

ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΑΓΑΠΗΤΟΣ Ν. ΧΑΤΖΗΝΙΚΗΤΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

2008

Περιεχόμενα

1	Ο Διανυσματικός Χώρος \mathbb{R}^3	11
1.1	Η Γεωμετρία του Ευκλείδειου Χώρου	11
1.2	Εσωτερικό και Διανυσματικό Γινόμενο	13
1.3	Συστήματα Συντεταγμένων	19
1.4	Βαθμωτά, Διανυσματικά και Τανυστικά Μεγέθη	23
2	Παραγωγήιση	25
2.1	Η Γεωμετρία των Πραγματικών Συναρτήσεων	25
2.2	Όρια και Συνέχεια	25
2.3	Παραγωγήιση	27
2.4	Κλίση και Παράγωγοι κατά Κατεύθυνση	27
3	Διανυσματικές Συναρτήσεις	29
3.1	Καμπύλες, Μήκος Τόξου, Διανυσματικό Πεδίο	29
3.2	Στροβιλισμός και Απόκλιση Διανυσματικού Πεδίου	31
4	Ολοκλήρωση	33
4.1	Επικαμπύλια Ολοκληρώματα	33
4.2	Επιφανειακά Ολοκληρώματα	36
4.3	Τα Ολοκληρωτικά Θεωρήματα της Διανυσματικής Ανάλυσης	42
4.4	Συντηρητικά πεδία	45
5	Το Κινούμενο Τρίεδρο-Οι Τύποι του <i>Frenet</i>	49
6	Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις με Σταθερούς Συντελεστές	53
7	Κωνικές Τομές	57
8	Βασικές Έννοιες	63
8.1	Μονάδες Μήκους, Μάζας, Χρόνου και Μολ	63
8.2	Ανάλυση Διαστάσεων	63
8.3	Σημαντικά Ψηφία	64
8.4	Χώρος και Χρόνος	65
9	Κίνηση σε μια και δύο Διαστάσεις	67
9.1	Ταχύτητα και Επιτάχυνση σε μία Διάσταση	67
9.2	Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση	69
9.3	Ταχύτητα και Επιτάχυνση σε δύο Διαστάσεις	70
9.4	Σχετική Ταχύτητα και Επιτάχυνση	74
10	Οι Νόμοι της Κίνησης	77
10.1	Η Έννοια της Δύναμης	77
10.2	Οι Νόμοι του Νεύτωνα	78
10.3	Κίνηση σε Επιταχυνόμενα Συστήματα Αναφοράς	82
10.4	Κίνηση με την Παρουσία Δυνάμεων που Αντιστέκονται στην Κίνηση	83
10.5	Οι Θεμελιώδεις Δυνάμεις της Φύσης	85

11 Δυναμική Ενέργεια και Διατήρηση Ενέργειας	87
11.1 Έργο	87
11.2 Διατηρητικές (ή Συντηρητικές) και μη Διατηρητικές Δυνάμεις	88
11.3 Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας	90
11.4 Κεντρικές Δυνάμεις	93
11.5 Μελέτη Καμπύλης Δυναμικής Ενέργειας	96
12 Ταλαντώσεις	99
12.1 Ο Αρμονικός Ταλαντωτής	99
12.2 Ο Αποσβενόμενος Αρμονικός Ταλαντωτής	102
12.3 Ο Εξαναγκασμένος Αρμονικός Ταλαντωτής	104
12.4 Το Απλό Εκκρεμές	106
12.5 Το Φυσικό Εκκρεμές	108
13 Μελέτη Κίνησης σε Κεντρικό Δυναμικό	111
14 Η Βαρυντική Έλξη	117
14.1 Οι Νόμοι του <i>Kepler</i>	117
14.2 Το Βαρυντικό Δυναμικό	118
15 Η Μηχανική Συστήματος Σωμάτων	123
15.1 Κέντρο Μάζας	124
15.2 Στροφορμή, Ροπή και Ενέργεια Συστήματος Σωμάτων	128
15.3 Μετασχηματισμός της Στροφορμής και της Κινητικής Ενέργειας στο Κ.Μ.	130
16 Περιστροφή Στερεού Σώματος Γύρω από Σταθερό Άξονα	133
16.1 Σχέσεις Ανάμεσα σε Γωνιακές και Γραμμικές Ποσότητες	134
16.2 Κινητική Ενέργεια Περιστροφής	134
16.3 Ροπή	136
16.4 Σχέση Ανάμεσα στη Ροπή και στη Γωνιακή Επιτάχυνση	137
16.5 Το Θεώρημα Έργου - Ενέργειας για την Περιστροφική Κίνηση	139
17 Κύλιση και Στροφορμή	141
17.1 Κύλιση Στερεού Σώματος	141
17.2 Στροφορμή Συστήματος Σωμάτων	144
18 Μηχανική των Ρευστών	147
18.1 Καταστάσεις της Ύλης	147
18.2 Μεταβολή της Πίεσης συναρτήσει του Βάθους	147
18.3 Η Άνωση και η Αρχή του Αρχιμήδη	149
18.4 Δυναμική των Ρευστών	150
18.5 Η Εξίσωση του <i>Bernoulli</i>	151
19 Σχετικότητα	155
19.1 Η Αρχή της Σχετικότητας	155
19.2 Συγχρονισμός Ρολογιών και Ταυτόχρονα Γεγονότα	156
19.3 Η Σχετικότητα του Χρόνου	157
19.4 Η Σχετικότητα του Μήκους	158
19.5 Ο Μετασχηματισμός του <i>Lorentz</i>	159
19.6 Ο Μετασχηματισμός Ταχυτήτων του <i>Lorentz</i>	161
19.7 Η Σχετικιστική Ορμή και Ενέργεια	162

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Γεωμετρική κατασκευή του αθροίσματος δύο διανυσμάτων.	13
1.2	Γεωμετρική κατασκευή του πολλαπλασιασμού διανύσματος με θετικό πραγματικό αριθμό.	13
1.3	Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές \vec{u}, \vec{v} ισούται με το μήκος του διανύσματος $\vec{u} \times \vec{v}$	17
1.4	Ο όγκος του παραλληλεπίπεδου ισούται με το βαθμωτό τριπλό γινόμενο των πλευρών του.	18
1.5	Οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ)	20
3.1	Οι γραμμές ροής του πρώτου διανυσματικού πεδίου είναι ομόκεντροι κύκλοι με αρχή που ταυτίζεται με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.	30
3.2	Το δεύτερο διανυσματικό πεδίο έχει γραμμές ροής που παριστάνονται από μια οικογένεια υπερβολών.	31
3.3	Το τρίτο διανυσματικό πεδίο έχει γραμμές ροής που παριστάνονται από μια οικογένεια παραβολών.	31
4.1	Το γράφημα της συνάρτησης $f(x, y)$	34
4.2	Η καμπύλη $C = C_1 \cup C_2$	35
4.3	Πόσο έργο δαπανά η ποδηλάτισσα για να ανέβει το βουνό αυτό;	36
4.4	Η επιφάνεια (4.32) παριστάνει ένα ελικοειδές.	39
4.5	Η επιφάνεια που αποκόπτει ο κώνος από την μοναδιαία σφαίρα.	40
4.6	Ο κόλουρος κώνος.	40
4.7	Ο κόλουρος κώνος όταν ανοιχτεί κατά μήκος της γεννήτράς του στο επίπεδο.	41
4.8	Το διανυσματικό πεδίο των κλίσεων της θερμοκρασίας.	42
4.9	Το χωρίο D είναι δακτύλιος εσωτερικής ακτίνας 2 και εξωτερικής 4.	42
4.10	Η τομή του κυλίνδρου με το επίπεδο.	44
4.11	Η κατά τμήματα κλάσεως C^1 καμπύλη $C_1 \cup C_2 \cup C_3$	46
5.1	Το κινούμενο τρίεδρο του <i>Frenet</i>	49
5.2	Το μοναδιαίο εφαπτόμενο και το πρώτο κάθετο για τον κύκλο.	52
7.1	Ο κύκλος.	57
7.2	Η έλλειψη.	57
7.3	Η παραβολή.	58
7.4	Η υπερβολή.	58
7.5	Η εστία και η διευθετούσα της παραβολής.	59
7.6	Οι εστίες της έλλειψης.	59
7.7	Οι εστίες και οι ασύμπτωτες της υπερβολής.	60
9.1	Γραφική παράσταση θέσης - χρόνου για σώμα που κινείται στον άξονα x . Η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος \overline{PQ} είναι η μέση ταχύτητα \bar{v} που αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα Δt	67
9.2	Το βλήμα πριν και μετά την κρούση του με την σανίδα.	68
9.3	Η παραβολική τροχιά ενός βλήματος που εκτοξεύεται με ταχύτητα \vec{v}_0	72
9.4	Κίνηση υλικού σημείου σε κυκλική τροχιά από την θέση P στη θέση Q	74
9.5	Δύο παρατηρητές περιγράφουν την κίνηση ενός σώματος που κάποια δεδομένη χρονική στιγμή βρίσκεται στο σημείο P . Τα συστήματα αναφοράς S_1 και S_2 , ως προς τα οποία ηρεμούν οι παρατηρητές, κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα \vec{u} . Η επιβατική ακτίνα του σημείου P ως προς το S_1 είναι \vec{r}_1 ενώ ως προς το S_2 είναι \vec{r}_2	75
9.6	Κίνηση βάρκας σε ποταμό.	75
10.1	Σύστημα δύο μαζών που συνδέονται με νήματα και βρίσκεται σε ισορροπία.	78

10.2	Οι δυνάμεις που ασκούνται σε σώμα που ηρεμεί πάνω σε τραπέζι.	79
10.3	Οι δυνάμεις που ασκούνται σε τρία σώματα διαφορετικής μάζας που βρίσκονται σε επαφή και κινούνται υπό την επίδραση σταθερής δύναμης σε οριζόντιο επίπεδο.	80
10.4	Η δύναμη τριβής ανάμεσα σε ένα σώμα και μια τραχιά επιφάνεια.	81
10.5	Δυνάμεις που ασκούνται σε σώμα που κινείται ολισθαίνοντας σε περιστρεφόμενο ημισφαίριο ακτίνας R	82
10.6	Οι δυνάμεις που ασκούνται σε χάντρα που περιστρέφεται μαζί με την στεφάνη.	83
10.7	Οι δυνάμεις που ασκούνται σε σώμα που κινείται σε ρευστό που ηρεμεί.	84
11.1	Απλή, κλειστή και προσανατολισμένη καμπύλη.	88
11.2	Οι απλές και αντίθετα προσανατολισμένες καμπύλες C_1 και C_2 ενώνουν τα σημεία Q και P	89
11.3	Καμπύλες ολοκλήρωσης που συνδέουν τα σημεία A και B	90
11.4	Η τροχιά που ακολουθεί το βαγόνι.	92
11.5	Η τροχιά που ακολουθεί το σώμα.	92
11.6	Η ελλειπτική τροχιά που διαγραφεί το κινούμενο σώμα.	95
11.7	Η καμπύλη δυναμικής ενέργειας και ενεργειακές στάθμες για τις οποίες η κίνηση του σωματίου είναι φραγμένη ή μη φραγμένη.	97
11.8	Η δυναμική ενέργεια σα συνάρτηση της απόστασης για διατομικό μόριο.	98
12.1	Η απλή αρμονική ταλάντωση σώματος που προσδένεται στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου.	99
12.2	Οι καμπύλες δυναμικής και κινητικής ενέργειας για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή.	101
12.3	Η 'παράλληλη' και εν σειρά συνδεσμολογία ελατηρίων με σώμα μάζας m	101
12.4	Η μετατόπιση του σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου όταν στο σώμα ασκείται η δύναμη της αντίστασης του μέσου.	102
12.5	Οι δυνάμεις που ασκούνται σε σώμα που ταλαντώνεται σε ρευστό μεγάλου ιξώδους.	103
12.6	Η γραφική παράσταση της τροχιάς του σώματος.	106
12.7	Το απλό εκκρεμές.	106
12.8	Το σύστημα εκκρεμές - ελατήριο το οποίο ταλαντώνεται.	108
12.9	Το φυσικό εκκρεμές περιστρέφεται γύρω από το σημείο O που δεν ταυτίζεται με το κέντρο μάζας του στερεού σώματος.	109
13.1	Η έλλειψη με τη μια εστία της και την διευθετούσα.	112
13.2	Η κόκκινη καμπύλη αναπαριστά την τροχιά του σώματος.	114
14.1	Υπολογισμός της έντασης του βαρυντικού πεδίου που οφείλεται σε ομογενή ράβδο.	120
14.2	Η βαρυντική δύναμη που ασκείται από ομοιόμορφη σφαιρική επιφανειακή πυκνότητα μάζας σε σημειακό σώμα μάζας m	121
15.1	Το κέντρο μάζας διακριτής κατανομής μάζας.	124
15.2	Πειραματικός προσδιορισμός του κέντρου μάζας στερεού σώματος.	124
15.3	Το αδρανειακό σύστημα O' ηρεμεί ως προς κέντρο μάζας του στερεού σώματος που κινείται με σταθερή σχετική ταχύτητα ως προς το σύστημα O του εργαστηρίου.	125
15.4	Προσδιορισμός του κέντρου μάζας ορθογώνιου τριγώνου με δεδομένη επιφανειακή πυκνότητα.	126
15.5	Ομογενής κυκλικός κώνος με την κορυφή του στον z -άξονα.	127
15.6	Το στερεό σώμα κυκλικός κώνος - ημισφαίριο.	127
15.7	Το ένα άκρο του σκοινιού είναι σταθερά δεμένο στον κύλινδρο ενώ το δεύτερο ελεύθερο.	130
15.8	Το σύστημα των δύο σωμάτων περιστρέφεται γύρω από τη μικρότερη μάζα και ακολούθως αφήνεται ελεύθερο.	131
16.1	Επίπεδο στερεό σώμα περιστρεφόμενο γύρω από άξονα παράλληλο προς τον άξονα που διέρχεται από το Κ.Μ.	135
16.2	Στερεό σώμα περιστρεφόμενο γύρω από άξονα κάτω από την επίδραση εξωτερικής δύναμης.	136
16.3	Υλικό σημείο περιστρεφόμενο σε κυκλική τροχιά κάτω από την επίδραση εφαπτομενικής δύναμης.	137
16.4	Κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του κάτω από την επίδραση σωμάτων που συνδέονται με νήματα τυλιγμένα σε αυτόν.	138
16.5	Στερό σώμα περιστρεφόμενο γύρω από σημείο κάτω από την επίδραση εξωτερικής δύναμης.	139
17.1	Κύλινδρος κυλιέται σε επίπεδη επιφάνεια.	141

17.2	Κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από άξονα πριν και μετά την επαφή του με οριζόντιο επίπεδο.	142
17.3	Ο δίσκος περιστρέφεται καθώς κινείται προς τα κάτω.	143
17.4	Επίπεδος δίσκος περιστρέφεται γύρω από τον σταθερό z-άξονα.	144
18.1	Ιδεατός κύλινδρος υγρού σε δοχείο με ρευστό που ηρεμεί.	148
18.2	Το σύστημα καλώδιο - σώμα βυθισμένο σε δοχείο με υγρό.	150
18.3	Η ροή του νερού από το στόμιο βρύσης.	151
18.4	Σωλήνας μεταβλητής διατομής που διαρρέεται από ρευστό.	152
18.5	Η πλάκα ισορροπεί λόγω της δυναμικής άνωσης που δημιουργείται από ρεύμα αέρα στην πάνω της επιφάνεια.	153
18.6	Εκροή ρευστού από οπή δοχείου.	153
19.1	Αδρανειακά συστήματα αναφοράς που κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα.	156
19.2	Ιδεατό πείραμα για την έννοια του ταυτόχρονου.	156
19.3	Συσκευή λέιζερ εκπέμπει ακτίνα προς τη οροφή κινούμενου οχήματος και ανακλάται από καθρέφτη. Η κόκκινη καμπύλη αναπαριστά την πορεία της ακτίνας όπως την περιγράφει παρατηρητής που ηρεμεί με το όχημα.	157
19.4	Η καινούργια πορεία της ακτίνας όπως περιγράφεται από παρατηρητή που ηρεμεί με το έδαφος.	157
19.5	Συστολή μόνο της ακμής του κύβου που είναι παράλληλη με την διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας.	158
19.6	Το μήκος της ράβδου όπως αυτό μετράται σε αδρανειακά συστήματα που βρίσκονται σε σχετική κίνηση.	158
19.7	Ακτίνα φωτός που διέρχεται μέσα από στήλη νερού που κινείται με σταθερή σχετική ταχύτητα.	162

Κατάλογος Πινάκων

6.1	Τα γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα συναρτήσεων για συγκεκριμένους μη ομογενής όρους.	56
13.1	Οι κωνικές τομές με τις αντίστοιχες τιμές εκκεντρότητας e και s	113

Μέρος Ι

Μαθηματικό Παράρτημα

Κεφάλαιο 1

Ο Διανυσματικός Χώρος \mathbb{R}^3

Στη φύση υπάρχουν δύο απλές κατηγορίες μεγεθών:

1. Τα μονόμετρα τα οποία προσδιορίζονται πλήρως από την αριθμητική τους τιμή και την μονάδα μέτρησης
2. Τα διανυσματικά τα οποία χρειάζονται επιπλέον και προσανατολισμό.

Παραδείγματα μονόμετρων μεγεθών αποτελούν η μάζα, η θερμοκρασία, η ενέργεια, το μήκος κύματος ενώ διανυσματικά είναι η θέση, η ορμή, η επιτάχυνση, οι δυνάμεις και η στροφορμή. Τα διανυσματικά μεγέθη δεν παραμένουν αναλλοίωτα κάτω από στροφές του συστήματος συντεταγμένων.

1.1 Η Γεωμετρία του Ευκλείδειου Χώρου

Ο μαθηματικός χώρος μελέτης των φαινομένων της Κλασικής Μηχανικής είναι ο διανυσματικός χώρος $V = \mathbb{R}^3$ πάνω στο σώμα των πραγματικών αριθμών $K = \mathbb{R}$. Μελετάμε τη δομή του χώρου αυτού παραθέτοντας τους ορισμούς βασικών εννοιών με στόχο την πληρέστερη κατανόηση των φυσικών μεγεθών από τον αναγνώστη.

Ορισμός 1.1.1 Σώμα είναι ένα σύνολο K εφοδιασμένο με δύο πράξεις, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό οι οποίες ικανοποιούν τα αξιώματα σώματος

1. Αξιώματα της πρόσθεσης.

- (α1) Εάν $\alpha, \beta \in K$ τότε $(\alpha + \beta) \in K$.
- (α2) Η πρόσθεση είναι μεταθετική: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\forall \alpha, \beta \in K$.
- (α3) Η πρόσθεση είναι προσεταιριστική: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in K$.
- (α4) Το K περιέχει ένα στοιχείο το 0 , τέτοιο ώστε $0 + \alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in K$.
- (α5) Σε κάθε στοιχείο $\alpha \in K$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο $(-\alpha) \in K$ τέτοιο ώστε $\alpha + (-\alpha) = 0$.

2. Αξιώματα του πολλαπλασιασμού.

- (β1) Εάν $\alpha, \beta \in K$ τότε το $(\alpha \cdot \beta) \in K$.
- (β2) Ο πολλαπλασιασμός είναι μεταθετικός: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- (β3) Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
- (β4) Το K περιέχει ένα στοιχείο το 1 με $1 \neq 0$ τέτοιο ώστε $1 \cdot \alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in K$.
- (β5) Σε κάθε $\alpha \in K$ με $\alpha \neq 0$ αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο $\frac{1}{\alpha} \in K$ τέτοιο ώστε $\alpha \left(\frac{1}{\alpha}\right) = 1$.

3. Επιμεριστικός νόμος

- (γ1) Για οποιαδήποτε $\alpha, \beta, \gamma \in K$ ισχύει ότι $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Ορισμός 1.1.2 Ένα μη κενό σύνολο V πάνω στο σώμα K θα ονομάζεται διανυσματικός ή γραμμικός χώρος και θα συμβολίζεται με $V(K)$, εάν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

1. Οποιαδήποτε δύο στοιχεία $x, y \in V$ μοναδικά καθορίζουν ένα τρίτο στοιχείο το $(x + y) \in V$ που ονομάζεται άθροισμα των x, y . Αυτό το στοιχείο ικανοποιεί:

$$(\alpha) \quad x + y = y + x \text{ (μεταθετικότητα).}$$

$$(\beta) \quad (x + y) + z = x + (y + z) \text{ (προσεταιριστικότητα).}$$

$$(\gamma) \quad \text{Υπάρχει το στοιχείο } 0 \in V \text{ που ονομάζεται μηδενικό στοιχείο και έχει την ιδιότητα } x + 0 = x, \forall x \in V.$$

$$(\delta) \quad \text{Για κάθε στοιχείο } x \in V \text{ υπάρχει το στοιχείο } (-x) \in V, \text{ που ονομάζεται αρνητικό ή αντίθετο του } x \text{ και έχει την ιδιότητα } x + (-x) = 0.$$

2. Για οποιαδήποτε $\alpha \in K, x \in V$ μοναδικά καθορίζεται το στοιχείο $(\alpha \cdot x) \in V$ το οποίο ονομάζεται γινόμενο των α και x . Αυτό το στοιχείο ικανοποιεί:

$$(\alpha) \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x.$$

$$(\beta) \quad 1 \cdot x = x.$$

3. Οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης ικανοποιούν τους νόμους

$$(\alpha) \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

$$(\beta) \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

Όταν το σώμα $K = C$ τότε μιλάμε για μιγαδικό διανυσματικό χώρο τον οποίο θα συμβολίζουμε με $V(C)$.

Παράδειγμα 1.1.3 Η ευθεία των πραγματικών αριθμών με τις συνήθεις αριθμητικές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι ένας γραμμικός χώρος.

Παράδειγμα 1.1.4 Ο n -διάστατος διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^n ή C^n . Αποτελείται από τις διατεταγμένες n -άδες (x_1, x_2, \dots, x_n) ¹ πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού να ορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) &= (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Παράδειγμα 1.1.5 Το σύνολο των συνεχών πραγματικών ή μιγαδικών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$ με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης συναρτήσεων και του πολλαπλασιασμού συναρτήσεων με αριθμούς. Ο χώρος $C_{[a,b]}$ είναι ένας γραμμικός χώρος.

Τα διανύσματα έχουν τρία βασικά χαρακτηριστικά: προσανατολισμό, φορέα και μήκος. Ο προσανατολισμός ενός ευθύγραμμου τμήματος καθορίζεται εάν διατάξουμε τα άκρα του, δηλαδή ορίσουμε ποια είναι η αρχή και ποιο το πέρας του. Κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα βρίσκεται πάνω σε μοναδική ευθεία που ονομάζεται φορέας του ευθύγραμμου τμήματος. Το μήκος ενός διανύσματος είναι η απόσταση του πέρατος από την αρχή του διανύσματος. Στο σύνολο \mathcal{B} των προσανατολισμένων ευθύγραμμων τμημάτων μπορούμε να ορίσουμε μία σχέση ισοδυναμίας (ικανοποιεί την ανακλαστική $(\overline{AB} \sim \overline{BA})$, συμμετρική $(\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{CD} \sim \overline{AB})$ και μεταβατική ιδιότητα (εάν $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ και $\overline{CD} \sim \overline{EF}$ τότε $\overline{AB} \sim \overline{EF}$) σύμφωνα με την οποία $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ εάν

$$(1) \quad \text{Τα } \overline{AB}, \overline{CD} \text{ έχουν τον ίδιο φορέα.}$$

$$(2) \quad \text{Τα } \overline{AB}, \overline{CD} \text{ έχουν την ίδια φορά.}$$

$$(3) \quad \text{Το ίδιο μήκος.}$$

Η σχέση ισοδυναμίας διαμερίζει το σύνολο \mathcal{B} σε κλάσεις ισοδυναμίας που κάθε μία ονομάζεται διάνυσμα. Έτσι ορίζουμε σαν διάνυσμα το

$$\overline{OA} = \{\overline{OB} \in \mathcal{B} : \overline{OA} \sim \overline{OB}\}. \quad (1.2)$$

Θεωρούμε τώρα ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το $\vec{0}$ και ορθοκανονική βάση $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$. Σε κάθε στοιχείο (ή σημείο ή διάνυσμα) του \mathbb{R}^3 μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μία και μόνο μία διατεταγμένη τριάδα

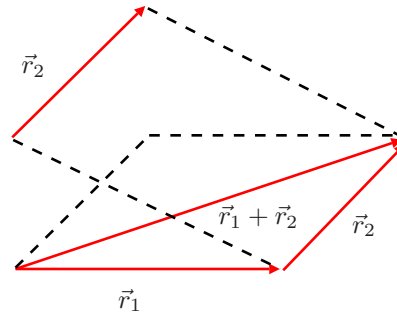
¹Με τον όρο διατεταγμένη n -άδα εννοούμε ότι τα (x_1, x_2, \dots, x_n) και (x_2, x_1, \dots, x_n) αντιστοιχούν σε διαφορετικά σημεία του \mathbb{R}^n όταν $x_1 \neq x_2$.

πραγματικών αριθμών (x, y, z) , που ονομάζονται συντεταγμένες του σημείου, και αντίστροφα, σε κάθε τριάδα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα και μόνο ένα σημείο του χώρου.

Η πρόσθεση δύο στοιχείων του \mathbb{R}^3 ορίζεται από την σχέση

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \quad (1.3)$$

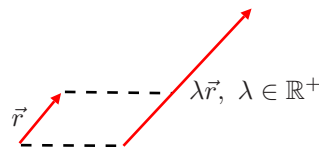
Το διανυσματικό άθροισμα $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$ γεωμετρικά κατασκευάζεται εάν πρώτα μετατοπίσουμε το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα \vec{r}_2 παράλληλα με τον αρχικό του φορέα και στην συνέχεια ταυτίσουμε την αρχή του με το πέρας του διανύσματος \vec{r}_1 . Το πέρας του νέου προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$. Το βαθμωτό γινόμενο με πραγματικό αριθμό ορίζεται μέσω της



Σχήμα 1.1: Γεωμετρική κατασκευή του αθροίσματος δύο διανυσμάτων.

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z). \quad (1.4)$$

Η γεωμετρική κατασκευή του βαθμωτού πολλαπλασιασμού διανυσμάτων είναι η εξής: Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε το διάνυσμα $\lambda \vec{r}$ έχει τον ίδιο φορέα με το \vec{r} , μήκος $|\lambda| \|\vec{r}\|$ και φορά την ίδια με το \vec{r} εάν $\lambda > 0$ ή αντίθετη αν $\lambda < 0$.



Σχήμα 1.2: Γεωμετρική κατασκευή του πολλαπλασιασμού διανύσματος με θετικό πραγματικό αριθμό.

Ορισμός 1.1.6 Δύο διανύσματα θα είναι ίσα αν ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας. Αλγεβρικά εκφράζουμε αυτή την συνθήκη ως

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \iff x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2 \text{ και } z_1 = z_2. \quad (1.5)$$

1.2 Εσωτερικό και Διανυσματικό Γινόμενο

Τα μονόμετρα (ή βαθμωτά) μεγέθη μπορούν να περιγραφούν αυτόνομα, συναρτήσει άλλων βαθμωτών (όπως η πυκνότητα) ή διανυσματικών μεγεθών που συνδέονται με κάποια πράξη. Στην παρούσα ενότητα θα ορίσουμε τις πράξεις αυτές όπως επίσης και το μήκος (ή νόρμα) ενός διανύσματος.

Ορισμός 1.2.1 Έστω ο γραμμικός χώρος \mathbb{R}^3 πάνω στο σώμα των πραγματικών αριθμών. Ένα εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^3 είναι μία απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.6)$$

για την οποία ισχύουν

(i) Το $\langle x, x \rangle$ είναι αυστηρά θετικό $\forall x \in \mathbb{R}^3$

$$(ii) \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(iii) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \text{ (συμμετρικό)}$$

$$(iv) \langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \lambda_1 \langle x, y_1 \rangle + \lambda_2 \langle x, y_2 \rangle, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Άλλοι ισοδύναμοι τρόποι γραφής του εσωτερικού γινομένου είναι $\langle x, y \rangle = (x, y) = \vec{x} \cdot \vec{y}$.

Ορισμός 1.2.2 Ένας γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 1.2.3 Η απεικόνιση

$$\| \cdot \|: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (1.7)$$

όπου $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ είναι νόρμα στον \mathbb{R}^3 δηλαδή ικανοποιεί

$$(i) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (τριγωνική ανισότητα)}$$

$$(ii) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \text{ (θετικά ομογενής)}$$

$$(iii) \|x\| > 0, \forall x \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \text{ και } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός 1.2.4 Ο διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^3 με εσωτερικό γινόμενο $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$ και νόρμα $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2}$ ονομάζεται Ευκλείδειος χώρος.

