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ |

**Λήμμα 3.6.3** *Αν υπάρχει το* $\lim_{x\to x_0} f(x)$, *τότε υπάρχουν* $\delta>0$ *και* $M\in\mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $|f(x)|<M$ *για κάθε* $x$ *του πεδίου ορισμού της* $f$ *για το οποίο ισχύει* $0<|x-x_0|<\delta$.

***Απόδειξη***

**Λήμμα 3.6.4** *Αν* $\lim_{x\to x_0} g(x) = b \neq 0$, *τότε υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x$ *στο πεδίο ορισμού της* $g$,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |g(x)| > \frac{|b|}{2} > 0.$$

**Απόδειξη**

**Πρόταση 3.6.5** *Έστω* $f, g$ *δύο συναρτήσεις ορισμένες στο* $A$ *και* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$, *με* $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$, *τότε ισχύουν:*

(i) $\lim_{x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x_0} f(x) \pm \lim_{x_0} g(x)$.

(ii) $\lim_{x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x_0} f(x) \cdot \lim_{x_0} g(x)$ *και* $\lim_{x_0}(af(x)) = a \lim_{x_0} f(x)$, *όπου* $a \in \mathbb{R}$.

(iii) $\lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x_0} f(x)}{\lim_{x_0} g(x)}$, *με* $\lim_{x_0} g(x) \neq 0$.

(iv) $\lim_{x_0}(f(x))^{g(x)} = (\lim_{x_0} f(x))^{\lim_{x_0} g(x)}$, *όταν* $f(x) \geq 0$ *και το δεύτερο μέλος έχει νόημα.*

(v) $\lim \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim f(x)}$ $(k \in \mathbb{N})$, *όταν* $f(x) \geq 0$ *σε μια περιοχή του* $x_0$. **Απόδειξη**

Στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε την παραπάνω πρόταση για να υπολογίσουμε τα όρια ενός πολυωνύμου και μιας ρητής συνάρτησης.

**Εφαρμογή 3.6.6** *Να μελετηθούν τα όρια του πολυωνύμου*

$$P(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$$

(α) *στο* $x_0 \in \mathbb{R}$ *και* (β) *στα σημεία* $x_0 = +\infty$ *και* $x_0 = -\infty$. **Απόδειξη**

**Εφαρμογή 3.6.7** *Να μελετηθούν τα όρια της ρητής συνάρτησης*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}$$

*στα σημεία* $x_0 = \pm\infty$ *και στις ρίζες του πολυωνύμου* $Q(x)$. **Απόδειξη**

# Κεφάλαιο 4

# Συνέχεια Συναρτήσεων

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής.

## 4.1. Ορισμός Συνέχειας

Διαισθητικά η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης $f$ συνδέεται με την γεωμετρική έννοια της αδιάκοπα συνεχιζόμενης καμπύλης της γραφικής παράστασης της $f$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 4.1.1** *Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση και $x_0 \in A$. Η $f$ είναι* **συνεχής** *στο $x_0$ αν και μόνον αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

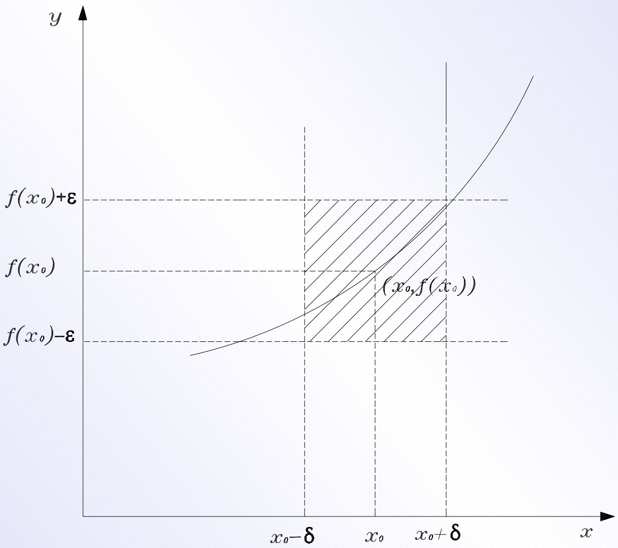
Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου 3.3.1, ο παραπάνω ορισμός γράφεται ως εξής:

Η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$ **αν και μόνον αν**

$$\forall \ > 0, \exists \delta > 0 \text{ τ.ω } \forall x \in A \text{ με } |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \ .$$

Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x_0$ τότε λέγεται **ασυνεχής** στο $x_0$.

Η συνέχεια μιας συνάρτησης $f$ σ' ένα σημείο $x_0 \in A$ ερμηνεύεται γεωμετρικά ως εξής: Για κάθε $\ > 0$ μπορούμε να βρούμε κατάλληλο $\delta > 0$ έτσι ώστε αν πάρουμε οποιοδήποτε $x$ μεταξύ του $x_0 - \delta$ και του $x_0 + \delta$ η εικόνα του (το $f(x)$) θα βρίσκεται μεταξύ του $f(x_0) -$ και του $f(x_0) +$ (βλ. σχήμα 1):




ΣΧΗΜΑ 1

**Παρατήρηση 4.1.2** *Παρατηρούμε ότι στον παραπάνω ορισμό της συνέχειας γράφουμε* $|x-x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)| <$ *ενώ από τον ορισμό του ορίου έχουμε* $0 < |x-x_0| < \delta \Longrightarrow$

Πραγματικοί Αριθμοί
Ακολουθίες
Συναρτήσεις-Όρια . . .
Συνέχεια Συναρτήσεων
Ορισμός Συνέχειας
Είδη Ασυνέχειας- . . .
Αρχή της μεταφοράς
Ιδιότητες Συνεχών . . .
Ομοιόμορφη Συνέχεια
Παράγωγος Συναρτήσεων
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 39 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

$|f(x) - f(x_0)| < .$ *Όμως για την συνέχεια έχουμε* $x_0 \in A$ *και ισχύει* $0 = |x_0 - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < .$ *Άρα, το* $0$ *παραλείπεται.*

Αν η $f$ δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο $x_0$ τότε συμβαίνει ένα από τα παρακάτω:

($i$) Δεν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

($ii$) Υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ αλλά είναι διαφορετικό από το $f(x_0)$.

**Ορισμός 4.1.3** *Μια συνάρτηση* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *είναι* **συνεχής από δεξιά** *σ' ένα σημείο* $x_0$ *του πεδίου ορισμού της αν* $\lim_{x \to x_0^+} = f(x_0)$ *ή ισοδύναμα χρησιμοποιώντας τον ορισμό:*

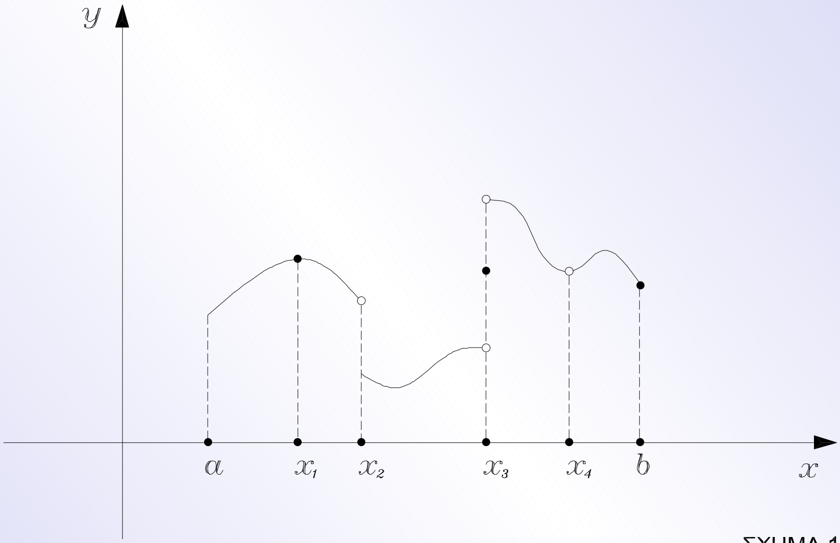
$$\forall > 0, \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } \forall x \in A, \text{ με } x_0 \le x < x_0 + \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < .$$

*Η* $f$ *είναι* **συνεχής από αριστερά** *αν* $\lim_{x \to x_0^-} = f(x_0)$ *ή ισοδύναμα χρησιμοποιώντας τον ορισμό:*

$$\forall > 0, \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } \forall x \in A, \text{ με } x_0 - \delta < x \le x_0 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < .$$

**Πρόταση 4.1.4** *Μια συνάρτηση* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $x_0 \in (a, b)$*, αν είναι συνεχής από δεξιά και από αριστερά στο* $x_0$. ***Απόδειξη***

Στο παρακάτω σχήμα (σχ. 1α) διακρίνουμε μια συνάρτηση όπου είναι συνεχής στο $x_1$, συνεχής από δεξιά στο $x_2$, ασυνεχής στο $x_3$ και δεν ορίζεται στο $x_4$:




ΣΧΗΜΑ 1α

Σχετικά με τις πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 4.1.5** *Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Αν οι $f, g$ είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 \in A$, τότε και οι συναρτήσεις:*

$$(i) f+g, \qquad (ii) f\cdot g,$$
$$(iii) \frac{f}{g} \text{ αν } g(x_0)\neq 0, \qquad (iv) \sqrt[k]{f} \quad \forall k\in\mathbb{N}, \text{ αν } f(x)\geq 0 \text{ σε μια περιοχή του } x_0$$

*είναι συνεχείς στο $x_0$.* **Απόδειξη**

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η σύνθεση δύο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση:

**Θεώρημα 4.1.6** *(σύνθεση συνεχών, συνεχής) Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A$ και $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$, συνεχής στο $f(x_0) \in B$. Τότε η συνάρτηση $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$.* **Απόδειξη**

Μια γενίκευση του παραπάνω θεωρήματος είναι η παρακάτω πρόταση. Η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος:

**Πρόταση 4.1.7** *Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ και $\lim_{x\to x_0} f(x) = b \in B$. Έστω $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$, συνεχής στο $b \in B$. Τότε*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(b) = g(\lim_{x\to x_0}(f(x))).$$

**Απόδειξη**

**Παράδειγμα 4.1.8** *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sin(x^2+x)$. Για να βρούμε το $\lim_{x\to 0} f(x)$, χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση έχουμε:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \sin(x^2+x) \\ &= \sin(\lim_{x\to 0}(x^2+x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Παρατήρηση 4.1.9** *Η παραπάνω πρόταση μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και στην αλλαγή μεταβλητής για την εύρεση ορίου. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι αναζητούμε το όριο μιας συνάρτησης $h$ σ' ένα σημείο $x_0$. Μετατρέπουμε την $h$ σε σύνθεση $g \circ f$ δύο άλλων* *συναρτήσεων έτσι ώστε να υπάρχει το* $\lim_{x\to x_0} f(x) = x_1$ *(με* $f(x) \neq x_1$ *για* $x \neq x_0$*) καθώς και το* $\lim_{y\to x_1} g(y)$*. Τότε σύμφωνα με την πρόταση 4.1.7, αν θέσουμε* $f(x) = y$*, έχουμε*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} g(f(x)) &= g(\lim_{x\to x_0} f(x)) \\ &= g(x_1) \\ &= \lim_{y\to x_1} g(y),\end{aligned}$$

*άρα το ζητούμενο* $\lim_{x_0} h = \lim_{x_0} g\circ f$ *ανάγεται στο* $\lim_{x_1} g(y)$*.*

**Παράδειγμα 4.1.10** *Υπολογίστε το* $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}$*. Πρώτα απ' όλα έχουμε:*

$$x\sin\frac{1}{x} = \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

*Αν θέσουμε* $f(x) = \frac{1}{x}$ *και* $g(y) = \frac{\sin y}{y}$*, θα έχουμε* $x\sin\frac{1}{x} = g(f(x))$*. Επειδή* $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ *και* $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$*, από την παραπάνω παρατήρηση θα έχουμε* $\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = 1$*. Δηλαδή,*

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1.$$

Στην συνέχεια δίνουμε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης σ' ένα σύνολο:

**Ορισμός 4.1.11** *Έστω* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$*. Αν* $B \subseteq A$*, τότε η* $f$ *λέγεται* **συνεχής στο** $B$ *ανν η* $f$ *είναι συνεχής για κάθε* $x_0 \in B$*. Ειδικότερα η* $f$ *λέγεται* **συνεχής** *ανν η* $f$ *είναι συνεχής για κάθε σημείο* $x_0$ *του πεδίου ορισμού της* $A$*.*

**Παράδειγμα 4.1.12** *Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση* $f(x) = e^x$*. Η* $f$ *είναι συνεχής για κάθε* $x \in \mathbb{R}$*, συνεπώς η* $f$ *είναι συνεχής.*

**Παράδειγμα 4.1.13** *Δίνεται η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-\alpha\beta}{\sqrt[3]{x}-1} & , \quad x \in [0,1) \\ \beta - \frac{1}{2} & , \quad x = 1 \\ \frac{\sin(x-1)+\gamma x-\gamma}{x^2-4x+3} & , \quad x \in (1,3) \end{cases} .$$

*Θα υπολογίσουμε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.*

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-\alpha\beta}{\sqrt[3]{x}-1}$. Επομένως, αν $1-\alpha\beta \neq 0$, τότε $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \pm\infty$. Άρα η περίπτωση $1-\alpha\beta \neq 0$ δεν μπορεί να γίνει δεκτή.

($i$) Αν $1 = \alpha\beta$, τότε έχουμε $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό: $y = \sqrt[6]{x}$. Συνεπώς έχουμε $\sqrt{x} = y^3$ και $\sqrt[3]{x} = y^2$. Επίσης παρατηρούμε ότι αν $x \to 1^-$, τότε $y \to 1^-$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{y\to 1^-} \frac{y^3-1}{y^2-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)} \\ &= \frac{3}{2}. \quad (1) \end{aligned}$$

Για το όριο από δεξιά έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(x-1)+\gamma x-\gamma}{x^2-4x+3}\\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(x-1)+\gamma x-\gamma}{(x-1)(x-3)}\\
&= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-3)} + \frac{\gamma}{x-3}\right)\\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-3)} + \lim_{x\to 1^+} \frac{\gamma}{(x-3)}.
\end{aligned}$$

Επομένως $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1\left(\frac{-1}{2}\right) - \frac{\gamma}{2} = -\frac{\gamma+1}{2}$. Πρέπει να έχουμε $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$. Δηλαδή από την (1) προκύπτει: $\frac{3}{2} = -\frac{\gamma+1}{2}$ ή $\gamma + 1 = -3$, δηλαδή $\gamma = -4$. Από τη σχέση $\lim_{x\to 1} = f(1)$, προκύπτει ότι $\frac{3}{2} = \beta - \frac{1}{2}$ ή $\beta = 2$. Από τη σχέση $\alpha\beta = 1$, έχουμε $\alpha = \frac{1}{2}$.

## 4.2. Είδη Ασυνέχειας-Συνεχής Επέκταση

Αν μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της, τότε λέγεται **ασυνεχής στο** $x_0$ και το $x_0$ λέγεται **σημείο ασυνέχειας της** $f$. Δηλαδή μια συνάρτηση $f$ είναι ασυνεχής στο $x_0 \in A$, αν και μόνον αν:

1) Το όριο της $f$ στο $x_0$ δεν είναι πραγματικός αριθμός ή

2) Το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός αλλά είναι διαφορετικός από το $f(x_0)$.

Υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση $f$ είναι ασυνεχής σ' ένα σημείο $x_0 \in A$. Αν τα όρια της $f$ από δεξιά και από αριστερά στο σημείο αυτό υπάρχουν τότε η ασυνέχεια ονομάζεται **ασυνέχεια πρώτου είδους**. Αν επιπλεόν τα πλευρικά όρια είναι ίσα, δηλαδή έχουμε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ $(\neq f(x_0))$, τότε η ασυνέχεια ονομάζεται **εξουδετερώσιμη**. Αν τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά μεταξύ τους $(\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x))$ τότε η ασυνέχεια δεν είναι εξουδετερώσιμη και θα λέμε ότι η $f$ παρουσιάζει στο $x_0$ **άλμα**. Αν τώρα ένα ή και τα δύο όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ δεν υπάρχουν τότε η ασυνέχεια στο $x_0$ λέγεται **δευτέρου είδους**. Όταν μια συνάρτηση $f$ παρουσιάζει εξουδετερώσιμη ασυνέχεια σ' ένα σημείο $x_0$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια επέκταση $\tilde{f}$ της $f$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

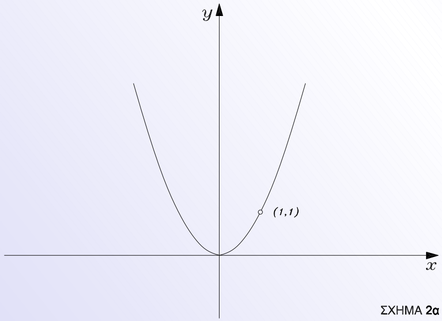
**Ορισμός 4.2.1** *Έστω $f : A \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, με $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\tilde{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}$ με*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \neq x_0 \\ \ell & , \quad x = x_0 \end{cases} .$$

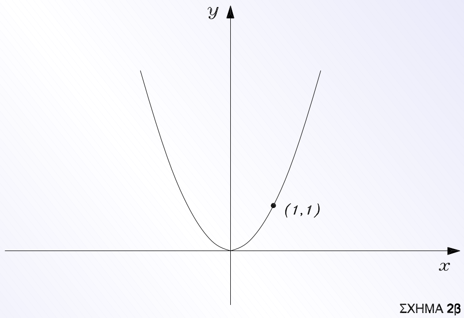
*Τότε η $\tilde{f}$ είναι συνεχής στο $x_0$ και ονομάζεται* **συνεχής επέκταση** *της $f$ στο $x_0$.*

**Παραδείγματα 4.2.2** *1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $\tilde{f}$, επέκταση της $f$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ (βλ. σχήμα 2α και 2b). Πράγματι, επειδή έχουμε $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, αρκεί να θέσουμε*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \neq 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases} ,$$




ΣΧΗΜΑ 2α




ΣΧΗΜΑ 2β

*2) Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, *με* $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. *Δείχνουμε ότι η* $f$ *επεκτείνεται συνεχώς στο* 0. *Πράγματι έχουμε* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. *Άρα, αν θέσουμε*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

*η* $\tilde{f}$ *είναι συνεχής επέκταση της* $f$ *στο* 0.

## 4.3. Αρχή της μεταφοράς

Στην συνέχεια θα παραθέσουμε ένα κριτήριο για τη συνέχεια μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο $x_0$ με τη βοήθεια ακολουθιών. Αυτό το κριτήριο βασίζεται στην πρόταση 3.5.1. Πιο συγκεκριμένα:

**Πρόταση 4.3.1** *Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$ ανν για κάθε ακολουθία $(x_n) \in A$ με $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ έχουμε $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.* **Απόδειξη**

**Παρατήρηση 4.3.2** *Η παραπάνω πρόταση χρησιμοποιείται τις περισσότερες φορές ως κριτήριο για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση $f$* **δεν** *είναι συνεχής σ' ένα σημείο $x_0$. Πράγματι, για να ισχύει η πρόταση 4.3.1 θα πρέπει για κάθε ακολουθία $x_n \to x_0$ να ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$. Έτσι, αν υπάρχει ακολουθία $(x_n)$ με $x_n \to x_0$ για την οποία*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$$

*τότε η $f$ δεν είναι συνεχής στο $x_0$.*

**Παραδείγματα 4.3.3** 1) *Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 0$ τη συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}.$$

*Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς: Θεωρούμε την ακολουθία του $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x_n = \frac{1}{n}$. Έχουμε $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Όμως, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \neq f(0)$. Άρα η $f$ δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.*

2) *Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 0$ τη συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}.$$

*Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς: Θεωρούμε την ακολουθία του $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$. Έχουμε $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Όμως, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1 \neq f(0)$. Άρα η $f$ δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.*

2) *Δείξτε ότι η συνάρτηση Dirichlet:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } x \text{ ρητός} \\ 1 & , \text{ αν } x \text{ άρρητος} \end{cases},$$

*δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της.*

*Για τη μελέτη της συνάρτησης Dirichlet, χρειαζόμαστε το παρακάτω σημαντικό αποτέλεσμα:*

**Το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ και των άρρητων $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$:**

*(a) Για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών $(a_n) \in \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = x.$$

*(b) Για κάθε πραγματικό αριθμό $y \in \mathbb{R}$, υπάρχει ακολουθία άρρητων αριθμών $(b_n) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = y.$$

*Θεωρούμε τώρα $x_0 \in \mathbb{R}$ ένα σημείο του πεδίου ορισμού της $f$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $x_0 \in \mathbb{Q}$. Από την ιδιότητα (b) υπάρχει ακολουθία $b_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to+\infty} b_n = x_0$. Όμως από τον ορισμό της $f$ έχουμε, $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0 = f(x_0)$. Αντίστοιχα, αν υποθέσουμε ότι $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε από την ιδιότητα (a) υπάρχει ακολουθία $a_n \in \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$. Όμως από τον ορισμό της $f$ έχουμε, $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \neq 1 = f(x_0)$. Επομένως, είτε το $x_0$ είναι ρητός είτε είναι άρρητος, μπορούμε να βρούμε ακολουθία $y_n \in \mathbb{R}$ με $y_n \longrightarrow x_0$ καθώς $n \to +\infty$ και $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) \neq f(x_0)$ Άρα από την αρχή της μεταφοράς (βλ. παρατήρηση 4.3.2), η $f$ είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.*

## 4.4. Ιδιότητες Συνεχών συναρτήσεων σε κλειστό διάστημα

**Θεώρημα 4.4.1** *(Θεώρημα Bolzano-Weirstrass) Έστω $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και επιπλέον ισχύει: $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$. Τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.* ***Απόδειξη***

**Θεώρημα 4.4.2** *(Ενδιάμεσων τιμών). Έστω $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η $f$ παίρνει κάθε τιμή μεταξύ της $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.* **Απόδειξη**

**Παρατήρηση 4.4.3** *Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης 4.4.2 δεν ισχύει. Δηλαδή αν η $f$ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $\alpha$ και $\beta$* **δεν** *συνεπάγεται ότι η $f$ είναι συνεχής. Πράγματι θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:*

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 1 - x & , \quad \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}.$$

*Έχουμε $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Η $f$ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ 0 και 1 (γιατί;). Όμως η $f$ είναι συνεχής μόνο για $x = \frac{1}{2}$ (γιατί;).*

**Εφαρμογή 4.4.4** *(Θεώρημα σταθερού σημείου). Έστω $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow [\alpha, \beta]$ συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.* **Απόδειξη**

**Θεώρημα 4.4.5** *(Μεγίστης και ελαχίστης τιμής). Έστω $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in [\alpha, \beta]$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ να ισχύει:*

$$f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2).$$

**Απόδειξη**

**Εφαρμογή 4.4.6** *Να αποδειχτεί ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.* **Απόδειξη**

**Παραδείγματα 4.4.7** 1) *Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 5x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$. Θέτουμε $P(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 + x - 1$. Έχουμε $P(0) = 1$ και $P(1) = -5$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 4.4.1 στο διάστημα $(0, 1)$.*

2) *Αν $f, g$ είναι δύο συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[0, 1]$, τέτοιες ώστε $f(0) = g(1)$, $f(1) = g(0)$ και $g(0) \neq g(1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε*

$f(\xi) = g(\xi)$. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $h(x) = f(x) - g(x)$. *Η* $h$ *είναι συνεχής και επιπλέον έχουμε:*

$$\text{και} \quad \left.\begin{array}{l} h(0) = f(0) - g(0) \\ h(1) = f(1) - g(1) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} h(0) \cdot h(1) &= (f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) \\ &= f(0)f(1) - g(0)f(1) - f(0)g(1) + g(0)g(1) \\ &= 2f(1)g(1) - (f(1))^2 - (g(1))^2 \\ &= -(f(1) + g(1))^2 < 0. \end{aligned}$$

*Άρα υπάρχει* $\xi \in (0, 1)$ *τέτοιο ώστε* $h(\xi) = 0$, *δηλαδή* $f(\xi) = g(\xi)$.

## 4.5. Ομοιόμορφη Συνέχεια

Η ομοιόμορφη συνέχεια αφορά την συμπεριφορά μιας συνάρτησης σ' ένα σύνολο κι όχι σ' ένα σημείο όπως στη συνέχεια. Πιο συγκεκριμένα:

**Ορισμός 4.5.1** *Έστω* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *και* $X \subseteq A$. *Θα λέμε ότι η* $f$ *είναι* **ομοιόμορφα συνεχής** *στο* $X$ *αν και μόνον αν*

$$\forall > 0, \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } \forall x, x' \in X \text{ με } |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < .$$

**Παράδειγμα 4.5.2** *Έστω* $f(x) = x^2$. *Εξετάζουμε αν η* $f$ *είναι ομοιόμορφα συνεχής στο* $\mathbb{R}$. *Για κάθε* $x, x' \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(x')| = |x^2 - x'^2| = |x + x'||x - x'|.$$

*Αυτή η ποσότητα δεν μπορεί να είναι* $<$ *για κάθε* $x, x' \in \mathbb{R}$. *Αν όμως περιορίσουμε τη συνάρτηση* $f(x) = x^2$ *σ' ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο* $[a, b]$, *τότε*

$$|x + x'| \leq |x| + |x'| \leq b + b = 2b.$$

Πραγματικοί Αριθμοί
Ακολουθίες
Συναρτήσεις-Όρια . . .
Συνέχεια Συναρτήσεων
Ορισμός Συνέχειας
Είδη Ασυνέχειας- . . .
Αρχή της μεταφοράς
Ιδιότητες Συνεχών . . .
Ομοιόμορφη Συνέχεια
Παράγωγος Συναρτήσεων
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 51 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

*Άρα*

$$\forall > 0, \exists \delta = /2b \text{ τ.ω. } \forall x, x' \in [a, b] \text{ με } |x - x'| < \delta \Longrightarrow$$
$$|x^2 - x'^2| \leq (|x| + |x'|)|x - x'| < 2b \cdot (/2b) = .$$

**Ορισμός 4.5.3** *Μια συνάρτηση* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *θα λέμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο* $X \subseteq A$ *ανν* $\exists M > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x, x' \in X$ *με* $|x - x'| < \delta$ *να έχουμε* $|f(x) - f(x')| < M \cdot |x - x'|$.

Είναι προφανές ότι αν η $f$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο $X$ τότε η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $X$. Πράγματι αρκεί να επιλέξουμε $\delta = /M$.

**Πρόταση 4.5.4** *Αν η* $f$ *είναι ομοιόμορφα συνεχής στο* $X$*, τότε η* $f$ *είναι συνεχής στο* $X$.
***Απόδειξη***

**Παρατήρηση 4.5.5** *Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει πάντα.*

Τέλος, παραθέτουμε ένα κριτήριο ομοιόμορφης συνέχειας:

**Θεώρημα 4.5.6** *Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ΄ ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο* $[a, b]$*, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο* $[a, b]$. ***Απόδειξη***

# Κεφάλαιο 5

# Παράγωγος Συναρτήσεων

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την παράγωγο πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής.

## 5.1. Ορισμός και γεωμετρική ερμηνεία Παραγώγου

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Έστω ότι το πεδίο ορισμού $A$ της $f$ περιέχει τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα με άκρο το $x_0$. Δίνουμε το ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 5.1.1** *Η $f$ λέγεται* **παραγωγίσιμη** *στο $x_0$ ανν το $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.*

Αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ τότε ο αριθμός

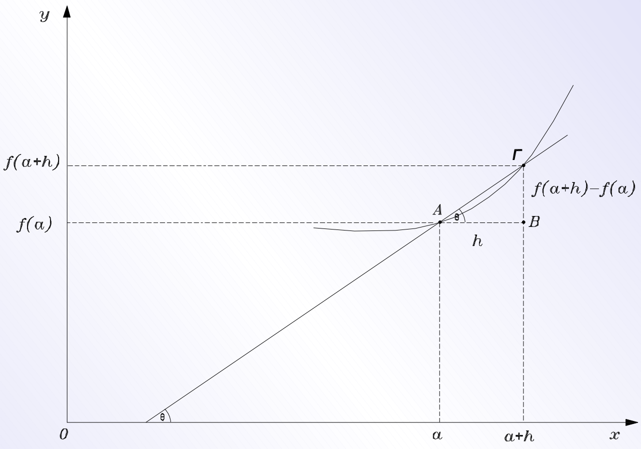
$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

λέγεται **παράγωγος** της $f$ στο $x_0$.

**Παρατήρηση 5.1.2** *Αν στον παραπάνω ορισμό της παραγώγου θέσουμε* $h = x - x_0$, *τότε έχουμε* $h \to 0$ *και ο παραπάνω ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο* $x_0$ *γράφεται:*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Στη συνέχεια δίνουμε τη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου.



ΣΧΗΜΑ 1

Η τέμνουσα ευθεία που περνά από τα σημεία $A, \Gamma$ έχει εξίσωση:

$$y - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a).$$

Αν υποθέσουμε ότι $h \longrightarrow 0$, τότε το $\Gamma$ τείνει να συμπέσει με το $A$ οπότε η τέμνουσα γίνεται **εφαπτομένη** της $f$ στο $a$. Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f$ σ' ένα σημείο $a$, είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της $f$ στο σημείο $(a, f(a))$.

## 5.2. Πλευρικές Παράγωγοι

Αν στο σημείο $x_0$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια της $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, τότε μπορούμε να ορίσουμε τις πλευρικές παραγώγους της $f$ στο $x_0$. Πιο συγκεκριμένα,

**Ορισμός 5.2.1** *Αν το* $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *υπάρχει, τότε λέμε ότι η* $f$ *παραγωγίζεται στο* $x_0$ *από δεξιά και ο αριθμός*

$$f'_+(x_0) := \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

*λέγεται* **δεξιά παράγωγος της $f$ στο** $x_0$. *Αντίστοιχα, αν το* $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *υπάρχει, τότε ο αριθμός*

$$f'_-(x_0) := \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

*λέγεται* **αριστερή παράγωγος της $f$ στο** $x_0$.

**Παρατήρηση 5.2.2** *Σύμφωνα με το θεώρημα 3.4.3 από τις ιδιότητες των ορίων, η* $f$ *παραγωγίζεται στο* $x_0$ *αν και μόνον αν υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι της* $f$ *στο* $x_0$ *και είναι ίσες.*

**Παράδειγμα 5.2.3** *Έστω* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $f(x) = |x| + |x+1|$. *Η* $f$ *γράφεται:*

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1 & , \text{ αν } x \le -1 \\ 1 & , \text{ αν } -1 < x < 0 \\ 2x+1 & , \text{ αν } x \ge 0 \end{cases}.$$

*Για $x < -1$ έχουμε*

$$\begin{aligned} f'_-(-1) &= \lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{-2x - 1 - 1}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{-2(x+1)}{x+1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

*ενώ*

$$\begin{aligned} f'_+(-1) &= \lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{1-1}{x+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

*Δηλαδή, $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$ και συνεπώς η $f'(-1)$ δεν υπάρχει. Όμοια δείχνουμε ότι η $f'(0)$ δεν υπάρχει.*

**Θεώρημα 5.2.4** *Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$, τότε η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$.* ***Απόδειξη***

**Παρατήρηση 5.2.5** *Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα, έστω $f(x) = |x|$. Η $f$ είναι συνεχής στο 0. Πράγματι,*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0.$$

'Ομως,

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \\ &= 1, \end{aligned}$$

*ενώ*

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} \\ &= -1. \end{aligned}$$

*Δηλαδή* $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ *και η* $f$ **δεν** *είναι παραγωγίσιμη στο* $0$.

Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ και $A'$ το σύνολο των στοιχείων του $A$ όπου η $f$ είναι παραγωγίσιμη (δηλ. το $f'(x_0)$ υπάρχει για κάθε $x_0 \in A'$). Τότε μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $f' : A' \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία αντιστοιχεί σε κάθε σημείο $x$ την παράγωγο της $f$ στο σημείο αυτό.