Πόρισμα 1.2.5 Για οποιαδήποτε δύο στοιχεία του Ευκλείδειου χώρου ισχύει η ανισότητα των Cauchy – Schwarz

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|. \quad (1.8)$$

Θεώρημα 1.2.6 Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ και $0 \leq \theta \leq \pi$ η γωνία που σχηματίζουν όταν τοποθετηθούν αρχή με αρχή ή πέρας με πέρας. Τότε

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta. \quad (1.9)$$

Παρατηρήστε ότι η έκφραση αυτή είναι ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων. Επίσης όταν $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ τότε το \vec{x} είναι κάθετο ή ορθογώνιο του \vec{y} (με την προϋπόθεση ότι κανένα από τα δύο διανύσματα δεν είναι μηδέν). Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να γραφεί ισοδύναμα σαν $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{y}\| \left(\vec{x} \cdot \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right)$ όπου ο όρος $\vec{x} \cdot \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$ εκφράζει την προβολή του διανύσματος \vec{x} στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$.

Παράδειγμα 1.2.7 Στη Φυσική η δύναμη και η τροχιά είναι προσανατολισμένες ποσότητες. Το έργο που παράγεται κατά την κίνηση ενός σώματος κατά μήκος της τροχιάς C και κάτω από την επίδραση εξωτερικής δύναμης \vec{F} δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (1.10)$$

Εάν η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση τότε δεν παράγεται έργο. Παράδειγμα αποτελεί η δύναμη που ασκείται σε κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο μέσα σε μαγνητικό πεδίο.

Παράδειγμα 1.2.8 Η ηλεκτρική πυκνότητα ενέργειας είναι ανάλογη του εσωτερικού γινομένου της ηλεκτρικής έντασης με την ηλεκτρική μετατόπιση

$$u = \frac{1}{8\pi} \vec{E} \cdot \vec{D}. \quad (1.11)$$

Για να περιγράψουμε μαθηματικά τα φυσικά φαινόμενα χρειαζόμαστε ένα σύστημα συντεταγμένων (και άρα βάση) ως προς το οποίο θα γίνουν οι υπολογισμοί. Δίνουμε την έννοια του ορθοκανονικού συστήματος.

Ορισμός 1.2.9 Ένα σύνολο μη μηδενικών διανυσμάτων $\{\vec{e}_i, i \in I\}$ θα λέγεται ορθοκανονικό εάν

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{για } i \neq j \\ 1 & \text{για } i = j \end{cases}. \quad (1.12)$$

Εάν τα $\{\vec{x}_i, i \in I\}$ αποτελούν ορθογώνιο σύστημα τότε τα $\{\frac{\vec{x}_i}{\|\vec{x}_i\|}, i \in I\}$ αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα.

Θεώρημα 1.2.10 Τα διανύσματα ενός ορθοκανονικού συστήματος είναι γραμμικά ανεξάρτητα².

Ένα ορθογώνιο σύστημα k -διανυσμάτων θα αποτελεί ορθογώνια βάση εάν είναι πλήρης δηλαδή εάν ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει το ορθογώνιο σύστημα είναι όλος ο χώρος \mathbb{R}^3 ή όταν το σύνολο των k -διανυσμάτων είναι ανεξάρτητο και δεν περιέχει κανένα ανεξάρτητο υποσύνολο $k+1$ -διανυσμάτων.

Συνήθως στον \mathbb{R}^3 συμβολίζουμε με

$$\vec{i} = \vec{e}_1 = \vec{e}_x = \hat{e}_x = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = \vec{e}_2 = \vec{e}_y = \hat{e}_y = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = \vec{e}_3 = \vec{e}_z = \hat{e}_z = (0, 0, 1). \quad (1.13)$$

Με βάση τον ορισμό της πρόσθεσης και του αριθμητικού πολλαπλασιασμού βρίσκουμε ότι αν $\vec{r} = (x, y, z)$ τότε

$$\vec{r} = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1.14)$$

Τα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ονομάζονται διανύσματα της κανονικής βάσης του \mathbb{R}^3 ή Καρτεσιανή βάση του \mathbb{R}^3 και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\|\vec{i}\|^2 = \|\vec{j}\|^2 = \|\vec{k}\|^2 = 1 \text{ και } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0. \quad (1.15)$$

Ορισμός 1.2.11 Έστω $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \in \mathbb{R}^3$. Ορίζουμε διανυσματικό γινόμενο των \vec{u}, \vec{v} και το συμβολίζουμε με $\vec{u} \times \vec{v}$ το διάνυσμα

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta \vec{n} \end{aligned} \quad (1.16)$$

ή χρησιμοποιώντας τον μνημονικό κανόνα

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \quad (1.17)$$

Επίσης το $\vec{n} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$ είναι μοναδιαίο και κάθετο στο επίπεδο που παράγεται από τα \vec{u}, \vec{v} . Η κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{u} \times \vec{v}$ είναι αυτή που καθορίζεται από τον κανόνα της δεξιάς χειρός. Από τον ορισμό συμπεραίνουμε ότι το διανυσματικό γινόμενο δύο διανυσμάτων σε παράλληλους φορείς είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Λήμμα 1.2.12 Το διανυσματικό γινόμενο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

(α) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ (αντιμεταθετική).

(β) $\vec{u} \times (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v}) + \mu(\vec{u} \times \vec{w})$ (προσεταιριστική)

(γ) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ (μη επιμεριστική).

Απόδειξη:

²Το σύνολο των διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο εάν και μόνο εάν η σχέση

$$c_1\vec{x}_1 + \dots + c_k\vec{x}_k = \vec{0}, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

συνεπάγεται ότι $c_1 = \dots = c_k = 0$

(1) Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα *Levi – Civita*³ έχουμε

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} \times \vec{v})_i &= \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} u_j v_k \\
 &= - \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ikj} u_j v_k, \quad \text{λόγω αντισυμμετρικότητας του } \epsilon_{ijk} \\
 &= - \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} v_j u_k, \quad \text{αλλάζουμε την ονομασία των δεικτών} \\
 &= -(\vec{v} \times \vec{u})_i.
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

(2) Έστω διάνυσμα \vec{u} κάθετο στα \vec{v}, \vec{w} , δηλαδή $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$. Τότε θα ισχύει η σχέση $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$. Αναλύουμε τα διανύσματα \vec{v}, \vec{w} σε δύο συνιστώσες μία παράλληλη και μία κάθετη στη διεύθυνση του \vec{u} . Οπότε

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})_{\perp} + \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})_{\parallel} \\
 &= \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})_{\perp}, \quad \text{γιατί το } \vec{u} \parallel (\vec{v} + \vec{w})_{\parallel} \\
 &= \vec{u} \times \vec{v}_{\perp} + \vec{u} \times \vec{w}_{\perp}, \quad \text{λόγω της αρχικής παρατήρησης} \\
 &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

(3) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \tag{1.20}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
 [(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}]_i &= \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} (\vec{u} \times \vec{v})_j w_k = \sum_{j,k=1}^3 \sum_{l,m=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} u_l v_m w_k \\
 &= - \sum_{j,k=1}^3 \sum_{l,m=1}^3 (\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) u_l v_m w_k \\
 &= v_i (\vec{u} \cdot \vec{w}) - u_i (\vec{v} \cdot \vec{w})
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

και

$$[\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})]_i = v_i (\vec{u} \cdot \vec{w}) - w_i (\vec{v} \cdot \vec{u}). \tag{1.22}$$

□

Πόρισμα 1.2.13 Η γεωμετρική ερμηνεία της νόρμας του διανυσματικού γινομένου είναι ότι παριστάνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές \vec{u}, \vec{v} .

Απόδειξη: Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με βάση το \vec{u} είναι

$$S = |\vec{u}|h = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta = |\vec{u} \times \vec{v}| \tag{1.23}$$

□

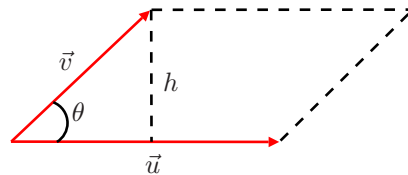
³Θα μπορούσαμε να γράψουμε τις συνιστώσες του διανυσματικού γινομένου χρησιμοποιώντας την πυκνότητα (ή σύμβολο των) *Levi – Civita*, ϵ_{ijk} , που ορίζεται από την

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{εάν τα } i, j, k \text{ είναι άρτια μετάθεση των } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{εάν τα } i, j, k \text{ είναι περιτή μετάθεση των } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Έτσι

$$(\vec{u} \times \vec{v})_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k$$

όπου επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται.



Σχήμα 1.3: Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές \vec{u}, \vec{v} ισούται με το μήκος του διανύσματος $\vec{u} \times \vec{v}$.

Τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ σχηματίζουν μία δεξιόστροφη βάση και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}.\end{aligned}\tag{1.24}$$

Διανύσματα που προκύπτουν από διανυσματικό γινόμενο δεν είναι πραγματικά (ή πολικά) διανύσματα. Για να κατανοήσουμε καλύτερα αυτό τον ισχυρισμό θα μελετήσουμε τα είδη των μετασχηματισμών. Οι μετασχηματισμοί διακρίνονται σε δύο κατηγορίες (μαθηματικά ισοδύναμοι):

- (i) Παθητικοί όταν δρουν στο σύστημα συντεταγμένων και όχι στο φυσικό σύστημα (ή τα παρατηρήσιμα μεγέθη).
- (ii) Ενεργητικοί όταν δρουν στο φυσικό σύστημα ενώ το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται παραμένει αμετάβλητο.

Παρατήρηση 1.2.14 Δεν μετασχηματίζουμε και το σύστημα συντεταγμένων και το φυσικό σύστημα γιατί τότε δεν θα παρατηρούσαμε κάποια αλλαγή.

Παράδειγμα 1.2.15 Θεωρούμε το διάνυσμα θέσεως ενός σωματιδίου στο επίπεδο σαν το φυσικό μας σύστημα και συμβολίζουμε με A τον πίνακα μετασχηματισμού που παριστάνει στροφή ενός Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων σε ένα άλλο κατά γωνία θ . Τότε γράφουμε $(\vec{r})' = A\vec{r}$ εάν ο μετασχηματισμός είναι παθητικός και εννοούμε ότι το διάνυσμα θέσεως παραμένει αμετάβλητο ενώ ο A δρά στο σύστημα συντεταγμένων (έστω κατά φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού). Για ενεργητικό μετασχηματισμό γράφουμε $\vec{r}' = A\vec{r}$ και εννοούμε ότι ο A δρά στο διάνυσμα θέσεως (κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού) ενώ το σύστημα συντεταγμένων παραμένει το ίδιο.

Θεωρούμε τον ενεργητικό μετασχηματισμό

$$r'_i = S_{ij}r_j = -\delta_{ij}r_j = -r_i, \quad i, j = 1, 2, 3\tag{1.25}$$

που αντιπροσωπεύει τρισδιάστατη ανάκλαση του διανύσματος θέσεως (το φυσικό σύστημα) ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Επειδή ο S έχει ορίζουσα -1 ο αντίστοιχος ορθογώνιος μετασχηματισμός ($S^T = S^{-1}$) ονομάζεται μη κανονικός.

Όλες οι συνιστώσες ενός πραγματικού (ή πολικού) διανύσματος $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ αλλάζουν πρόσημο σύμφωνα με την (1.25). Οι συνιστώσες όμως του εξωτερικού γινομένου δεν αλλάζουν πρόσημο γιατί $(S\vec{u}) \times (S\vec{v}) = \vec{u} \times \vec{v}$ αφού $S^2 = I$. Ένα τέτοιο μέγεθος που δεν αντιστρέφει την κατεύθυνσή του κάτω από μη κανονικό μετασχηματισμό ονομάζεται *axial* ή ψευδοδιάνυσμα.

Εάν ο μετασχηματισμός ήταν παθητικός τότε θα θεωρούσαμε ανάκλαση του συστήματος συντεταγμένων ως προς την αρχή ενώ το διάνυσμα θέσεως \vec{r} θα παρέμενε αμετακίνητο. Οι συντεταγμένες του διανύσματος θέσεως ως προς το νέο σύστημα θα άλλαζαν πάλι πρόσημο. Παρατηρήστε ότι ο μετασχηματισμός αυτός αλλάζει το αρχικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων σε αριστερόστροφο. Άρα το διανυσματικό γινόμενο αλλάζει κατεύθυνση στην περίπτωση αυτή.

Ο διαχωρισμός μεταξύ ενός πραγματικού διανύσματος και ενός ψευδοδιανύσματος μπορεί επίσης να γίνει χρησιμοποιώντας ανάκλαση ως προς επίπεδο. Σύμφωνα με την ενεργητική ερμηνεία του μετασχηματισμού κρατούμε τους άξονες σταθερούς και ανακλούμε το \vec{r} έστω στο xy -επίπεδο οπότε

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = (x, y, -z).\tag{1.26}$$

Θεωρούμε κλειστή καμπύλη παράλληλη με το yz -επίπεδο που διαρρέεται από ρεύμα αντίθετα της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Η μαγνητική ροπή δίνεται από την $\vec{\mu} = \frac{I}{2c} \oint \vec{r} \times d\vec{l}$ και έχει την θετική x -κατεύθυνση. Κάτω

από τον μετασχηματισμό (1.25) η κλειστή καμπύλη αλλάζει προσανατολισμό και $\vec{\mu}' = (-\mu_x, 0, 0)$. Παρόμοια εάν η καμπύλη ήταν παραλληλη στο xz ή xy -επίπεδο θα βρίσκαμε $\vec{\mu}' = (0, -\mu_y, 0)$ και $\vec{\mu}' = (0, 0, \mu_z)$ αντίστοιχα. Οπότε για αυθαίρετη κατεύθυνση η μαγνητική ροπή θα μετασχηματιζόταν σαν $\vec{\mu}' = (-\mu_x, -\mu_y, \mu_z)$. Ένα ψευδοδιάνυσμα μετασχηματίζεται σύμφωνα με την

$$P'_i = (\det A) A_{ij} P_j, \quad (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Στην φύση δεν υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ δεξιόστροφου και αριστερόστροφου συστήματος συντεταγμένων εκτός από την ακτινοβολία βήτα. Έτσι η ισότητα διανυσμάτων θα αναφέρεται σε δύο πολικά ή δύο ψευδοδιανύσματα.

Φυσικά μεγέθη που μπορούν να παρασταθούν με διανυσματικό γινόμενο είναι η στροφορμή ενός σωματιδίου ως προς ένα σημείο $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, η ροπή δύναμης ως προς σημείο $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$, η δύναμη Lorentz που ασκείται σε ένα σημειακό φορτίο υπό την παρουσία μαγνητικού πεδίου $\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$. Υπάρχουν επίσης διανυσματικά μεγέθη που γράφονται σαν άθροισμα ενός πραγματικού διανύσματος και ενός ψευδοδιανύσματος. Παράδειγμα αποτελεί η δύναμη που ασκείται σε φορτισμένο σωματίδιο που κινείται σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $\vec{F} = q\vec{E} + \vec{F}_L$

Ορισμός 1.2.16 Εάν δοθούν τρία διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ο πραγματικός αριθμός

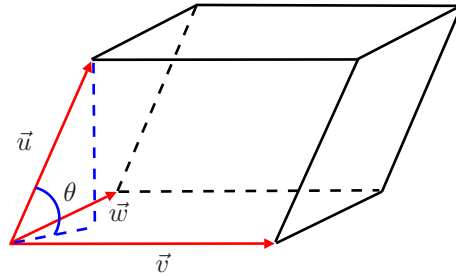
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (1.28)$$

ονομάζεται βαθμωτό τριπλό γινόμενο των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Το εσωτερικό γινόμενο ενός πραγματικού διανύσματος με ένα ψευδοδιάνυσμα ονομάζεται ψευδοβαθμωτό γινόμενο γιατί αλλάζει πρόσημο κάτω από μη κανονική στροφή.

Πόρισμα 1.2.17 Η απόλυτη τιμή του τριπλού γινομένου γεωμετρικά παριστάνει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου (που ισούται με το εμβαδόν βάσης επί το κάθετο ύψος) με πλευρές $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Απόδειξη: Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με βάση το παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τα \vec{v}, \vec{w} δίνεται από την



Σχήμα 1.4: Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου ισούται με το βαθμωτό τριπλό γινόμενο των πλευρών του.

σχέση

$$\begin{aligned} V &= hS = h|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= |\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}| \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.29)$$

□

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι τρία διανύσματα γραμμικά ανεξάρτητα είναι

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0 \quad (1.30)$$

Λήμμα 1.2.18 Το τριπλό βαθμωτό γινόμενο έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Παραμένει αναλλοίωτο κάτω από κυκλική μετάθεση των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]. \quad (1.31)$$

(ii) Εάν τα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι ομοεπίπεδα τότε $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

Το γινόμενο αυτό χρησιμοποιείται στον ορισμό της δυϊκής βάσης με εφαρμογές στην κρυσταλλογραφία. Εάν $\vec{e}_a, \vec{e}_b, \vec{e}_c$ είναι τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα του \mathbb{R}^3 , όχι κατανάγκη ορθοκανονικά, τότε ένα τυχαίο διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί σαν

$$\vec{v} = \lambda \vec{v} \cdot (\vec{e}_b \times \vec{e}_c) \vec{e}_a + \mu \vec{v} \cdot (\vec{e}_c \times \vec{e}_a) \vec{e}_b + \nu \vec{v} \cdot (\vec{e}_a \times \vec{e}_b) \vec{e}_c \quad (1.32)$$

όπου οι συντελεστές λ, μ, ν είναι ίσοι μεταξύ τους, λόγω της ισοτροπίας του χώρου. Θέτοντας διαδοχικά στην (1.32) όπου $\vec{v} = \vec{e}_a, \vec{e}_b, \vec{e}_c$ βρίσκουμε ότι $\lambda = 1/\vec{e}_a \cdot (\vec{e}_b \times \vec{e}_c)$. Τα διανύσματα

$$\vec{e}_A = \frac{\vec{e}_b \times \vec{e}_c}{\vec{e}_a \cdot (\vec{e}_b \times \vec{e}_c)}, \quad \vec{e}_B = \frac{\vec{e}_c \times \vec{e}_a}{\vec{e}_a \cdot (\vec{e}_b \times \vec{e}_c)}, \quad \vec{e}_C = \frac{\vec{e}_a \times \vec{e}_b}{\vec{e}_a \cdot (\vec{e}_b \times \vec{e}_c)} \quad (1.33)$$

συνιστούν την δυϊκή βάση του συνόλου $\{\vec{e}_a, \vec{e}_b, \vec{e}_c\}$. Η δυϊκή βάση ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \vec{e}_a \cdot \vec{e}_A &= \vec{e}_b \cdot \vec{e}_B = \vec{e}_c \cdot \vec{e}_C = 1 \\ \vec{e}_a \cdot \vec{e}_B &= \vec{e}_a \cdot \vec{e}_C = \vec{e}_b \cdot \vec{e}_A = \vec{e}_b \cdot \vec{e}_C = \vec{e}_c \cdot \vec{e}_A = \vec{e}_c \cdot \vec{e}_B = 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Εάν η αρχική βάση έχει διαστάσεις μήκους $[L]$ τότε η δυϊκή βάση έχει διαστάσεις $[L]^{-1}$.

Ορισμός 1.2.19 Εάν δοθούν τρία διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ τότε τα διανύσματα

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \quad \text{και} \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} \quad (1.35)$$

ονομάζονται διανυσματικά τριπλά γινόμενα των $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Μπορεί ναδειχθεί ότι

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{0}. \quad (1.36)$$

Παράδειγμα 1.2.20 Η κεντρομόλος επιτάχυνση

$$\vec{F}_\kappa = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (1.37)$$

όπου $\vec{\omega}$ η γωνιακή ταχύτητα.

1.3 Συστήματα Συντεταγμένων

Θα περιοριστούμε σε ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων γιατί προβλήματα που σχετίζονται με αυτά μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες έχουμε τρεις αμοιβαία κάθετες οικογένειες επιπέδων: $x = \text{σταθερό}$, $y = \text{σταθερό}$ και $z = \text{σταθερό}$.

Ένα γενικευμένο σύστημα συντεταγμένων αποτελείται από τρεις οικογένειες επιφανειών που περιγράφονται συναρτήσει των ορθογώνιων συντεταγμένων από τις εξισώσεις

$$\xi_1(x, y, z) = \text{σταθερό}, \quad \xi_2(x, y, z) = \text{σταθερό}, \quad \xi_3(x, y, z) = \text{σταθερό} \quad (1.38)$$

και δεν είναι μεταξύ τους παράλληλες ή επίπεδες. Στις περισσότερες περιπτώσεις είναι βολικότερο να αντιστρέψουμε τις εξισώσεις (1.38) και να γράψουμε

$$x = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad y = g(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad z = h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (1.39)$$

όπου οι f, g, h είναι συνεχείς με συνεχείς μερικές παραγώγους και μονότιμες αντίστροφες (εκτός πιθανώς από πεπερασμένο αριθμό απομονωμένων σημείων ή γραμμών), έτσι ώστε να υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των συντεταγμένων ενός σημείου στο ορθογώνιο και στο γενικευμένο σύστημα συντεταγμένων. Οι τρεις επιφάνειες $\xi_1(x, y, z) = c_1, \xi_2(x, y, z) = c_2, \xi_3(x, y, z) = c_3$, όπου c_1, c_2, c_3 σταθερές, ονομάζονται επιφάνειες συντεταγμένων και τέμνονται ανά δύο σχηματίζοντας τρεις οικογένειες καμπύλων που ονομάζονται συντεταγμένες καμπύλες ή γραμμές.

Εάν οι συντεταγμένες επιφάνειες που διέρχονται από ένα σημείο τέμνονται κατά ορθή γωνία το σύστημα συντεταγμένων ονομάζεται ορθογώνιο. Σε κάποιο σημείο του χώρου από το οποίο διέρχονται οι συντεταγμένες επιφάνειες τοποθετούμε τρία μοναδιαία διανύσματα $\{\vec{e}_i, i = 1, 2, 3\}$ καθένα εκ των οποίων εφάπτεται στην αντίστοιχη συντεταγμένη καμπύλη. Το διάνυσμα θέσεως του σημείου P στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων γράφεται

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\vec{i} + g(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\vec{j} + h(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\vec{k} \quad (1.40)$$

Από την (1.40) έχουμε

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_3} d\xi_3 \quad (1.41)$$

όπου το διάνυσμα $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_k}$ είναι εφαπτόμενο της ξ_k συντεταγμένης καμπύλης στο P . Μπορούμε να γράψουμε $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_k} = h_k \vec{e}_k$ όπου $h_k = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_k} \right|$. Η (1.41) γράφεται

$$d\vec{r} = \sum_{k=1}^3 h_k d\xi_k \vec{e}_k. \quad (1.42)$$

Οι ποσότητες h_k ονομάζονται συντελεστές κλίμακας. Το στοιχειώδες μήκος τόξου δίνεται για ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων από την σχέση

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} d\xi_i d\xi_j = \sum_{k=1}^3 h_k^2 d\xi_k^2. \quad (1.43)$$

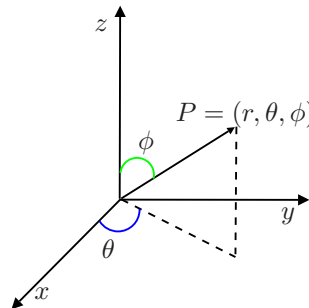
όπου $g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_j} = 0, \forall i \neq j$ και οι συντελεστές g_{ij} είναι οι συνιστώσες ενός συμμετρικού τανυστή δευτέρας τάξης. Ο όγκος στην περίπτωση αυτή δίνεται από την

$$\begin{aligned} dV &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_3} \right| = |(h_1 d\xi_1 \vec{e}_1) \cdot (h_2 d\xi_2 \vec{e}_2) \times (h_3 d\xi_3 \vec{e}_3)| \\ &= \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \right| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = h_1 h_2 h_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Παρατήρηση 1.3.1 Εκτός από τα διανύσματα $\{\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i}, i = 1, 2, 3\}$ που είναι εφαπτόμενα στις συντεταγμένες καμπύλες υπάρχουν και τα διανύσματα $\{\vec{e}_i = \vec{\nabla} \xi_i, i = 1, 2, 3\}$ που είναι κάθετα στις συντεταγμένες επιφάνειες. Οι συνιστώσες ενός διανύσματος ως προς την πρώτη βάση ονομάζονται ανταλλοιώτες ενώ ως προς την δεύτερη αναλλοιώτες.

Σφαιρικές συντεταγμένες $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (r, \theta, \phi)$.

Το σύστημα αυτό αποτελείται από τις εξής συντεταγμένες επιφάνειες:



Σχήμα 1.5: Οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) .

(i) Ομόκεντρες σφαίρες με κέντρο την αρχή των αξόνων: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{σταθερό}$

(ii) Κυκλικοί κώνοι με άξονα συμμετρίας τον z -άξονα και κορυφή στην αρχή των αξόνων: $\phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) =$
σταθερό

(iii) Ημιεπίπεδα που παίρνουν από τον z -άξονα: $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) =$ σταθερό

Οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι

$$x = r \sin \phi \cos \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \phi \quad (1.45)$$

όπου $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$. Οι συντελεστές κλίμακας δίνονται από τις

$$\begin{aligned} h_1 &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1 \\ h_2 &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = r \sin \phi \\ h_3 &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right| = r. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Το στοιχειώδες μήκος τόξου δίνεται από την

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \phi d\theta^2 + r^2 d\phi^2 \quad (1.47)$$

και ο στοιχειώδης όγκος από την

$$dV = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi \quad (1.48)$$

Τα μοναδιαία διανύσματα είναι

(1) $\hat{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|} = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$. Το διάνυσμα αυτό έχει ακτινική κατεύθυνση και είναι κάθετο στην επιφάνεια της σφαίρας.

(2) $\hat{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|} = r(\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \theta)$. Το διάνυσμα αυτό είναι εφαπτομενικό του κύκλου $r = r_1$ και $\phi = \phi_1$. Είναι επίσης παράλληλο με το επίπεδο xy .

(3) $\hat{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$. Το μοναδιαίο αυτό διάνυσμα έχει συνιστώσα κατά μήκος του αρνητικού z -άξονα.

Εάν τα μοναδιαία διανύσματα μεταβάλλονται με τον χρόνο τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_r &= \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} = \sin \phi \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \hat{e}_\phi \\ \dot{\hat{e}}_\phi &= -\dot{\phi} \hat{e}_r + \cos \phi \dot{\theta} \hat{e}_\theta \\ \dot{\hat{e}}_\theta &= -\sin \phi \dot{\theta} \hat{e}_r - \cos \phi \dot{\theta} \hat{e}_\phi. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Παράδειγμα 1.3.2 Να εκφραστούν σε σφαιρικές συντεταγμένες η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σωματιδίου.

Το διάνυσμα θέσης του σωματίου δίνεται από την

$$\vec{r} = r \hat{e}_r. \quad (1.50)$$

Η ταχύτητα θα είναι

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r \sin \phi \dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi \quad (1.51)$$

ενώ η επιτάχυνση

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 - r \sin^2 \phi \dot{\theta}^2)\hat{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \phi} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \phi \dot{\theta}) \right) \hat{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) - r \sin \phi \cos \phi \dot{\theta}^2 \right) \hat{e}_\phi. \quad (1.52)$$

Εάν $\phi = \frac{\pi}{2}$ οι εκφράσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta, \quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta \quad (1.53)$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, θ, z) .

Το σύστημα αυτό αποτελείται από τις εξής συντεταγμένες επιφάνειες:

- (i) Κύλινδροι με κοινό z -άξονα: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{σταθερό}$.
- (ii) Ημιεπίπεδα που παίρνουν από τον z -άξονα: $\theta = \arctan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \text{σταθερό}$.
- (iii) Επίπεδα παράλληλα με το xy -επίπεδο: $z = \text{σταθερό}$.

Οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z \quad (1.54)$$

όπου $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Οι συντελεστές κλίμακας δίνονται από τις

$$\begin{aligned} h_1 &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = 1 \\ h_2 &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = \rho \\ h_3 &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1 \end{aligned} \quad (1.55)$$

Το στοιχειώδες μήκος τόξου δίνεται από την

$$ds^2 = d\rho^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (1.56)$$

και ο στοιχειώδης όγκος από την

$$dV = \rho d\rho d\theta dz. \quad (1.57)$$

Τα μοναδιαία διανύσματα είναι

- (1) $\hat{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$. Το διάνυσμα αυτό είναι παράλληλο με το xy -επίπεδο και έχει ακτινική κατεύθυνση μακριά από τον άξονα z .
- (2) $\hat{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|} = \rho(-\sin \theta, \cos \theta, 0)$. Το διάνυσμα αυτό είναι εφαπτομενικό του κύκλου με κέντρο $z = z_1$ και ακτίνα ρ . Είναι επίσης παράλληλο με το επίπεδο xy .
- (3) $\hat{e}_z = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right|} = (0, 0, 1)$. Το μοναδιαίο αυτό διάνυσμα ταυτίζεται με το \hat{e}_z του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

Εάν τα μοναδιαία διανύσματα μεταβάλλονται με τον χρόνο τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \frac{\partial\hat{e}_\rho}{\partial\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial\hat{e}_\rho}{\partial\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\hat{e}_\rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \dot{\theta}\hat{e}_\theta, \quad \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = -\dot{\theta}\hat{e}_\rho, \quad \frac{d\hat{e}_z}{dt} = 0 \quad (1.58)$$

Παράδειγμα 1.3.3 Να εκφραστούν σε κυλινδρικές συντεταγμένες η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σωματιδίου.

Το διάνυσμα θέσης του σωματίου δίνεται από την

$$\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z. \quad (1.59)$$

Η ταχύτητα θα είναι

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z \quad (1.60)$$

ενώ η επιτάχυνση

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{e}_z. \quad (1.61)$$

1.4 Βαθμωτά, Διανυσματικά και Τανυστικά Μεγέθη

Υπενθυμίζουμε ότι βαθμωτό είναι το μέγεθος εκείνο που παραμένει αναλλοίωτο κάτω από στροφές του διανύσματος θέσεως του φυσικού συστήματος (ή κάτω από γενικευμένους μετασχηματισμούς συντεταγμένων).

Διανυσματικά λέγονται τα μεγέθη που αλλάζουν προσανατολισμό κάτω από στροφές του διανύσματος θέσεως του φυσικού συστήματος. Αυτά έχουν τον ακόλουθο νόμο μετασχηματισμού (για τον Ευκλείδειο χώρο)

$$A'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} A_j, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.62)$$

όπου

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \quad (1.63)$$

και τα a_{ij} εκφράζουν το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των x'_i και x_j . Στις δύο διαστάσεις δίνονται από τον ορθογώνιο πίνακα

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (1.64)$$

Στον Ρημάνιο χώρο κάτω από το μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ διακρίνουμε δύο είδη διανυσμάτων

(α) Ανταλλοίωτα που μετασχηματίζονται σαν $A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu$. Παράδειγμα αποτελεί το $dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$.

(β) Συναλλοίωτα που μετασχηματίζονται σαν $A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu$. Παράδειγμα αποτελεί το $\frac{\partial\phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}$ όπου ϕ βαθμωτό πεδίο.

Τα βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη αποτελούν ειδικές περιπτώσεις μιας μεγαλύτερης κατηγορίας μεγεθών που ονομάζονται τανυστές. Τα βαθμωτά μεγέθη είναι τανυστές μηδενικής τάξης ενώ τα διανύσματα τανυστές πρώτης τάξης. Γενικά σε ένα N -διάστατο χώρο ένας τανυστής τάξεως n έχει N^n συνιστώσες. Κάτω από γενικευμένους μετασχηματισμούς συντεταγμένων ένας τανυστής δευτέρας τάξεως στον Ρημάνιο χώρο μετασχηματίζεται ανάλογα με το εάν είναι

(α) Ανταλλοίωτος σαν $A'^{ij} = \sum_{k,l=1}^N \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} A^{kl}$

(β) Μικτός σαν $A'_j{}^i = \sum_{k,l=1}^N \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} A_l{}^k$

(γ) Συναλλοίωτος σαν $A'_i{}^j = \sum_{k,l=1}^N \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} A_{kl}$.

Η τάξη ενός τανυστή ισούται με τον αριθμό των μερικών παραγώγων (ή των συνιμητόνων κατεύθυνσης). Ο αριθμός των δεικτών (η τάξη του τανυστή) είναι ανεξάρτητος από την διάσταση του χώρου. Στον Ευκλείδιο χώρο και οι τρεις τανυστές ταυτίζονται. Ο διαχωρισμός υπάρχει στον Ρημάνιο χώρο.

Παράδειγμα 1.4.1 Η ένταση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι δευτέρας τάξης αντισυμμετρικός τανυστής και στις τέσσερις διαστάσεις (τρεις χωρικές και μία χρονική) δίνεται από την έκφραση

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.65)$$

όπου $\partial^\mu = (\frac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla})$ και $A^\nu = (\Phi, \vec{A})$ το τετραδιάστατο δυναμικό.

Κεφάλαιο 2

Παραγωγή

2.1 Η Γεωμετρία των Πραγματικών Συναρτήσεων

Έστω \vec{f} μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο A του \mathbb{R}^n και πεδίο τιμών στον \mathbb{R}^m . Αυτό θα δηλώνεται με

$$\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.1)$$

και θα εννοούμε ότι σε κάθε $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A$, η \vec{f} δίνει μια τιμή την $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})) \in \mathbb{R}^m$. Οι συναρτήσεις \vec{f} λέγονται διανυσματικές εάν $m > 1$ και πραγματικές εάν $m = 1$. Όταν $m = 1$ οι πραγματικές συναρτήσεις λέγονται συναρτήσεις n -μεταβλητών αφού $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Ορισμός 2.1.1 Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε ως γράφημα της f το υποσύνολο του \mathbb{R}^{n+1} που αποτελείται από όλα τα σημεία $(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ με $(x_1, \dots, x_n) \in U$. Συμβολικά θα γράφουμε

$$\text{Γράφημα της } f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \dots, x_n) \in U\} \quad (2.2)$$

Ορισμός 2.1.2 Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$. Το σύνολο στάθμης με τιμή c ορίζεται το σύνολο των σημείων $\vec{x} \in U$ για τα οποία $f(\vec{x}) = c$. Αν $n = 2$ μιλάμε για καμπύλη στάθμης με τιμή c και αν $n = 3$ μιλάμε για επιφάνεια στάθμης. Συμβολικά γράφουμε

$$\text{Σύνολο στάθμης με τιμή } c = \{\vec{x} \in U \mid f(\vec{x}) = c\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Η γνώση των συνόλων στάθμης μίας συνάρτησης βοηθά στην καλύτερη κατανόηση της δομής της συνάρτησης.

2.2 Όρια και Συνέχεια

Ορισμός 2.2.1 Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το U είναι ανοιχτό σύνολο εάν

$$\forall \vec{x}_0 \in U \exists r > 0 \mid D_r(\vec{x}_0) \subset U \quad (2.4)$$

όπου $D_r(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in U \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\}$ δηλαδή το σύνολο των σημείων που βρίσκονται στο εσωτερικό της σφαίρας (ή μπάλας) με κέντρο \vec{x}_0 και ακτίνα r . Τα συνοριακά σημεία του U δεν ανήκουν στο U .

Υποθέτουμε τη σύμβαση ότι το κενό σύνολο είναι ανοιχτό. Επίσης η ακτίνα $r > 0$ εξαρτάται από την θέση του σημείου \vec{x}_0 και γενικά τείνει να μηδενιστεί αν το \vec{x}_0 βρίσκεται πολύ κοντά στο σύνορο του U .

Θεώρημα 2.2.2 Για κάθε $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$, ο $D_r(\vec{x}_0)$ είναι ανοιχτό σύνολο.

Ορισμός 2.2.3 Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται συνοριακό σημείο του A αν σε κάθε περιοχή του \vec{x} υπάρχουν τουλάχιστον ένα σημείο του A και τουλάχιστον ένα σημείο εκτός του A (ή όταν περιέχει άπειρο το πλήθος σημείων του A).

Παρατήρηση 2.2.4 Εάν το $\vec{x} \in A$ τότε το \vec{x} είναι συνοριακό σημείο του A εάν σε κάθε περιοχή του \vec{x} υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο που δεν ανήκει στο A . Εάν το \vec{x} δεν ανήκει στο A τότε θα είναι συνοριακό σημείο του A εάν σε κάθε περιοχή του \vec{x} υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του A .

Ορισμός 2.2.5 Ένα σημείο \vec{x} είναι συνοριακό σημείο ενός ανοιχτού συνόλου A αν και μόνο αν το \vec{x} δεν ανήκει στο A και κάθε περιοχή του \vec{x} έχει μη κενή τομή με το A .

Παρατήρηση 2.2.6 Από τον ορισμό του ανοιχτού συνόλου κανένα σημείο του δεν μπορεί να είναι συνοριακό αφού θα πρέπει $D_r(\vec{x}_0) \subset A$ και κατά συνέπεια $D_r(\vec{x}_0) \cap A^c = \emptyset$.

Ορισμός 2.2.7 Έστω $\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου A ανοιχτό σύνολο. Έστω \vec{x}_0 σημείο του A ή συνοριακό σημείο του A και N περιοχή του $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Θα λέμε ότι η $\vec{f}(\vec{x})$ τείνει στο \vec{b} όταν το \vec{x} τείνει στο \vec{x}_0 και θα γράφουμε

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \quad \text{ή} \quad \vec{f}(\vec{x}) \rightarrow \vec{b} \quad \text{όταν} \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \quad (2.5)$$

εάν υπάρχει περιοχή U του \vec{x}_0 τέτοια ώστε $\forall \vec{x} \in U \cap A$ με $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ να είναι $\vec{f}(\vec{x}) \in N$.

Ορισμός 2.2.8 Έστω $\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου A ανοιχτό σύνολο. Έστω \vec{x}_0 σημείο του A ή συνοριακό σημείο του A . Τότε $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{b}$ αν και μόνο αν για κάθε αριθμό $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\vec{x} \in A$ που ικανοποιεί την $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ να έχουμε $\|f(\vec{x}) - \vec{b}\| < \epsilon$.

Θεώρημα 2.2.9 Έστω $\vec{f}, \vec{g}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου A ανοιχτό σύνολο, \vec{x}_0 σημείο του A ή συνοριακό σημείο του A , $\vec{b}, \vec{b}_1, \vec{b}_2 \in \mathbb{R}^m$ και $c \in \mathbb{R}$:

- (i) Αν $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$ τότε $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} c\vec{f}(\vec{x}) = c\vec{b}$, όπου η $c\vec{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ορίζεται από την $\vec{x} \rightarrow c\vec{f}(\vec{x})$.
- (ii) Αν $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}_1$ και $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{b}_2$ τότε $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f} + \vec{g})(\vec{x}) = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ όπου η $(\vec{f} + \vec{g}): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ορίζεται από την $\vec{x} \rightarrow \vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})$.
- (iii) Αν $m = 1$, $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = b_1$ και $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) = b_2$ τότε $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (fg)(\vec{x}) = b_1 b_2$ όπου η $(fg): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ορίζεται από την $\vec{x} \rightarrow f(\vec{x})g(\vec{x})$.
- (iv) Αν $m = 1$, $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = b \neq 0$ και $f(\vec{x}) \neq 0$ για κάθε $\vec{x} \in A$ τότε $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{1}{f(\vec{x})} = \frac{1}{b}$ όπου η $\frac{1}{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ορίζεται από την $\vec{x} \rightarrow \frac{1}{f(\vec{x})}$.
- (v) Αν $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$ όπου $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις της \vec{f} τότε $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = (b_1, \dots, b_m)$ αν και μόνο αν $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = b_i$, $\forall i = 1, \dots, m$.

Ορισμός 2.2.10 Έστω $\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου A ανοιχτό σύνολο. Έστω $\vec{x}_0 \in A$. Θα λέμε ότι η \vec{f} είναι συνεχής στο \vec{x}_0 αν και μόνο αν

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) \quad (2.6)$$

Θα λέμε ότι η \vec{f} είναι συνεχής στο A εάν είναι συνεχής σε κάθε $\vec{x}_0 \in A$. Διαισθητικά μία συνάρτηση θα είναι συνεχής εάν δεν έχει κοψίματα στο γράφημά της.

Θεώρημα 2.2.11 Έστω $\vec{f}, \vec{g}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου A ανοιχτό σύνολο, και $c \in \mathbb{R}$:

- (i) Αν η \vec{f} είναι συνεχής στο \vec{x}_0 το ίδιο ισχύει και για την $c\vec{f}$ όπου $(c\vec{f})(\vec{x}) = c[\vec{f}(\vec{x})]$.
- (ii) Αν οι \vec{f}, \vec{g} είναι συνεχείς στο \vec{x}_0 το ίδιο ισχύει και για την $\vec{f} + \vec{g}$ όπου $(\vec{f} + \vec{g})(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})$.
- (iii) Αν $m = 1$, και οι f, g είναι συνεχείς στο \vec{x}_0 το ίδιο ισχύει και για την fg όπου $(fg)(\vec{x}) = f(\vec{x})g(\vec{x})$.
- (iv) Αν $m = 1$, και $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) \neq 0$ με $f(\vec{x}) \neq 0$ για κάθε $\vec{x} \in A$ τότε το πηλίκο $\frac{1}{f}$ είναι συνάρτηση συνεχής στο \vec{x}_0 όπου $\left(\frac{1}{f}\right)(\vec{x}) = \frac{1}{f(\vec{x})}$.
- (v) Αν $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$ τότε η \vec{f} είναι συνεχής στο \vec{x}_0 αν και μόνο αν καθεμία από τις πραγματικές συναρτήσεις f_i , $\forall i = 1, \dots, m$ είναι συνεχής στο \vec{x}_0 .

Θεώρημα 2.2.12 Έστω $\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε η \vec{f} είναι συνεχής στο $\vec{x}_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$\text{αν } \vec{x} \in A \text{ και } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \text{ τότε } \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\| < \epsilon. \quad (2.7)$$

2.3 Παραγωγήσιμη

Για να είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη θα πρέπει όχι μόνο να μην υπάρχουν κοψίματα στο γράφημά της αλλά και να ορίζεται το εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο του γραφήματός της. Αυτό σημαίνει ότι δεν θα υπάρχουν γωνίες, αιχμές ή πτυχές. Με άλλα λόγια το γράφημα θα πρέπει να είναι λείο.

Ορισμός 2.3.1 Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, όπου U ανοιχτό σύνολο. Οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\forall j = 1, \dots, n$ ως προς την j -οστή μεταβλητή είναι πραγματικές συναρτήσεις n -μεταβλητών οι οποίες στο σημείο $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ορίζονται από τις

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_j) - f(\vec{x})}{h} \quad (2.8)$$

όπου $\vec{e}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ με 1 στην j -οστή θέση.

Ορισμός 2.3.2 Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) αν οι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν στο (x_0, y_0) και

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0)}{\| (x, y) - (x_0, y_0) \|} \rightarrow 0 \text{ όταν } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0). \quad (2.9)$$

Ο ορισμός αυτός μπορεί και να γενικευθεί για $\vec{f} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου U ανοιχτό σύνολο. Θα λέμε ότι η \vec{f} είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{x}_0 \in U$ αν οι μερικές παράγωγοί της υπάρχουν στο \vec{x}_0 και

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - \vec{T}(\vec{x} - \vec{x}_0) \|}{\| \vec{x} - \vec{x}_0 \|} = 0 \quad (2.10)$$

όπου

$$\vec{T} = \vec{D}\vec{f}(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\vec{x}_0}. \quad (2.11)$$

Ορισμός 2.3.3 Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη απεικόνιση στο (x_0, y_0) . Το επίπεδο στον \mathbb{R}^3 που ορίζεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0) \\ &= f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \right)_{(x_0, y_0)} (x - x_0, y - y_0) \end{aligned} \quad (2.12)$$

λέγεται εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f στο σημείο (x_0, y_0) .

Θεώρημα 2.3.4 Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, όπου U ανοιχτό σύνολο. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{x}_0 \in U$ τότε είναι συνεχής στο \vec{x}_0 .

Θεώρημα 2.3.5 Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, όπου U ανοιχτό σύνολο. Αν υποθέσουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς σε μια περιοχή ενός σημείου $\vec{x} \in U$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο \vec{x} .

2.4 Κλίση και Παράγωγοι κατά Κατεύθυνση

Ορισμός 2.4.1 Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η κλίση της στο (x, y, z) είναι το διάνυσμα στο χώρο \mathbb{R}^3 που δίνεται από την

$$\text{grad } f(x, y, z) = \vec{\nabla} f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (2.13)$$

Η εξίσωση μιάς ευθείας που διέρχεται από το σημείο \vec{x} και είναι παράλληλη με την κατεύθυνση ενός διανύσματος \vec{v} δίνεται παραμετρικά από την

$$\vec{r}(t) = \vec{x} + t\vec{v}. \quad (2.14)$$

Ορισμός 2.4.2 Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στο \vec{x} στην κατεύθυνση του διανύσματος \vec{v} δίνεται από την

$$\left. \frac{d}{dt} f(\vec{x} + t\vec{v}) \right|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h}. \quad (2.15)$$

Θεώρημα 2.4.3 Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι υπάρχουν. Η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο \vec{x} στην κατεύθυνση του διανύσματος \vec{v} δίνεται από την

$$\left. \frac{d}{dt} f(\vec{x} + t\vec{v}) \right|_{t=0} = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) \right) v_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) \right) v_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}) \right) v_3. \quad (2.16)$$

Θεώρημα 2.4.4 Έστω $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^1 απεικόνιση και ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) στην επιφάνεια στάθμης S που ορίζεται από την $f(x, y, z) = k = \text{σταθερά}$. Τότε το $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια στάθμης με την εξής έννοια: Αν \vec{v} είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στο $t = 0$ μιας καμπύλης $\vec{c}(t)$ που περιέχεται στην S με $\vec{c}(0) = (x_0, y_0, z_0)$ τότε

$$\left. \frac{d}{dt} f(\vec{c}(t)) \right|_{t=0} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.17)$$

Ορισμός 2.4.5 Έστω η επιφάνεια στάθμης S που ορίζεται από την $f(x, y, z) = k = \text{σταθερά}$. Το εφαπτόμενο επίπεδο της S σε ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) της S ορίζεται από την εξίσωση

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0, \text{ \acute{e}\acute{\alpha}\nu \vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \neq 0.} \quad (2.18)$$

Συχνά αναφερόμαστε στο $\vec{\nabla} f$ με τον όρο διανυσματικό πεδίο κλίσεων. Η γεωμετρική του σημασία είναι ότι δίνει την κατεύθυνση της γρηγορότερης αύξησης της f και την κατεύθυνση που είναι ορθογώνια στις επιφάνειες στάθμης της f .

Παράδειγμα 2.4.6 Το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} που γράφεται σαν την κλίση του βαθμωτού δυναμικού $\Phi(x, y, z)$ δηλαδή $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$. Άλλο παράδειγμα αποτελούν δυνάμεις που μπορούν να γραφούν σαν την κλίση κάποιου δυναμικού ή δυναμικής ενέργειας $\vec{F} = -\vec{\nabla} U(x, y, z)$.

Κεφάλαιο 3

Διανυσματικές Συναρτήσεις

3.1 Καμπύλες, Μήκος Τόξου, Διανυσματικό Πεδίο

Ορισμός 3.1.1 Μία καμπύλη στον \mathbb{R}^n είναι μία απεικόνιση $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Αν η \vec{r} είναι παραγωγίσιμη τότε λέμε ότι η \vec{r} είναι μία παραγωγίσιμη καμπύλη. Αν η \vec{r} είναι της κλάσεως C^1 λέμε ότι η \vec{r} είναι μία C^1 καμπύλη. Τα σημεία $\vec{r}(a), \vec{r}(b)$ λέγονται άκρα της καμπύλης και η εικόνα της \vec{r} τροχιά της καμπύλης. Εάν συμβολίσουμε με t τη μεταβλητή και \vec{r} μία καμπύλη στον \mathbb{R}^3 τότε μπορούμε να γράψουμε $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ όπου οι $x(t), y(t), z(t)$ ονομάζονται συνιστώσες της \vec{r} .

Ορισμός 3.1.2 Έστω $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ όπου \vec{r} μία C^1 καμπύλη. Το μήκος της καμπύλης \vec{r} ορίζεται από την

$$l(\vec{r}) = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt \quad (3.1)$$

όπου $\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i(t)}{dt} \vec{e}_i$ και $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n [x'_i(t)]^2}$. Το ολοκλήρωμα υπάρχει αφού η $\vec{r}'(t)$ υπάρχει και είναι συνεχής συνάρτηση.

Η γεωμετρική ερμηνεία είναι ότι το μήκος $l(\vec{r})$ της καμπύλης λαμβάνεται σαν το όριο της ακολουθίας των πολυγώνων που είναι εγγεγραμμένα στο τόξο όταν το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς κάθε μέλους της ακολουθίας τείνει στο μηδέν. Η συνάρτηση μήκους τόξου $s(t)$ που εκφράζει το μήκος της καμπύλης από δεδομένο σημείο σε ένα μεταβαλλόμενο ορίζεται από την

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(\tau)\| d\tau \quad (3.2)$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε για το μήκος της καμπύλης

$$l(\vec{r}) = \int_a^b s'(t) dt = s(b) - s(a) \quad (3.3)$$

όπου $s'(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_a^t \|\vec{r}'(\tau)\| d\tau \right) = \|\vec{r}'(t)\|$. Εάν εισάγουμε το μήκος τόξου σαν παράμετρο τότε

$$l(\vec{r}) = \int_a^b \|\vec{r}'(s)\| ds \quad (3.4)$$

από την οποία συνάγεται ότι

$$\left| \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \right| = \frac{ds}{ds} = 1. \quad (3.5)$$

Δηλαδή το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι μοναδιαίο όταν το μήκος τόξου εκλεγεί για παράμετρος.

¹ Η $\vec{r}(t)$ είναι κλάσεως C^1 εάν οι $x(t), y(t), z(t)$ είναι κλάσεως C^1 δηλαδή οι $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς οπότε η ύπαρξη συνεχών μερικών παραγώγων εξασφαλίζει την παραγωγισιμότητα της \vec{r} . Η $\vec{r}(t)$ είναι κατά τμήματα κλάσεως C^1 εάν οι $x(t), y(t), z(t)$ είναι κατά τμήματα κλάσεως C^1 δηλαδή υπάρχει διαμέριση του $[a, b]: a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ τέτοια ώστε οι συνιστώσες της $\vec{r}(t)$ περιορισμένες σε κάθε διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$, $0 \leq i \leq N-1$ να είναι κλάσεως C^1 . Οι παράγωγοι υπολογίζονται με τη χρήση πλευρικών ορίων.

Παράδειγμα 3.1.3 Έστω \vec{r} η καμπύλη $\vec{r}(t) = (2t, t^2, \log t)$ ορισμένη για $t > 0$. Βρείτε το μήκος τόξου της \vec{r} ανάμεσα στα σημεία $(2, 1, 0)$ και $(4, 4, \log 2)$.

Λύση Τα σημεία αντιστοιχούν στις τιμές $t = 1, t = 2$ αντίστοιχα. Το μήκος του διανύσματος $\vec{r}'(t)$ είναι

$$\|\vec{r}'(t)\| = \frac{1}{t}(2t^2 + 1) \quad (3.6)$$

οπότε το μήκος της καμπύλης με σύνορο τα δεδομένα σημεία θα είναι

$$l(\vec{r}) = \int_1^2 \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt = 3 + \log 2. \quad (3.7)$$

Ορισμός 3.1.4 Ένα διανυσματικό πεδίο στον R^n είναι μία απεικόνιση $\vec{F} : A \subset R^n \rightarrow R^n$ που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο \vec{x} του πεδίου ορισμού της, A , ένα διάνυσμα $\vec{F}(\vec{x})$. Μία απεικόνιση $f : A \subset R^n \rightarrow R$ που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο ένα αριθμό λέγεται βαθμωτό πεδίο.

Ένα διανυσματικό πεδίο \vec{F} στον R^3 γράφεται σαν

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \quad (3.8)$$

όπου οι συνιστώσες $F_i, i = 1, 2, 3$ είναι βαθμωτές συναρτήσεις. Εάν οι F_i είναι κλάσσεως C^k τότε λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο \vec{F} είναι κλάσσεως C^k .

Ορισμός 3.1.5 Αν \vec{F} είναι ένα διανυσματικό πεδίο, μία γραμμή ροής ή ολοκληρωτική καμπύλη του \vec{F} είναι μία καμπύλη $\vec{r}(t)$ τέτοια ώστε:

$$\vec{r}'(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \quad (3.9)$$

δηλαδή το \vec{F} καθορίζει το πεδίο ταχυτήτων της καμπύλης $\vec{r}(t)$.

Παράδειγμα 3.1.6 Σχεδιάστε μερικές γραμμές ροής για τα διανυσματικά πεδία

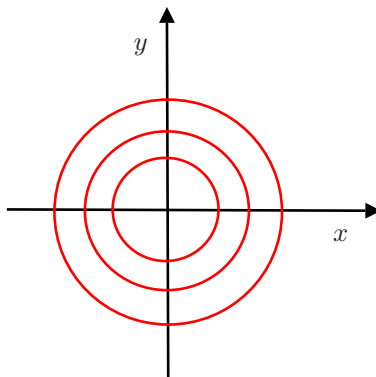
(1) $\vec{F}(x, y) = (y, -x)$

(2) $\vec{F}(x, y) = (x, -y)$

(3) $\vec{F}(x, y) = (x, x^2)$

Λύση Χρησιμοποιώντας της σχέση $\vec{r}'(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$ και απαλείφοντας την παράμετρο t έχουμε

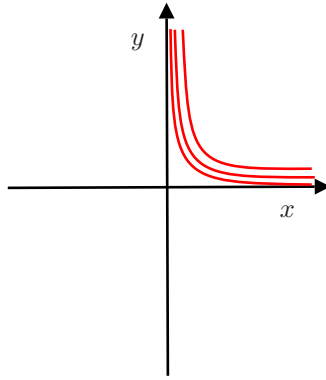
(1) $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \Rightarrow d(x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2$. Η εξίσωση αυτή περιγράφει μία οικογένεια ομόκεντρων κύκλων με κέντρο την αρχή των αξόνων και μεταβλητή ακτίνα.



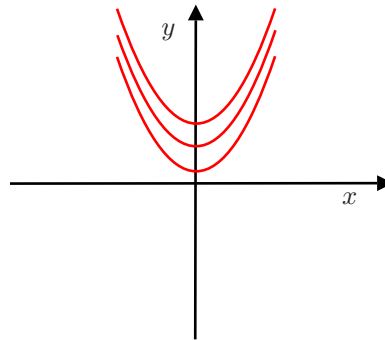
Σχήμα 3.1: Οι γραμμές ροής του πρώτου διανυσματικού πεδίου είναι ομόκεντροι κύκλοι με αρχή που ταυτίζεται με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

(2) $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \log(xy) = c \Rightarrow xy = e^c$. Η εξίσωση αυτή περιγράφει μία οικογένεια από υπερβολές στο πρώτο τεταρτημόριο.

(3) $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{x^2} \Rightarrow d(\frac{1}{2}x^2 - y) = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + c$. Η εξίσωση αυτή περιγράφει μία οικογένεια από παραβολές μετατοπισμένες κατά c στον άξονα y .



Σχήμα 3.2: Το δεύτερο διανυσματικό πεδίο έχει γραμμές ροής που παριστάνονται από μια οικογένεια υπερβολών.



Σχήμα 3.3: Το τρίτο διανυσματικό πεδίο έχει γραμμές ροής που παριστάνονται από μια οικογένεια παραβολών.

3.2 Στροβιλισμός και Απόκλιση Διανυσματικού Πεδίου

Η πράξη του στροβιλισμού αντιστοιχεί σε κάθε C^1 διανυσματικό πεδίο $\vec{F} \in R^3$. Το διανυσματικό πεδίο $\text{curl } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ ορίζεται από την

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

όπου $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Θεώρημα 3.2.1 Για κάθε C^2 συνάρτηση f έχουμε

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}. \quad (3.11)$$

Απόδειξη: Για καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του στροβιλισμού έχουμε

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = \vec{0} \quad (3.12)$$

□

Μία άλλη βασική πράξη είναι η απόκλιση που ορίζεται από την

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i}. \quad (3.13)$$

Η απόκλιση του \vec{F} είναι βαθμωτό πεδίο.

Θεώρημα 3.2.2 Για κάθε C^2 συνάρτηση f έχουμε

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0. \quad (3.14)$$

Το $\operatorname{curl} \vec{F}$ συνδέεται με περιστροφές οπότε εάν $\operatorname{curl} \vec{F} = \vec{0}$ το πεδίο λέγεται αστρόβιλο. Επίσης το $\operatorname{div} \vec{F}$ συνδέεται με συστολές και διαστολές και όταν $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ το πεδίο λέγεται ασυμπίεστο.

Παράδειγμα 3.2.3 Έστω

$$\vec{F}(x, y, z) = 3x^2y\vec{i} + (x^3 + y^3)\vec{j}. \quad (3.15)$$

Να υπολογιστούν

- (1) Ο στροβιλισμός $\operatorname{curl} \vec{F}$.
- (2) Μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $\vec{F} = \vec{\nabla} f$.

Λύση

- (1) $\operatorname{curl} \vec{F} = (3x^2 - 3x^2)\vec{k} = \vec{0}$. Άρα το διανυσματικό πεδίο είναι αστρόβιλο.
- (2) Από την σχέση

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{\nabla} f \Rightarrow \\ 3x^2y\vec{i} + (x^3 + y^3)\vec{j} &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \Rightarrow \\ f(x, y) &= x^3y + \frac{1}{4}y^4 + c. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Κεφάλαιο 4

Ολοκλήρωση

4.1 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

Ορισμός 4.1.1 Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ή ολοκλήρωμα της $f(x, y, z)$ κατά μήκος της καμπύλης \vec{r} , ορίζεται όταν η $\vec{r}: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι κλάσεως C^1 και όταν η σύνθετη συνάρτηση $t \rightarrow f(x(t), y(t), z(t))$ είναι συνεχής στο I . Ορίζουμε το ολοκλήρωμα αυτό μέσω της

$$\int_{\vec{r}} f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt. \quad (4.1)$$

Εάν η $\vec{r}(t)$ είναι κατά τμήματα C^1 ή η $f(\vec{r}(t))$ είναι κατά τμήματα συνεχής, ορίζουμε το $\int_{\vec{r}} f ds$ χωρίζοντας το $[a, b]$ σε υποδιαστήματα στα οποία η $f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\|$ είναι κατά τμήματα συνεχής και προσθέτουμε στην συνέχεια τα ολοκληρώματα πάνω στα υποδιαστήματα. Παρατηρήστε ότι για $f = 1$ έχουμε $l(\vec{r}) = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$ που είναι το μήκος της καμπύλης.