**Ορισμός 5.2.6** *Θα λέμε ότι η* $f$ *είναι* **παραγωγίσιμη** *σ' ένα σύνολο* $A$ **ανν** *η* $f$ *είναι παραγωγίσιμη για κάθε* $x \in A$.

Ειδικότερα στον παραπάνω ορισμό αν έχουμε $A = [a, b]$, θα λέμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ **ανν**:
(*i*) η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(a, b)$,
(*ii*) υπάρχει η δεξιά παράγωγος της $f$ στο $a$, και
(*iii*) υπάρχει η αριστερή παράγωγος της $f$ στο $b$.

## 5.3. Ιδιότητες Παραγώγου-Κανόνας αλυσίδας

**Πρόταση 5.3.1** *Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ και $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ και $f, g$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $x_0 \in A$. Τότε:*

(α) *Αν $k \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $kf$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$.*

(β) *Η $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(γ) *Η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(δ) *Αν $g(x_0) \neq 0$, τότε η $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

*Απόδειξη*

**Θεώρημα 5.3.2** *(Κανόνας αλυσίδας) Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και επιπλέον έχουμε:*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

*Απόδειξη*

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα για να υπολογίσουμε την παράγωγο της αντίστροφης απεικόνισης.

**Πρόταση 5.3.3** *Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ «1-1». Αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in I$ και $f'(x_0) \neq 0$, τότε η αντιστροφή της συνάρτηση $f^{-1} : f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και επιπλέον έχουμε:*

$$(f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

***Απόδειξη***

**Παράδειγμα 5.3.4** *Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x$. Βρείτε την παράγωγο της $f^{-1}$ στο σημείο $y_0 = 10$.*

*Η $f(x) = x^3 + x$ είναι «1-1»:*

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies x^3 + x = y^3 + y \\ &\implies x^3 - y^3 = y - x \\ &\implies (x-y)(x^2 + xy + y^2) + x - y = 0 \\ &\implies (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0 \\ &\implies x = y. \end{aligned}$$

*Αν $y_0 = 10$ τότε $x_0^3 + x_0 = 10$, συνεπώς $x_0 = 2$. Επίσης έχουμε $f'(x) = 3x^2 + 1$. Άρα από την παραπάνω πρόταση παίρνουμε*

$$(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{13}.$$

## 5.4. Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

Στην παράγωγο αυτή θα υπολογίσουμε την παράγωγο μερικών στοιχειωδών συναρτήσεων.

1) **Παράγωγος πολυωνυμικής συνάρτησης**. Αν $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ τότε $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$. Γενικότερα αν $f(x) = x^a$ με $a \in \mathbb{R}$, τότε

$f'(x) = (x^a)' = ax^{a-1}$. Π.χ. $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

2) **Παράγωγος εκθετικής συνάρτησης**. Αν $f(x) = a^x$, με $a > 0$, τότε $f'(x) = a^x \log a$. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

3) **Παράγωγος λογαριθμικής συνάρτησης**. Αν $g(x) = \log x$ με $x > 0$, τότε $(\log)'(x) = \frac{1}{x}$. Ως γνωστόν, η $g(x) = \log x$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = e^x$. Από την πρόταση 5.3.3 ξέρουμε ότι η παράγωγος της αντίστροφης απεικόνισης δίνεται από τον τύπο

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{ή} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Άρα $(\log)'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$.

4) **Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων**.

• $(\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \cos(x + \frac{h}{2}) \\
&= 1\cdot\cos x \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

- $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \left(\sin(\frac{\pi}{2} - x)\right)' \\
&= \left(\cos(\frac{\pi}{2} - x)\right) \cdot (\frac{\pi}{2} - x)' \\
&= \sin x \cdot (-1) \\
&= -\sin x.
\end{aligned}$$

- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, $\forall x$, με $\cos x \neq 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= 1 + \tan^2 x.
\end{aligned}$$

- $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $\forall x$, με $\sin x \neq 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
(\cot x)' &= \left(\frac{1}{\tan x}\right)' \\
&= -\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} \\
&= -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\
&= -\frac{1}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

5) **Παράγωγος αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων**.

• $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in (-1,1)$. Θέτουμε $\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y$. Επομένως έχουμε,

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= (\sin^{-1} x)' \\ &= \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

• $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in (-1,1)$. Θέτουμε $\arccos x = y \Leftrightarrow x = \cos y$. Επομένως έχουμε,

$$\begin{aligned}(\arccos x)' &= (\cos^{-1} x)' \\ &= -\frac{1}{\sin y} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

• $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $\arctan x = y \Leftrightarrow x = \tan y$. Επομένως επειδή

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$, έχουμε,

$$\begin{aligned} (\arctan x)' &= (\tan^{-1} x)' \\ &= \frac{1}{1+\tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

6) **Παράγωγος υπερβολικών συναρτήσεων**.

- $(\sinh x)' = \cosh x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $(\cosh x)' = \sinh x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

## 5.5. Παράγωγοι ανωτέρας τάξης

Η παράγωγος $f'$ μιας συνάρτησης $f$ είναι μια νέα συνάρτηση. Επομένως είναι δυνατό να είναι κι αυτή παραγωγίσιμη σ' ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Έτσι, θα ορίζεται μια άλλη συνάρτηση, η παράγωγος της $f'$, που λέγεται δεύτερη παράγωγος της $f$ και συμβολίζεται με $f''$. Όμοια η παράγωγος της $f''$ λέγεται τρίτη παράγωγος της $f$ κ.ο.κ. Γενικά ορίζουμε:

**Ορισμός 5.5.1** *Η παράγωγος συνάρτηση της συνάρτησης $f'$, αν υπάρχει, λέγεται* **δεύτερη παράγωγος** *της $f$ και συμβολίζεται με $f''$. Επαγωγικά ορίζεται η $n$-***οστή** *παράγωγος της $f$ (συμβ. $f^{(n)}$), ως η παράγωγος της συνάρτησης $f^{(n-1)}$.*

**Παραδείγματα 5.5.2** 1) *Αν* $f(x) = (x-a)^m$, $m \in \mathbb{R}$, *τότε* $f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(x-a)^{m-n}$ *για* $n \leq m$.

*Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο* $n$. *Για* $n = 1$ *έχουμε* $f'(x) = m(x-1)^{m-1}$, *που ισχύει. Έστω ότι ισχύει για* $n$. *Θα δείξω ότι ισχύει για* $n+1$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\ &= [m(m-1)\dots(m-n+1)(x-a)^{m-n}]' \qquad \textit{(από υπόθεση επαγωγής)} \\ &= m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)(x-a)^{m-n-1} \\ &= m(m-1)\dots(m-n+1)(m-(n+1)+1)(x-a)^{m-(n+1)}. \end{aligned}$$

2) *Να υπολογιστεί η* $n$*-οστή παράγωγος της* $f(x) = \log(x)$.

*Βρίσκουμε ενδεικτικά τις 4 πρώτες παραγώγους:*

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}.$$

*Επομένως μπορούμε να εικάσουμε ότι*

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

*Το αποδεικνύουμε με επαγωγή στο* $n$: *Για* $n = 1$, *έχουμε* $f'(x) = \frac{1}{x}$, *που ισχύει. Έστω ότι* ισχύει για $n$: $f^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n+1$:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\
&= \left((-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\right)' \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{x^n}\right)' \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)!(x^{-n})' \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)!(-nx^{-n-1}) \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{-n}{x^{n+1}} \\
&= (-1)^{n}\frac{n!}{x^{n+1}}.
\end{aligned}$$

## 5.6. Τα βασικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού

Στην αρχή της παραγράφου αυτής θα δώσουμε τους ορισμούς των τοπικών και ολικών ακροτάτων μιας συνάρτησης $f$.

**Ορισμός 5.6.1** *Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η $f$ παρουσιάζει* **τοπικό μέγιστο**, *σ΄ ένα σημείο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω $\forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$.*

*Θα λέμε ότι η $f$ παρουσιάζει* **τοπικό ελάχιστο**, *σ΄ ένα σημείο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω $\forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να έχουμε $f(x_0) \leq f(x)$.*

*Θα λέμε ότι η $f$ παρουσιάζει* **ολικό μέγιστο**, *σ΄ ένα σημείο $x_0 \in A$,* **ανν** *$f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in A$.*

*Θα λέμε ότι η $f$ παρουσιάζει* **ολικό ελάχιστο**, *σ΄ ένα σημείο $x_0 \in A$,* **ανν** *$f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in A$.*

**Πρόταση 5.6.2** *Έστω $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ και $f$ παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a, b)$. Τότε:*

*a) Αν $f'(x_0) > 0$, τότε $\exists \delta > 0$ τ.ω. $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ και $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$.*

*b) Αν $f'(x_0) < 0$, τότε $\exists \delta > 0$ τ.ω. $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ και $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$.* ***Απόδειξη***

Στη συνέχεια παραθέτουμε τα βασικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού.

**Θεώρημα 5.6.3** **(Fermat)** *Έστω ότι η $f : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$, παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$, τότε $f'(x_0) = 0$.* ***Απόδειξη***

**Παρατηρήσεις 5.6.4** *1) Η υπόθεση ότι η $f$ ορίζεται σ' ένα ανοικτό διάστημα είναι αναγκαία. Π.χ. η συνάρτηση $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x + 1$ έχει μέγιστο στο $x_0 = 1$, διότι για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $f(x) = 2x + 1 < 3 = f(1)$, αλλά $f'(1) = 2 \neq 0$.*

*2) Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει πάντα. Δηλαδή ο μηδενισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη τοπικού ακροτάτου της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Π.χ. για την συνάρτηση $f(x) = x^3$ έχουμε $f'(0) = 0$, αλλά $f(x) > 0$ $\forall x > 0$ και $f(x) < 0$ $\forall x < 0$.*

*3) Μια συνάρτηση μπορεί να έχει ακρότατο σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, χωρίς να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Π.χ. η $f(x) = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, αλλά παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο αυτό.*

*4) Από το θεώρημα Fermat προκύπτει ότι τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης θα αναζητηθούν μεταξύ των λύσεων της εξίσωσης $f'(x) = 0$.*

**Θεώρημα 5.6.5** **(Rolle)** *Έστω $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \beta)$ και $f(\alpha) = f(\beta)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.* ***Απόδειξη***

**Εφαρμογή 5.6.6** *Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^{2n} + \alpha x + \beta = 0$ δεν έχει περισσότερες από δύο πραγματικές ρίζες.*

Έστω ότι η $x^{2n}+ax+\beta=0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Έτσι για τη συνάρτηση $f(x)=x^{2n}+ax+\beta$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα έχουμε:

$$\begin{array}{ll} & f(\rho_1)=f(\rho_2) \quad (=0) \\ \text{και} & \\ & f(\rho_2)=f(\rho_3) \quad (=0) \end{array}.$$

Τότε από το θεώρημα Rolle για την $f$ στα διαστήματα $(\rho_1,\rho_2)$ και $(\rho_2,\rho_3)$, υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$. Δηλαδή, αφού $f'(x)=2nx^{2n-1}+a$, η εξίσωση $2nx^{2n-1}+a=0$ θα έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες $\xi_1$ και $\xi_2$. Άτοπο, διότι η εξίσωση $x^n=a$ περιττού βαθμού έχει μια μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$. Άρα η $x^{2n}+ax+\beta=0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

**Θεώρημα 5.6.7** (**Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)** ) Έστω $f:[a,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(a,\beta)$. Τότε υπάρχει $\xi\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}.$$

*Απόδειξη*

**Πρόταση 5.6.8** Έστω $f:[a,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(a,\beta)$, με $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(a,\beta)$. Τότε η $f$ είναι σταθερή στο $[a,\beta]$. *Απόδειξη*

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ένα βασικό κριτήριο μονοτονίας μιας συνάρτησης χρησιμοποιώντας ιδιότητες της παραγώγου.

**Θεώρημα 5.6.9** Έστω $f:[a,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(a,\beta)$.

(i) Η $f$ είναι αύξουσα στο $[a,\beta]$ **ανν** $f'(x)\geq 0\ \forall x\in[a,\beta]$.

(ii) Η $f$ είναι φθίνουσα στο $[a,\beta]$ **ανν** $f'(x)\leq 0\ \forall x\in[a,\beta]$. *Απόδειξη*

Τελειώνοντας την παράγραφο αυτή θα δούμε κάποιες εφαρμογές του θωρήματος του Fermat για την εύρεση ακροτάτων μιας συνάρτησης.

**Θεώρημα 5.6.10** *Έστω $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $x_0 \in (a, b)$. Υποθέτουμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(a, x_0)$ και στο $(x_0, b)$. Τότε:*

*i) αν υπάρχει μια περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [a, b]$ τ.ω.:*

$$\text{και} \quad \begin{array}{lll} f'(x) \geq 0 & \text{για} & x_0 - \delta < x < x_0 \\ f'(x) \leq 0 & \text{για} & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{array}$$

*τότε η $f$ παρουσιάζει στο $x_0$ τοπικό μέγιστο.*

*ii) αν υπάρχει μια περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [a, b]$ τ.ω.:*

$$\text{και} \quad \begin{array}{lll} f'(x) \leq 0 & \text{για} & x_0 - \delta < x < x_0 \\ f'(x) \geq 0 & \text{για} & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{array}$$

*τότε η $f$ παρουσιάζει στο $x_0$ τοπικό ελάχιστο.* **Απόδειξη**

**Παράδειγμα 5.6.11** *Βρείτε τα ακρότατα της $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ 2 - x & , x > 1 \end{cases}$$

*Αν $x < 1$, τότε $f'(x) = 2x$. Αν $x > 1$, τότε $f'(x) = -1$. Αν $x = 1$, τότε*

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2-x-1}{x-1} = -1$$
$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

*Άρα η $f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1. Έχουμε:*

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ | $-$ | |
| $f$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | |

*Άρα η $f$ παρουσιάζει στο 0 τοπικό ελάχιστο και στο 1 τοπικό μέγιστο.*

**Πώς βρίσκουμε τα τοπικά ακρότατα:**

*i*) Βρίσκουμε όλα τα σημεία όπου μηδενίζεται η παράγωγος.

*ii*) Παίρνουμε τα σημεία όπου δεν ορίζεται η παράγωγος.

*iii*) Εξετάζουμε το πρόσημο της $f'$ δεξιά και αριστερά από τα παραπάνω σημεία:

- Αν αλλάξει πρόσημο η παράγωγος, τότε είναι τοπικό ακρότατο.
- Αν δεν αλλάξει πρόσημο η παράγωγος, τότε δεν είναι τοπικό ακρότατο.

**Θεώρημα 5.6.12** *Έστω $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $x_0 \in (a, b)$. Υποθέτουμε ότι η $f''$ υπάρχει και είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ και ακόμα $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) \neq 0$. Τότε αν $f''(x_0) > 0$, η $f$ έχει τοπικό ελάχιστο και αν $f''(x_0) < 0$, η $f$ έχει τοπικό μέγιστο.* **Απόδειξη**

## 5.7. Ο τύπος του Taylor

Ένα χρήσιμο «εργαλείο» για την μελέτη των συναρτήσεων στην Ανάλυση είναι ο τύπος του Taylor. Πιο συγκεκριμένα με τον τύπο αυτό «προσεγγίζουμε» τοπικά μια οποιαδήποτε συνάρτηση μ' ένα πολυώνυμο. Ο τύπος του Taylor έχει πολλές εφαρμογές σε κλάδους της ανάλυσης. Στη παράγραφο αυτή θα παραθέσουμε τον τύπο και αρκετές εφαρμογές.