Εστω \vec{r} καμπύλη που βρίσκεται στο xy -επίπεδο και πραγματική συνάρτηση $f(x, y)$. Η γεωμετρική ερμηνεία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος της f κατά μήκος της επίπεδης καμπύλης \vec{r} όταν $f(x, y) \geq 0$ είναι το εμβαδόν του φράκτη με βάση την εικόνα της \vec{r} και ύψος $f(x, y)$ στο σημείο (x, y) .

Ορισμός 4.1.2 Έστω \vec{F} διανυσματικό πεδίο του \mathbb{R}^3 το οποίο είναι συνεχές στην C^1 καμπύλη $\vec{r}: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ορίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του \vec{F} κατά μήκος της \vec{r} μέσω του τύπου:

$$\int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt. \quad (4.2)$$

Μπορούμε να ορίσουμε το $\int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ και στην περίπτωση που η $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$ είναι κατά τμήματα συνεχής. Μια διαφορετική έκφραση για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους είναι

$$\int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b [\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{T}(t)] \|\vec{r}'(t)\| dt \quad (4.3)$$

όπου $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης και η $f(\vec{r}(t)) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{T}(t)$ μπορεί να οριστεί στην εικόνα της \vec{r} η οποία δεν τέμνει τον εαυτό της¹.

Ορισμός 4.1.3 Έστω $h: I \rightarrow I_1$ μια C^1 πραγματική συνάρτηση που απεικονίζει 1-1 κάποιο διάστημα $I = [a, b]$ πάνω σε κάποιο άλλο $I_1 = [a_1, b_1]$. Έστω $\vec{r}: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη. Τότε λέμε τη σύνθεση

$$\vec{\rho} = \vec{r} \circ h: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4.4)$$

αναπαραμετρικοποίηση της \vec{r} . Εάν $\vec{r} \circ h(a) = \vec{r}(a_1)$ και $\vec{r} \circ h(b) = \vec{r}(b_1)$ τότε λέμε ότι η αναπαραμετρικοποίηση διατηρεί τον προσανατολισμό ενώ εάν $\vec{r} \circ h(a) = \vec{r}(b_1)$ και $\vec{r} \circ h(b) = \vec{r}(a_1)$ αναπαραμετρικοποίηση αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

¹ Εάν η \vec{r} δεν τέμνει τον εαυτό της δηλαδή αν από την $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ έπεται ότι $t_1 = t_2$ τότε κάθε σημείο της εικόνας της \vec{r} γράφεται μονοσήμαντα σαν $\vec{r}(t)$ για κάποιο t .

Θεώρημα 4.1.4 (i) Έστω \vec{F} διανυσματικό πεδίο του R^3 το οποίο είναι συνεχές στην C^1 καμπύλη $\vec{r} : I = [a_1, b_1] \rightarrow R^3$ και $\vec{\rho} : [a, b] \rightarrow R^3$ μια αναπαραμετρικοποίηση της \vec{r} . Αν η $\vec{\rho}$ διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό τότε

$$\int_{\vec{\rho}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \pm \int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (4.5)$$

(ii) Έστω \vec{r} μία κατά τμήματα C^1 καμπύλη f μία συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη πάνω στην εικόνα της \vec{r} και $\vec{\rho}$ τυχαία αναπαραμετρικοποίηση της \vec{r} . Τότε

$$\int_{\vec{r}} f(x, y, z) ds = \int_{\vec{\rho}} f(x, y, z) ds \quad (4.6)$$

(iii) Υποθέτουμε ότι η $f : R^3 \rightarrow R$ είναι κλάσεως C^1 και η $\vec{r} : [a, b] \rightarrow R^3$ είναι κατά τμήματα C^1 καμπύλη. Τότε

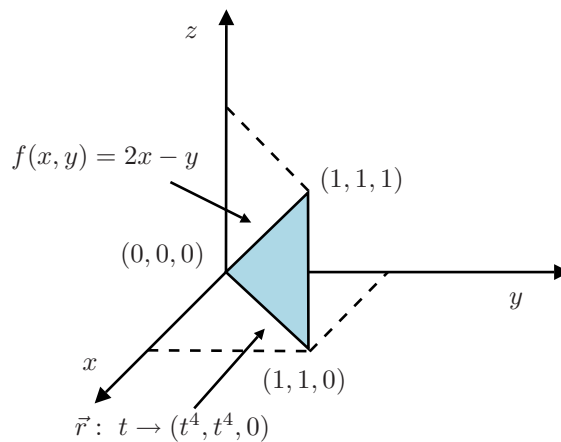
$$\int_{\vec{r}} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)). \quad (4.7)$$

Παράδειγμα 4.1.5 Έστω $f(x, y) = 2x - y$, $x = t^4$, $y = t^4$, $-1 \leq t \leq 1$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της f κατά μήκος αυτής της καμπύλης και δώστε γεωμετρική ερμηνεία της απάντησής σας.

Λύση Η συνάρτηση f γράφεται $f(x(t), y(t)) = t^4$ ενώ η παράγωγος $\vec{r}'(t) = (4t^3, 4t^3)$ έχει μήκος $\|\vec{r}'(t)\| = 4\sqrt{2}|t|^3$. Οπότε το ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της καμπύλης \vec{r} θα δίνεται από

$$\int_{\vec{r}} f ds = \int_{-1}^1 f(x(t), y(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt = \sqrt{2}. \quad (4.8)$$

Η καμπύλη $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t^4, t^4)$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του xy -επιπέδου και αναπαρίσταται



Σχήμα 4.1: Το γράφημα της συνάρτησης $f(x, y)$.

από την διχοτόμο. Καθώς η παράμετρος t μεταβάλλεται στο διάστημα $[-1, 1]$ το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(1, 1, 0)$ και $(0, 0, 0)$ σαρώνεται δύο φορές. Η συνάρτηση $f(x(t), y(t)) = 2x(t) - y(t)$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(1, 1, 1)$ και $(0, 0, 0)$ σαρώνεται επίσης δύο φορές. Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης κατά μήκος της καμπύλης \vec{r} θα δίνεται από το διπλάσιο του εμβαδού του ορθογώνιου τριγώνου.

$$2 \times \text{Εμβαδόν τριγώνου} = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad (4.9)$$

Παράδειγμα 4.1.6 Έστω \vec{r} η καμπύλη με $\vec{r}(t) = (t^2, t, 3)$ για $t \in [0, 1]$. Βρείτε τη μέση συντεταγμένη y κατά μήκος της καμπύλης \vec{r} .

Λύση Η μέση τιμή μιας βαθμωτής συνάρτησης f κατά μήκος μιας καμπύλης \vec{r} ορίζεται από την σχέση

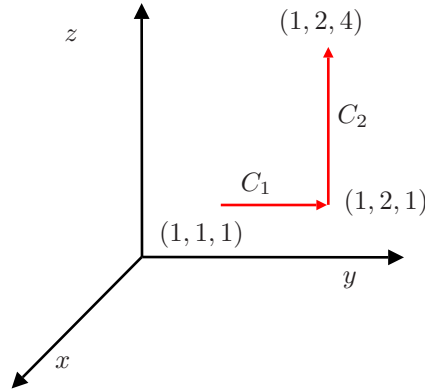
$$\langle f \rangle_{\vec{r}} = \frac{\int_{\vec{r}} f(x, y, z) ds}{\int_{\vec{r}} \|\vec{r}'(t)\| dt} \quad (4.10)$$

Οπότε

$$\langle y \rangle_{\vec{r}} = \frac{\int_0^1 y(t) \|\vec{r}'(t)\| dt}{\int_0^1 \|\vec{r}'(t)\| dt} = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6\sqrt{5} + 3 \log(2 + \sqrt{5})}. \quad (4.11)$$

Παράδειγμα 4.1.7 Υπολογίστε το $\int_C 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz$, όπου C είναι μια προσανατολισμένη απλή καμπύλη που ενώνει το σημείο $(1, 1, 1)$ με το $(1, 2, 4)$.

Λύση Θεωρούμε την απλή καμπύλη του σχήματος $C = C_1 \cup C_2$ και παραμετροποιούμε τις C_i , $i = 1, 2$



Σχήμα 4.2: Η καμπύλη $C = C_1 \cup C_2$.

χωριστά

$$\begin{aligned} C_1 : \quad \vec{\sigma}(t) &= (1, t, 1), \quad t \in [1, 2] \\ C_2 : \quad \vec{\sigma}(t) &= (1, 2, t), \quad t \in [1, 4]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \int_{C_1} 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz &= \int_1^2 dt = 1 \\ \int_{C_2} 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz &= 2 \int_1^4 dt = 6. \end{aligned} \quad (4.13)$$

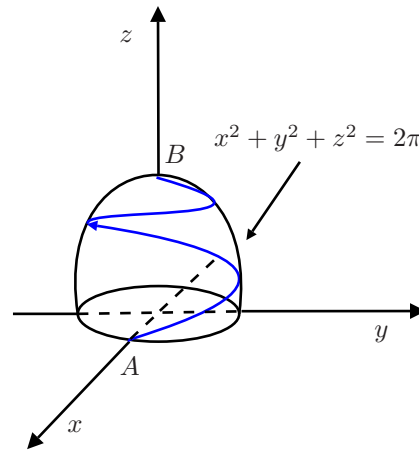
Άρα

$$\begin{aligned} \int_C 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz &= \int_{C_1 \cup C_2} 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz \\ &= \int_{C_1} 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz + \int_{C_2} 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz \\ &= 7 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Εάν διαλέγαμε μια άλλη προσανατολισμένη απλή καμπύλη που ενώνει τα σημεία $(1, 1, 1)$ και $(1, 2, 4)$ πάλι θα βρίσκαμε το ίδιο αποτέλεσμα γιατί το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2 z, x^2 y)$ είναι αστρόβιλο και κατά συνέπεια το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο από την μορφή της καμπύλης που ενώνει τα σημεία αυτά.

Παράδειγμα 4.1.8 Μία ποδηλάτισα ανεβαίνει σε ένα βουνό ακολουθώντας την καμπύλη του σχήματος (4.3) Κάνει μια πλήρη περιστροφή γύρω από το βουνό μέχρι να φτάσει στην κορυφή, ενώ η κλίση του δρόμου παραμένει σταθερή. Στη διάρκεια της ανάβασης ασκείται εξωτερική δύναμη που περιγράφεται από το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x, y, z) = z^2 \vec{i} + 3y^2 \vec{j} + 2xz \vec{k}. \quad (4.15)$$



Σχήμα 4.3: Πόσο έργο δαπανά η ποδηλάτισσα για να ανέβει το βουνό αυτό;

Πόσο έργο καταναλώνει η ποδηλάτισσα για ταξιδεύσει από το σημείο A στο B ;

Λύση Εύκολα ελέγχουμε ότι το διανυσματικό πεδίο \vec{F} είναι αστρόβιλο. Οπότε θα υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση f τέτοια ώστε $\vec{F}(x, y, z) = \vec{\nabla}f$ την οποία θα προσδιορίσουμε. Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2xz. \quad (4.16)$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς x έχουμε

$$f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = z^2 x + h_1(y, z). \quad (4.17)$$

Αντικαθιστώντας την λύση αυτή στην δεύτερη της (4.16) και ολοκληρώνοντας ως προς y έχουμε

$$h_1(y, z) = \int \frac{\partial h_1(y, z)}{\partial y} dy = y^3 + h_2(z). \quad (4.18)$$

Άρα η λύση μας έχει την γενική μορφή

$$f(x, y, z) = xz^2 + y^3 + h_2(z) \quad (4.19)$$

και για τον προσδιορισμό της συνάρτησης h_2 αντικαθιστούμε την (4.19) στην τρίτη εξίσωση της (4.16). Ολοκληρώνοντας ως προς z έχουμε

$$\int \frac{dh_2(z)}{dz} dz = 0 \Rightarrow h_2(z) = c = \text{σταθερά}. \quad (4.20)$$

Η εξίσωση της επιφάνειας του βουνού δίνεται από την $x^2 + y^2 + z = 2\pi$ οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες των σημείων A και B . Είναι $A = (x, 0, 0) = (\sqrt{2\pi}, 0, 0)$ και $B = (0, 0, z) = (0, 0, 2\pi)$. Το έργο που καταναλώνει η ποδηλάτισσα για να ανέβει το βουνό δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}} \vec{\nabla}f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = (xz^2 + y^3 + c) \Big|_{(\sqrt{2\pi}, 0, 0)}^{(0, 0, 2\pi)} = 0. \quad (4.21)$$

4.2 Επιφανειακά Ολοκληρώματα

Ορισμός 4.2.1 Μία παραμετροποιημένη επιφάνεια είναι μία συνάρτηση $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Η επιφάνεια S που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $\vec{\Phi}$ είναι η εικόνα της: $S = \vec{\Phi}(D)$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \quad (4.22)$$

Αν η Φ είναι παραγωγίσιμη ή κλάσεως C^1 (που είναι ισοδύναμο με το να είναι οι συναρτήσεις $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ κλάσεως C^1) λέμε την S διαφορίσιμη ή C^1 -επιφάνεια.

Υποθέτουμε ότι η $\vec{\Phi}$ είναι διαφορίσιμη στο $(u_0, v_0) \in R^2$. Σταθεροποιώντας το u_0 (ή v_0) παίρνουμε την απεικόνιση $t \rightarrow \vec{\Phi}(u_0, t)$ (ή την $\vec{\Phi}(t, v_0)$) της οποίας η εικόνα είναι μία καμπύλη πάνω στην επιφάνεια. Τα διανύσματα που εφάπτονται πάνω στις καμπύλες στο σημείο $\vec{\Phi}(u_0, v_0)$ είναι τα

$$\vec{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\vec{k} \quad \vec{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\vec{k}. \quad (4.23)$$

Θα λέμε ότι η επιφάνεια είναι λεία στο $\vec{\Phi}(u_0, v_0)$ αν $\vec{T}_u \times \vec{T}_v \Big|_{(u_0, v_0)} \neq \vec{0}$. Εάν είναι λεία σε όλα τα σημεία $\vec{\Phi}(u_0, v_0) \in S$ θα λέμε ότι είναι μία λεία επιφάνεια.

Ορισμός 4.2.2 Αν μία παραμετροποιημένη επιφάνεια $\vec{\Phi} : D \subset R^2 \rightarrow R^3$ είναι λεία στο $\vec{\Phi}(u_0, v_0)$ ορίζουμε σαν εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο $\vec{\Phi}(u_0, v_0)$ το επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα \vec{T}_u, \vec{T}_v . Το $\vec{n} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$ είναι το κάθετο διάνυσμα και το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο (x_0, y_0, z_0) δίνεται από την εξίσωση

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \vec{n} = 0 \quad (4.24)$$

όπου το \vec{n} υπολογίζεται στο (u_0, v_0) .

Στο εξής θα θεωρούμε κατά τμήματα λείες επιφάνειες που είναι ενώσεις εικόνων παραμετροποιημένων επιφανειών $\vec{\Phi}_i : D_i \subset R^2 \rightarrow R^3$ για τις οποίες

- (i) Το D_i είναι στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο.
- (ii) Η $\vec{\Phi}_i$ είναι κλάσεως C^1 και 1-1 εκτός ίσως από το σύνορο του D_i .
- (iii) Η S_i η εικόνα της $\vec{\Phi}_i$ είναι λεία εκτός ίσως από πεπερασμένο πλήθος σημείων της.

Ορισμός 4.2.3 Ορίζουμε το εμβαδόν επιφάνειας $A(S)$ μιας παραμετροποιημένης επιφάνειας σαν

$$A(S) = \int_D \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| \, dudv \quad (4.25)$$

όπου $\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| = \sqrt{(\vec{T}_u \times \vec{T}_v) \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v)}$.

Ορισμός 4.2.4 Έστω μια επιφάνεια S παραμετροποιημένη μέσω της απεικόνισης $\vec{\Phi} : D \subset R^2 \rightarrow S \subset R^3$, $\vec{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Αν $f(x, y, z)$ είναι μια πραγματική συνεχής συνάρτηση ορισμένη στην S , ορίζουμε ολοκλήρωμα της f πάνω στην S να είναι το

$$\begin{aligned} \int_S f(x, y, z) dS &= \int_D f(\vec{\Phi}(u, v)) \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| \, dudv \\ &= \int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right]^2} \, dudv. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Εάν η επιφάνεια μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένα γράφημα δηλαδή $z = g(x, y)$ τότε η (4.26) γράφεται

$$\int_S f(x, y, z) dS = \int_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos \theta} \, dxdy \quad (4.27)$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του κάθετου διανύσματος στην επιφάνεια $\vec{n} = \vec{\nabla} \phi(x, y, z) = -\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}$ με το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{k} στο σημείο $(x, y, g(x, y))$. Αρα αντικαθιστώντας στην (4.26) την $\cos \theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{k}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial y}\right]^2 + 1}}$ λαμβάνουμε το ζητούμενο.

Ορισμός 4.2.5 Έστω \vec{F} ένα διανυσματικό πεδίο ορισμένο στην $S = \vec{\Phi}(D)$. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα του \vec{F} πάνω στην $\vec{\Phi}$ το οποίο συμβολίζουμε με

$$\int_{\vec{\Phi}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int \int_{\vec{\Phi}} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (4.28)$$

ορίζεται μέσω της

$$\int_{\vec{\Phi}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_D \vec{F} \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) \, dudv \quad (4.29)$$

όπου τα \vec{T}_u, \vec{T}_v έχουν οριστεί προηγουμένως.

Ορισμός 4.2.6 Προσανατολισμένη επιφάνεια λέμε μία δίπλευρη επιφάνεια της οποίας η μία πλευρά θεωρείται εξωτερική ή θετική και η άλλη εσωτερική ή αρνητική.

Θεώρημα 4.2.7 Έστω S μία προσανατολισμένη επιφάνεια και $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2$ δύο λείες παραμετρικοποιήσεις που διατηρούν τον προσανατολισμό. Αν \vec{F} είναι συνεχές διανυσματικό πεδίο ορισμένο πάνω στην S τότε

$$\int_{\vec{\Phi}_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\vec{\Phi}_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (4.30)$$

Για μια προσανατολισμένη λεία επιφάνεια S και μία παραμετρικοποίηση $\vec{\Phi}$ της S που διατηρεί τον προσανατολισμό μπορούμε να εκφράσουμε το $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ σαν το ολοκλήρωμα μιάς πραγματικής συνάρτησης f πάνω στην επιφάνεια. Έστω $\vec{n} = \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που δείχνει το εξωτερικό της S .

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_{\vec{\Phi}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_D \vec{F} \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) \, dudv \\ &= \int_D (\vec{F} \cdot \vec{n}) \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| \, dudv \\ &= \int_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) \, dS = \int_D f \, dS, \end{aligned} \quad (4.31)$$

όπου $f = \vec{F} \cdot \vec{n}$.

Παράδειγμα 4.2.8 Θεωρούμε μια επιφάνεια στον \mathbb{R}^3 παραμετρικοποιημένη ως εξής

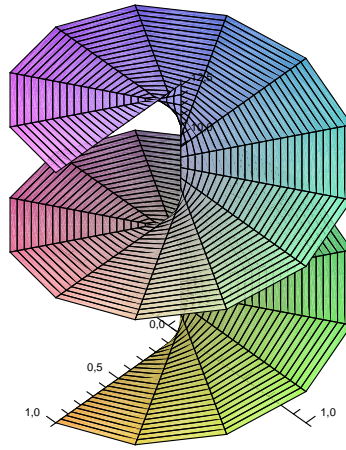
$$\vec{\Phi}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta), \quad r \in [0, 1] \quad \text{και} \quad \theta \in [0, 4\pi] \quad (4.32)$$

- (1) Σχεδιάστε και περιγράψτε την επιφάνεια
- (2) Βρείτε μια έκφραση για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας.
- (3) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο (x_0, y_0, z_0) .
- (4) Αν (x_0, y_0, z_0) είναι ένα σημείο της επιφάνειας, δείξτε ότι το οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα μοναδιαίου μήκους από τον άξονα z ως το (x_0, y_0, z_0) περιέχεται στην επιφάνεια και στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο (x_0, y_0, z_0) .

Λύση

- (1) Η επιφάνεια είναι ένα ελικοειδές όπως στο (4.4)
- (2) Τα διανύσματα \vec{T}_r και \vec{T}_θ που εφάπτονται στις καμπύλες $\vec{\Phi}(t, \theta)$ και $\vec{\Phi}(r, t)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \vec{T}_r &= \frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{T}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \vec{k} = -r \sin \theta \vec{i} + r \cos \theta \vec{j} + \vec{k} \end{aligned} \quad (4.33)$$



Σχήμα 4.4: Η επιφάνεια (4.32) παριστάνει ένα ελικοειδές.

Το διάνυσμα \vec{n} που είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα \vec{T}_r και \vec{T}_θ είναι

$$\vec{n} = \vec{T}_r \times \vec{T}_\theta = \sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j} + r \vec{k} \neq \vec{0}. \quad (4.34)$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{n} θα είναι

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} (\sin \theta, -\cos \theta, r). \quad (4.35)$$

(3) Επειδή $\hat{n} \neq \vec{0}$ και το σημείο (x_0, y_0, z_0) είναι δεδομένο, η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου θα είναι

$$\begin{aligned} & (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \hat{n} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = 0 \\ \Rightarrow & (x - x_0) \sin \theta_0 - (y - y_0) \cos \theta_0 + (z - z_0) r_0 = 0 \\ \Rightarrow & x y_0 - y x_0 + (z - z_0)(x_0^2 + y_0^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

(4) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $\vec{a} = (0, 0, z_0)$ και $\vec{b} = (x_0, y_0, z_0) \in S$ είναι

$$\vec{l}(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) = t x_0 \vec{i} + t y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} = t r_0 \cos \theta_0 \vec{i} + t r_0 \sin \theta_0 \vec{j} + \theta_0 \vec{k}, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.37)$$

Επειδή θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα μοναδιαίου μήκους η τελευταία ισότητα μπορεί να γραφεί $\vec{l}(t) = t \cos \theta_0 \vec{i} + t \sin \theta_0 \vec{j} + \theta_0 \vec{k}$. Άρα το ευθύγραμμο τμήμα ανήκει στην επιφάνεια και στο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο (x_0, y_0, z_0) .

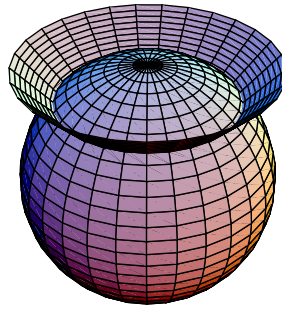
Παράδειγμα 4.2.9 Βρείτε το εμβαδόν του τμήματος της μοναδιαίας σφαίρας που αποκόπτεται από τον κώνο $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Λύση Το εμβαδόν που αποκόπτε ο κώνος $z < \sqrt{x^2 + y^2}$ από την μοναδιαία σφαίρα μπορεί να υπολογιστεί εάν ολοκληρώσουμε την περίμετρο της οριζόντιας διατομής του κώνου κατά μήκος του κυκλικού τόξου. Εάν η γενέτρα του κώνου σχηματίζει γωνία ϕ_0 με τον z -άξονα θα έχουμε

$$A_z = 2\pi \int_{\vec{s}} |y| ds = 2\pi \int_0^{\phi_0} \sin \phi d\phi = 2\pi(1 - \cos \phi_0) \quad (4.38)$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$A = A(\Sigma\text{σφαίρας}) - A_z = 2\pi(1 + \cos \phi_0) \quad (4.39)$$



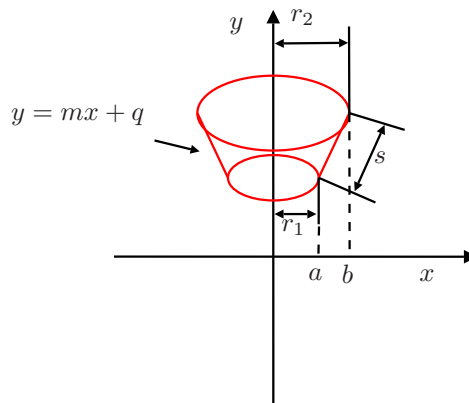
Σχήμα 4.5: Η επιφάνεια που αποκόπτεται ο κώνος από την μοναδιαία σφαίρα.

Παρατηρήστε ότι για $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ ο κώνος εκφυλίζεται σε κυκλικό δίσκο στο επίπεδο- xy και αποκόπτεται ένα ημισφαίριο εμβαδού 2π . Εάν υπολογίζαμε το εμβαδόν του κώνου θα έπρεπε να ολοκληρώσουμε κατά μήκος της γενέτειρας του οπότε θα είχαμε

$$A_z = 2\pi \int_{\bar{\sigma}} |y| ds = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{2} dr = \sqrt{2}\pi \quad (4.40)$$

αφού $\theta = \frac{\pi}{2}$ και $ds = \sqrt{dz^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + dr^2} = \sqrt{2}dr$.

Παράδειγμα 4.2.10 Υπολογίστε το εμβαδόν του κολουρού κώνου του σχήματος (4.6) χρησιμοποιώντας



Σχήμα 4.6: Ο κολουρος κώνος.

(α) Μόνο γεωμετρική αιτιολόγηση.

(β) Ένα τύπο για το εμβαδόν επιφανείας.

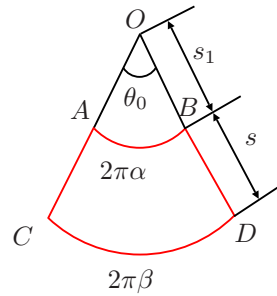
Λύση Εάν ανοίξουμε τον κολουρο κώνο κατά μήκος της γενέτειράς του θα έχουμε το παρακάτω σχήμα

(α) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα OAB είναι

$$A(S_{OAB}) = \int_0^{s_1} \int_0^{\theta_0} r dr d\theta = \frac{1}{2} s_1^2 \theta_0 = \pi \alpha s_1 = \frac{1}{2} (\beta \alpha s_1 \times \psi_0) \quad (4.41)$$

αφού $\theta_0 = \frac{1}{s_1} 2\pi \alpha$. Επίσης το εμβαδόν του κυκλικού τομέα OCD θα είναι

$$A(S_{OCD}) = \pi \beta (s + s_1). \quad (4.42)$$



Σχήμα 4.7: Ο κόλυρος κώνος όταν ανοιχτεί κατά μήκος της γεννήτριάς του στο επίπεδο.

Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν του 'τραπεζίου' θα δίνεται από την

$$A(S_{ABCD}) = A(S_{OCD}) - A(S_{OAB}) = \pi(\beta - \alpha)s_1 + \pi\beta s. \quad (4.43)$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων OAB και OCD έχουμε

$$\frac{s_1}{s_1 + s} = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow s_1\beta = \alpha(s + s_1). \quad (4.44)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.44) έχουμε

$$A(S_{ABCD}) = \pi(\alpha + \beta)s = \frac{1}{2}(\text{μεγάλη βάση} + \text{μικρή βάση}) \times \text{ύψος}. \quad (4.45)$$

Το μήκος s υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση $y = mb + q$

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = (\beta - \alpha)\sqrt{1 + m^2}. \quad (4.46)$$

Τελικά το εμβαδόν του τραπεζίου γράφεται

$$A(S_{ABCD}) = \pi(\beta^2 - \alpha^2)\sqrt{1 + m^2}. \quad (4.47)$$

(β) Το εμβαδόν του κόλυρου κώνου μπορεί επίσης να υπολογιστεί από την

$$A(S_{ABCD}) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |x| \sqrt{1 + m^2} dx = \pi(\beta^2 - \alpha^2)\sqrt{1 + m^2}. \quad (4.48)$$

Παράδειγμα 4.2.11 Υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία ενός σημείου στον \mathbb{R}^3 δίνεται από την

$$T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2. \quad (4.49)$$

Υπολογίστε τη ροή θερμότητας διαμέσου της επιφάνειας $x^2 + z^2 = 2$, $y \in [0, 2]$, αν $\kappa = 1$

Λύση Το διανυσματικό πεδίο των κλίσεων της θερμοκρασίας είναι

$$\vec{F} = -\kappa \vec{\nabla} T = -6x\vec{i} - 6z\vec{k}. \quad (4.50)$$

Η ροή του διανυσματικού πεδίου (4.50) μέσα από τον κύλινδρο με άξονα τον y -άξονα είναι

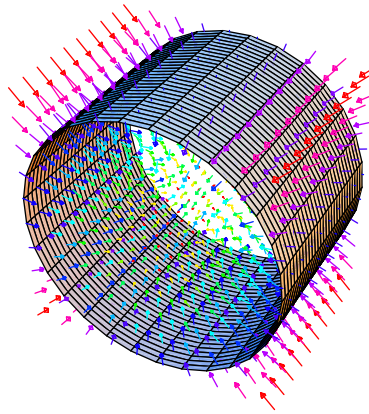
$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) dS \quad (4.51)$$

όπου

$$\vec{n} = \vec{T}_\theta \times \vec{T}_y = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_y & \hat{e}_\theta \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{2}\hat{e}_r. \quad (4.52)$$

Άρα

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 12 \int_0^{2\pi} \int_0^2 dy d\theta = 48\pi. \quad (4.53)$$



Σχήμα 4.8: Το διανυσματικό πεδίο των κλίσεων της θερμοκρασίας.

4.3 Τα Ολοκληρωτικά Θεωρήματα της Διανυσματικής Ανάλυσης

Το θεώρημα του Green συνδέει ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (β' είδους) κατά μήκος μιάς κλειστής καμπύλης C στο επίπεδο \mathbb{R}^2 με ένα διπλό ολοκλήρωμα πάνω στο χωρίο που περικλείεται από την C .

Θεώρημα 4.3.1 (Διανυσματική μορφή του Θεωρήματος του Green) Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα χωρίο τύπου 3 και ∂D το σύνορό του (προσανατολισμένο αντίστροφα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού). Έστω $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο στο D . Τότε

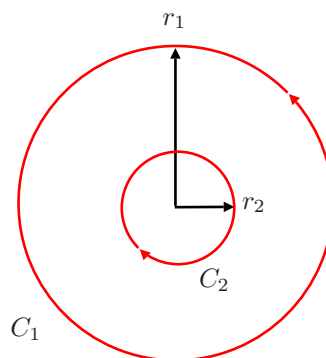
$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_D (\text{curl} \vec{F}) \cdot \vec{k} dA = \int_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dA \quad (4.54)$$

Παράδειγμα 4.3.2 Επαληθεύστε το θεώρημα του Green στο επίπεδο για το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x, y) = x^2(x - y)\vec{i} + xy^2\vec{j} \quad (4.55)$$

αν C είναι το σύνορο του χωρίου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$.

Λύση Υπολογίζουμε και τα δύο μέρη της ισότητας (4.55) στο θεώρημα του Green. Το σύνορο C του D είναι



Σχήμα 4.9: Το χωρίο D είναι δακτύλιος εσωτερικής ακτίνας 2 και εξωτερικής 4.

η ένωση των δύο περιφερειών $C_1 \cup C_2$ που έχουν αντίθετο προσανατολισμό. Παραμετρικοποιώντας τις περιφέρειες $x(t) = r_i \cos t$, $y(t) = r_i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, $i = 1, 2$ έχουμε

$$dx = -r_i \sin t dt, \quad dy = r_i \cos t dt. \quad (4.56)$$

Οπότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του αριστερού μέρους είναι

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy - \int_{C_2} Pdx + Qdy = \frac{\pi}{2}256 - \frac{\pi}{2}16 = 120\pi. \quad (4.57)$$

Το δεξί επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_D (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} \int_2^4 r^3 dr d\theta = 120\pi. \quad (4.58)$$

Θεώρημα 4.3.3 (Θεώρημα της απόκλισης στο επίπεδο) Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα χωρίο τύπου 3 και ∂D το σύνορό του. Με \vec{n} συμβολίζουμε το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D . Αν $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \rightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ είναι μία θετικά προσανατολισμένη παραμετρικοποίηση του ∂D το \vec{n} δίνεται από την

$$\vec{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \quad (4.59)$$

Έστω $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο στο D . Τότε

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_D \operatorname{div} \vec{F} dA. \quad (4.60)$$

Παράδειγμα 4.3.4 (α) Επαληθεύστε το θεώρημα της απόκλισης για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} = P(x)\vec{i} + Q(y)\vec{j}$ στο χωρίο $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(β) Ακολουθώς υπολογίστε το ολοκλήρωμα της κάθετης συνιστώσας του $\vec{F} = 2xy\vec{i} - y^2\vec{j}$ πάνω στην έλλειψη $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Λύση

(α) Παραμετρικοποιώντας την περιφέρεια του κύκλου $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, έχουμε

$$dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt. \quad (4.61)$$

Άρα

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_C Pdy - Qdx = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \quad (4.62)$$

Το δεξί μέρος της ισότητας δίνει

$$\int_D \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dA = 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx = 2\pi. \quad (4.63)$$

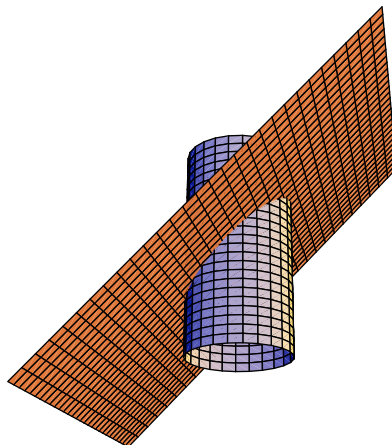
(β) Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης έχουμε

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_D \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dA = \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} (2y - 2y) dy dx = 0 \quad (4.64)$$

Το θεώρημα του Stokes συνδέει ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (β' είδους) κατά μήκος μιάς απλής κλειστής καμπύλης C στον \mathbb{R}^3 με ένα ολοκλήρωμα πάνω σε μια επιφάνεια S της οποίας η C είναι το σύνορο.

Θεώρημα 4.3.5 (Θεώρημα του Stokes για παραμετρικοποιημένες επιφάνειες) Έστω S μία προσανατολισμένη επιφάνεια που ορίζεται από μία 1-1 παραμετρικοποίηση $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Με ∂S συμβολίζουμε το προσανατολισμένο σύνορο της S , και έστω \vec{F} ένα C^1 διανυσματικό πεδίο στην S . Τότε

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (4.65)$$



Σχήμα 4.10: Η τομή του κυλίνδρου με το επίπεδο.

Παράδειγμα 4.3.6 Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz \quad (4.66)$$

όπου C η τομή του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 2y$ με το επίπεδο $y = z$.

Λύση Η καμπύλη $C = \partial D$ οριοθετεί το χωρίο $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$. Το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x, y, z) = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k} \quad (4.67)$$

είναι αστρόβιλο $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$. Οπότε από το θεώρημα του Stokes έχουμε

$$\int_D (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (4.68)$$

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε απευθείας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα εάν παραμετριοποιήσουμε την καμπύλη C ως εξής

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = 1 - \sin t, \quad z(t) = 1 - \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (4.69)$$

Το επικαμπύλιο τότε ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_C (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz = 2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \cos^2 t) dt = 0 \quad (4.70)$$

Το Θεώρημα του Gauss ισχυρίζεται ότι η προς τα έξω ροή ενός διανυσματικού πεδίου μέσω μιας κλειστής επιφάνειας ισούται με το ολοκλήρωμα της απόκλισης αυτού του διανυσματικού πεδίου πάνω στο στρέο που περικλείεται από την επιφάνεια.

Θεώρημα 4.3.7 (Θεώρημα της απόκλισης του Gauss) Έστω Ω ένα χωρίο τύπου IV στον χώρο. Με $\partial\Omega$ συμβολίζουμε την προσανατολισμένη κλειστή επιφάνεια που φράσσει το Ω . Έστω \vec{F} ένα λείο διανυσματικό πεδίο ορισμένο στο Ω . Τότε

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad (4.71)$$

ή αλλιώς,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV = \int_{\partial\Omega} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS. \quad (4.72)$$

Παράδειγμα 4.3.8 Υπολογίστε το $\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ όπου

$$\vec{F}(x, y, z) = (2x + 3z)\vec{i} - (xz + y)\vec{j} + (y^2 + 2z)\vec{k} \quad (4.73)$$

και S είναι η επιφάνεια σφαίρας με κέντρο το σημείο $(3, -1, 2)$ και ακτίνα 3.

Λύση Η εξίσωση της σφαίρας είναι

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9 \quad (4.74)$$

και $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3$. Εάν θεωρήσουμε τη σφαίρα σα χωρίο τύπου I και χρησιμοποιήσουμε καρτεσιανές συντεταγμένες, το θεώρημα του Gauss δίνει

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\ &= 3 \int_0^6 \int_{-1-\sqrt{9-(x-3)^2}}^{-1+\sqrt{9-(x-3)^2}} \int_{2-\sqrt{9-(x-3)^2-(y+1)^2}}^{2+\sqrt{9-(x-3)^2-(y+1)^2}} dz dy dx \\ &= 3\pi \int_0^6 (9 - (x - 3)^2) dx = 108\pi. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Ο υπολογισμός του τριπλού ολοκληρώματος απλοποιείται εάν χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες και παρατηρήσουμε ότι η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου δεν εξαρτάται από τη θέση. Οπότε μπορούμε να μετατοπίσουμε τη σφαίρα και να ταυτίσουμε το κέντρο της με την αρχή των αξόνων. Το χωρικό ολοκλήρωμα δίνει

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV = 3 \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin \phi d\phi d\theta dr = 108\pi. \quad (4.76)$$

4.4 Συντηρητικά πεδία

Θεώρημα 4.4.1 Έστω \vec{F} ένα διανυσματικό πεδίο κλάσεως C^1 ορισμένο στον \mathbb{R}^3 , εκτός ίσως από πεπερασμένο πλήθος σημείων. Οι επόμενες συνθήκες για το \vec{F} είναι όλες ισοδύναμες

(1) Για κάθε προσανατολισμένη απλή κλειστή καμπύλη C ,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4.77)$$

(2) Για οποιοδήποτε δύο προσανατολισμένες απλές κλειστές καμπύλες C_1 και C_2 με τα ίδια άκρα

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (4.78)$$

(3) Το \vec{F} είναι η κλίση κάποιας συνάρτησης f , δηλαδή $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ (και αν σε κάποιο σημείο το \vec{F} δεν ορίζεται τότε και η f δεν ορίζεται σε αυτό).

(4) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.

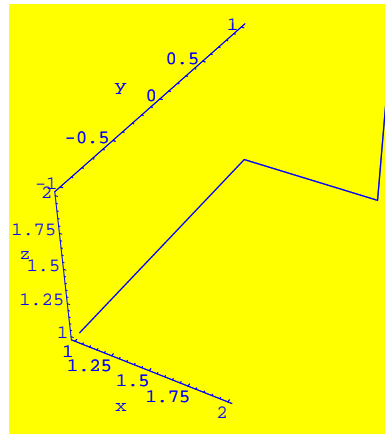
Ένα διανυσματικό πεδίο που ικανοποιεί μία από τις συνθήκες (1) – (4) λέγεται συντηρητικό ή διατηρητικό διανυσματικό πεδίο.

Παράδειγμα 4.4.2 Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = [3x^2(y + z) + y^3 + z^3] \vec{i} + [3y^2(x + z) + x^3 + z^3] \vec{j} + [3z^2(x + y) + x^3 + y^3] \vec{k}. \quad (4.79)$$

Υπολογίστε

(1) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ κατά μήκος μιας προσανατολισμένης απλής καμπύλης C που ενώνει το σημείο $A = (1, -1, 1)$ με το $B = (2, 1, 2)$.



Σχήμα 4.11: Η κατά τμήματα κλάσεως C^1 καμπύλη $C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

(2) Τη συνάρτηση δυναμικού για το \vec{F} .

Λύση

(1) Εύκολα ελέγχουμε ότι το διανυσματικό πεδίο είναι αστρόβιλο αφού ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 3(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 3(y^2 + z^2), \quad \text{και} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = 3(x^2 + z^2). \quad (4.80)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να αντικαταστήσουμε την C με οποιαδήποτε κατά τμήματα κλάσεως C^1 καμπύλη που έχει τα ίδια άκρα και πιο συγκεκριμένα με την πολυγωνική γραμμή που περιγράφεται παραμετρικά από τις

$$\begin{aligned} (1, -1, 1) \xrightarrow{C_1} (1, 1, 1) & \quad \vec{\sigma}_1(t) = (1, t, 1), \quad t \in [-1, 1] \\ (1, 1, 1) \xrightarrow{C_2} (2, 1, 1) & \quad \vec{\sigma}_2(t) = (t, 1, 1), \quad t \in [1, 2] \\ (2, 1, 1) \xrightarrow{C_3} (2, 1, 2) & \quad \vec{\sigma}_3(t) = (2, 1, t), \quad t \in [1, 2] \end{aligned} \quad (4.81)$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{\vec{\sigma}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\vec{\sigma}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\vec{\sigma}_3} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^1 (6t^2 + 2)dt + \int_1^2 (6t^2 + 2)dt + \int_{-1}^1 (9t^2 + 9)dt = 54 \quad (4.82)$$

(2) Η συνάρτηση δυναμικού για το \vec{F} δίνεται από την λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2(y + z) + y^3 + z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2(x + z) + x^3 + z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 3z^2(x + y) + x^3 + y^3 \end{aligned} \quad (4.83)$$

Άρα

$$f(x, y, z) = xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + xz(x^2 + z^2). \quad (4.84)$$

Θεώρημα 4.4.3 Εάν \vec{F} ένα διανυσματικό πεδίο κλάσεως C^1 στον \mathbb{R}^3 με $\text{div}\vec{F} = 0$ τότε $\exists \vec{G} + \vec{\nabla}\Phi$ κλάσεως C^1 με

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{G} + \vec{\nabla}\Phi) = \vec{\nabla} \times \vec{G}. \quad (4.85)$$

Παράδειγμα 4.4.4 Θεωρούμε το σταθερό μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B} = B\vec{k}. \quad (4.86)$$

Δείξτε ότι δεν υπάρχει μοναδικό διανυσματικό πεδίο \vec{G} τέτοιο ώστε $\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{B}$.

Λύση Παρατηρούμε ότι $\text{div}\vec{B} = 0$. Οπότε λόγω του θεωρήματος θα υπάρχει διανυσματικό πεδίο \vec{G} τέτοιο ώστε $\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{B}$ ή χρησιμοποιώντας συνιστώσες

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} &= B, \\ \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Εάν το διανυσματικό πεδίο είναι παράλληλο με το yz -επίπεδο τότε $G_1(x, y, z) = \text{σταθερή}$ και μία δυνατή λύση των προηγούμενων εξισώσεων είναι

$$\vec{G} = Bx\vec{j} + c. \quad (4.88)$$

Εάν το διανυσματικό πεδίο είναι παράλληλο με το xy -επίπεδο τότε $G_3(x, y, z) = \text{σταθερή}$ και

$$\frac{\partial G_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = B. \quad (4.89)$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις της (4.89) δίνουν $G_2 = G_2(x, y)$ και $G_1 = G_1(x, y)$. Μία δυνατή λύση για την τρίτη εξίσωση είναι

$$G_2(x) = cx, \quad G_1(y) = (c-1)y, \quad c = \text{σταθερά}. \quad (4.90)$$

Οπότε

$$\vec{G} = (c-1)yB\vec{i} + cxB\vec{j}. \quad (4.91)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το διανυσματικό πεδίο \vec{G} δεν καθορίζεται μοναδικά και η δεύτερη έκφρασή του μπορεί να γραφεί

$$\vec{G} = -\frac{1}{2}(y\vec{i} - x\vec{j})B + (c - \frac{1}{2})(y\vec{i} + x\vec{j})B = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r}) + (c - \frac{1}{2})B\vec{\nabla}\phi, \quad \phi = xy. \quad (4.92)$$

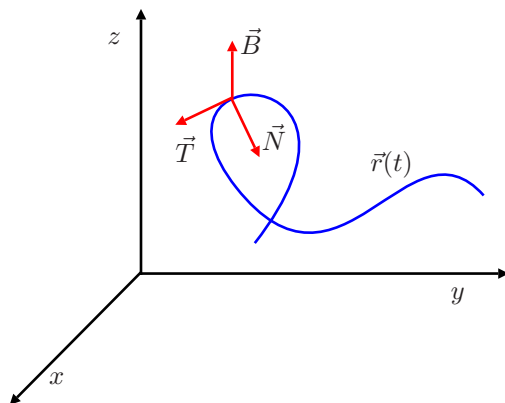
Κεφάλαιο 5

Το Κινούμενο Τρίεδρο-Οι Τύποι του *Frenet*

Η μελέτη των φυσικών προβλημάτων μερικές φορές απλοποιείται όταν χρησιμοποιούμε φυσικές συντεταγμένες για να εκφράσουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση υπολογίζονται από το μήκος τόξου $s(t)$ και όχι από το διάνυσμα θέσεως $\vec{r}(t)$ σαν συνάρτηση του χρόνου. Το μέτρο της ταχύτητας στην περίπτωση αυτή δίνεται από την σχέση

$$|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}. \quad (5.1)$$

Θα κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση η οποία κινείται μαζί με τη σημειακή μάζα και ονομάζεται *κινούμενο τρίεδρο*. Έστω $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ μία άπειρες φορές παραγωγίσιμη καμπύλη με $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}, \forall t$. Το διάνυσμα



Σχήμα 5.1: Το κινούμενο τρίεδρο του *Frenet*.

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (5.2)$$

εφάπτεται στο σημείο $\vec{r}(t)$ της καμπύλης, έχει μοναδιαίο μήκος και ονομάζεται το *μοναδιαίο εφαπτόμενο* διάνυσμα της \vec{r} . Παραγωγίζοντας τη σχέση κανονικοποίησης

$$\vec{T} \cdot \vec{T} = 1 \quad (5.3)$$

ως προς το μήκος τόξου έχουμε

$$2 \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} = 0. \quad (5.4)$$

Από τη σχέση (5.4) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το διάνυσμα $\vec{T}'(s)$ είναι ορθογώνιο του $\vec{T}(s)$. Το διάνυσμα

$$\vec{N}(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{\|\vec{T}'(s)\|} = \frac{1}{\kappa} \vec{T}'(s) \quad (5.5)$$

ονομάζεται *πρώτο κάθετο* διάνυσμα. Ο θετικός αριθμός $\kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|$ ονομάζεται *καμπυλότητα* της καμπύλης. Χρησιμοποιώντας το διανυσματικό γινόμενο μπορούμε να ορίσουμε ένα καινούργιο διάνυσμα \vec{B} κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} \quad (5.6)$$

το οποίο ονομάζεται το *δεύτερο κάθετο* διάνυσμα.

Πρόταση 5.0.5 Οι τύποι του Frenet δίνονται από τις σχέσεις

$$(1) \quad \frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa \vec{N}$$

$$(2) \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = \tau \vec{B} - \kappa \vec{T}$$

$$(3) \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{N}$$

όπου η σταθερά αναλογίας τ ονομάζεται *στρέψη*. Η στρέψη $\tau = \left| \frac{d\vec{B}}{ds} \right|$ εκφράζει πόσο γρήγορα η καμπύλη περιελίσσεται εκτός του επιπέδου που ορίζουν τα \vec{T} και \vec{N} . Από την καμπυλότητα και την στρέψη μπορούμε να ορίσουμε δύο νέες ποσότητες τις

$$\rho = \frac{1}{\kappa}, \quad \sigma = \frac{1}{\tau} \quad (5.7)$$

που ονομάζονται *ακτίνα καμπυλότητας* και *ακτίνα στρέψης*. Η ακτίνα καμπυλότητας ισούται με την ακτίνα του κύκλου που καλύτερα προσεγγίζει το δεδομένο σημείο της καμπύλης.

Απόδειξη:

(2) Το διάνυσμα $\frac{d\vec{N}}{ds}$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδιασμός της φυσικής βάσης

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = a\vec{T} + b\vec{N} + c\vec{B} \quad (5.8)$$

όπου a, b, c πραγματικοί αριθμοί που θα προσδιοριστούν. Σχηματίζοντας το εσωτερικό γινόμενο της (5.8) με το διάνυσμα \vec{N} καταλήγουμε στην

$$\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{N} = a\vec{T} \cdot \vec{N} + c\vec{B} \cdot \vec{N} \quad (5.9)$$

αφού $\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{N} = 0$. Η παραγώγιση της σχέσης ορθογωνιότητας $\vec{T} \cdot \vec{N} = 0$ ως προς το μήκος τόξου μας οδηγεί στην

$$\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{N} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = 0 \Rightarrow \vec{T} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa. \quad (5.10)$$

Οπότε σχηματίζοντας κατάλληλα εσωτερικά γινόμενα της (5.8) προσδιορίζουμε τις σταθερές $a = -\kappa$ και $c = \tau$ αφού $\vec{B} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = \tau$.

(3) Παραγωγίζοντας τη σχέση ορθογωνιότητας $\vec{B} \cdot \vec{N} = 0$ ως προς s έχουμε

$$\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} + \vec{B} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = 0 \quad (5.11)$$

Επίσης από την $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ παίρνουμε

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{N} + \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{0} + \vec{T} \times (\tau \vec{B} - \kappa \vec{T}) = -\tau \vec{N}. \quad (5.12)$$

Οι τύποι του *Frenet* μπορούν να επαναδιατυπωθούν πιό κομψά χρησιμοποιώντας το διάνυσμα περιστροφής του *Darboux* που ορίζεται από την σχέση

$$\vec{D} = \tau \vec{T} + \kappa \vec{B}. \quad (5.13)$$

Στην περίπτωση αυτή οι τύποι αποκτούν τη συμμετρική μορφή

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{D} \times \vec{T}, \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{D} \times \vec{N}, \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{D} \times \vec{B}. \quad (5.14)$$

Πρόταση 5.0.6 Η γραμμική επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται σε καμπύλη του χώρου \mathbb{R}^3 ¹ βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν το εφαπτόμενο και το πρώτο κάθετο διάνυσμα.

Λύση Για σημειακή μάζα ανεξάρτητη του χρόνου έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{B} \rangle &= m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \cdot (\vec{T} \times \vec{N}) \\ &= m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \cdot \left(\frac{1}{\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \|} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \times \frac{1}{\| \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \|} \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \right) \\ &= m \frac{1}{\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \|} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \left(\frac{1}{\| \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \|} \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \times \frac{1}{\| \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \|} \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Παράδειγμα 5.0.7 Αποδείξτε τη σχέση

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \left(\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \times \frac{d^3 \vec{r}}{ds^3} \right) = \frac{\tau}{\rho^2} \quad (5.16)$$

Λύση Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του εφαπτόμενου διανύσματος έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \left(\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \times \frac{d^3 \vec{r}}{ds^3} \right) &= \vec{T} \cdot \left[\frac{d\vec{T}}{ds} \times \left(\kappa \frac{d\vec{N}}{ds} + \frac{d\kappa}{ds} \vec{N} \right) \right] \\ &= \vec{T} \cdot \left(\frac{d\vec{T}}{ds} \times \kappa \frac{d\vec{N}}{ds} \right) \\ &= \kappa^2 \vec{T} \cdot ((\vec{N} \times \tau \vec{B}) - (\vec{N} \times \kappa \vec{T})) \\ &= \kappa^2 \vec{T} \cdot (\vec{N} \times \tau \vec{B}) = \kappa^2 \tau = \frac{\tau}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Παράδειγμα 5.0.8 Ποιοί οι τύποι του *Frenet* για τον κύκλο;

Λύση Το διάνυσμα θέσης σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\vec{r}(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, 0). \quad (5.18)$$

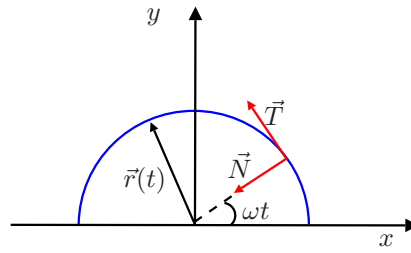
Το εφαπτόμενο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|} = r\omega \frac{(-\sin \omega t, \cos \omega t, 0)}{r\omega} = (-\sin \omega t, \cos \omega t, 0) \quad (5.19)$$

και το πρώτο κάθετο διάνυσμα είναι

$$\vec{N} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}/dt}{ds/dt} = (-\cos \omega t, -\sin \omega t, 0). \quad (5.20)$$

¹Εάν η σρέψη $\tau = 0$ τότε η καμπύλη είναι επίπεδη.



Σχήμα 5.2: Το μοναδιαίο εφαπτόμενο και το πρώτο κάθετο για τον κύκλο.

Η ακτίνα καμπυλότητας όπως αναμενόταν είναι $\rho = 1/\kappa = r$, όπου r η ακτίνα του κύκλου. Το δεύτερο κάθετο διάνυσμα υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη σχέση $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

$$\vec{B} = \hat{e}_3 \quad (5.21)$$

και

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{B} = 0 \Rightarrow \tau = 0 \quad (5.22)$$

Το αποτέλεσμα αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι η καμπύλη βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν το εφαπτόμενο και το πρώτο κάθετο διάνυσμα. Για επίπεδες καμπύλες το δεύτερο κάθετο διάνυσμα θα είναι πάντα σταθερό οπότε $d\vec{B}/ds = \vec{0}$ δηλαδή η καμπύλη θα έχει μηδενική στρέψη.

Κεφάλαιο 6

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις με Σταθερούς Συντελεστές

Ορισμός 6.0.9 Μία εξίσωση που περιέχει παραγώγους μίας ή περισσότερων εξηρημένων μεταβλητών ως προς μία ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές ονομάζεται διαφορική εξίσωση.

Παράδειγμα 6.0.10 Οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(x)}{dx^2} + x\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2 + xy(x) &= x^3 \\ \alpha \left(\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.1)$$

είναι διαφορικές εξισώσεις.

Ορισμός 6.0.11 Μία διαφορική εξίσωση που περιέχει παραγώγους μίας ή περισσότερων εξηρημένων μεταβλητών ως προς μία ανεξάρτητη μεταβλητή ονομάζεται συνήθεις διαφορική εξίσωση.

Ορισμός 6.0.12 Η τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η τάξη της ανώτερης παραγώγου της εξίσωσης (δηλαδή ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος αριθμός με τον οποίο η n -οστή παράγωγος ή το διαφορικό εμφανίζεται στην διαφορική εξίσωση).

Παράδειγμα 6.0.13 Οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(x)}{dx^2} + x\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2 + xy(x) &= x^3 \\ \left(\frac{d^3y(x)}{dx^3}\right)^2 + y(x)\frac{dy(x)}{dx} \frac{d^2y(x)}{dx^2} + y^2 &= \sin x \end{aligned} \quad (6.2)$$

είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις τάξεως δευτέρας και τρίτης αντίστοιχα.

Ορισμός 6.0.14 Βαθμός μιας διαφορικής εξίσωσης που κάθε όρος της μπορεί να γραφεί σαν ένα πολυώνυμο της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της, είναι η δύναμη στην οποία εμφανίζεται η μεγαλύτερη τάξη παράγωγος.

Παράδειγμα 6.0.15 Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(x)}{dx^2} + x\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2 + xy(x) &= x^3 \\ \left(\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^7 + y^3 \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

είναι βαθμού πρώτου και δευτέρου αντίστοιχα.

Ορισμός 6.0.16 Η διαφορική εξίσωση

$$F(t, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad y^{(n)} = \frac{d^n y(t)}{dt^n} \quad (6.4)$$

ονομάζεται γραμμική εάν η F είναι μια γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών $y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$. Η γενική μορφή μιάς γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης είναι

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t). \quad (6.5)$$

Ορισμός 6.0.17 Η γενική της μορφή είναι

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = 0 \quad (6.6)$$

όπου a_0, \dots, a_n είναι πραγματικές σταθερές.

Οι *Bernoulli* και *Euler* γνώριζαν πριν το 1743 πως να επιλύουν διαφορικές εξισώσεις αυτής της μορφής. Από γνωστό θεώρημα η ομογενής συνήθης διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές έχει n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις που ορίζονται στο R και κάθε λύση της ορισμένη στο R μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων.

Θεώρημα 6.0.18 Το σύνολο $\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$ συναρτήσεων που ορίζονται και είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα I θα είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I εάν η *Wronskian* τους ορίζουσα δεν μηδενίζεται.