Ο τύπος του Taylor είναι μια γενίκευση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σε παραγώγους ανώτερης τάξης. Πιο συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με το παρακάτω πρόβλημα:

**Πρόβλημα:** Έστω $f$ μια συνάρτηση που έχει παραγώγους $n$ τάξης σ' ένα σημείο $x_0$. Να βρεθεί ένα πολυώνυμο $P_n$ $n$-οστού βαθμού τέτοιο ώστε:

$$P_n(x_0) = f(x_0) \text{ και } P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \text{ για } k = 1, 2, \ldots n \quad (*).$$

Απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα δίνει το θεώρημα του Taylor:

**Θεώρημα 5.7.1** *(Τύπος του Taylor) Έστω $f : [a, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε η $f$ έχει παραγώγους n-οστής τάξης σ' ένα διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Τότε για οποιοδήποτε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\exists \xi$ μεταξύ $x$ και $x_0$ τέτοιο ώστε:*

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) + R_n(x),}$$

*όπου $R_n(x) = \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$ ονομάζεται υπόλοιπο Lagrange.* **Απόδειξη**

Το πολυώνυμο που εμφανίζεται στον τύπο του Taylor:

$$P(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)$$

ονομάζεται **προσεγγιστικό πολυώνυμο της $f$ στο $x_0$ τάξης** $n - 1$.

Στο σημείο $x_0 = 0$, ο τύπος του Taylor λέγεται και τύπος του Mac Laurin και έχει την εξής μορφή:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n(x),$$

όπου $R_n(x) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$. Επειδή κάθε αριθμός $\xi$ μεταξύ 0 και $x$ μπορεί να γραφεί $\xi = \vartheta x$ με $0 < \vartheta < 1$, τότε το υπόλοιπο γράφεται $R_n(x) = \frac{(x)^n}{n!}f^{(n)}(\vartheta)$.

**Παράδειγμα 5.7.2** **(Ο τύπος του Mac Laurin της εκθετικής συνάρτησης)** *Υπολογίστε του τύπο του Mac Laurin για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$. Έχουμε $f(0) = 1$ και $f^{(n)}(x) = e^x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς έχουμε $f^{(n)}(0) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),$$

*όπου $R_n(x) = \frac{(x)^n}{n!}e^{\vartheta x}$.*

Πραγματικοί Αριθμοί
Ακολουθίες
Συναρτήσεις-Όρια...
Συνέχεια Συναρτήσεων
Παράγωγος Συναρτήσεων
>Προηγούμενες Ενότητες<
Παράγωγοι ανωτέρας...
Τα βασικά θεωρήματα...
Ο τύπος του Taylor
Εύρεση ορίου...
Κυρτές και κοίλες...
Ασύμπτωτες-Μελέτη...
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 71 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

**Πρόταση 5.7.3** *Για την εκθετική συνάρτηση ισχύει*

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0.$$

*Απόδειξη*

**Παραδείγματα 5.7.4** **(Ο τύπος του Mac Laurin τριγωνομετρικών συναρτήσεων)** *Υπολογίστε τον τύπο του Mac Laurin του ημιτόνου και του συνημιτόνου.*

*Έχουμε,*

$$\begin{array}{lcl} f(x) = \sin x & \Rightarrow & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & \Rightarrow & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & \Rightarrow & f''(0) = 0 \\ f^{(3)}(x) = -\cos x & \Rightarrow & f^{(3)}(0) = -1 \\ \vdots & & \\ f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n+1}. & & \end{array}$$

*Άρα ο τύπος του ημιτόνου παίρνει την μορφή:*

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x).$$

*Όμοια βρίσκουμε και τον τύπο του συνημιτόνου:*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R_{2n-1}(x).$$

**Παράδειγμα 5.7.5** **(Ο τύπος του Mac Laurin λογαριθμικής συνάρτησης)** *Υπολογίστε τον τύπο του Mac Laurin της συνάρτησης* $f(x) = \log(1+x)$, *για* $x > -1$.

*Έχουμε,*

$$\begin{array}{lcl} f(x) = \log(1+x) & \Rightarrow & f(0) = \log 1 \\ f'(x) = \frac{1}{x+1} & \Rightarrow & f'(0) = 1. \end{array}$$

**Άσκηση:** *Βρείτε ότι*

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

*Άρα*

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= 0 + \frac{x}{1!}\cdot 1 + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}2! + \cdots \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}(-1)^{n-2}(n-2)! + R_n(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x), \end{aligned}$$

*όπου* $R_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\frac{1}{(1+\vartheta x)^n}$.

**Εφαρμογή 5.7.6** *Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση* $f(x) = 5x^2 + 3x + 2$. *Υπολογίζουμε τον τύπο Mac Laurin της* $f$:

$$\begin{array}{ccc} f(x) = 5x^2 + 3x + 2 & \Rightarrow & f(0) = 2 \\ f'(x) = 10x + 3 & \Rightarrow & f'(0) = 3 \\ f''(x) = 10 & \Rightarrow & f''(0) = 10 \\ f^{(3)}(x) = 0 & \Rightarrow & f^{(3)}(0) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = 0 & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = 0. \end{array}$$

*Άρα*

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 + \frac{x}{1!}\cdot 3 + \frac{x^2}{2!}\cdot 10 + 0 + \cdots + 0 \\ &= 2 + 3x + 5x^2. \end{aligned}$$

*Δηλαδή, ο τύπος Mac Laurin της* $f$ *είναι ο ίδιος με τον τύπο της* $f$.

Πραγματικοί Αριθμοί
Ακολουθίες
Συναρτήσεις-Όρια . . .
Συνέχεια Συναρτήσεων
Παράγωγος Συναρτήσεων
>Προηγούμενες Ενότητες<
Παράγωγοι ανωτέρας . . .
Τα βασικά θεωρήματα . . .
Ο τύπος του Taylor
Εύρεση ορίου . . .
Κυρτές και κοίλες . . .
Ασύμπτωτες-Μελέτη . . .
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 73 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον τύπο του Taylor της $f$ στο $x_0 = 1$:

$$\begin{array}{rcl} f(x) = 5x^2 + 3x + 2 & \Rightarrow & f(1) = 10 \\ f'(x) = 10x + 3 & \Rightarrow & f'(1) = 13 \\ f''(x) = 10 & \Rightarrow & f''(0) = 10 \\ f^{(3)}(x) = 0 & \Rightarrow & f^{(3)}(1) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = 0 & \Rightarrow & f^{(n)}(1) = 0. \end{array}$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= 10 + \frac{x-1}{1!} \cdot 13 + \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot 10 + 0 + \cdots + 0 \\ &= 5(x-1)^2 + 13(x-1) + 10 \\ &= 5(x^2 - 2x + 1) + 13(x-1) + 10 \\ &= 5x^2 + 3x + 2. \end{aligned}$$

**Συμπέρασμα:** Έστω $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ μια πολυωνυμική συνάρτηση. Μπορούμε να αναπτύξουμε το πολυώνυμο $f(x)$ σε δυνάμεις του $(x - x_0)$ βρίσκοντας το ανάπτυγμα Taylor της $f$ στο $x_0$.

**Παράδειγμα 5.7.7** Δείξτε ότι ο αριθμός $e$ είναι άρρητος.

Από το ανάπτυγμα Mac Laurin έχουμε:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\vartheta x}, \quad \text{με } 0 < \vartheta < 1.$$

Για $x = 1$ παίρνουμε,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} e^{\vartheta}.$$

Έστω ότι ο $e$ είναι ρητός. Τότε $e = \frac{p}{q}$, με $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Άρα $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}e^{\vartheta} = \frac{p}{q}$. Θεωρούμε $n \geq q+1$ και $n \geq 3$. Τότε από την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε,

$$(n-1)!\frac{p}{q} - (n-1)!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right) = \frac{1}{n}e^{\vartheta}.$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι ακέραιος. Θα δείξουμε ότι το δεξί μέλος δεν είναι ακέραιος, οπότε θα καταλήξουμε σε άτοπο. Επειδή $0 < \vartheta < 1$, έχουμε $e^0 < e^{\vartheta} < e^1$ και κατά συνέπεια $e^0 < e^{\vartheta} < e < 3$. Για $n \geq 3$ έχουμε $0 < \frac{1}{n} < \frac{e^{\vartheta}}{n} < \frac{3}{n} \leq 1$. Άρα το $\frac{e^{\vartheta}}{n}$ δεν μπορεί να είναι ακέραιος. Δηλαδή άτοπο. Άρα ο $e$ είναι άρρητος.

**Παράδειγμα 5.7.8** Να βρεθεί ένα προσεγγιστικό πολυώνυμο βαθμού 2 για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ κοντά στο $x_0 = 0$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}} && \Rightarrow \quad f'(0) = \tfrac{1}{3} \\ f''(x) &= -\tfrac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}} && \Rightarrow \quad f''(0) = -\tfrac{2}{9} \\ f^{(3)}(x) &= \tfrac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + R_3(x) \\ &= 1 + \frac{x}{3} - \frac{2}{9}\cdot\frac{x^2}{2} + R_3(x), \end{aligned}$$

όπου

$$R_3(x) = \frac{x^3}{3!}\cdot\frac{10}{27}(1+\xi)^{-\frac{8}{3}} = \frac{5x^3}{3\cdot 27}(1+\xi)^{-\frac{8}{3}}.$$

## 5.8. Εύρεση ορίου απροσδιόριστης μορφής-Κανόνας De l'Hospital

Στην αρχή αυτής της παραγράφου θα παραθέσουμε μια εφαρμογή του τύπου του Taylor για την εύρεση ορίου απροσδιόριστης μορφής.

Έστω ότι ζητείται να βρεθεί όριο της μορφής:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)},$$

το οποίο το οποίο οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Τότε αναπτύσουμε το αριθμητή $P(x)$ και τον παρονομαστή $Q(x)$ με τον τύπου του Taylor τάξης 1 κοντά στο $x_0$ και αντικαθιστούμε στο αρχικό πηλίκο. Υπολογίζουμε το όριο του καινούργιου πηλίκου. Αν αυτό υπάρχει τότε αυτό θα ισούται και με το όριο του αρχικού πηλίκου. Αν οδηγούμαστε πάλι σε απροσδιόριστη μορφή τότε αναπτύσουμε το αριθμητή $P(x)$ και τον παρονομαστή $Q(x)$ με τον τύπου του Taylor τάξης 2 κοντά στο $x_0$ και εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία.

**Παραδείγματα 5.8.1** *1) Υπολογίστε το όριο*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

*Αναπτύσουμε τον αριθμητή με τον τύπο του Taylor τάξης* 1 *στο* $x_0 = 0$*. Έχουμε,*

$$e^x = 1 + x + R_2(x),$$

*με* $R_2(x) = \frac{x^2}{2!}e^{\vartheta x}$*. Είναι προφανές ότι* $\lim_{x \to 0} \frac{R_2(x)}{x} = 0$*. Επομένως αντικαθιστώντας στο* *αρχικό πηλίκο παίρνουμε:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x+R_2(x)-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x}\\ &= 1+0\\ &= 1.\end{aligned}$$

*2) Υπολογίστε το όριο*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

*Αναπτύσουμε τον αριθμητή με τον τύπο του Taylor τάξης* $1$ *στο* $x_0=0$. *Έχουμε,*

$$\sin x = x + R_2(x),$$

*με* $R_2(x) = -\frac{x^2}{2!}\sin\xi$. *Είναι προφανές ότι* $\lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x}=0$. *Επομένως όμοια με το παράδειγμα* 1) *παίρνουμε:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x+R_2(x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x}\\ &= 1+0\\ &= 1.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε τον κανόνα De l'Hospital για την εύρεση ορίου απροσδιόριστης μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

**Θεώρημα 5.8.2** **Κανόνας De l'Hospital** *Έστω $f, g$ συνεχείς στο $[x_0, a]$ και παραγωγίσιμες στο $(x_0, a)$, όπου $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (x_0, a)$. Έστω $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) = 0$ ή $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) = \pm\infty$. Αν το $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, τότε $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.*

***Απόδειξη***

**Παρατήρηση 5.8.3** **Προσοχή:** *Ο παραπάνω κανόνας ισχύει γενικότερα και όταν εχουμε να υπολογίσουμε όριο $x \to x_0$ (δηλ. όχι μόνο για $x \to x_0^+$).*

**Παράδειγμα 5.8.4** *Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. Έχουμε*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\cos x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

## 5.9. Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις-Σημεία καμπής

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και $(x_1, x_2)$ το ανοικτό διάστημα με άκρα τα $x_1, x_2$. Τότε το $(x_1, x_2)$ γράφεται ως εξής:

$$(x_1, x_2) = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \mid 0 < \lambda < 1\}.$$

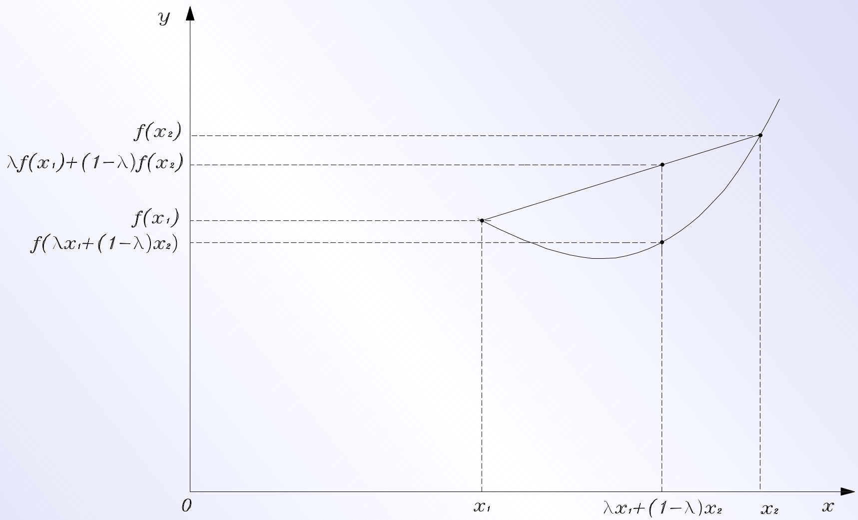
Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τις κυρτές συναρτήσεις οι οποίες έχουν την εξής ιδιότητα: το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης βρίσκεται «πάνω» από την γραφική παράσταση (βλ. σχήμα 1). Αντίστοιχα οι κοίλες συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα: το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης βρίσκεται «κάτω» από την γραφική παράσταση. Πιο συγκεκριμένα διατυπώνουμε τις ιδιότητες αυτές με τον παρακάτω ορισμό:

**Ορισμός 5.9.1** *Έστω $I$ διάστημα του $\mathbb{R}$. Μια συνάρτηση $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται* **κυρτή** *στο $I$* **ανν**

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

*για κάθε $\lambda$, με $0 < \lambda < 1$ και για κάθε $x_1, x_2 \in I$.*

*Αντίστοιχα μια συνάρτηση $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται* **κοίλη** *στο $I$* **ανν** *η $-f$ είναι κυρτή στο $I$.*




ΣΧΗΜΑ 1

**Παράδειγμα 5.9.2** *Η συνάρτηση* $f(x) = x^2$ *είναι κυρτή στο* $\mathbb{R}$. *Πράγματι, για κάθε* $\lambda$, *με* $0 < \lambda < 1$ *και για κάθε* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *έχουμε:*

$$
\begin{aligned}
& f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \\
\iff \quad & \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 \leq \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 \\
\iff \quad & 0 \leq \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 - \lambda^2 x_1^2 - (1-\lambda)x_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 \\
\iff \quad & 0 \leq \lambda(1-\lambda)(x_1 + x_2)^2,
\end{aligned}
$$

*που ισχύει για κάθε $\lambda \in (0,1)$. Άρα η $f$ είναι κυρτή.*

**Πρόταση 5.9.3** *Μια συνάρτηση $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο διάστημα $I$* **ανν** $\forall x_1, x_2 \in I$, *ισχύει:*

$$f(x) \leq f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2), \quad \forall x \in [x, x_2]. \quad (1)$$

***Απόδειξη***

Στη συνέχεια παραθέτουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μια συνάρτηση κυρτή.