Απόδειξη: Το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_k f_k(x) &= 0 \\ c_1 \frac{df_1(x)}{dx} + c_2 \frac{df_2(x)}{dx} + \dots + c_k \frac{df_k(x)}{dx} &= 0 \\ &\vdots \\ c_1 \frac{d^{k-1} f_1(x)}{dx^{k-1}} + c_2 \frac{d^{k-1} f_2(x)}{dx^{k-1}} + \dots + c_k \frac{d^{k-1} f_k(x)}{dx^{k-1}} &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

θα έχει μοναδική λύση την $c_1 = \dots = c_k = 0$ (οπότε θα είναι γραμμικά ανεξάρτητες) όταν η ορίζουσα

$$W(f_1(x), \dots, f_k(x), x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_k(x) \\ \frac{df_1(x)}{dx} & \frac{df_2(x)}{dx} & \dots & \frac{df_k(x)}{dx} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{d^{k-1} f_1(x)}{dx^{k-1}} & \frac{d^{k-1} f_2(x)}{dx^{k-1}} & \dots & \frac{d^{k-1} f_k(x)}{dx^{k-1}} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (6.8)$$

στο I . Στην αντίθετη περίπτωση οι συναρτήσεις θα είναι γραμμικά εξαρτημένες. \square

Παράδειγμα 6.0.19 Έστω το σύνολο συναρτήσεων $\{\sin \omega x, \cos \omega x\}$. Να δείξετε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Λύση Η *Wronskian* είναι

$$W = \begin{vmatrix} \sin \omega x & \cos \omega x \\ \omega \cos \omega x & -\omega \sin \omega x \end{vmatrix} = -\omega \neq 0 \quad (6.9)$$

Παράδειγμα 6.0.20 Έστω το σύνολο συναρτήσεων $\{e^x, e^{-x}, \cosh x\}$. Να δείξετε ότι είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Λύση Η *Wronskian* είναι

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cosh x \\ e^x & -e^{-x} & \sinh x \\ e^x & e^{-x} & \cosh x \end{vmatrix} = 0 \quad (6.10)$$

Η ορίζουσα είναι προφανώς μηδέν γιατί η πρώτη και τελευταία γραμμή ταυτίζονται. Άρα οι συναρτήσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες και το αποτέλεσμα αυτό αναμενόταν αφού $e^x + e^{-x} - 2 \cosh x = 0$ με $c_k \neq 0$.

Το πρόβλημα εύρεσης των γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της διαφορικής εξίσωσης θα αναχθεί στον προσδιορισμό των ριζών πολυωνύμου βαθμού n . Για να το επιτύχουμε αυτό παρατηρήστε ότι υπάρχει συνάρτηση που ικανοποιεί την σχέση

$$\frac{d^k f(t)}{dt^k} = c(k)f(t) \quad (6.11)$$

και είναι η εκθετική συνάρτηση $f(t) = e^{rt}$ όπου r -άγνωστη σταθερά. Αντικαθιστώντας στην γενική εξίσωση λαμβάνουμε την σχέση

$$e^{rt} (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) = 0 \Rightarrow a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (6.12)$$

αφού $e^{rt} \neq 0$. Η πολυωνυμική εξίσωση με άγνωστο το r ονομάζεται βοηθητική ή χαρακτηριστική εξίσωση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης. Παρατηρήστε ότι η εξίσωση αυτή προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε στην αρχική την k -τάξεως παράγωγο με r^k , $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις ανάλογα με τις ρίζες της χαρακτηριστικής τις οποίες θα μελετήσουμε

(1) Διακριτές Πραγματικές Ρίζες: Εάν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει n διακριτές πραγματικές ρίζες r_1, r_2, \dots, r_n τότε η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \dots + c_n e^{r_n t} \quad (6.13)$$

όπου c_1, c_2, \dots, c_n είναι αυθαίρετες σταθερές. Για να αποδείξουμε ότι η *Wronskian* ορίζουσα είναι μη μηδενική αρκεί να δείξουμε ότι για κατάλληλη εκλογή του $x = x_0 = 0$ η $W(f_1(x), \dots, f_n(x), x_0 = 0) \neq 0$. Στην παρούσα περίπτωση η ορίζουσα

$$W(f_1(x), \dots, f_n(x), x_0 = 0) = [(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) \dots (r_n - r_1)] [(r_3 - r_2) \dots (r_n - r_2)] \dots [(r_n - r_{n-1})] \quad (6.14)$$

(η οποία ονομάζεται και ορίζουσα του *Vandermonde*) δεν μηδενίζεται αφού έχουμε πραγματικές και διακριτές ρίζες.

(2) Επαναλαμβανόμενες Πραγματικές Ρίζες: Έστω ότι η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μία πραγματική ρίζα r να επαναλαμβάνεται k φορές. Τότε

(2α) Εάν οι υπόλοιπες $(n - k)$ είναι μηδέν η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(t) = (c_1 + c_2 t + \dots + c_k t^k) e^{rt}. \quad (6.15)$$

(2β) Εάν οι υπόλοιπες $(n - k)$ είναι διακριτές και πραγματικές η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(t) = (c_1 + c_2 t + \dots + c_k t^k) e^{rt} + c_{k+1} e^{r_{k+1} t} + \dots + c_n e^{r_n t} \quad (6.16)$$

(2γ) Εάν η πραγματική ρίζα r έχει πολλαπλότητα n τότε έχουμε έκφραση παρόμοια με την (iiα).

(3) Συζυγείς Μιγαδικές Ρίζες: Εάν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει

(3α) Τις συζυγείς μιγαδικές ρίζες $a + ib$, $a - ib$ να μην επαναλαμβάνονται τότε η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(t) = e^{at} (c_1 \sin bt + c_2 \cos bt) \quad (6.17)$$

(3β) Εάν επαναλαμβάνονται k φορές τότε η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(t) = e^{at} ((c_1 + c_2 t + \dots + c_k t^{k-1}) \sin bt + (c_{k+1} + c_{k+2} t + \dots + c_{2k} t^{k-1}) \cos bt) \quad (6.18)$$

Η Μη Ομογενής Γραμμική Διαφορική Εξίσωση με Σταθερούς Συντελεστές

Η γενική της μορφή είναι

$$a_0 y^{(n)} + y^{(n-1)} + \dots + a_n y = F(t) \quad (6.19)$$

A.A.	$g(t)$	Γραμμικά Ανεξάρτητα Σύνολο
1	t^n	$\{t^n, t^{n-1}, \dots, t, 1\}$
2	e^{at}	$\{e^{at}\}$
3	$\sin(at+b)$ ή $\cos(at+b)$	$\{\sin(at+b), \cos(at+b)\}$
4	$t^n e^{at}$	$\{t^n e^{at}, t^{n-1} e^{at}, \dots, t e^{at}, e^{at}\}$
5	$t^n \sin(at+b)$ ή $t^n \cos(at+b)$	$\{t^n \sin(at+b), t^n \cos(at+b); \dots; \sin(at+b), \cos(at+b)\}$
6	$e^{at} \sin(at+b)$ ή $e^{at} \cos(at+b)$	$\{e^{at} \sin(at+b), e^{at} \cos(at+b)\}$
7	$t^n e^{at} \sin(at+b)$ ή $t^n e^{at} \cos(at+b)$	$\{t^n e^{at} \sin(at+b), t^n e^{at} \cos(at+b); \dots; e^{at} \sin(at+b), e^{at} \cos(at+b)\}$

Πίνακας 6.1: Τα γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα συναρτήσεων για συγκεκριμένους μη ομογενής όρους.

όπου οι συντελεστές a_0, \dots, a_n είναι σταθερές και ο μη ομογενής όρος F είναι γενικά συνάρτηση του t . Η γενική της λύση δίνεται από την

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) \quad (6.20)$$

όπου $y_c(t)$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς και $y_p(t)$ μία ειδική λύση της μη ομογενούς η οποία δεν περιέχει σταθερές. Για τον προσδιορισμό της ειδικής λύσης θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται μόνο στην περίπτωση που ο μη ομογενής όρος είναι κάποιος γραμμικός συνδιασμός των συναρτήσεων:

Εάν για παράδειγμα $F(t) = t^2 e^t$ θα θεωρήσουμε το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $S = \{t^2 e^t, t e^t, e^t\}$ οπότε η ειδική λύση θα γραφεί στην γενική μορφή $y_p(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$. Αντικατάστασή της στη διαφορική εξίσωση αυτόματα προσδιορίζει τους συντελεστές c_1, c_2, c_3 .

Παράδειγμα 6.0.21 Να βρεθεί η γενική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - y(x) = 3x + 2 \sin x. \quad (6.21)$$

Λύση Επιλύουμε πρώτα την ομογενή. Η χαρακτηριστική εξίσωση δίνεται από την

$$r^2 - 1 = 0 \quad (6.22)$$

και έχει δύο διακριτές και πραγματικές ρίζες τις $r_1 = 1, r_2 = -1$. Άρα η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}. \quad (6.23)$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών θεωρούμε τη συνάρτηση

$$y_p(x) = d_1 + d_2 x + d_3 \sin x + d_4 \cos x. \quad (6.24)$$

Οι συντελεστές d_1, \dots, d_4 θα προσδιοριστούν με αντικατάστασή της στην αρχική εξίσωση. Οπότε το αριστερό μέλος γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_p(x)}{dx^2} - y_p(x) &= -d_3 \sin x - d_4 \cos x - (d_1 + d_2 x + d_3 \sin x + d_4 \cos x) \\ &= -d_1 - d_2 x - (d_3 + d_4) \sin x + (d_3 - d_4) \cos x \end{aligned} \quad (6.25)$$

και εξισώνοντας με το δεξί μέλος λαμβάνουμε $d_1 = 0, d_2 = -3, d_3 = -1, d_4 = 0$. Η γενική λύση της μη ομογενούς θα είναι

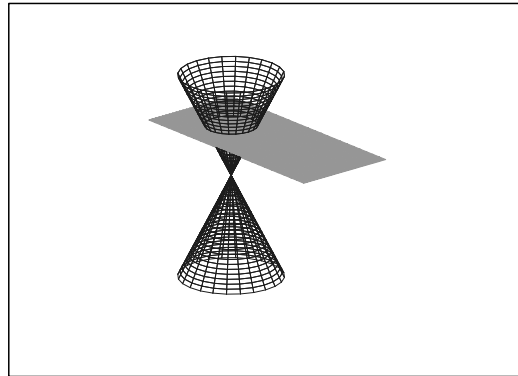
$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 3x - \sin x \quad (6.26)$$

Κεφάλαιο 7

Κωνικές Τομές

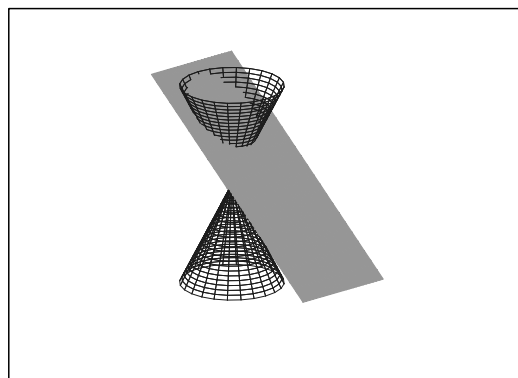
Οι Έλληνες της εποχής του Πλάτωνα τις περιέγραφαν σαν τις καμπύλες στις οποίες ένα επίπεδο μπορεί να τμήσει ένα κώνο (οπότε και το όνομα κωνική τομή). Εάν το επίπεδο τομής σχηματίζει οξεία γωνία θ με τον άξονα του κώνου και έστω ϕ η οξεία γωνία μεταξύ της πλευράς και του άξονα του κώνου τότε η τομή είναι:

(α) Κύκλος εάν $\theta = \frac{\pi}{2}$.



Σχήμα 7.1: Ο κύκλος.

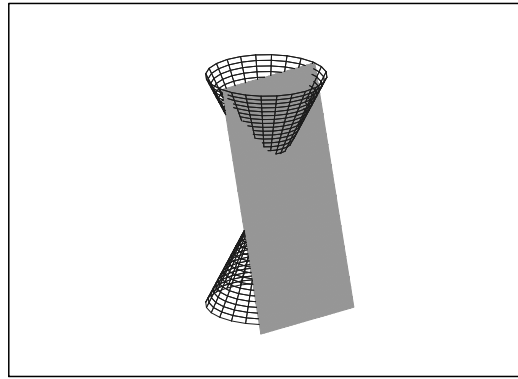
(β) Έλλειψη εάν $\phi < \theta < \frac{\pi}{2}$.



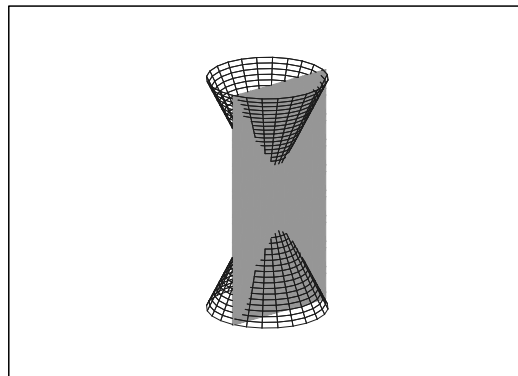
Σχήμα 7.2: Η έλλειψη.

(γ) Παραβολή εάν $\theta = \phi$.

(δ) Υπερβολή εάν $0 \leq \theta < \phi$.



Σχήμα 7.3: Η παραβολή.



Σχήμα 7.4: Η υπερβολή.

Σήμερα οι κωνικές τομές περιγράφονται από δευτεροβάθμιες εξισώσεις των συντεταγμένων του επιπέδου. Η απόσταση d μεταξύ δύο σημείων $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$ στο επίπεδο υπολογίζεται από τις συντεταγμένες τους από τον τύπο

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (7.1)$$

Ορισμός 7.0.22 Ο κύκλος ορίζεται σαν το σύνολο των σημείων του επιπέδου του οποίου η απόσταση από δεδομένο σταθερό σημείο του επιπέδου είναι μία σταθερά.

Εστω το σταθερό σημείο $C(x_0, y_0)$, το κέντρο του κύκλου και r η σταθερή απόσταση από το C . Ένα σημείο $P(x, y)$ θα είναι σημείο του κύκλου εάν

$$CP = r \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \quad (7.2)$$

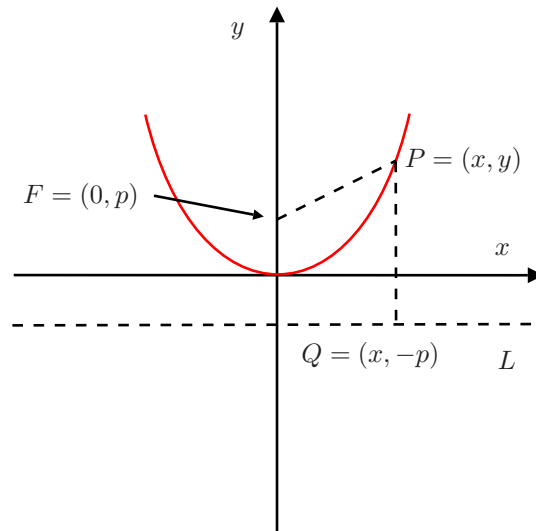
Ορισμός 7.0.23 Η παραβολή ορίζεται σαν το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα δεδομένο σταθερό σημείο και μία σταθερή ευθεία του επιπέδου. Το σταθερό σημείο ονομάζεται εστία και η σταθερή ευθεία διευθετούσα.

Εάν η εστία F βρίσκεται πάνω στην διευθετούσα L τότε η παραβολή εκφυλίζεται σε ευθεία. Θεωρούμε άξονα y που διέρχεται από την εστία F και είναι κάθετος στην διευθετούσα L . Ο άξονας x θα διέρχεται από το μέσο της απόστασης $FL = 2p$. Οι συντεταγμένες των σημείων για παραβολή που ανοίγει προς τα πάνω είναι

$$F = (0, p), \quad Q = (x, -p) \quad P = (x, y) \quad (7.3)$$

και η παραβολή θα δίνεται από την εξίσωση

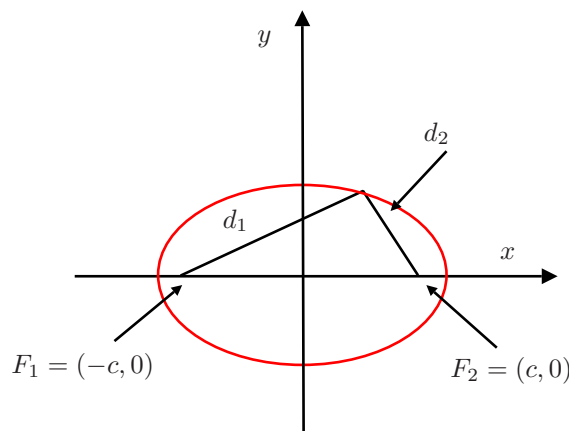
$$\begin{aligned} PF &= PQ \\ \sqrt{x^2 + (y - p)^2} &= \sqrt{(y + p)^2} \\ x^2 &= 4py. \end{aligned} \quad (7.4)$$



Σχήμα 7.5: Η εστία και η διευθετούσα της παραβολής.

Η εξίσωση της παραβολής που ανοίγει προς τα κάτω είναι $x^2 = -4py$ και για παραβολές που ανοίγουν προς τα δεξιά ή αριστερά εναλλάσσουμε το ρόλο των $x \leftrightarrow y$. Η παραβολή έχει την ανακλαστική ιδιότητα. Δηλαδή οι ακτίνες που προέρχονται από την εστία ανακλώνται παράλληλα με τον άξονα και αντίστροφα. Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται στα παραβολικά κάτοπτρα των τηλεσκοπίων και στις παραβολικές κεραίες των ραντάρ.

Ορισμός 7.0.24 Η έλλειψη ορίζεται σαν το σύνολο των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία του επιπέδου είναι σταθερό. Τα δύο σημεία ονομάζονται εστίες και έχουν συντεταγμένες $F_1(-c, 0)$ και $F_2(c, 0)$.



Σχήμα 7.6: Οι εστίες της έλλειψης.

Το άθροισμα των αποστάσεων είναι

$$PF_1 + PF_2 = 2\alpha \quad (7.5)$$

και η εξίσωση της έλλειψης δίνεται από την

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2\alpha \\ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Τα $\alpha, b = \sqrt{\alpha^2 - c^2}$ ονομάζονται μεγάλος και μικρός ημιάξονας της έλλειψης αντίστοιχα και ισχύει ότι $\alpha > b > 0$. Η εξίσωση υποδηλώνει ότι η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τους δύο άξονες και βρίσκεται μέσα στο ορθογώνιο που ορίζεται από τις ευθείες $x = \pm\alpha$ και $y = \pm b$.

Εκκεντρότητα: Η εκκεντρότητα της έλλειψης ορίζεται από το πηλίκο

$$e = \frac{c}{a} \quad (7.7)$$

όπου c η εστιακή απόσταση και a ο μεγάλος ημιάξονας. Παίρνει τιμές στο διάστημα $e \in [0, 1]$ και υποδηλώνει το βαθμό απομάκρυνσης από την κυκλικότητα. Έτσι για παράδειγμα όταν $c = 0$ δηλαδή όταν οι εστίες ταυτίζονται πέρνουμε κύκλο ενώ για $c = a$ έχουμε το ευθύγραμμο τμήμα F_1F_2 που ενώνει τις δύο εστίες. Η παραβολή έχει την ιδιότητα $PF = 1 \cdot PD$ όπου PD η κάθετη απόσταση του σημείου P της καμπύλης από την διευθετούσα. Η έλλειψη έχει δύο διευθετούσες κάθετες στο μεγάλο άξονα σε απόσταση $\pm \frac{a}{e}$. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι $PF_1 = e \cdot PD_1$ και $PF_2 = e \cdot PD_2$.

Η ιδιότητα εστίας - διευθετούσας συνδέει την παραβολή, έλλειψη και την υπερβολή με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω η απόσταση PF ενός σημείου P από ένα σταθερό σημείο F (η εστία) είναι σταθερό πολλαπλάσιο της απόστασης του από μια σταθερή ευθεία (διευθετούσα). Δηλαδή εάν

$$PF = e \cdot PD \quad (7.8)$$

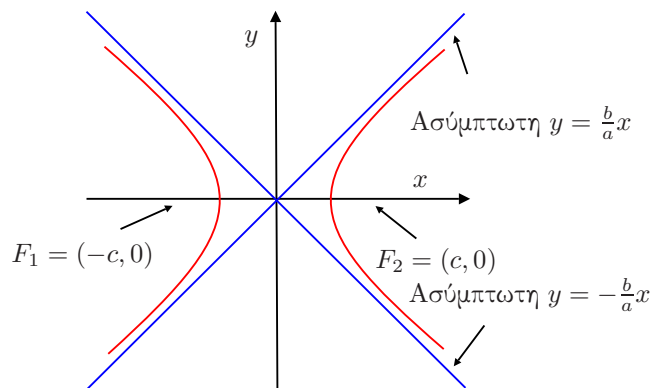
Η τροχιά που γράφει το P είναι

(α) παραβολή $e = 1$

(β) έλλειψη $e < 1$

(γ) υπερβολή $e > 1$

Ορισμός 7.0.25 Η υπερβολή ορίζεται σαν το σύνολο των σημείων του επιπέδου των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία του επιπέδου είναι σταθερή.



Σχήμα 7.7: Οι εστίες και οι ασύμπτωτες της υπερβολής.

Εάν οι εστίες έχουν συντεταγμένες $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ και η σταθερή απόσταση είναι ίση με $2a$ τότε η εξίσωση της υπερβολής γράφεται

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \quad (7.9)$$

όπου $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής υπολογίζονται από την απαίτηση η κλίση της καμπύλης να μηδενίζεται οπότε για την $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx} = \pm \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \pm \frac{b}{a} \quad (7.10)$$

που είναι η κλίση των ευθειών $y = \pm \frac{b}{a}x$. Οι διευθετούσες στην περίπτωση αυτή δίνονται από τις $x = \pm \frac{a}{e}$. Η εκκεντρότητα της υπερβολής ορίζεται με τον ίδιο τρόπο δηλαδή $e = \frac{c}{a}$.

Μέρος II

Κλασική Μηχανική

Κεφάλαιο 8

Βασικές Έννοιες

8.1 Μονάδες Μήκους, Μάζας, Χρόνου και Μολ

Στη Μηχανική όλες οι φυσικές ποσότητες μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει τριών θεμελιωδών ποσοτήτων. Του μήκους L , της μάζας M και του χρόνου T . Στο διεθνές σύστημα μονάδων SI μονάδα μήκους είναι το μέτρο (m), μάζας το χιλιόγραμμο (kg) και χρόνου το δευτερόλεπτο (s). Άλλες πρότυπες μονάδες είναι: της θερμοκρασίας το Κέλβιν (*Kelvin*), της έντασης ρεύματος το αμπέρ (*Ampère*), της έντασης της ακτινοβολίας η καντέλα (*Candela*) και της ποσότητας ύλης το μολ (*mole*).

Ορισμός 8.1.1 Το χιλιόγραμμο είναι η μάζα ενός κυλίνδρου κατασκευασμένου από κράμα λευκόχρυσου και ιριδίου που φυλάσσεται στο Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών στην πόλη *Sevres* της Γαλλίας.

Ορισμός 8.1.2 Ένα δευτερόλεπτο ορίζεται ο χρόνος που χρειάζεται ένα άτομο καυσίου 133 για να κάνει 9192631770 ταλαντώσεις.

Ορισμός 8.1.3 Ένα μέτρο ισούται με την απόσταση που διανύει το φως στο κενό στη διάρκεια $1/299792458$ του δευτερολέπτου.

Ορισμός 8.1.4 Ένα μολ οποιουδήποτε στοιχείου (ή χημικής ένωσης) αποτελείται από αριθμό μορίων (ή ατόμων) ίσο με τον αριθμό του *Avogadro*, $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ μόρια (ή άτομα) /mole.

8.2 Ανάλυση Διαστάσεων

Πολλές φορές την ορθότητα του αποτελέσματος ενός πολύπλοκου υπολογισμού στην Κλασική Μηχανική μπορούμε να την ελέγξουμε χρησιμοποιώντας τις φυσικές διαστάσεις θεμελιωδών μεγεθών όπως της μάζας $[M]$, του μήκους $[L]$ και του χρόνου $[T]$. Άλλες φορές χρησιμοποιώντας τη διαστατική ανάλυση μπορούμε να εκφράσουμε μαθηματικά φαινόμενα για τα οποία δεν είναι γνωστές οι εξισώσεις που τα περιγράφουν.

Τις διαστάσεις τις χειριζόμαστε σαν να ήταν αλγεβρικές ποσότητες. Μπορούμε λοιπόν να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ποσότητες που έχουν τις ίδιες διαστάσεις (διαστατική ομοιογένεια). Οι διαστάσεις της ταχύτητας, της επιτάχυνσης και της δύναμης είναι

$$\begin{aligned} \text{Ταχύτητα} &= \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{[L]}{[T]} \\ \text{Επιτάχυνση} &= \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \frac{[L]}{[T]^2} \\ \text{Δύναμη} &= \left[m \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = [M] \frac{[L]}{[T]^2} \end{aligned} \quad (8.1)$$

Εάν $[X_i] = 1$ η ποσότητα X_i λέγεται αδιάστατη. Ένας φυσικός νόμος θα πρέπει να είναι ελεύθερος μονάδων, δηλαδή να ισχύει ανεξάρτητα από το σύστημα μονάδων που έχουμε επιλέξει. Έτσι ο νόμος

$$g(X_1, \dots, X_m) = 0$$

θα είναι ελεύθερος μονάδων αν για κάθε επιλογή συντελεστών αλλαγής μονάδων $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ με $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, m$ έχουμε

$$g(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m) = 0 \Leftrightarrow g(X_1, \dots, X_m) = 0. \quad (8.2)$$

Οι συναρτήσεις: εκθετική, λογαριθμική, τριγωνομετρικές και υπερβολικές δεν έχουν διαστάσεις. Ο λόγος προκύπτει από το ανάπτυγμα σε σειρά *Taylor* γύρω από οποιοδήποτε σημείο οπότε η διάσταση κάθε όρου του αναπτύγματος θα αύξανε $\propto x^m, m \in \mathcal{N}$.

Παράδειγμα 8.2.1 Έστω a, t είναι η επιτάχυνση και ο χρόνος αντίστοιχα. Για ποιές τιμές των n, m η σχέση $x \propto a^n t^m$ είναι σωστή; Είναι ο νόμος αυτός ανεξάρτητος διαστάσεων;

Λύση Χρησιμοποιώντας ανάλυση διαστάσεων έχουμε

$$\begin{aligned} [x] &= [a]^n [t]^m \Rightarrow \\ [L] &= \frac{[L]^n}{[T]^{2n}} [T]^m \Rightarrow \\ n = 1 \quad \text{και} \quad m = 2 \end{aligned} \quad (8.3)$$

Εάν συγκρίνουμε τη (8.3) με την $x(t) = \frac{1}{2}at^2$, που εκφράζει την απόσταση x που διανύει κινητό σε χρόνο t εάν αρχικά ήταν ακίνητο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων και εν συνεχεία κινείται με σταθερή επιτάχυνση a , παρατηρούμε ότι διαφέρει μόνο κατά τον συντελεστή $\frac{1}{2}$. Πράγματι η γενική λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a = \text{σταθερά}$$

είναι

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + c_1t + c_2.$$

Οι συντελεστές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

$$x(t=0) = 0, \quad \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

και λαμβάνουν τις τιμές $c_1 = c_2 = 0$. Θεωρούμε τώρα ότι

$$\bar{x} = \lambda_1 x \quad \text{και} \quad \bar{t} = \lambda_2 t,$$

όπου λ_1, λ_2 συντελεστές που εκφράζουν την αλλαγή του συστήματος μονάδων. Τότε η επιτάχυνση a στο νέο σύστημα μονάδων θα έχει διαστάσεις

$$[\bar{a}] = \lambda_1 \lambda_2^{-2} a$$

Άρα

$$g(\bar{x}, \bar{t}, \bar{a}) = \bar{x} - \frac{1}{2}\bar{a}\bar{t}^2 = \lambda_1 \left(x - \frac{1}{2}at^2 \right) = 0$$

και ο νόμος $x(t) = \frac{1}{2}at^2$ είναι ανεξάρτητος διαστάσεων.

8.3 Σημαντικά Ψηφία

Όταν μετράμε διάφορες ποσότητες οι τιμές που βρίσκουμε εξαρτώνται από την ποιότητα της πειραματικής συσκευής, την ικανότητα του πειραματικού και το πλήθος των μετρήσεων.

Ορισμός 8.3.1 Σημαντικά ψηφία ενός μετρούμενου ή υπολογιζόμενου μεγέθους είναι τα ψηφία που γνωρίζουμε με ακρίβεια.

Για την ορθή αναφορά των σημαντικών ψηφίων υπάρχουν οι εξής κανόνες:

- (1) Κάθε ψηφίο που δεν είναι μηδενικό είναι σημαντικό π.χ. ο αριθμός 634 έχει 3 σημαντικά ψηφία.
- (2) Τα μηδενικά μεταξύ μη μηδενικών ψηφίων είναι σημαντικά ψηφία π.χ. ο αριθμός 2008 έχει 4 σημαντικά ψηφία.

- (3) Τα μηδενικά αριστερά από το πρώτο μη μηδενικό δεκαδικό ψηφίο δεν είναι σημαντικά, π.χ. το 0.000022 γράφεται στην μορφή 2.2×10^{-5} και έχει δύο σημαντικά ψηφία.
- (4) Στους δεκαδικούς αριθμούς, τα μηδενικά δεξιά από το μη μηδενικό ψηφίο είναι σημαντικά π.χ. ο αριθμός 5.00 έχει 3 σημαντικά ψηφία και ο 0.020 έχει 2 σημαντικά ψηφία.
- (5) Στους ακέραιους αριθμούς τα μηδενικά μπορεί να είναι ή να μην είναι σημαντικά γι αυτό πρέπει να σημειώνεται ως 200. όταν έχει 3 σημαντικά ψηφία ή 2×10^2 όταν έχει 1 σημαντικό ψηφίο.

Υπάρχουν ορισμένοι κανόνες για την αναγραφή της αβεβαιότητας δίπλα από κάθε μέτρηση. Θα πρέπει το τελευταίο σημαντικό ψηφίο κάθε μέτρησης να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την αβεβαιότητα. Επίσης η αβεβαιότητα να προσεγγίζεται με 1-2 σημαντικά ψηφία. Η αβεβαιότητα θα πρέπει να εκφράζεται πάντα αφού έχουν υπολογιστεί τα σημαντικά ψηφία της μέτρησης. Για παράδειγμα 2.62 ± 0.03 , 12.0 ± 1.5 , 4 ± 1 .

Κατά την πρόσθεση ή αφαίρεση το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων του αποτελέσματος καθορίζεται από τον μικρότερο αριθμό δεκαδικών ψηφίων των επιμέρους όρων π.χ. $69.432 + 1.1 = 70.5$. Το 70.5 καθορίζεται από το γεγονός ότι το μικρότερο αριθμό δεκαδικών ψηφίων από τους δύο όρους έχει το 1.1. Όταν εκτελούμε πολλαπλασιασμό, ή διαίρεση, ή υψώνουμε σε δύναμη ορισμένες ποσότητες, το πλήθος των σημαντικών ψηφίων του αποτελέσματος καθορίζεται από τον όρο που έχει το μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων π.χ. $(2.80) \times (4.5039) = 12.6$. Το 12.6 καθορίζεται από το γεγονός ότι το μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων από τους δύο όρους έχει το 2.80.

Είναι φανερό ότι για να πετύχουμε τα παραπάνω πρέπει τα αποτελεσμάτα να στρογγυλοποιούνται. Εάν το τελευταίο ψηφίο που πρόκειται να διατηρήσουμε ακολουθείται από τους αριθμούς 0, 1, 2, 3, 4 τότε του διατηρούμε την τιμή. Εάν όμως ακολουθείται από τους αριθμούς 6, 7, 8, 9 του αυξάνουμε την τιμή κατά μία μονάδα. Στην περίπτωση του 5 αυξάνουμε την τιμή κατά μία μονάδα εάν το προαναφερόμενο ψηφίο είναι περιττό και διατηρούμε την τιμή εάν είναι άρτιο.

8.4 Χώρος και Χρόνος

Αστρονομικές μετρήσεις μας οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία δίνει μια εξαιρετικά καλή περιγραφή μετρήσεων που σχετίζονται με μήκη, εμβαδά και γωνίες μέχρι αποστάσεις της τάξης $10^{26}m$. Ο Ευκλείδειος χώρος από πειράματα που έχουν διεξαχθεί στο κενό έχει δύο ιδιότητες:

- (i) Ομοιογένεια. Με τον όρο αυτό εννοούμε ότι όταν ένα αντικείμενο μετατοπιστεί στο κενό από μία θέση σε μία άλλη, χωρίς να περιστρέφεται, το μέγεθος, οι γεωμετρικές και οι φυσικές ιδιότητές του δεν μεταβάλλονται.
- (ii) Ισοτροπία. Με τον όρο αυτό εννοούμε ότι όλες οι διευθύνσεις του χώρου είναι ισοδύναμες. Αποτέλεσμα της ισοτροπίας του κενού χώρου είναι η σταθερή ταχύτητα διάδοσης του φωτός προς όλες τις κατευθύνσεις σε αντίθεση με ένα κρύσταλλο όπου παρουσιάζονται έντονα φαινόμενα ανισοτροπίας όταν το φως διέλθει από αυτόν.

Υπάρχει στενή σχέση μεταξύ νόμων διατήρησης και συμμετριών. Έτσι η ομοιογένεια του χώρου συνεπάγεται την διατήρηση της γραμμικής ορμής ενώ η ισοτροπία του χώρου τη διατήρηση της στροφορμής.

Στην Νευτώνεια μηχανική ο χρόνος είναι απόλυτος δηλαδή μπορούμε πάντα να αποφανθούμε εάν δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα ή εάν το ένα προηγείται του άλλου. Για να αποφασίσουν δύο παρατηρητές ποιο από τα γεγονότα προηγείται θα πρέπει να συγχρονίσουν τα ρολόγια τους χρησιμοποιώντας κάποιο σήμα. Επίσης ο χρόνος είναι ομοιογενής δηλαδή ένα ελεύθερο σωματίδιο που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα δεν θα πρέπει να έχει διαφορετική ταχύτητα κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή.

Κεφάλαιο 9

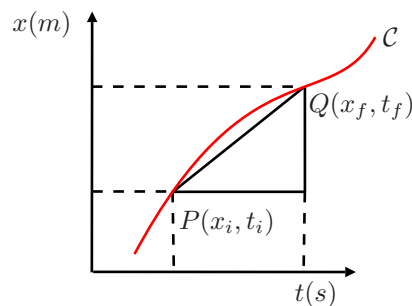
Κίνηση σε μια και δύο Διαστάσεις

9.1 Ταχύτητα και Επιτάχυνση σε μία Διάσταση

Θεωρούμε σώμα που κινείται σε μία διάσταση. Η θέση του σαν συνάρτηση του χρόνου, $x(t)$, παριστάνεται από την καμπύλη \mathcal{C} στο χωροχρονικό διάγραμμα- $x-t$. Εάν οι συντεταγμένες του σημείου P είναι (x_i, t_i) και του Q οι (x_f, t_f) , ορίζουμε σαν μετατόπιση του κινητού στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_f - t_i$ την διαφορά $\Delta x = x_f - x_i$.

Ορισμός 9.1.1 Η μέση ταχύτητα ενός σώματος σε μία διάσταση ισούται με το λόγο της μετατόπισης Δx , προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt

$$\bar{v} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{x(t_i + \Delta t) - x(t_i)}{\Delta t}. \quad (9.1)$$



Σχήμα 9.1: Γραφική παράσταση θέσης - χρόνου για σώμα που κινείται στον άξονα x . Η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος \overline{PQ} είναι η μέση ταχύτητα \bar{v} που αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα Δt

Η κλίση μπορεί να είναι θετική (αρνητική) ή μηδέν ανάλογα με το εάν η γωνία είναι θετική (αρνητική) ή μηδέν. Στην περίπτωση αυτή $x_f > x_i$ ($x_f < x_i$).

Παρατήρηση 9.1.2 Η μέση ταχύτητα είναι ανεξάρτητη από την διαδρομή που συνδέει τα σημεία P και Q και εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες τους. Έτσι εάν ένα σώμα επιστρέψει στη θέση από την οποία ξεκίνησε τότε $\Delta x = 0$. Δεν πρέπει να συγχέεται η μετατόπιση ενός σώματος Δx με το διάστημα Δs που έχει διανύσει ένα κινητό (το συνολικό μήκος της διαδρομής που έχει καλύψει το κινητό).

Πολλές φορές η μέση ταχύτητα σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, μεταβάλλεται με το χρόνο, οπότε χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε την ταχύτητα του σώματος μια ορισμένη χρονική στιγμή. Έτσι οδηγούμαστε στον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας.

Ορισμός 9.1.3 Η στιγμιαία ταχύτητα v ενός σώματος που κινείται σε μία διάσταση, είναι ίση με το όριο της μέσης ταχύτητας στο χρονικό διάστημα Δt όταν το $\Delta t \rightarrow 0$

$$v \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (9.2)$$

Η γεωμετρική ερμηνεία της στιγμιαίας ταχύτητας είναι ότι παριστάνει την κλίση της καμπύλης $x(t)$ τη χρονική στιγμή t . Εάν είναι θετική (αρνητική) τότε η $x(t)$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) και μηδέν στα κρίσιμα σημεία.

Θεωρούμε σώμα που κινείται με μεταβλητή μέση ταχύτητα από το σημείο P με συντεταγμένες (v_i, t_i) στο σημείο Q με συντεταγμένες (v_f, t_f) .

Ορισμός 9.1.4 Η μέση επιτάχυνση \bar{a} ενός σώματος ισούται με το λόγο της μεταβολής της ταχύτητας $\Delta v = v_f - v_i$ προς το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_f - t_i$

$$\bar{a} \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{v(t_i + \Delta t) - v(t_i)}{\Delta t}. \quad (9.3)$$

Όταν η μέση επιτάχυνση μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε ορίζουμε την στιγμιαία επιτάχυνση

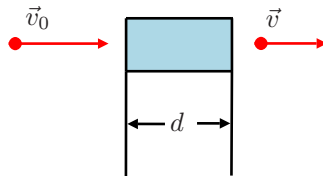
Ορισμός 9.1.5 Η στιγμιαία επιτάχυνση a ενός σώματος που κινείται σε μία διάσταση, είναι ίση με το όριο της μέσης επιτάχυνσης στο χρονικό διάστημα Δt όταν $\Delta t \rightarrow 0$

$$a \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (9.4)$$

Παράδειγμα 9.1.6 Συμπαγές βλήμα χτυπάει σανίδα πάχους d με ταχύτητα \vec{v}_0 και εξέρχεται από αυτή με ταχύτητα \vec{v} . Να υπολογίσετε:

1. Το συνολικό χρόνο που το βλήμα βρίσκεται σε επαφή με την σανίδα.
2. Την μέση επιτάχυνση του βλήματος.
3. Ποιο θα έπρεπε να είναι το πάχος της σανίδας για να σταματήσει το βλήμα;

Λύση



Σχήμα 9.2: Το βλήμα πριν και μετά την κρούση του με την σανίδα.

1. Η μέση ταχύτητα του βλήματος δίνεται από την (9.1)

$$\bar{v} = \frac{x(t_i + \Delta t_1) - x(t_i)}{\Delta t_1} = \frac{1}{2}(v_0 + v). \quad (9.5)$$

Εάν επιλύσουμε την εξίσωση (9.5) ως προς Δt_1 , δεδομένου ότι το πάχος της σανίδας είναι $\Delta x = d$, ο χρόνος παραμονής του βλήματος στην σανίδα θα είναι

$$\Delta t_1 = \frac{2d}{v_0 + v}. \quad (9.6)$$

2. Η μέση επιτάχυνση του βλήματος δίνεται από τη (9.3) που σε συνδυασμό με την (9.6) γράφεται

$$\bar{a} = \frac{v - v_0}{\Delta t_1} = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}. \quad (9.7)$$

3. Έστω x το επιπλέον πάχος που πρέπει να έχει η σανίδα έτσι ώστε να σταματήσει το βλήμα. Ο συνολικός χρόνος $\Delta t_{\text{ολ}}$, που χρειάζεται το βλήμα για να διανύσει την απόσταση $d + x$ θα ισούται με

$$\Delta t_{\text{ολ}} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2d}{v_0 + v} + \frac{2x}{v}. \quad (9.8)$$

Ο συνολικός όμως χρόνος θα δίνεται από την

$$\Delta t_{\text{ολ.}} = \frac{2(d+x)}{v_0}, \quad (9.9)$$

οπότε επιλύοντας την (9.8) ως προς x έχουμε

$$x = \frac{v^2 d}{v_0^2 - v^2}. \quad (9.10)$$

Στα ίδια αποτελέσματα καταλήγουμε εάν εφαρμόσουμε τη γενικευμένη σχέση διατήρησης της ενέργειας και υποθέσουμε ότι η δύναμη τριβής που αναπτύσσεται από την επαφή του βλήματος με το ξύλο έχει σταθερό μέτρο και διεύθυνση παράλληλη με τη βάση της σανίδας.

9.2 Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση

Στην περίπτωση αυτή η μέση και η στιγμιαία επιτάχυνση ταυτίζονται και ισχύει

$$\bar{a} = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}. \quad (9.11)$$

Εάν συμβολίσουμε με $v_f = v$, $v_i = v_0$ και σαν αρχή μέτρησης του χρόνου θεωρήσουμε τη χρονική στιγμή $t_i = 0$, η προηγούμενη σχέση γράφεται στην απλούστερη μορφή

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad \text{ή} \quad v = v_0 + at, \quad a = \text{σταθ.} \quad (9.12)$$

Επειδή η ταχύτητα εξαρτάται γραμμικά με το χρόνο η μέση ταχύτητα θα είναι ο αριθμητικός μέσος της αρχικής και της τελικής ταχύτητας

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

Η μετατόπιση στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_f - t_i = t$ είναι

$$\Delta x = \bar{v} \Delta t = \left(\frac{v_0 + v}{2} \right) t, \quad \text{ή} \quad x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)t. \quad (9.13)$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση $v = v_0 + at$ για να απαλείψουμε την τελική ταχύτητα v από την (9.13), έχουμε

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \quad (9.14)$$

Την ορθότητα της προηγούμενης σχέσης μπορούμε να την ελέγξουμε εάν την παραγωγίσουμε ως προς το χρόνο. Τέλος το τετράγωνο του μέτρου της ταχύτητας μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της απόστασης από την σχέση

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \quad (9.15)$$

Παράδειγμα 9.2.1 Μελέτη της ελεύθερης πτώσης σωμάτων υπό την επίδραση του γήινου βαρυντικού πεδίου.

Λύση Η προηγούμενη ανάλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μελετήσουμε την ελεύθερη πτώση σώματος όταν η αντίσταση του αέρα αμελείται, υπάρχει άπνοια και η επιτάχυνση της βαρύτητας διατηρείται σταθερή. Πρώτος ο Γαλιλαίος παρατήρησε ότι εάν αφήσουμε ταυτόχρονα να πέσουν αντικείμενα διαφορετικού βάρους τότε θα φθάσουν στο έδαφος την ίδια σχεδόν χρονική στιγμή. Το 1971 ο αστροναύτης *David Scott* άφησε στην Σελήνη ταυτόχρονα ένα σφυρί και ένα φτερό. Το αποτέλεσμα ήταν να προσεληνωθούν την ίδια στιγμή, επιβεβαιώνοντας έτσι την πρόβλεψη του Γαλιλαίου. Την επιτάχυνση της βαρύτητας θα την συμβολίζουμε με \bar{g} και η τιμή της κοντά στην επιφάνεια της θάλασσας ισούται με 9.80 m/s^2 . Η τιμή αυτή εξαρτάται από δύο παράγοντες: το υψόμετρο και το γεωγραφικό πλάτος. Είναι ανεξάρτητη από τη μάζα, την ταχύτητα πτώσης και τη χημική σύνθεση του σώματος που εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Ένα σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση εάν κινείται προς τα πάνω ή προς τα κάτω. Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι κάθε σώμα που ρίχνεται προς τα πάνω (ή προς τα κάτω) υφίσταται την ίδια επιτάχυνση με ένα αντικείμενο που αρχίζει να πέφτει ενώ αρχικά ήταν ακίνητο. Οποιοδήποτε αντικείμενο που βρίσκεται σε κατάσταση ελεύθερης

πτώσης υφίσταται επιτάχυνση προς τα κάτω και ισούται με την βαρυντική. Η κίνηση ενός σώματος που εκτελεί ελεύθερη πτώση είναι ισοδύναμη με την κίνηση ενός σώματος που κινείται με σταθερή επιτάχυνση a σε μία διάσταση. Εάν αντικαταστήσουμε το x με το y και θεωρήσουμε θετική τη πρὸς τα πάνω κατεύθυνση, η επιτάχυνση a θα αντικατασταθεί από $-g$ και θα έχουμε τις παρακάτω σχέσεις

$$v = v_0 - gt \quad (9.16)$$

$$y - y_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)t \quad (9.17)$$

$$y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (9.18)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \quad (9.19)$$

Το μέγιστο ύψος που θα φθάσει το σώμα όταν εκτοξευτεί προς τα πάνω δίνεται από την σχέση (9.17) αφού πρώτα υπολογίσουμε το χρόνο που χρειάζεται για να φθάσει σε αυτό. Έτσι βρίσκουμε ότι $t_1 = \frac{v_0}{g}$ οπότε $y_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$.

Θα εξάγουμε τώρα την εξίσωση κίνησης χρησιμοποιώντας το άθροισμα κατά *Riemann*. Θεωρούμε σώμα που κινείται στην κατεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα $v(t)$. Στο διάγραμμα $v - t$ διαμερίζουμε το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_f - t_i$ σε υποδιαστήματα χρησιμοποιώντας μια πεπερασμένη ακολουθία σημείων $t_0 = t_i < \dots < t_n = t_f$. Η συνολική μετατόπιση του σώματος θα δίνεται από το άθροισμα

$$\Delta x_n = \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \quad (9.20)$$

όπου $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Όταν αυξάνεται το πλήθος των όρων της ακολουθίας, δηλαδή για $n \rightarrow \infty$, το πλάτος Δt_i τείνει στο μηδέν και η μετατόπιση ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα των χρόνων

$$\Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x_n = \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt. \quad (9.21)$$

9.3 Ταχύτητα και Επιτάχυνση σε δύο Διαστάσεις

Θα μελετήσουμε τώρα την κίνηση ενός σημειακού σώματος στον Ευκλείδειο διδιάστατο χώρο, δηλαδή στο επίπεδο. Παραδείγματα αποτελούν η κίνηση των βλημάτων, των φορτισμένων σωματιδίων σε ομογενή ηλεκτρικά πεδία και γενικότερα η κίνηση σωμάτων κάτω από την επίδραση κεντρικών δυνάμεων.

Η θέση ενός σώματος οποιαδήποτε χρονική στιγμή καθορίζεται πλήρως από το διάνυσμα θέσης (ή επιβατική ακτίνα) $\vec{r}(t)$. Θα υποθέσουμε ότι $\vec{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μία καμπύλη κλάσεως C^2 ¹. Η αρχή του διανύσματος θέσης ταυτίζεται με τη αρχή του συστήματος συντεταγμένων και το πέρας του με το υλικό σημείο. Εάν στο επίπεδο xy τη χρονική στιγμή t_i το σώμα βρίσκεται στη θέση \vec{r}_i και τη στιγμή t_f το σώμα βρίσκεται στη θέση \vec{r}_f το διάνυσμα της μετατόπισης θα δίνεται από την διανυσματική διαφορά $\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)$.

Ορισμός 9.3.1 Η μέση ταχύτητα \vec{v} ορίζεται σαν ο λόγος της διανυσματικής μετατόπισης πρὸς το χρονικό διάστημα που έγινε η μετατόπιση

$$\vec{v} \equiv \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} = \frac{\vec{r}(t_i + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (9.22)$$

Παρατήρηση 9.3.2 Επισημαίνουμε ότι, όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, η μέση ταχύτητα εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του κινητού και όχι από την καμπύλη που τα συνδέει. Έτσι εάν ένα κινητό διαγράψει οποιαδήποτε κλειστή τροχιά η μετατόπισή του θα είναι μηδενική.

Ορισμός 9.3.3 Η στιγμιαία ταχύτητα \vec{v} ορίζεται σαν το όριο της μέσης ταχύτητας \vec{v} στο χρονικό διάστημα Δt όταν $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (9.23)$$

¹Μία καμπύλη $\vec{r}(t)$ του \mathbb{R}^3 είναι κλάσεως C^n εάν υπάρχουν και είναι συνεχείς οι παράγωγοι $\frac{d^k \vec{r}(t)}{dt^k}$ για $k \leq n \in \mathcal{N} \cup \{0\}$.

Ο φορέας της στιγμιαίας ταχύτητας συμπίπτει με την εφαπτομένη στο σημείο της τροχιάς που βρίσκεται το κινητό και έχει φορά την φορά της κίνησης.

Ορισμός 9.3.4 Ορίζουμε μέση επιτάχυνση \vec{a} ενός σώματος, το λόγο της μεταβολής του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας $\Delta\vec{v}$ προς τον αντίστοιχο χρόνο Δt

$$\vec{a} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\vec{v}(t_i + \Delta) - \vec{v}(t_i)}{\Delta t}. \quad (9.24)$$

Ένα κινούμενο σώμα μπορεί να έχει μέση επιτάχυνση λόγω μεταβολής του μέτρου της στιγμιαίας ταχύτητας αλλά όχι της διεύθυνσής της (όπως είναι η ελεύθερη πτώση σώματος), ή λόγω μεταβολής της διεύθυνσης της στιγμιαίας ταχύτητας αλλά όχι του μέτρου της (όπως είναι η ομαλή κυκλική κίνηση) ή λόγω μεταβολής και των δύο παραγόντων (όπως είναι η καμπυλόγραμμη κίνηση).

Ορισμός 9.3.5 Ορίζουμε στιγμιαία επιτάχυνση \vec{a} το όριο της μέσης επιτάχυνσης όταν $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (9.25)$$

Παράδειγμα 9.3.6 Να εκφραστούν η στιγμιαία ταχύτητα και επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες.

Λύση Τα διανύσματα της πολικής ορθοκανονικής βάσης γράφονται συναρτήσει των διανυσμάτων της Καρτεσιανής βάσης σαν

$$\begin{aligned} \hat{e}_r(t) &= \cos\theta(t)\hat{i} + \sin\theta(t)\hat{j} \\ \hat{e}_\theta(t) &= -\sin\theta(t)\hat{i} + \cos\theta(t)\hat{j}. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ικανοποιούν

$$\langle \hat{e}_r, \hat{e}_\theta \rangle = 0, \quad \|\hat{e}_r\| = \|\hat{e}_\theta\| = 1.$$

Οι παράγωγοι τους είναι

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_r(t)}{dt} = \dot{\hat{e}}_r(t) &= -\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\hat{i} + \dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\hat{j} = \dot{\theta}(t)\hat{e}_\theta(t) \\ \frac{d\hat{e}_\theta(t)}{dt} = \dot{\hat{e}}_\theta(t) &= -\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\hat{i} - \dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\hat{j} = -\dot{\theta}(t)\hat{e}_r(t). \end{aligned} \quad (9.27)$$

Το διάνυσμα θέσεως στην πολική βάση γράφεται

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = r\cos\theta\hat{i} + r\sin\theta\hat{j} = r(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) = r\hat{e}_r \quad (9.28)$$

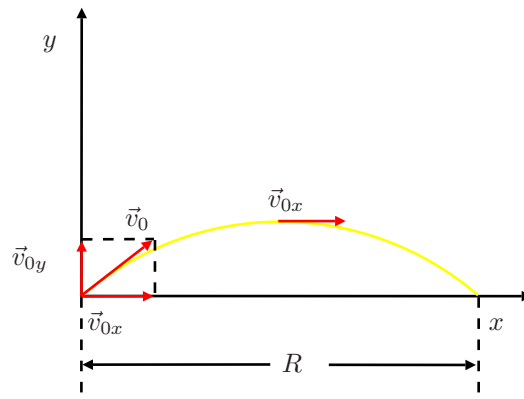
οπότε η γραμμική ταχύτητα δίνεται από την

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(r(t)\hat{e}_r(t)) \\ &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r \\ &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \\ &= \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \end{aligned} \quad (9.29)$$

και αναλύεται σε μία ακτινική συνιστώσα μέτρου \dot{r} και μία γωνιακή συνιστώσα μέτρου $r\dot{\theta}$. Μία δεύτερη παραγωγή δίνει την γραμμική επιτάχυνση

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Παράδειγμα 9.3.7 Μελέτη της επίπεδης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης στην οποία το μέτρο και η φορά της επιτάχυνσης δεν μεταβάλλονται.



Σχήμα 9.3: Η παραβολική τροχιά ενός βλήματος που εκτοξεύεται με ταχύτητα \vec{v}_0 .

Λύση Το διάνυσμα θέσης του σώματος ως προς ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων γράφεται

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

ενώ η στιγμιαία του ταχύτητα δίνεται από την

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}. \quad (9.31)$$

Επειδή η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη, το διάνυσμα \vec{a} θα είναι σταθερό, και θα ισχύει $\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}t$. Η σχέση αυτή σε συνιστώσες γράφεται ισοδύναμα

$$\vec{v} = (v_{0x} + a_x t)\hat{i} + (v_{0y} + a_y t)\hat{j} = (v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}) + (a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t \quad (9.32)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας και ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο έχουμε

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \Rightarrow \int \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int (\vec{v}_0 + \vec{a}t) dt \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad (9.33)$$

όπου \vec{r}_0 η μετατόπιση του σώματος τη χρονική στιγμή t_0 , δηλαδή $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$. Οι προηγούμενες σχέσεις μπορούν να εφαρμοστούν στη μελέτη της κίνησης βλημάτων. Θα υποθέσουμε ότι:

- η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα
- υπάρχει άπνοια και
- η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σταθερή με φορά προς τα κάτω.

Όταν η ταχύτητα του σώματος είναι μεγάλη δεν μπορεί να αγνοηθεί η επίδραση της αντίστασης. Επίσης η τρίτη υπόθεση είναι ισοδύναμη με την παραδοχή ότι η Γη είναι επίπεδη που συμβαίνει όταν το βεληνεκές και το ύψος της τροχιάς είναι μικρά σε σύγκριση με την ακτίνα της Γης ($6.4 \times 10^6 m$). Επειδή το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a} = -\vec{g}$ οι συνιστώσες τις θα είναι

$$\vec{a}_x = \vec{0}, \quad \vec{a}_y = -\vec{g}. \quad (9.34)$$

Προσέξτε ότι η οριζόντια συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι μηδενική αφού η αντίσταση του αέρα αγνοήτε. Θεωρούμε λοιπόν βλήμα που βάλλεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ με αρχική ταχύτητα \vec{v}_0 και σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x . Οι συνιστώσες της αρχικής ταχύτητας δίνονται από τις σχέσεις

$$v_{0x} = \cos \theta v_0, \quad v_{0y} = \sin \theta v_0 \quad (9.35)$$

Επειδή $\vec{a}_x = \vec{0}$ η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας είναι σταθερή και έχει σταθερό μέτρο ίσο με v_{0x} . Επίσης η οριζόντια απόσταση δίνεται από την $x = v_{0x}t$. Για την κατακόρυφη διεύθυνση ισχύουν οι σχέσεις

$$v_y = v_{0y} - gt = \sin \theta v_0 - gt, \quad (9.36)$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (9.37)$$

Μπορούμε να απαλείψουμε το χρόνο από την y συνιστώσα της μετατόπισης και να την εκφράσουμε σαν συνάρτηση του x ως

$$y = \tan \theta x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (9.38)$$

Η προηγούμενη εξίσωση είναι της μορφής

$$y = -c_2 x^2 + c_1 x = -c_2 \left(x - \frac{c_1}{2c_2} \right)^2 + \frac{c_1^2}{4c_2}$$

και αναπαριστά την εξίσωση παραβολής που διέρχεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων με κορυφή το σημείο $(\frac{c_1}{2c_2}, \frac{c_1^2}{4c_2})$. Παρατηρήστε ότι η κίνηση είναι επαλληλία (ή υπέρθεση) δύο κινήσεων. Μιας κατά την διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας \vec{v}_0 και μιας κατά την διεύθυνση της βαρυντικής επιτάχυνσης $-\vec{g}$ (ελεύθερη πτώση). Μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες $(\frac{R}{2}, h)$ του τοπικού μεγίστου της παραβολής, όπως επίσης και το βεληνεκές $(R, 0)$ της τροχιάς. Όταν το βλήμα φθάσει στο μέγιστο ύψος του, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας θα μηδενιστεί $v_y = 0$. Οπότε ο χρόνος ανόδου θα δίνεται από την

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \theta}{g}. \quad (9.39)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην εξίσωση (9.37) έχουμε

$$h = y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}. \quad (9.40)$$

Το βεληνεκές R ισούται με την οριζόντια απόσταση που διήνυσε το βλήμα σε χρόνο $2t_1$ δηλαδή

$$R = 2t_1 v_{0x} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}. \quad (9.41)$$

Ο συνολικός χρόνος που κινείται το βλήμα μπορεί να υπολογιστεί εάν θέσουμε στην εξίσωση (9.37) όπου $y = 0$ και λύσουμε ως προς t . Το μέγιστο βεληνεκές επιτυγχάνεται στην γωνία $\theta = \frac{\pi}{4}$ και έχει τιμή

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (9.42)$$

Παράδειγμα 9.3.8 Μελέτη της ομαλής κυκλικής κίνησης στην οποία το μέτρο της ταχύτητας $|\vec{v}|$ είναι σταθερό αλλά η διεύθυνσή της μεταβάλλεται.

Λύση Θα αποδείξουμε ότι στην περίπτωση αυτή η επιτάχυνση είναι κάθετη στην κυκλική τροχιά, έχει φορά προς το κέντρο του κύκλου και το μέτρο της είναι

$$a_r = \frac{v^2}{r}. \quad (9.43)$$

Έστω ότι το κινητό τη χρονική στιγμή t_i βρίσκεται στο σημείο P και έχει ταχύτητα \vec{v}_i . Τη χρονική στιγμή t_f είναι στο σημείο Q και έχει ταχύτητα \vec{v}_f . Η μέση επιτάχυνση του κινητού θα είναι

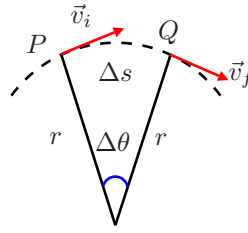
$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (9.44)$$

Υπενθυμίζουμε ότι $|\vec{v}_i| = |\vec{v}_f| = |\vec{v}| = v$. Ας υποθέσουμε ότι το χρονικό διάστημα Δt είναι πολύ μικρό. Τότε η γωνία $\Delta \theta$ και το τόξο Δs θα είναι πολύ μικρά οπότε τα διανύσματα \vec{v}_i, \vec{v}_f θα είναι σχεδόν παράλληλα. Το $\Delta \vec{v}$ θα είναι κάθετο σε αυτά με κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου. Λόγω ομοιότητας των τριγώνων θα έχουμε

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{r} \quad (9.45)$$

και από τον ορισμό της μέσης επιτάχυνσης τελικά πέρνουμε

$$\vec{a} = \frac{v \Delta s}{r \Delta t}. \quad (9.46)$$



Σχήμα 9.4: Κίνηση υλικού σημείου σε κυκλική τροχιά από την θέση P στη θέση Q .