**Θεώρημα 5.9.4** *Έστω $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $I$. Η $f$ είναι κυρτή στο $I$* **ανν** *η $f'$ είναι αύξουσα στο $I$.* ***Απόδειξη***

**Παρατήρηση 5.9.5** *Από το παραπάνω θεώρημα είναι προφανές ότι μια συνάρτηση $f$ είναι κοίλη σ' ένα διάστημα $I$ αν και μόνον αν η $f'$ είναι φθίνουσα στο $I$.*

**Παράδειγμα 5.9.6** *Να βρεθεί σε ποιό διάστημα είναι κυρτή και σε ποιό διάστημα είναι κοίλη η συνάστηση $f(x) = xe^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.*

*Έχουμε $f'(x) = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-x^2)' = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ και $f''(x) = -2xe^{-x^2}(3 - 2x^2)$. Συνεπώς η $f$ είναι κυρτή στο $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \cup (0, \sqrt{\frac{3}{2}})$.*

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό του σημείου καμπής μιας συνάρτησης:

**Ορισμός 5.9.7** *Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα και $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη. Ένα σημείο $x_0 \in I$ λέγεται* **σημείο καμπής** *της $f$,* **ανν**

*(i) $f''(x_0) = 0$*

*(ii) $f''(x_0 - h)f''(x_0 + h) < 0$ για $h > 0$ (δηλαδή η $f''$ αλλάζει πρόσημο στο $x_0$).*

**Παράδειγμα 5.9.8** *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3$. Έχουμε $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f''(0) = 0$ και $f''(h)f''(-h) < 0$. Άρα το 0 είναι σημείο καμπής της $f$.*

## 5.10. Ασύμπτωτες-Μελέτη συναρτήσεων

**Ορισμός 5.10.1** *Μια ευθεία λέγεται* **ασύμπτωτη** *μιας συνάρτησης $f$ αν η απόσταση ενός μεταβλητού σημείου της καμπύλης από την ευθεία τείνει στο 0, όταν αυτό πλησιάζει το άπειρο κινούμενο κατά μήκους κάποιου κλάδου της καμπύλης.*

Υπάρχουν τριών ειδών ασύμπτωτες: α) η οριζόντια, β) η κατακόρυφη και γ) η πλάγια.
α) **Οριζόντια ασύμπτωτη:**

**Ορισμός 5.10.2** *Η ευθεία $y = y_0$ λέγεται* **οριζόντια ασύμπτωτη** *μιας συνάρτησης $f$* **ανν**

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0.$$

**Παράδειγμα 5.10.3** *Η $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 1$, αφού $\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.*

β) **Κατακόρυφη ασύμπτωτη:**

**Ορισμός 5.10.4** *Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται* **κατακόρυφη ασύμπτωτη** *μιας συνάρτησης $f$* **ανν**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty.$$

**Παράδειγμα 5.10.5** *Η $f(x) = \frac{2x+3}{4x-8}$, $x \neq 2$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 2$, αφού $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$.*

γ) **Πλάγια ασύμπτωτη:**

**Ορισμός 5.10.6** *Η ευθεία $y = ax + b$ θα λέγεται* **πλάγια ασύμπτωτη** *μιας συνάρτησης $f$* **ανν***:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ και } \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b \text{ (Ασύμπτωτη στο } +\infty),$$

*ή*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = a \text{ και } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax) = b \text{ (Ασύμπτωτη στο } -\infty).$$

**Παράδειγμα 5.10.7** *Έστω* $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *με* $f(x) = \frac{1}{x} + x + e^{-x}$. *Τότε*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = +\infty, \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - e^{-x}\right) = 0.$$

*Επομένως η ευθεία* $y = x$ *είναι πλάγια ασύμπτωτη της* $f$.

Στη συνέχεια καταγράφουμε τα βήματα που ακολουθούμε για τη **μελέτη** και τη **γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης:

**1**. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της $f$, εφόσων αυτό δε δίνεται.

**2**. Εξετάζουμε την $f$ ως προς τη συνέχεια.

**3**. Εξετάζουμε αν η $f$ είναι περιοδική ή συμμετρική (άρτια ή περιττή). Τότε η μελέτη περιορίζεται σ' ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της $f$.

**4**. Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της $f$ πρώτης και δεύτερης τάξης.

**5**. Εξετάζουμε την $f$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**6**. Βρίσκουμε τα διαστήματα όπου η $f$ είναι κυρτή ή κοίλη. Βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

**7**. Βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της $f$.

# Αποδείξεις

*Απόδειξη:* Αν $a' < \sup A$ τότε υπάρχει πάντα ένα $x \in A$ τέτοιο ώστε $a' < x$, γιατί διαφορετικά το $a'$ θα ήταν το supremum του $A$. Άρα το σύνολο $B = \{x \in A \mid a' < x < \sup A\}$, είναι μη κενό. Αν το $B$ έχει πεπερασμένου πλήθους στοιχεία, τότε θα έχει ένα maximum, έστω το $M$. Για κάθε στοιχείο $a \in A$ από την υπόθεση έχουμε ότι $\sup A \notin A$, δηλαδή $a < \sup A$, συνεπώς $a \leq M$. Από το οποίο συμπεραίνουμε ότι το $M$ είναι ένα άνω φράγμα του $A$, άρα $\sup A \leq M$ το οποίο είναι άτοπο διότι $M \in B$. $\square$

**Πίσω στην Πρόταση 1.2.12**

*Απόδειξη:* Ας υποθέσουμε λοιπόν, για να οδηγηθούμε σε άτοπο, ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός, δηλαδή $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ όπου $m, n$ ακέραιοι, με $n \neq 0$. Απλοποώντας μπορούμε να θεωρίσουμε ότι οι $m, n$ είναι πρώτοι μεταξύ τους. Έχουμε λοιπόν

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \text{ ή } m^2 = 2n^2$$

και επομένως ο $m^2$ είναι ζυγός, άρα και ο $m$ είναι ζυγός. Δηλαδή $m = 2m_1$ για κάποιο ακέραιο $m_1$. Τότε όμως

$$2n^2 = 4m_1^2 \text{ ή } n^2 = 2m_1^2$$

και επομένως ο $n^2$, άρα και ο $n$ είναι ζυγός. Το οποίο είναι άτοπο διότι οι $m, n$ είναι πρώτοι μεταξύ τους. Άρα ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός. □ **Πίσω στην Πρόταση 1.3.1**

*Απόδειξη:* Αν συμβολίσουμε με $\beta_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, αρκεί τότε να αποδείξουμε ότι για κάθε $n > 1$ ισχύει $\beta_{n-1} < \beta_n$.

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} &= \left(1+\frac{x}{n-1}\right)\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n-1}}\right)^n \\
&= \frac{n+x-1}{n-1}\left(1-\frac{x}{n(n+x-1)}\right)^n \\
&\geq \frac{n+x-1}{n-1}\left(1-\frac{nx}{n(n+x-1)}\right) \qquad \text{ανισότητα Bernoulli} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

**Πίσω στην Εφαρμογή 1.4.1**

*Απόδειξη:* Για $\beta \leq 0$ η πρόταση είναι προφανής και ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\beta > 0$. Υποθέτουμε ότι η πρόταση δεν ισχύει. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θα ισχύει $ka \leq \beta$, που σημαίνει ότι το σύνολο $X := \{ka \mid k \in \mathbb{N}\}$ είναι άνω φραγμένο και έστω $\gamma = \sup X$. Επειδή $\gamma - a < \gamma$, από την πρόταση 1.2.12 υπάρχει $k_0 a \in X$ τέτοιο ώστε $\gamma - a < k_0 a$, δηλαδή $\gamma < (k_0 + 1)a$. Αυτό όμως δεν είναι δυνατόν διότι $\gamma = \sup X$. Συνεπώς υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\beta < n_0 a$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει επίσης $\beta < na$. Η ειδική περίπτωση ισχύει για $a = 1$. □

**Πίσω στο Θεώρημα 1.4.2**

*Απόδειξη:* Άμεση συνέπεια της Αρχιμήδειας ιδιότητας για $\beta = 1$. $\square$ **Πίσω στο Πόρισμα 1.4.3**

*Απόδειξη:* Βλ. Γ. Παντελίδη, Ανάλυση Ι, κεφ. 2, πρόταση 3.4. □ **Πίσω στην Πρόταση 1.4.5**

*Απόδειξη:* Έστω $> 0$. Έχουμε

$$\frac{1}{n} < \ \Leftrightarrow \frac{1}{\ } < n. \quad (1)$$

Αν εκλέξουμε ως $n_0$ το $\left[\frac{1}{\ }\right] + 1$ (βλ. Σχημα 1), τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $n > \frac{1}{\ }$ και λόγω της (1), $\frac{1}{n} < \ $. Δηλαδή $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. $\square$ **Πίσω στο Παράδειγμα 2.2.3**

*Απόδειξη:* Έστω $> 0$. Αν $n_0 = 1$, τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|a_n - k| = |k - k| = 0 <$ .

$\square$

**Πίσω στο Παράδειγμα 2.2.4**

*Απόδειξη:* Πρώτα απ' όλα αν $\lambda = 0$, έχουμε $\lambda n = 0$ και άρα $\lim_{n\to+\infty} \lambda n = 0$. Στη συνέχεια, αν $\lambda > 0$, για έναν οποιονδήποτε αριθμό $M > 0$, έχουμε:

$$\lambda n > M \Leftrightarrow n > \frac{M}{\lambda}. \quad (1)$$

Θέτουμε $n_0 = \left[\frac{M}{\lambda}\right] + 1$ τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $n > \frac{M}{\lambda}$ και λόγω της (1) $\lambda n > M$, άρα $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Όμοια υπολογίζουμε το $\lim_{n\to+\infty} \lambda n$, αν $\lambda < 0$. $\square$ **Πίσω στο Παράδειγμα 2.2.5**

*Απόδειξη:* Έστω ότι $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1$ και $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_2$. Θα δείξουμε ότι $\ell_1 = \ell_2$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\ > 0$ έχουμε $|\ell_1 - \ell_2| < \ $. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1$ για $\ = \ /2$ έχουμε ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να έχουμε $|a_n - \ell_1| < \ /2$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_2$ για $\ = \ /2$ έχουμε ότι υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_2$ να έχουμε $|a_n - \ell_2| < \ /2$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ και συνεπώς για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε:

$$|\ell_1 - \ell_2| = |(\ell_1 - a_n) + (a_n - \ell_2)| \leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - \ell_2| < \frac{\ }{2} + \frac{\ }{2} = \ .$$

$\square$

**Πίσω στην Πρόταση 2.2.6**


*Πραγματικοί Αριθμοί*
*Ακολουθίες*
*Ορισμός ακολουθίας . . .*
*Όριο ακολουθίας*
*Ιδιότητες ορίων . . .*
*Σύγκλιση και διάταξη*
*Η έννοια της . . .*
*Πράξεις μεταξύ . . .*
*Συναρτήσεις-Όρια . . .*
*Συνέχεια Συναρτήσεων*
*Παράγωγος Συναρτήσεων*
*Τμ. Μαθηματικών*
*Πρώτη Σελίδα*
◀◀ ▶▶
◀ ▶
*Σελίδα 95 από 158*
*Πίσω*
*Όλη η οθόνη*
*Κλείσε*
*Έξοδος*

*Απόδειξη:* Επειδή η $(a_n)$ είναι συγκλίνουσα, υπάρχει $\ell \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, επομένως για $= 1$ έχουμε:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq n_o \Rightarrow |a_n - \ell| < 1.$$

Άρα, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $||a_n| - |\ell|| \leq |a_n - \ell| < 1$, επομένως

$$-1 < |a_n| - \ell < 1 \quad \forall n \geq n_0,$$

άρα $|a_n| < |\ell| + 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Αν θέσουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|, |\ell| + 1\}$ παρατηρούμε ότι $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η $(a_n)$ είναι φραγμένη. $\square$ **Πίσω στην Πρόταση 2.2.9**

*Πραγματικοί Αριθμοί*
*Ακολουθίες*
*Ορισμός ακολουθίας . . .*
*Όριο ακολουθίας*
*Ιδιότητες ορίων . . .*
*Σύγκλιση και διάταξη*
*Η έννοια της . . .*
*Πράξεις μεταξύ . . .*
*Συναρτήσεις-Όρια . . .*
*Συνέχεια Συναρτήσεων*
*Παράγωγος Συναρτήσεων*
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

*Απόδειξη:* Έστω $> 0$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, έχουμε ότι

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq n_o \Rightarrow |a_n - \ell| < . \quad (1)$$

Επειδή όμως $||a_n| - |\ell|| \leq |a_n - \ell|$ (τριγωνική ανισότητα), από την (1) έχουμε

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq n_o \Rightarrow ||a_n| - |\ell|| < .$$

Άρα $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\ell|$. □

**Πίσω στην Πρόταση 2.2.10**

*Απόδειξη:* Επειδή $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1$, για $= /2$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - \ell_1| < \frac{}{2} \quad (1).$$

Επειδή $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell_2$, για $= /2$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - \ell_2| < \frac{}{2} \quad (2).$$

Έστω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε από την (1) και (2) για $n \geq n_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\ell_1 + \ell_2)| &= |(b_n - \ell_2) + (a_n - \ell_1)| \\ &\leq |b_n - \ell_2| + |a_n - \ell_1| \\ &< \frac{}{2} + \frac{}{2} = . \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \ell_1 + \ell_2$. $\square$

**Πίσω στην Πρόταση 2.3.1**

*Απόδειξη:* Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\forall \ > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n b_n - \ell_1 \ell_2| < \ .$$

Επειδή η $(a_n)$ είναι συγκλίνουσα και συνεπώς φραγμένη (πρόταση 2.2.9), δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|a_n| \leq M$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1$, για $\ = \ /2|\ell_2|$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - \ell_1| < \frac{}{2|\ell_2|} \quad (1).$$

Επειδή $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell_2$, για $\ = \ /2M$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - \ell_2| < \frac{}{2M} \quad (2).$$

Άρα για $\ > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - \ell_1 \ell_2| &= |a_n b_n - a_n \ell_2 + a_n \ell_2 - \ell_1 \ell_2| \\
&= |(a_n(b_n - \ell_2) + \ell_2(a_n - \ell_1)| \\
&\leq |(a_n||b_n - \ell_2| + |\ell_2||a_n - \ell_1| \\
&\leq M|b_n - \ell_2| + |\ell_2||a_n - \ell_1| \\
&< M\frac{}{2M} + |\ell_2|\frac{}{2|\ell_2|} \qquad (\text{ από (2) και (1)}) \\
&= \ .
\end{aligned}$$

□

**Πίσω στην Πρόταση 2.3.3**

*Απόδειξη:* Επειδή $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ από την πρόταση 2.2.10 έχουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\ell|$. Τότε για $\; = |\ell/2|$ έχουμε ότι

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq n_0 \Rightarrow ||a_n| - |\ell|| < \frac{\ell}{2}$$

και κατά συνέπεια για κάθε $n \geq n_0$

$$-\frac{|\ell|}{2} < |a_n| - |\ell| < \frac{|\ell|}{2}$$

άρα $|\ell|/2 < |a_n|$. Συνεπώς για $k = |\ell|/2$ έχουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε. $\square$ **Πίσω στο Λήμμα 2.3.4**

*Απόδειξη:* Έστω  $> 0$. Από το λήμμα 2.3.4 υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n$ μεγαλύτερο ή ίσο από κάποιον φυσικό $n_1$, έχουμε $|b_n| \geq k$. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell}\right| &= \frac{|b_n - \ell|}{|b_n||\ell|} \\ &\leq \frac{|b_n - \ell|}{k||\ell|} \quad \forall n \geq n_1 \quad (1) \end{aligned}$$

και επειδή $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$, για  $= k|\ell| > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq n_0 \Rightarrow |b_n - \ell| < k|\ell|. \quad (2)$$

Έστω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Από (1) και (2) έχουμε ότι

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{1}{k|\ell|} k|\ell| = .$$

□

**Πίσω στην Πρόταση 2.3.5**

*Απόδειξη:* Προκύπτει άμεσα από την πρόταση 2.3.3 και την πρόταση 2.3.5. □ **Πίσω στην Πρόταση 2.3.6**

*Απόδειξη:* Θεωρούμε $(a_n)$ και $(b_n)$ δυο ακολουθίες με $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ και $(b_n)$ φραγμένη. Αφού η $(b_n)$ είναι φραγμένη από τον ορισμό υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|b_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Τώρα επειδή η $(a_n)$ είναι μηδενική, για κάθε $\; > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|a_n| < \frac{}{M} \quad (2).$$

Άρα από τις (1) και (2) για κάθε $n \geq n_0$ παίρνουμε

$$|a_n b_n| \leq |a_n||b_n| < M\frac{}{M} = .$$

Δηλαδή $\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = 0$. $\square$

**Πίσω στην Πρόταση 2.3.7**

*Απόδειξη:* Επειδή $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, για $= \frac{|\ell|}{2}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$
\begin{aligned}
& |a_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2} \\
\Rightarrow\quad & -\frac{|\ell|}{2} < a_n - \ell < \frac{|\ell|}{2} \\
\Rightarrow\quad & \ell - \frac{|\ell|}{2} < a_n < \ell + \frac{|\ell|}{2}. \quad (1)
\end{aligned}
$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: (*i*) Αν $\ell > 0$, τότε η (1) γίνεται

$$\frac{\ell}{2} < a_n < \frac{3\ell}{2}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ είναι $a_n > \frac{\ell}{2} > 0$, δηλαδή οι όροι με δείκτη $n \geq n_0$ είναι ομόσημοι προς το $\ell$. (*ii*) Αν $\ell < 0$, τότε η (1) γίνεται

$$\frac{3\ell}{2} < a_n < \frac{\ell}{2}.$$

Ωστε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $a_n < \frac{\ell}{2} < 0$, δηλαδή οι όροι είναι ομόσημοι με το $\ell$. Επομένως η πρόταση ισχύει σε κάθε περίπτωση. $\square$ **Πίσω στην Πρόταση 2.4.1**




Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 104 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

*Απόδειξη:* Αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη. □

**Πίσω στο Πόρισμα 2.4.2**

*Απόδειξη:* Αφού $a_n \le b_n \le \gamma_n$, σημαίνει ότι $0 \le b_n - a_n \le \gamma_n - a_n$ και $|b_n - a_n| \le |\gamma_n - a_n|$. Επίσης έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} |\gamma_n - a_n| = \lim_{n\to+\infty} (\gamma_n - a_n) = 0,$$

άρα

$$\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} |b_n - a_n| = 0.$$

Επειδή $b_n = a_n + (b_n - a_n)$ συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

□

**Πίσω στο Θεώρημα 2.4.3**

*Απόδειξη:* (*i*) Αν $a \geq 1$, αρκεί να δείξω ότι η $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$ συγκλίνει στο 0. Έχουμε $\sqrt[n]{a} = 1 + b_n$, συνεπώς χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli παίρνουμε:

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n > nb_n.$$

Άρα $b_n < \frac{1}{n}a$, συνεπώς $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. (*ii*) Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$ και από το (*i*) έχουμε $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$, άρα $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$ και από την πρόταση 2.3.5 έχουμε $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. □ **Πίσω στην Εφαρμογή 2.4.4**

*Πραγματικοί Αριθμοί*
*Ακολουθίες*
*Ορισμός ακολουθίας...*
*Όριο ακολουθίας*
*Ιδιότητες ορίων...*
*Σύγκλιση και διάταξη*
*Η έννοια της...*
*Πράξεις μεταξύ...*
*Συναρτήσεις-Όρια...*
*Συνέχεια Συναρτήσεων*
*Παράγωγος Συναρτήσεων*
*Τμ. Μαθηματικών*
*Πρώτη Σελίδα*
*Σελίδα 107 από 158*
*Πίσω*
*Όλη η οθόνη*
*Κλείσε*
*Έξοδος*

*Απόδειξη:* Επειδή $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$, έπεται ότι για $= \frac{a}{2}$ ότι $|a_n - a| < a/2$, δηλαδή

$$\frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2}$$

και συνεπώς

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}.$$

Από την προηγούμενη εφαρμογή όμως έχουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{a}{2}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3a}{2}} = 1$ και συνεπώς από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ;;; συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ $\square$

**Πίσω στην Εφαρμογή 2.4.5**

*Απόδειξη*: Ισχύει $\sqrt[n]{n} = 1 + \sqrt[n]{n} - 1$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} n &= (1+\sqrt[n]{n}-1)^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}(\sqrt[n]{n}-1) + \binom{n}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2 + \cdots \\ &> \binom{n}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2 \\ &= \frac{n!}{2!(n-2)!}(\sqrt[n]{n}-1)^2 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια $\frac{2n}{n(n-1)} > (\sqrt[n]{n}-1)^2$ και παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα στα δύο μέλη, έχουμε

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} > (\sqrt[n]{n}-1) \geq 0.$$

Παίρνοντας τα όρια έχουμε:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} > \lim_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{n}-1) \geq 0.$$

Επειδή όμως $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1) = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. $\square$

**Πίσω στην Εφαρμογή 2.4.6**

*Απόδειξη:* Έστω $\ > 0$ και $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ μια υπακολουθία της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Αφού $\lim_{n\to+\infty} = a$, υπάρχει $n_0() \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_0()$ να ισχύει $|a_n - a| < $ . Επομένως και για κάθε $k_n > n_0()$ θα έχουμε $|a_{k_n} - a| <$ , που σημαίνει ότι η υπακολουθία συγκλίνει στο $a$.
$\square$

**Πίσω στην Πρόταση 2.5.2**

*Απόδειξη:* Διακρίνουμε περιπτώσεις. (*i*) Αν $a = 0$ τότε $a_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. (*ii*) Αν $a = 1$ τότε $a_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. (*iii*) Αν $0 < a < 1$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Έστω $\; > 0$. Πρέπει να βρούμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $a^n < \;$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a}\right)^n &= \left(1 + (\frac{1}{a} - 1)\right)^n \\ &\geq \left(1 + n(\frac{1}{a} - 1)\right) \text{ από ανισότητα } \textit{Bernoulli} \\ &> n(\frac{1}{a} - 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1) \end{aligned}$$

Επειδή $(\frac{1}{a} - 1) > 0$ και $\frac{1}{\;} > 0$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n_0(\frac{1}{a} - 1) > \frac{1}{\;}. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι αν $n \geq n_0$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n > n(\frac{1}{a} - 1) \geq n_0(\frac{1}{a} - 1) > \frac{1}{\;}.$$

Άρα $a^n < \;$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. (*iv*) Αν $-1 < a < 0$, τότε γράφουμε $a = (-1)(-a)$. Από την προηγούμενη παράγραφο (*iii*), επειδή $0 < -a < 1$ έχουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}(-a)^n = 0$. Επειδή η $(-1)^n$ είναι φραγμένη, έχουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. (*v*) Αν $a > 1$, έστω $M > 0$. Έχουμε

$$a^n = (1 + (a - 1))^n \geq 1 + n(a - 1) > n(a - 1). \quad (1)$$

Επειδή $n > 0$ και $a - 1 > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n_0(a - 1) > M. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) για $n \geq n_0$ έχουμε

$$a^n > n(a-1) \geq n_0(a-1) > M,$$

που σημαίνει ότι $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. (*vi*) Αν $a = -1$, θεωρούμε τις υπακολουθίες της $(a_n)$, την $(a_{2n})$ και την $(a_{2n+1})$. Βλέπουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}(-a)^{2n} = 1$ και $\lim_{n\to+\infty}(-a)^{2n+1} = -1$. Επομένως το όριο της $(a_n)$ δεν υπάρχει. (*vii*) Αν $a < -1$, τότε γράφουμε $a = (-1)(-a)$. Από την παράγραφο (*v*), επειδή $-a > 1$ έχουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}(a)^{2n} = \lim_{n\to+\infty}(-a)^{2n} = +\infty$ ενώ $\lim_{n\to+\infty}(a)^{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} -(-a)^{2n} = -\infty$. Συνεπώς το όριο της $(a_n)$ δεν υπάρχει, όταν το $a$ είναι μικρότερο του 1. $\square$

**Πίσω στην Πρόταση 2.5.3**

*Απόδειξη:* Θα αποδείξουμε την πρόταση για αύξουσες ακολουθίες. Η απόδειξη για φθίνουσες ακολουθίες είναι ανάλογη. Έστω $> 0$. Επειδή η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη, υπάρχει το

$$\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = a.$$

Σύμφωνα με την θεώρημα 1.4.2 υπάρχει $n_0() \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$a - \; < a_{n_0} \leq a + \, .$$

Επειδή όμως η ακολουθία είναι αύξουσα έπεται ότι για κάθε $n > n_0$ ισχύει $a - \; < a_{n_0} < a_n \leq a +$, που σημαίνει ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $a$. □ **Πίσω στην Πρόταση 2.5.4**

*Απόδειξη:* Βλ. Γ. Παντελίδη, Ανάλυση Ι, κεφ. 2, θεώρημα 2.5. □ **Πίσω στο Θεώρημα 2.5.5**

*Απόδειξη:* Δείχνουμε πρώτα ότι η ακολουθία $(a_n)$ είναι φραγμένη. Πράγματι για $= 1$ και για κάθε $n \geq n_0$ θα ισχύει $|a_n| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}|$, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_n| \leq \max\{1 + |a_{n_0}|, |a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{n_0}|\}$, που σημαίνει ότι η ακολουθία είναι φραγμένη. Επομένως από το παραπάνω θεώρημα 2.5.5 έχει μια υπακολουθία $(a_{k_n})$ που συγκλίνει, έστω στο $a$. Έστω $> 0$. Τότε από την υπόθεση υπάρχει $n_0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a_{n_0}| < /2$. Επίσης από τη σύγκλιση της $(a_{k_n})$ υπάρχει $k_0$ τέτοιο ώστε για κάθε $k_n \geq k_0$ να ισχύει $|a_{k_n} - a| < /2$. Επομένως για $N_0 = \max\{n_0, k_0\}$ και $n \geq N_0$ ισχύει

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\ }{2} + \frac{\ }{2} = ,$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία $(a_n)$ συγκλίνει. □

**Πίσω στην Πρόταση 2.5.6**



Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◂◂ ▸▸
◂ ▸
Σελίδα 115 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

*Απόδειξη:* Η ακολουθία $(a_n)$ είναι προφανώς αύξουσα και φραγμένη, γιατί για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν:

$$2 \leq a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + 2 < 3$$

(λάβαμε υπόψη μας ότι $2^{n-1} < n!$). Επομένως η ακολουθία συγκλίνει, έστω στο $a$, και μάλιστα ισχύει $2 \leq a = \lim a_n \leq 3$. Η ακολουθία $(\beta_n)$, σύμφωνα με την εφαρμογή στην ανισότητα Bernoulli για $x = 1$, είναι αύξουσα. Είναι επίσης φραγμένη, αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \\ &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = a_n < 3. \end{aligned}$$

Έτσι η $\beta_n$ είναι αύξουσα και φραγμένη, οπότε συγκλίνει έστω στο $\beta$, και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $2 \leq \beta_n \leq a_n < 3$, που σημαίνει $2 \leq \beta = \lim \beta_n \leq \lim a_n = a < 3$. Εξάλλου, για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$ με $n > k$ κάνοντας χρήση των τελευταίων σχέσεων) ισχύει:

$$\begin{aligned} \beta_n &\geq 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \beta_n &\geq \lim_{n\to+\infty}\left[2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \\ &= a_k. \end{aligned}$$

Επομένως ισχύει $\alpha = \lim_{k\to+\infty} \alpha_k \leq \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \beta$, που μαζί με την $\beta = \lim_{n\to+\infty} \beta_n \leq \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$ σημαίνει ότι $\alpha = \beta$. Το κοινό αυτό όριο συμβολίζεται με $e$ και είναι ο αριθμός $2,718\cdots$. $\square$

**Πίσω στην Εφαρμογή 2.5.7**

*Απόδειξη:* Έστω ότι η συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα. Τότε αν $x_1 < x_2$ θα είχαμε $f(x_1) < f(x_2)$ και αν $x_1 > x_2$ θα είχαμε $f(x_1) > f(x_2)$. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$, συνεπώς η $f$ είναι '' **1-1** ''. Άρα υπάρχει η $f^{-1}$ και θα δείξουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα. Έστω ότι η $f^{-1}$ δεν είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ τέτοια ώστε $y_1 < y_2$ και $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Τότε αφού η $f$ είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι: $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$ και $(f \circ f^{-1})(y_1) \geq (f \circ f^{-1})(y_2)$, άρα $y_1 \geq y_2$ το οπίο είναι άτοπο. $\square$

**Πίσω στην Πρόταση 3.1.3**

*Απόδειξη:* Θα δώσουμε την απόδειξη για την περίπτωση όπου το όριο είναι πραγματικός αριθμός. Ανάλογη είναι και η απόδειξη όπου το όριο είναι $\pm\infty$.

Έστω $\ell_1$, $\ell_2$ δύο διαφορετικά όρια της $f$ στο $x_0$. Τότε για

$$< \frac{1}{2}|\ell_1 - \ell_2|,$$

υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta_1$ να ισχύει $|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$ και $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta_2$ να ισχύει $|f(x) - \ell_2| < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$. όπου $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, θα πρέπει να ισχύουν συγχρόνως $|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$ και $|f(x) - \ell_2| < \varepsilon$, που είναι άτοπο, διότι

$$2\varepsilon < |\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

□

**Πίσω στην Πρόταση 3.3.3**

*Απόδειξη:* Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, τότε και ο περιορισμός της $f$ στο διάστημα $(x_0, b)$ ή $(a, x_0)$ έχει επίσης όριο το $\ell$. Είναι δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \text{ και } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell. \quad (*)$$

Αντιστρόφως, αν ισχύει η (*). Υποθέτουμε ότι το $\ell$ είναι πραγματικός, τότε για κάθε $\ > 0$ θα υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$, τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in (x_0, b), && 0 < x - x_0 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \\ &\forall\, x \in (a, x_0), && 0 < x_0 - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell| < . \end{aligned}$$

Τότε αν πάρουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ θα έχουμε

$$\forall\, x \in A \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < ,$$

που σημαίνει ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Όμοια γίνεται η απόδειξη για $\ell = +\infty$ ή $-\infty$. □

**Πίσω στο Θεώρημα 3.4.3**

*Απόδειξη:* Θα παποδείξουμε την πρόταση για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\ell \in \mathbb{R}$. Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλες περιπτώσεις.

Έστω $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ με $x_n \in A$ και $x_n \neq x_0$. Έχουμε ότι για κάθε $\ > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - \ell| < \ $. Επειδή $x_n \to x_0$ για το θετικό $\delta$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει $0 < |x_n - x_0| < \delta$. Επομένως, για κάθε $n > n_0$ ισχύει $|f(x_n) - \ell| < \ $, που σημαίνει ότι $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)$ ($x_n \in A$ και $x_n \neq x_0$), με $x_n \to x_0$, ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} f(x) = \ell$. Αν το $\ell$ δεν ήταν το όριο της $f$ στο $x_0$, τότε (άρνηση του ορισμού) υπάρχει $\ > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$, για το οποίο ισχύει $|f(x) - \ell| \geq \ $. Αν θέσουμε

$$\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

τότε τα αντίστοιχα $x$ του τελευταίου συλλογισμού αποτελούν μια ακολουθία $(x_n)$ που συγκλίνει στο $x_0$, ενώ η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))$ δε συγκλίνει στο $\ell$, αφού $|f(x_n - \ell| \geq \ $.

Επομένως ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f(x) = \ell$. □

**Πίσω στην Πρόταση 3.5.1**

*Απόδειξη:* Έστω $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ και έστω $\;= 1$ στον ορισμό του ορίου. Τότε θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| < 1,$$

για κάθε $x$ του πεδίου ορισμού, επομένως και $|f(x)| < |a| + 1$. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε $M = |a| + 1$. $\square$

**Πίσω στο Λήμμα 3.6.3**


*Πραγματικοί Αριθμοί*
*Ακολουθίες*
*Συναρτήσεις-Όρια . . .*
*Γενικά*
*Είδη συναρτήσεων*
*Όρια συναρτήσεων*
*Πλευρικά όρια*
*Μελέτη του ορίου . . .*
*Ιδιότητες ορίων*
*Συνέχεια Συναρτήσεων*
*Παράγωγος Συναρτήσεων*
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 122 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

*Απόδειξη:* Από τον ορισμό του οριου για $\ = \frac{|b|}{2}$ παίρνουμε:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |g(x) - b| < \frac{|b|}{2},$$

και κατά συνέπεια $||g(x)| - |b|| \leq |g(x) - b| < \frac{|b|}{2}$, απ' όπου παίρνουμε ότι $|b| - \frac{|b|}{2} < |g(x)|$, δηλαδή αυτό που θέλουμε να δείξουμε. $\square$

**Πίσω στο Λήμμα 3.6.4**



*Τμ. Μαθηματικών*
*Πρώτη Σελίδα*
◀◀ ▶▶
◀ ▶
*Σελίδα 123 από 158*
*Πίσω*
*Όλη η οθόνη*
*Κλείσε*
*Έξοδος*

*Απόδειξη:* Η απόδειξη της πρότασης είναι ανάλογη με την αντίστοιχη για ακολουθίες. Η περίπτωση $f(x) + g(x)$ είναι η πιο εύκολη κα την παραλείπουμε.

Ας εξετάσουμε το $\lim_{x_0}(f(x) \cdot g(x))$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x_0} f(x) = a$, $\lim_{x_0} g(x) = b$ και $> 0$. Θέλουμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)g(x) - ab| <$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &\leq |f(x)g(x) - ag(x)| + |ag(x) - ab| \\ &= |g(x)||f(x) - a| + |a||g(x) - b|. \end{aligned}$$

Στην απόδειξη του λήμματος 3.6.3 δείξαμε ότι υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |g(x)| < |b| + 1.$$

Υπάρχουν επίσης $\delta_2, \delta_3 > 0$ τέτοια ώστε

$$0 < |x-x_0| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x)-a| < \frac{\ }{2(|b|+1)} \text{ και } 0 < |x-x_0| < \delta_3 \Longrightarrow |g(x)-b| < \frac{\ }{2(|a|+1)}.$$

Αν λοιπόν πάρουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ το οποίο προφανώς είναι $> 0$, θα έχουμε

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)g(x) - ab| < (|b| + 1)\frac{\ }{2(|b| + 1)} + (|a| + 1)\frac{\ }{2(|a| + 1)} < ,$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Για την περίπτωση του πηλίκου αποδεικνύουμε ότι $\lim_{x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x_0} g(x)}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι η $g$ έχει πεδίο ορισμού μια περιοχή του $x_0$. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $g$ ορίζεται στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έτσι ώστε από το λήμμα 3.6.3 έχουμε

$$|g(x)| > \frac{|b|}{2} \text{ για } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta.$$

Έστω $> 0$. Έχουμε

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - g(x)|}{|b||g(x)|} \leq \frac{2}{|b|^2}|g(x) - b|, \quad |x - x_0| < \delta.$$

Υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |g(x) - b| < \frac{|b|^2}{2}$$

και επομένως

$$0 < |x - x_0| < \min\{\delta, \delta_2\} \Longrightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| < .$$

Συμπεραίνουμε έτσι ότι $\lim_{x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x_0} g(x)}$ και το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει από την αντίστοιχη ιδιότητα για γινόμενο δύο συναρτήσεων (εφαρμόστε την στις συναρτήσεις $f$ και $\frac{1}{g}$). □

**Πίσω στην Πρόταση 3.6.5**

*Απόδειξη:*(α) Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$. Από την πρόταση 3.6.5 έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0}(x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k) \\
&= (\lim_{x\to x_0} x)^k + a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{k-1} + \cdots + a_k) \\
&= x_0^k + a_1 x_0^{k-1} + \cdots + a_k \\
&= P(x_0).
\end{aligned}$$

(β) Για κάθε $x \neq 0$ μπορούμε να γράψουμε:

$$P(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k = x^k\left(1 + a_1\frac{1}{x} + \cdots + a_k\frac{1}{x^k}\right).$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n} = 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} x^k\left(1 + a_1\frac{1}{x} + \cdots + a_k\frac{1}{x^k}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^k = \infty,$$

και όμοια,

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & , \text{ αν } k \text{ άρτιος} \\ -\infty & , \text{ αν } k \text{ περιττός} \end{cases}$$

Επομένως το όριο του $P(x)$ στο $x_0 = \pm\infty$ είναι ίσο με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου του πολυωνύμου. □

**Πίσω στην Εφαρμογή 3.6.6**

*Απόδειξη:* Πρώτα μελετάμε την περίπτωση όπου $x_0 = \pm\infty$. Για κάθε $x \neq 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$R(x) = \frac{1 + a_1 \frac{1}{x} + \cdots + a_n \frac{1}{x^n}}{1 + b_1 \frac{1}{x} + \cdots + b_m \frac{1}{x^m}}$$

οπότε $\lim_{x\to\pm\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty} xn - m$ και τα όρια δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| | $\lim_{x\to+\infty} R(x)$ | $\lim_{x\to-\infty} R(x)$ |
|---|---|---|
| $n = m$ | 1 | 1 |
| $n < m$ | 0 | 0 |
| $n > m$ | $+\infty$ | $(-1)^{n-m}(+\infty)$ |

Το πολυώνυμο $Q(x)$ ορίζεται σ' ένα ανοικτό διάστημα με άκρο το $x_0$, οπότε έχει νόημα η μελέτη του ορίου της ρητής συνάρτησης στο $x_0$.

Αν $x_0$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ και $Q(x)$ βαθμού πολλαπλότητας $\ell$ και $k$ αντίστοιχα, τότε $P(x) = (x - x_0)^\ell \Pi(x)$ και $Q(x) = (x - x_0)^k T(x)$, όπου $\Pi(x_0) \neq 0$ και $T(x_0) \neq 0$, οπότε η ρητή συνάρτηση γράφεται με τη μορφή

$$R(x) = (x - x_0)^{\ell-k} \frac{\Pi(x)}{T(x)}.$$

Επειδή $\lim_{x\to x_0} \frac{\Pi(x)}{T(x)} = \frac{\Pi(x_0)}{T(x_0)}$ θα είναι $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{T(x)} = \frac{\Pi(x_0)}{T(x_0)} \lim_{x\to x_0} (x - x_0)^{\ell-k}$, οπότε τα όρια για τις τιμές των $\ell$ και $k$ δίνονται από τον παρακάτω πίνακα

| | | |
|---|---|---|
| $\ell = k$ | $\Longrightarrow$ | $\lim_{x\to x_0} R(x) = \frac{\Pi(x_0)}{T(x_0)}$ |
| $\ell > k$ | $\Longrightarrow$ | $\lim_{x\to x_0} R(x) = 0$ |
| $\ell < k$ $k - \ell$ άρτιος | $\Longrightarrow$ | $\lim_{x\to x_0} R(x) = (+\infty) sign\left(\frac{\Pi(x_0)}{T(x_0)}\right)$ |
| $\ell < k$ $k - \ell$ περιττός | $\Longrightarrow$ | Δεν έχει όριο στο σημείο $x_0$.<br>$\lim_{x\to+x_0^+} R(x) = (+\infty) sign\left(\frac{\Pi(x_0)}{T(x_0)}\right)$<br>$\lim_{x\to+x_0^-} R(x) = (-\infty) sign\left(\frac{\Pi(x_0)}{T(x_0)}\right)$ |

όπου $sign(A)$ συμβολίζει το πρόσημο της ποσότητας $A$. □

**Πίσω στην Πρόταση 3.6.7**

Πραγματικοί Αριθμοί
Ακολουθίες
Συναρτήσεις-Όρια...
Γενικά
Είδη συναρτήσεων
Όρια συναρτήσεων
Πλευρικά όρια
Μελέτη του ορίου...
Ιδιότητες ορίων
Συνέχεια Συναρτήσεων
Παράγωγος Συναρτήσεων
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 127 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

*Απόδειξη:* Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 3.4.3. □

**Πίσω στην Πρόταση 4.1.4**

*Απόδειξη:* Προκύπτει άμεσα από την πρόταση 3.6.5. □

**Πίσω στην Πρόταση 4.1.5**

*Απόδειξη:* Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$, από τον ορισμό έχουμε:

$$\forall > 0, \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } \forall x \in A, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < . \quad (1)$$

Επειδή η $g$ είναι συνεχής στο $f(x_0)$, από τον ορισμό έχουμε:

$$\forall > 0, \exists \delta_1 > 0 \text{ τ.ω. } \forall f(x) \in f(A), |f(x) - f(x_0)| < \delta_1 \Longrightarrow$$
$$|(g(f(x)) - g(f(x_0))| = |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < . \quad (2)$$

Από την εξίσωση (1) για $= \delta_1$ έχουμε:

$$\exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } \forall x \in A, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_1 \overset{(2)}{\Longrightarrow}$$
$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < .$$

Άρα η $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$. $\square$

**Πίσω στο Θεώρημα 4.1.6**


*Πραγματικοί Αριθμοί*
*Ακολουθίες*
*Συναρτήσεις-Όρια . . .*
*Συνέχεια Συναρτήσεων*
*Ορισμός Συνέχειας*
*Είδη Ασυνέχειας- . . .*
*Αρχή της μεταφοράς*
*Ιδιότητες Συνεχών . . .*
*Ομοιόμορφη Συνέχεια*
*Παράγωγος Συναρτήσεων*
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 130 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

*Απόδειξη:* Επειδή $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, από τον ορισμό έχουμε:

$$\forall > 0, \exists\delta > 0 \text{ τ.ω. } \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < . \quad (1)$$

Επειδή η $g$ είναι συνεχής στο $b$, από τον ορισμό έχουμε:

$$\forall > 0, \exists\delta_1 > 0 \text{ τ.ω. } \forall f(x) \in f(A), |f(x) - b| < \delta_1 \Longrightarrow |(g(f(x)) - g(b)| < . \quad (2)$$

Από την εξίσωση (1) για $ = \delta_1$ έχουμε:

$$\exists\delta > 0 \text{ τ.ω. } \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \delta_1 \stackrel{(2)}{\Longrightarrow} |g(f(x)) - g(b)| < .$$

Άρα $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(b)$. □

**Πίσω στην Πρόταση 4.1.7**

*Απόδειξη:* Υποθέτουμε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$. Τότε από τον ορισμό έχουμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Άρα από την πρόταση 3.5.1, για κάθε ακολουθία $(x_n) \in A$ με $x_n \neq x_0$ και $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ έχουμε $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Επίσης και στην περίπτωση όπου $x_n = x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε προφανώς $\lim_{x \to x_0} f(x_n) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$.

Αντίστροφα, επειδή $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$ για κάθε ακολουθία $(x_n) \in A$ με $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$, από την πρόταση 3.5.1 συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$ □

**Πίσω στην Πρόταση 4.3.1**

*Απόδειξη:* Χωρίς απόδειξη. $\square$

**Πίσω στο Θεώρημα 4.4.1**

*Απόδειξη:* Αν $f(\alpha) = f(\beta)$, το θεώρημα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$ (όμοια αποδεικνύεται και όταν $f(\beta) < f(\alpha)$), και $\kappa$ ένας πραγματικός αριθμός με

$$f(\alpha) < \kappa < f(\beta).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \kappa.$$

Η $g$ είναι συνεχής και επιπλέον ισχύει:

$$g(\alpha) < 0 < g(\beta).$$

Επομένως από το θεώρημα 4.4.1 υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi) = f(\xi) - \kappa = 0.$$

Άρα $f(\xi) = \kappa$. $\square$

**Πίσω στο Θεώρημα 4.4.2**

*Απόδειξη:* Αν $f(\alpha) = \alpha$ ή $f(\beta) = \beta$, τότε το ζητούμενο σημείο είναι το $\alpha$ ή το $\beta$ αντίστοιχα. Υποθέτουμε τώρα ότι $f(\alpha) \neq \alpha$ και $f(\beta) \neq \beta$. Τότε από την υπόθεση θα έχουμε $\alpha < f(\alpha)$ και $f(\beta) < \beta$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - x.$$

Η $g$ είναι συνεχής και επιπλέον ισχύει:

$$g(\alpha) \cdot g(\beta) = (f(\alpha) - \alpha)(f(\beta) - \beta) < 0.$$

Άρα από την πρόταση 4.4.1 υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi) = f(\xi) - \xi = 0,$$

κατά συνέπεια $f(\xi) = \xi$. $\square$

**Πίσω στην Εφαρμογή 4.4.4**

*Απόδειξη:* Χωρίς απόδειξη. □

**Πίσω στο Θεώρημα 4.4.5**

*Απόδειξη:* Έστω $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, όπου $n$ περιττός. Τότε έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty.$$

Άρα υπάρχουν $a, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $P(a) < 0$ και $P(\beta) > 0$. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 4.4.1, υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $P(x_0) = 0$, δηλαδή το $x_0$ είναι ρίζα του $P$.
□

**Πίσω στην Εφαρμογή 4.4.6**

*Απόδειξη:* Έστω $x_0 \in X$. Τότε

$$\forall > 0, \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } \forall x \in X \text{ με } |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < .$$

$\square$

**Πίσω στην Πρόταση 4.5.4**

*Απόδειξη:* Υποθέτουμε ότι η $f$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε $\exists > 0$ τέτοιο ώστε $\forall \delta > 0\ \exists x, x' \in [a, b]$ με $|x - x'| < \delta$ έτσι ώστε $|f(x) - f(x')| \geq$ . Για $\delta = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ τα αντίστοιχα $x, x'$ αποτελούν δύο ακολουθίες $(x_n)$ και $(x'_n)$ από στοιχεία του $[a, b]$, για τις οποίες ισχύουν

$$\text{και} \quad \left.\begin{array}{ll} |x_n - x'_n| < \delta & (1) \\ |f(x_n) - f(x'_n)| \geq & (2) \end{array}\right\}.$$

Επειδή το σύνολο $[a, b]$ είναι κλειστό και φραγμένο έπεται ότι η $(x_n)$ είναι φραγμένη, άρα από το θεώρημα (Bolzano-Weirstrass) 2.5.5 υπάρχει μία υπακολουθία $(x_{n_k})$ που συγκλίνει. Έστω $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \xi \in [a, b]$. Από την (1) η αντίστοιχη υπακολουθία $(x'_{n_k})$ θα συγκλίνει και αυτή στο $\xi \in [a, b]$. Επειδή η $f$ είναι συνεχής θα έχουμε:

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi) \text{ και } \lim_{k\to+\infty} f(x'_{n_k}) = f(\xi),$$

ενώ παράλληλα από τη (2) έχουμε ότι $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq$ . Αυτό όμως είναι άτοπο και επομένως η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

**Πίσω στο Θεώρημα 4.5.6**

*Απόδειξη:* Επειδή η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$, έπεται ότι το $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ υπάρχει. Άρα από τον ορισμό του ορίου 3.3.1 έχουμε:

$$\forall > 0, \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } \forall x \in A \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \quad (1).$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $g_{x_0} : A \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$g_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad (2).$$

Από την (1) είναι προφανές ότι $\lim_{x\to x_0} g_{x_0}(x) = 0$. Επίσης από την εξίσωση (2), πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(x - x_0)$, παίρνουμε:

$$f(x) - f(x_0) = g_{x_0}(x)(x - x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Παίρνοντας το όριο και στα δύο μέλη της ισότητας, έχουμε

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} g_{x_0}(x) \lim_{x\to x_0} (x - x_0) + f'(x_0) \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = 0 + 0 = 0.$$

Άρα $\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

**Πίσω στο Θεώρημα 5.2.4**

*Πραγματικοί Αριθμοί*
*Ακολουθίες*
*Συναρτήσεις-Όρια...*
*Συνέχεια Συναρτήσεων*
*Παράγωγος Συναρτήσεων*
*Ορισμός και...*
*Πλευρικές Παράγωγοι*
*Ιδιότητες Παραγώγου-...*
*Παράγωγοι...*
*Παράγωγοι ανωτέρας...*
*Τα βασικά θεωρήματα...*
*>Επόμενες Ενότητες<*
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

*Απόδειξη:* Αποδεικνύουμε ενδεικτικά το (γ): Θέτουμε

$$h_1(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \text{ και } h_2(x) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0).$$

Κατά συνέπεια έχουμε

$$\begin{aligned}
& f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + h_1(x)(x - x_0)] \\
& [g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + h_2(x)(x - x_0)] - f(x_0)g(x_0) = \\
& [f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)](x - x_0) + [f(x_0)h_2(x) + f'(x_0)g'(x_0)](x - x_0) + \\
& [f'(x_0)h_2(x) + h_1(x)g(x_0) + h_2(x)g'(x_0)(x - x_0) + h_1(x)h_2(x)(x - x_0)](x - x_0),
\end{aligned}$$

όπου προφανώς,

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \to x_0} [f(x_0)h_2(x) + f'(x_0)g'(x_0)](x - x_0) + \\
& [f'(x_0)h_2(x) + h_1(x)g(x_0) + h_2(x)g'(x_0)(x - x_0) + h_1(x)h_2(x)(x - x_0)] = 0.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Οι υπόλοιπες αποδείξεις των (α), (β), (δ), αφήνονται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

**Πίσω στην Πρόταση 5.3.1**

*Απόδειξη:* Για $x \neq x_0$, θέτουμε

$$h(x) = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} \quad (1).$$

$(i)$ Έστω $f(x) \neq f(x_0)$. Αν θέσουμε $f(x) = y$ και $f(x_0) = y_0$, έχουμε $y \neq y_0$ και

$$h(x) = \frac{g(y) - g(y_0)}{x - x_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad (2).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F$ ορισμένη στο $f(A)$ με

$$F(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & , \quad y \neq y_0 \\ g'(y_0) & , \quad y = y_0 \end{cases}.$$

Τότε η (2) γράφεται:

$$h(x) = F(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3).$$

$(ii)$ Έστω $f(x) = f(x_0)$, δηλαδή $y = y_0$. Τότε $F(f(x)) = g'(y_0)$ και η (3) εξακολουθεί να ισχύει επειδή τα μέλη της μηδενίζονται, το πρώτο λόγω της (1) και το δεύτερο λόγω της $g(x) = g(x_0)$. Υπολογίζουμε το $\lim_{x \to x_0} h(x)$ από την (3):

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} \left[ F(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right].$$

Όμως η $F$ είναι συνεχής στο $y_0 = f(x_0)$, διότι

$$\lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0) = F(y_0).$$

Συνεπώς χρησιμοποιώντας την πρόταση 4.1.7 έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} F(f(x)) = f(\lim_{x \to x_0} f(x)) = F(f(x_0)) = F(y_0).$$

Άρα

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} h(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

$\square$

**Πίσω στο Θεώρημα 5.3.2**

*Απόδειξη:* Αν $y = f(x)$ και $y_0 = f(x_0)$ θα έχουμε για $y \neq y_0$, $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$ και αν $y \to y_0$ τότε $f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0)$, άρα $x \to x_0$. Κατά συνέπεια έχουμε:

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})(y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\
&= \frac{1}{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\
&= \frac{1}{f'(x_0)}.
\end{aligned}
$$

□

**Πίσω στην Πρόταση 5.3.3**

*Απόδειξη:* α) Επειδή η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$, έπεται ότι υπάρχει η $f'(x_0)$, δηλ. υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Άρα

$$\forall \; > 0, \exists \delta > 0 \text{ τ.ω } \forall x \in A \text{ με } |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| < \; .$$

Για $\; = \frac{1}{2}|f'(x_0)|$, έχουμε

$$-\frac{1}{2}|f'(x_0)| < \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) < \frac{1}{2}|f'(x_0)|,$$

ή ισοδύναμα προσθέτοντας $f'(x_0)$,

$$f'(x_0) - \frac{1}{2}|f'(x_0)| < \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < f'(x_0) + \frac{1}{2}|f'(x_0)| \qquad (1).$$

*i*) Αν $f'(x_0) > 0$, τότε από την (1) παίρνουμε, $\frac{1}{2}f'(x_0) < \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \frac{3}{2}f'(x_0)$. Άρα, $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ έχουμε $f(x) - f(x_0) > 0$, δηλαδή $f(x) > f(x_0)$ και $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ έχουμε $f(x) - f(x_0) < 0$, δηλαδή $f(x) < f(x_0)$.

*ii*) Αν $f'(x_0) < 0$, τότε από την (1) παίρνουμε, $\frac{3}{2}f'(x_0) < \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \frac{1}{2}f'(x_0)$. Άρα, $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ έχουμε $f(x) - f(x_0) < 0$, δηλαδή $f(x) < f(x_0)$ και $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ έχουμε $f(x) - f(x_0) > 0$, δηλαδή $f(x) > f(x_0)$. □

**Πίσω στην Πρόταση 5.6.2**

*Πραγματικοί Αριθμοί*
*Ακολουθίες*
*Συναρτήσεις-Όρια . . .*
*Συνέχεια Συναρτήσεων*
*Παράγωγος Συναρτήσεων*
*>Προηγούμενες Ενότητες<*
*Παράγωγοι ανωτέρας . . .*
*Τα βασικά θεωρήματα . . .*
*Ο τύπος του Taylor*
*Εύρεση ορίου . . .*
*Κυρτές και κοίλες . . .*
*Ασύμπτωτες-Μελέτη . . .*
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 145 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

*Απόδειξη:* Ας υποθέσουμε ότι $f'(x_0) \neq 0$, έστω $f'(x_0) > 0$. Τότε από την προηγούμενη πρόταση 5.6.2, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ έχουμε $f(x) > f(x_0)$ και $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ έχουμε $f(x) < f(x_0)$. Άρα αν $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, x_0 + \delta)$ τότε έχουμε $x_1 < x_2$ και $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άτοπο, διότι η $f$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0$. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $f'(x_0) < 0$. Άρα $f'(x_0) = 0$. □

**Πίσω στο Θεώρημα 5.6.3**



Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 146 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

*Απόδειξη:* Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ από το θεώρημα μεγίστης-ελαχίστης τιμής 4.4.5, θα υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in [a, \beta]$ τέτοια ώστε το $f(\xi_1)$ να είναι ελάχιστη τιμή και το $f(\xi_2)$ να είναι μέγιστη τιμή της $f$ στο $[a, \beta]$.

$(i)$ Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση όπου ένα τουλάχιστον από τα $x_1, x_2$ ανήκει στο $(a, \beta)$. Έστω $\xi$ το σημείο αυτό. Επειδή η $f$ παρουσιάζει ακρότατο στο $\xi$, τότε από το θεώρημα του Fermat θα έχουμε ότι $f'(\xi) = 0$.

$(ii)$ Αν τώρα τα $\xi_1, \xi_2$ είναι τα άκρα του διαστήματος, τότε επειδή $f(a) = f(\beta)$, η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της $f$ συμπίπτουν και συνεπώς η $f$ είναι σταθερή συνάρτηση στο $[a, \beta]$. Άρα $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. □

**Πίσω στο Θεώρημα 5.6.5**

*Απόδειξη:* Έστω $g(x) = f(x) - \frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$. Η $g$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle αφού $g(a) = f(a) = g(\beta)$. Επομένως υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a} = 0$. Άρα $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$. □

**Πίσω στο Θεώρημα 5.6.7**

*Απόδειξη:* Θα δείξουμε ότι $f(x) = f(a)$, για κάθε $x \in [a, \beta]$. Πράγματι, αν $x \in [a, \beta]$, $x > a$ εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[a, x]$, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Όμως από την υπόθεση, $f'(\xi) = 0$. Άρα $f(x) = f(a)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.
$\square$

**Πίσω στην Πρόταση 5.6.8**

*Απόδειξη:* (i) ($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε ότι $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$. Έστω $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ με $x_1 < x_2$. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στο $[x_1, x_2]$: $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi).$$

Επειδή $f'(\xi) \geq 0$ και $x_2 > x_1$, συμπεραίνουμε ότι $f(x_2) \geq f(x_1)$. Συνεπώς η $f$ είναι αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$.

($\Longrightarrow$) Έστω $f$ παραγωγίσιμη και αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, από τον ορισμό, για κάθε $c \in [\alpha, \beta]$ θα έχουμε $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. Παίρνοντας το όριο έχουμε $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \geq 0$. Αφού το $c$ είναι τυχαίο, θα έχουμε $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

(*ii*) Όμοια με το (*i*). □

**Πίσω στο Θεώρημα 5.6.9**

*Απόδειξη:* $i$) Αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, δηλαδή $x_0 - \delta < x < x_0$, από το Θ.Μ.Τ. $\exists \xi_x \in (x, x_0)$, δηλαδή $x < \xi_x < x_0$, τ.ω.

$$f(x_0) - f(x) = \underbrace{(x_0 - x)}_{>0} \underbrace{f'(\xi_x)}_{\geq 0}.$$

Άρα $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ (1).

Αντίστοιχα αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, δηλαδή $x_0 < x < x_0 + \delta$, από το Θ.Μ.Τ. $\exists \xi'_x \in (x_0, x)$, τ.ω.

$$f(x_0) - f(x) = \underbrace{(x_0 - x)}_{<0} \underbrace{f'(\xi'_x)}_{\leq 0}.$$

Άρα $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (2).

Συνεπώς, από (1) και (2) έχουμε ότι $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, δηλαδή η $f$ στο $x_0$ έχει τοπικό μέγιστο.

$ii$) Όμοια με το $i$). □

**Πίσω στο Θεώρημα 5.6.10**



Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 151 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

*Απόδειξη:* Επειδή $f'(x_0) = 0$ έχουμε ότι

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Αν $f''(x_0) > 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x-x_0} > 0$. Απο το Λήμμα 3.6.4, έχουμε ότι $\exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ με $x \neq x_0$, ισχύει $\frac{f'(x)}{x-x_0} > 0$. Επομένως αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, δηλαδή $f \searrow$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, δηλαδή $f \nearrow$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Όμοια αν $f''(x_0) < 0$, βρίσκουμε ότι το $x_0$ είναι τοπικό μέγιστο της $f$. $\square$

**Πίσω στο Θεώρημα 5.6.12**

Πραγματικοί Αριθμοί
Ακολουθίες
Συναρτήσεις-Όρια . . .
Συνέχεια Συναρτήσεων
Παράγωγος Συναρτήσεων
>Προηγούμενες Ενότητες<
Παράγωγοι ανωτέρας . . .
Τα βασικά θεωρήματα . . .
Ο τύπος του Taylor
Εύρεση ορίου . . .
Κυρτές και κοίλες . . .
Ασύμπτωτες-Μελέτη . . .
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 152 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

*Απόδειξη:* Χωρίς απόδειξη (βλ. Ντούγια Σ., «Απειροστικός Λογισμός 1», Θ. 5.21.). ☐

**Πίσω στο Θεώρημα 5.7.1**

*Απόδειξη:* Το υπόλοιπο Lagrange της $f(x) = e^x$ είναι $R_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{\vartheta x}$ με $0 < \vartheta < 1$. Έστω $a_n = \frac{x^n}{n!}e^{\vartheta x}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\vartheta x}}{\frac{|x|^n}{n!}e^{\vartheta x}} \\
&= \frac{|x|}{n+1} \\
&= 0 < 1.
\end{aligned}$$

Άρα από το κριτήριο του λόγου $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. □

**Πίσω στην Πρόταση 5.7.3**

*Απόδειξη:* Υποθέτουμε πρώτα ότι $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) = 0$ και $\ell \in \mathbb{R}$. Επειδή $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, από τον ορισμό έχουμε,

$$\forall > 0, \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. για } x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| < \quad (1).$$

Έστω $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Από το Θ.Μ.Τ., $\exists \xi_x \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Επειδή οι $f, g$ είναι συνεχείς στο $x_0$ από δεξιά και $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) = 0$, έπεται ότι $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Επομένως η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Αφού $x_0 < \xi_x < x < x_0 + \delta$, από τις (1) και (2), έχουμε για κάθε $x$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| < .$$

Άρα $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Όμοια αποδεικνύεται και η περίπτωση όπου $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) = \pm\infty$. $\square$

**Πίσω στο Θεώρημα 5.8.2**



Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 155 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

*Απόδειξη:* ($\Longrightarrow$) Έστω $f$ κυρτή στο $I$. Έστω $x_1, x_2 \in I$ και $x \in [x_1, x_2]$. Το $x$ γράφεται $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ για κάποιο $\lambda \in [0,1]$. Επομένως $\lambda = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}$. Άρα,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \\ &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \\ &= f(x_2) + \lambda(f(x_1) - f(x_2)) \\ &= f(x_2) + \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)(f(x_1) - f(x_2)). \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Έστω ότι ισχύει η (1). Θεωρούμε $x_1, x_2 \in I$. Έστω $x \in [x_1, x_2]$, δηλαδή $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ για κάποιο $\lambda \in [0,1]$. Έχουμε $\lambda = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}$.

($i$) Αν $x_1 = x_2$, τότε $x = x_1 = x_2$ και $f(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x)$.

($ii$) Υποθέτουμε τώρα ότι $x_1 \neq x_2$. Αν $x_1 < x_2$, τότε $x_1 < x < x_2$ και από την (1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &\leq f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2) \\ &= f(x_2) + \lambda(f(x_1) - f(x_2)) \\ &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2). \end{aligned}$$

Όμοια βρίσκουμε αν $x_2 < x_1$. $\square$

**Πίσω στην Πρόταση 5.9.3**


*Πραγματικοί Αριθμοί*
*Ακολουθίες*
*Συναρτήσεις-Όρια...*
*Συνέχεια Συναρτήσεων*
*Παράγωγος Συναρτήσεων*
*>Προηγούμενες Ενότητες<*
*Παράγωγοι ανωτέρας...*
*Τα βασικά θεωρήματα...*
*Ο τύπος του Taylor*
*Εύρεση ορίου...*
*Κυρτές και κοίλες...*
*Ασύμπτωτες-Μελέτη...*
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 156 από 158
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

*Απόδειξη:* ($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε ότι η $f'$ είναι αύξουσα στο $I$. Αν $x_1 < x_2$ και $x_1 < x < x_2$. Από το Θ.Μ.Τ. στο $[x_1, x]$, $\exists \xi_1 \in (x_1, x)$ τ.ω. $f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$. Επίσης από το Θ.Μ.Τ. στο $[x, x_2]$, $\exists \xi_2 \in (x, x_2)$ τ.ω. $f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Κατά συνέπεια, επειδή η $f'$ είναι αύξουσα έχουμε $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$ και άρα $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Απαλοίφοντας τους παρονομαστές έχουμε $(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \le (x - x_1)(f(x_2) - f(x))$ απ' όπου συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
& x_2 f(x) - x_2 f(x_1) - x f(x) + x f(x_1) \le x f(x_2) - x f(x) - x_1 f(x_2) + x_1 f(x) \\
\Rightarrow\ & f(x)(x_2 - x_1) \le x_2 f(x_1) - x f(x_1) + x f(x_2) - x_1 f(x_2) + f(x_1)x_1 - f(x_1)x_1 \\
\Rightarrow\ & f(x)(x_2 - x_1) \le f(x_1)(x_2 - x_1) + (f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x) \\
\Rightarrow\ & f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_1 - x).
\end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με την πρόταση 5.9.3 η $f$ είναι κυρτή.

($\Longrightarrow$) Έστω ότι η $f$ είναι κυρτή στο $I$ και $x_1 < x < x_2$, τότε από την πρόταση 5.9.3 έχουμε

$$f(x) \le f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2)$$

δηλαδή,

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Παίρνοντας τα όρια και στα δύο μέλη της παραπάνω ανισότητας για $x \to x_1^+$ και για $x \to x_2^-$ έχουμε αντίστοιχα:

$$\lim_{x\to x_1^+} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \le \lim_{x\to x_1^+} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to x_2^-} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \le \lim_{x\to x_2^-} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

απ' όπου συνεπάγεται αντίστοιχα ότι

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{και}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Άρα έχουμε $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, δηλαδή η $f'$ είναι αύξουσα. □

**Πίσω στο Θεώρημα 5.9.4**