Όταν $\Delta t \rightarrow 0$ η στιγμιαία επιτάχυνση δίνεται από την

$$a_r = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}. \quad (9.47)$$

Η επιτάχυνση αυτή ονομάζεται κεντρομόλος επιτάχυνση.

Παράδειγμα 9.3.9 Μελέτη της κίνησης όπου το μέτρο και η διεύθυνση της ταχύτητας μεταβάλλονται.

Λύση Η επιτάχυνση μπορεί πάντα να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες. Μία κάθετη στην τροχιά (η ακτινική ή κεντρομόλος συνιστώσα) και μία εφαπτομενική της τροχιάς (η εφαπτομενική ή επιτρόχια συνιστώσα). Εάν ορίσουμε σαν $\vec{N}(s)$ το μοναδιαίο κατά την ακτινική διεύθυνση και $\vec{T}(s)$ το μοναδιαίο κατά την εφαπτομενική κατεύθυνση, η επιτάχυνση γράφεται

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \hat{e}_T - \frac{v^2}{r} \hat{e}_N. \quad (9.48)$$

Το αρνητικό πρόσημο στην κεντρομόλο επιτάχυνση \vec{a}_N σημαίνει ότι έχει φορά αντίθετη από την φορά του $\vec{N}(s)$. Πράγματι

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v\vec{T}(s)) \\ &= \frac{dv}{dt} \vec{T} + v \frac{d\vec{T}(s)}{dt} \end{aligned} \quad (9.49)$$

αλλά

$$\frac{d\vec{T}(s)}{dt} = \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = -k\vec{N}v = -\frac{v}{r}\vec{N}$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Στην ομαλή κυκλική κίνηση επειδή το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό η επιτρόχια επιτάχυνση μηδενίζεται οπότε εμφανίζεται μόνο κεντρομόλος επιτάχυνση. Η κεντρομόλος επιτάχυνση μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με την ακτίνα καμπυλότητα $r = 1/k$ της \vec{r} στο σημείο $\vec{r}(s)$ της τροχιάς. Όταν η κατεύθυνση της \vec{v} δεν μεταβάλλεται δηλαδή η κίνηση είναι ευθύγραμμη, τότε $r \rightarrow \infty$ και $a_r = 0$.

9.4 Σχετική Ταχύτητα και Επιτάχυνση

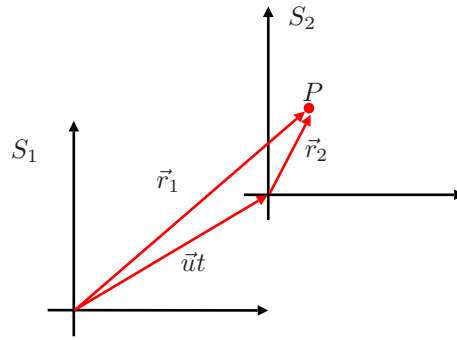
Πολλές φορές το ίδιο φυσικό φαινόμενο μπορεί να περιγραφεί διαφορετικά από παρατηρητές που βρίσκονται σε σχετική κίνηση. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων τους μπορεί ανάλογα με τα φυσικά μεγέθη να διαφωνούν ή να συμφωνούν. Θεωρήστε παρατηρητή με σύστημα αναφοράς S_1 το οποίο είναι ακίνητο ως προς τη Γη και δεύτερο παρατηρητή με σύστημα S_2 το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα \vec{u} ως προς τον πρώτο. Το σημείο P ως προς το S_1 σύστημα έχει διάνυσμα θέσης \vec{r}_1 και ως προς το S_2 έχει διάνυσμα θέσης \vec{r}_2 . Εάν οι αρχές των συστημάτων συμπίπτουν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ τα διανύσματα θέσης οποιαδήποτε χρονική στιγμή συνδέονται με τη σχέση

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{u}t. \quad (9.50)$$

Η ταχύτητα βρίσκεται εάν παραγωγίσουμε την προηγούμενη σχέση ως προς το χρόνο ²

$$\vec{v}_2(t) = \vec{v}_1(t) - \vec{u} \quad (9.51)$$

²Σημειώστε ότι $\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2(t')}{dt'} = \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}$ γιατί ο χρόνος στη Κλασική Μηχανική είναι απόλυτος δηλαδή $t = t'$.



Σχήμα 9.5: Δύο παρατηρητές περιγράφουν την κίνηση ενός σώματος που κάποια δεδομένη χρονική στιγμή βρίσκεται στο σημείο P . Τα συστήματα αναφοράς S_1 και S_2 , ως προς τα οποία ηρεμούν οι παρατηρητές, κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα \vec{u} . Η επιβατική ακτίνα του σημείου P ως προς το S_1 είναι \vec{r}_1 ενώ ως προς το S_2 είναι \vec{r}_2 .

Οι δύο αυτές εξισώσεις είναι γνωστές σαν μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου. Η σχετική ταχύτητα των δύο συστημάτων είναι σταθερή οπότε θα ισχύει

$$\vec{a}_2(t) = \vec{a}_1(t) - \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{a}_1(t). \tag{9.52}$$

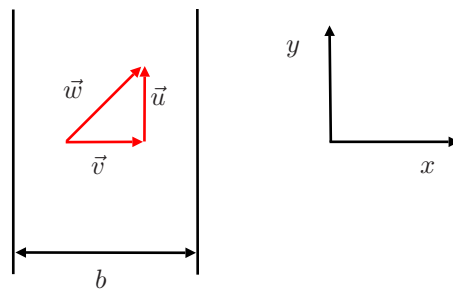
Δηλαδή οι παρατηρητές θα μετρούν την ίδια επιτάχυνση για το σώμα στο σημείο P όταν η σχετική ταχύτητα των συστημάτων αναφοράς είναι σταθερή.

Παράδειγμα 9.4.1 Βάρκα διασχίζει ποταμό κινούμενη κάθετα στις δύο παράλληλες όχθες του με ταχύτητα v ως προς τα ύδατα του ποταμού. Το πλάτος του ποταμού είναι b . Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα ροής των υδάτων του ποταμού δίνεται από τη σχέση

$$u(x) = u_0 - 4\frac{u_0}{b^2} \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 \tag{9.53}$$

όπου x η απόσταση από την όχθη και u_0 γνωστή σταθερά. Πόσο θα μετατοπιστεί η βάρκα κατά μήκος της ροής του ποταμού όταν φθάσει στην απέναντι όχθη;

Λύση



Σχήμα 9.6: Κίνηση βάρκας σε ποταμό.

Γνωρίζουμε ότι \vec{v} είναι η ταχύτητα της βάρκας ως προς τα ύδατα του ποταμού, \vec{u} είναι η ταχύτητα των υδάτων του ποταμού ως προς την όχθη και έστω \vec{w} η ταχύτητα της βάρκας ως προς την όχθη. Από το νόμο πρόσθεσης των ταχυτήτων του Γαλιλαίου έχουμε

$$\vec{w} = \vec{v} + \vec{u} \Rightarrow w_x = v \quad \text{και} \quad w_y = u = \frac{dy}{dt} \tag{9.54}$$

Η w_y υπολογίζεται από την εξίσωση

$$\int_0^y dy' = \int_0^t \left(u_0 - 4\frac{u_0}{b^2} \left(vt' - \frac{b}{2} \right)^2 \right) dt' \Rightarrow y(x) = \frac{u_0}{v} \left[x - \frac{4}{3b^2} \left[\left(x - \frac{b}{2} \right)^3 + \frac{b^3}{8} \right] \right] \tag{9.55}$$

όπου η x εξάρτηση της ταχύτητας u απαλείφθηκε χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = vt$. Η βάρκα στην απέναντι όχθη βρίσκεται σε κάθετη απόσταση

$$y(b) = \frac{2bu_0}{3v} \quad (9.56)$$

από την θέση εκκίνησης.

Σε μεγάλες ταχύτητες οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου αντικαθίστανται από τους μετασχηματισμούς *Lorentz* της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Στην περίπτωση που τα συστήματα συντεταγμένων κινούνται παράλληλα με τον άξονα x με σταθερή ταχύτητα \vec{v} οι μετασχηματισμοί *Lorentz* είναι

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x - vt), \quad y_2 = y_1, \quad z_2 = z_1, \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (9.57)$$

Για ταχύτητες μικρές συγκρινόμενες με την ταχύτητα του φωτός οι μετασχηματισμοί αυτοί ανάγονται στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου. Αυτό αποτελεί συνέπεια της αρχής αντιστοιχίας του *Niels Bohr* σύμφωνα με την οποία μια γενικότερη θεωρία πρέπει να προβλέπει όλα τα φαινόμενα που προέβλεπε η παλαιότερη θεωρία. Από πειράματα στις υψηλές ενέργειες γνωρίζουμε ότι οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου δεν έχουν ισχύ σε μεγάλες ταχύτητες. Είναι αξιοσημείωτο ότι ενώ η Κλασική Μηχανική δεν θέτει ανώτερο όριο στις ταχύτητες των σωμάτων η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας δηλώνει αξιωματικά ότι κανένα σώμα δεν έχει ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός.

Κεφάλαιο 10

Οι Νόμοι της Κίνησης

Στα προηγούμενα κεφάλαια περιγράψαμε την κίνηση σωμάτων από την σκοπιά της Κινηματικής χρησιμοποιώντας τις έννοιες της μετατόπισης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης χωρίς να γίνεται αναφορά στα αίτια που προκαλούν την κίνηση. Τώρα θα μελετήσουμε την κίνηση ενός σώματος από την σκοπιά της Δυναμικής όπου με τη χρήση των εννοιών της μάζας, της δύναμης και της ορμής θα κατανοήσουμε τους παράγοντες στους οποίους οφείλεται η κίνηση. Υπενθυμίζουμε ότι στην Κλασική Μηχανική τα σώματα έχουν διαστάσεις πολύ μεγαλύτερες από τη διάμετρο του ατόμου του υδρογόνου $\approx 10^{-10}m$ και κινούνται με ταχύτητα πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός $c \approx 3 \times 10^8 m/s$.

10.1 Η Έννοια της Δύναμης

Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε ότι η δύναμη συνδέεται άμεσα με την μεταβολή της κινητικής κατάστασης ενός σώματος. Όταν πετάμε ή κλωτσάμε μία μπάλα ασκούμε επάνω της μία δύναμη η οποία αλλάζει την ταχύτητά της. Οι δυνάμεις δεν έχουν απαραίτητα σαν αποτέλεσμα την κίνηση ενός σώματος. Έτσι όταν καθόμαστε, παρόλο που ασκείται πάνω μας η δύναμη της βαρύτητας, δεν κινούμαστε. Η δύναμη είναι το αίτιο της επιτάχυνσης (ή της επιβράδυνσης) ενός σώματος.

Ορισμός 10.1.1 Ένα σώμα ισορροπεί ή βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας εάν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι μηδενική. Στην περίπτωση αυτή η επιτάχυνσή του θα είναι μηδενική και το σώμα θα είναι ακίνητο ή θα κινείται ισοταχώς.

Εάν υιοθετήσουμε την αναχρονιστική θεώρηση των εμπειριστών, τις δυνάμεις μπορούμε να τις διακρίνουμε σε δύο βασικές κατηγορίες

1. Τις δυνάμεις από επαφή που οφείλονται στην μακροσκοπική επαφή δύο αντικειμένων. Παράδειγμα αποτελούν η δύναμη του *Hooke*, η τάση ενός νήματος, η δύναμη που ασκεί ένα αέριο στα τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει.
2. Τις δυνάμεις από απόσταση που κάνουν αισθητή την παρουσία τους στον κενό χώρο. Τέτοιες δυνάμεις είναι η βαρύτητα, η δύναμη *Coulomb* μεταξύ σημειακών ηλεκτρικών φορτίων, οι δυνάμεις μεταξύ των συστατικών του πυρήνα. Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται και δυνάμεις πεδίου.

Σε ατομικό επίπεδο οι δυνάμεις από επαφή οφείλονται στις απωστικές δυνάμεις ανάμεσα στα ηλεκτρικά φορτία οι οποίες είναι δυνάμεις από απόσταση.

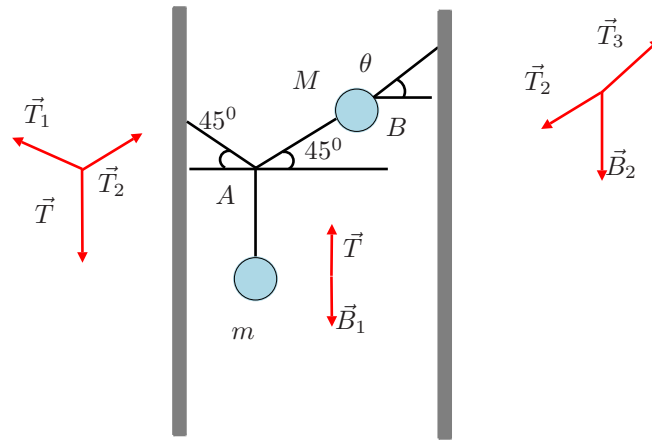
Παράδειγμα 10.1.2 Δύο μάζες m και M είναι δεμένες με νήματα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εάν το σύστημα ισορροπεί υπολογίστε τη γωνία θ .

Λύση Το σώμα μάζας m βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας οπότε θα ισχύουν

$$x - \acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha\varsigma : T_1 \cos \phi = T_2 \cos \phi \quad y - \acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha\varsigma : T_1 \sin \phi + T_2 \sin \phi = T \quad (10.1)$$

Επειδή $\phi = 45^\circ$ θα ισχύει

$$T_1 = T_2 = \frac{B_1}{\sqrt{2}} \quad (10.2)$$



Σχήμα 10.1: Σύστημα δύο μαζών που συνδέονται με νήματα και βρίσκεται σε ισορροπία.

Για το σώμα μάζας M θα έχουμε

$$x \text{ - άξονας : } T_2 \cos \phi = T_3 \cos \theta \quad (10.3)$$

$$y \text{ - άξονας : } T_3 \sin \theta - T_2 \sin \phi - B_2 = 0 \quad (10.4)$$

Από τις δύο αυτές εξισώσεις διαιρώντας κατά μέλη υπολογίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας θ

$$\tan \theta = \frac{T_2 \sin \phi + B_2}{T_2 \cos \phi} = 1 + \frac{2B_2}{B_1} = 1 + \frac{2M}{m}. \quad (10.5)$$

10.2 Οι Νόμοι του Νεύτωνα

- (1) **Ο νόμος της αδράνειας** Εάν σε ένα σώμα δεν ασκείται εξωτερική δύναμη θα παραμείνει ακίνητο ή θα κινείται ισοταχώς.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \vec{v} = \text{σταθερή} \quad (10.6)$$

Ο πρώτος νόμος χρησιμοποιείται για να ορίσουμε τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Ορισμός 10.2.1 Ένα σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο ένα σώμα υπόκειται σε μηδενική δύναμη ονομάζεται αδρανειακό σύστημα.

Ένα σύστημα που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς ένα μακρινό αστέρα αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση αδρανειακού συστήματος. Συστήματα τα οποία εκτελούν περιστροφική κίνηση δεν είναι αδρανειακά. Η Γή μπορεί να θεωρηθεί κατά προσέγγιση αδρανειακό σύστημα γιατί οι κεντρομόλες επιταχύνσεις λόγω της περιφοράς της γύρω από τον εαυτό της $\approx 3.37 \times 10^{-2} m/s^2$ και τον Ήλιο $\approx 4.4 \times 10^{-3} m/s$ είναι μικρές συγκριτικά με την επιτάχυνση της βαρύτητας \vec{g} .

Ορισμός 10.2.2 Η τάση των σωμάτων να παραμένουν ακίνητα ή να κινούνται ισοταχώς ονομάζεται αδράνεια. Η μάζα μετρά την αδράνεια ενός σώματος.

Το βάρος και η μάζα είναι δύο διαφορετικές ποσότητες. Το βάρος ενός σώματος είναι ίσο με την δύναμη βαρύτητας που ασκείται στο σώμα και μεταβάλλεται με την γεωγραφική του θέση

$$\vec{B} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r = m\vec{g} \quad (10.7)$$

όπου $G = 6.672 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας. Η μάζα είναι μονόμετρο μέγεθος, αποτελεί εγγενή ιδιότητα του σώματος και είναι ανεξάρτητη από το περιβάλλον και τη μέθοδο μέτρησής της.

- (2) Η επιτάχυνση ενός σώματος σταθερής μάζας είναι ανάλογη της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα και αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του ¹.

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}. \quad (10.8)$$

Εάν η μάζα του σώματος μεταβάλλεται ο νόμος διατυπώνεται στην γενικότερη μορφή

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (10.9)$$

Ορισμός 10.2.3 Η μονάδα δύναμης στο σύστημα SI είναι το Newton (N) και ισούται με τη δύναμη η οποία όταν δράσει σε μάζα 1kg προκαλεί επιτάχυνση 1m/s².

$$1N \equiv 1 \frac{kg \cdot m}{s^2}. \quad (10.10)$$

- (3) **Ο νόμος της δράσης - αντίδρασης** Εάν δύο σώματα αλληλεπιδρούν τότε η δύναμη που ασκεί το σώμα *i* στο σώμα *j* θα έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά με την δύναμη που ασκεί το σώμα *j* στο *i*.

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (10.11)$$

Ο νόμος δράσης - αντίδρασης υποδεικνύει ότι οι δυνάμεις εμφανίζονται πάντα σε ζεύγη και δρουν σε διαφορετικά σώματα. Ο τρίτος νόμος δεν είναι γενικός νόμος της φύσης και εφαρμόζεται μόνο για διατηρητικές δυνάμεις. Δυνάμεις που εξαρτώνται από τις ταχύτητες καταστρέφουν την ισχύ του.

Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί ισοδύναμα

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_i}{dt} = -\frac{d\vec{p}_j}{dt} \Rightarrow m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \Rightarrow \frac{m_j}{m_i} = \frac{\|a_i\|}{\|a_j\|} \quad (10.12)$$

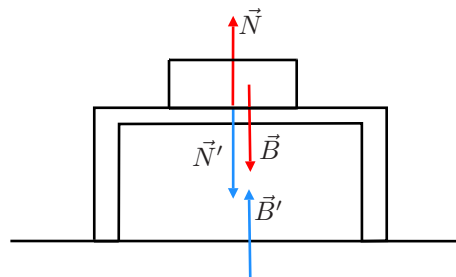
Θεωρώντας μία πρότυπη μάζα 1kg και μετρώντας τις επιταχύνσεις των δύο σωμάτων μπορούμε να προσδιορίσουμε την άγνωστη μάζα ενός σώματος. Για την μέτρηση των επιταχύνσεων χρειαζόμαστε συγχρονισμένα ρολόγια, πρώτυπες ράβδους όπως επίσης και εκλογή συστήματος αναφοράς και συντεταγμένων.

Μια διαφορετική ερμηνεία του τρίτου νόμου είναι

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_i + \vec{p}_j) = \vec{0} \text{ ή } \vec{p}_i + \vec{p}_j = \text{σταθερό} \quad (10.13)$$

δηλαδή η ορμή ενός απομονωμένου συστήματος διατηρείται σταθερή και αυτό αποτελεί ειδική περίπτωση του νόμου διατήρησης της γραμμικής ορμής.

Παράδειγμα του τρίτου νόμου αποτελεί σώμα που ηρεμεί πάνω σε τραπέζι. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα



Σχήμα 10.2: Οι δυνάμεις που ασκούνται σε σώμα που ηρεμεί πάνω σε τραπέζι.

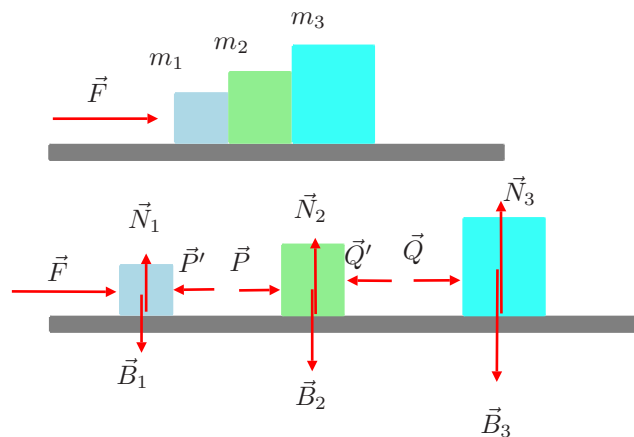
είναι το βάρος του \vec{B} και η δύναμη \vec{N} που ασκεί το τραπέζι πάνω στο σώμα. Η αντίδραση του βάρους \vec{B} θα είναι η δύναμη \vec{B}' που ασκεί το βαρυντικό πεδίο του σώματος στην Γη. Η αντίδραση της \vec{N} είναι η \vec{N}' με φορά αντίθετη της \vec{N} , ίσο μέτρο και σημείο εφαρμογής το τραπέζι.

¹Το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης εξασφαλίζει ότι η \vec{F} με αρχικές συνθήκες $\vec{x}(t_0)$, $\dot{\vec{x}}(t_0)$ μοναδικά καθορίζει την κίνηση.

Παράδειγμα 10.2.4 Τρία σώματα βρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους και κινούνται χωρίς τριβή σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης \vec{F} . Εάν m_1 , m_2 και m_3 οι μάζες των σωμάτων και $m_1 < m_2 < m_3$ υπολογίστε:

- (1) Την επιτάχυνση των σωμάτων.
- (2) Την συνισταμένη δύναμη σε κάθε σώμα.
- (3) Το μέτρο των δυνάμεων επαφής μεταξύ των σωμάτων.

Λύση



Σχήμα 10.3: Οι δυνάμεις που ασκούνται σε τρία σώματα διαφορετικής μάζας που βρίσκονται σε επαφή και κινούνται υπό την επίδραση σταθερής δύναμης σε οριζόντιο επίπεδο.

- (1) Επειδή τα τρία σώματα εφάπτονται θα έχουν την ίδια επιτάχυνση. Η μοναδική δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι η \vec{F} οπότε

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (10.14)$$

- (2) Οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα. Οι δυνάμεις επαφής μεταξύ δύο σωμάτων εμφανίζονται σε ζεύγη λόγω του νόμου δράσης - αντίδρασης και θα έχουν ίσα μέτρα και αντίθετη φορά. Άρα $|\vec{P}'| = |\vec{P}|$ και $|\vec{Q}'| = |\vec{Q}|$. Η συνισταμένη δύναμη κατά την οριζόντια κατεύθυνση σε κάθε σώμα θα είναι

$$\begin{aligned} m_1 &: F - P = m_1 a, \\ m_2 &: P - Q = m_2 a, \\ m_3 &: Q = m_3 a \end{aligned} \quad (10.15)$$

ενώ κατά την κατακόρυφη κατεύθυνση θα ισχύει

$$B_i = N_i, \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (10.16)$$

- (3) Τα μέτρα των δυνάμεων επαφής δίνονται από τις

$$P = F - m_1 a = F \left(1 - \frac{m_1}{M}\right) = \frac{(m_2 + m_3)}{M} F, \quad \text{όπου} \quad M = \sum_{i=1}^3 m_i \quad (10.17)$$

και

$$Q = P - m_2 a = \frac{m_3}{M} F. \quad (10.18)$$

Στις εφαρμογές θα κάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις

1. Τα σώματα είναι υλικά σημεία.
2. Ενδιαφερόμαστε μόνο για τις εξωτερικές δυνάμεις.
3. Τα σχοινιά θα θεωρούνται αβαρή. Έτσι το μέτρο της δύναμης που ασκείται σε ένα σημείο του σχοινιού παραμένει αναλλοίωτο σε όλο το μήκος του σχοινιού.

Όταν ένα σώμα κινείται πάνω σε μία επιφάνεια ή μέσα σε ένα μέσο, αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του και εμφανίζεται η δύναμη της τριβής. Οι δυνάμεις τριβής είναι υπεύθυνες για τη κίνησή μας ή την κίνηση ενός τροχοφόρου. Οφείλονται στις ηλεκτροστατικές δυνάμεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στα άτομα και τα μόρια των επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή. Υπάρχουν δύο είδη τριβής: η στατική και η κινητική (ή τριβή ολίσθησης). Πειράματα έχουν αποδείξει ότι είναι ανάλογες προς την κάθετη δύναμη που δρά πάνω στο σώμα. Επίσης έχουν αποδειχθεί οι ακόλουθοι νόμοι

1. Η στατική τριβή έχει φορά αντίθετη της δύναμης που εφαρμόζεται στο σώμα και μέτρο που δίνεται από την σχέση

$$f_s \leq \mu_s N \quad (10.19)$$

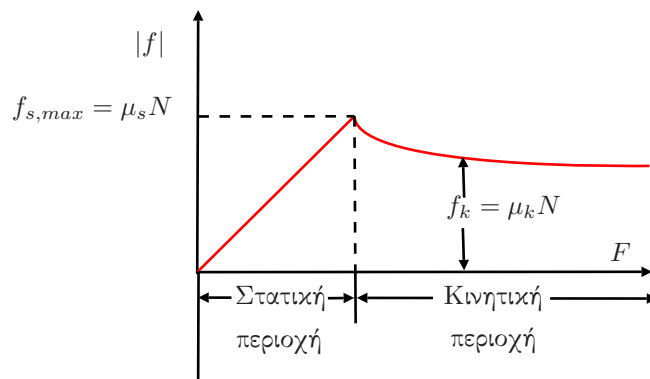
όπου η σταθερά μ_s ονομάζεται συντελεστής στατικής τριβής και N είναι η κάθετη δύναμη. Όταν $f_s = f_{max} = \mu_s N$ το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει.

2. Η τριβή ολίσθησης έχει φορά αντίθετη από την κατεύθυνση κίνησης του σώματος και μέτρο

$$f_k = \mu_k N \quad (10.20)$$

όπου μ_k ονομάζεται συντελεστής τριβής ολίσθησης.

3. Οι τιμές των μ_s, μ_k εξαρτώνται από τη φύση των επιφανειών και είναι σχεδόν ανεξάρτητες από το μέγεθος της επιφάνειας επαφής. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης εξαρτάται από την ταχύτητα και γενικά οι τιμές τους ικανοποιούν την σχέση $\mu_k < \mu_s$.



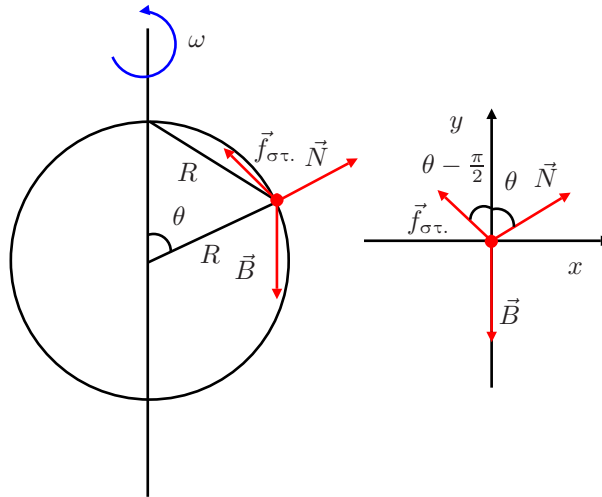
Σχήμα 10.4: Η δύναμη τριβής ανάμεσα σε ένα σώμα και μια τραχιά επιφάνεια.

Παράδειγμα 10.2.5 Σφαίρα ακτίνας R περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Σε απόσταση R από την κορυφή βρίσκεται σώμα που περιστρέφεται μαζί με την σφαίρα. Να υπολογιστεί ο συντελεστής τριβής ολίσθησης.

Λύση Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι: το βάρος \vec{B} του σώματος, η αντίδραση \vec{N} από την σφαίρα και η δύναμη στατικής τριβής $\vec{f}_{\sigma\tau}$ με μέτρο $f_{\sigma\tau} = \mu_{\sigma\tau} N$. Οι εξισώσεις της κίνησης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy είναι

$$x - \acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha\varsigma : -f_{\sigma\tau} \cos \theta + N \sin \theta = m\omega^2 r, \quad (10.21)$$

$$y - \acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha\varsigma : f_{\sigma\tau} \sin \theta + N \cos \theta = mg \quad (10.22)$$



Σχήμα 10.5: Δυνάμεις που ασκούνται σε σώμα που κινείται ολισθαίνοντας σε περιστρεφόμενο ημισφαίριο ακτίνας R .

όπου $r = R \sin \theta$ η ακτίνα της επίπεδης κυκλικής τροχιάς που είναι κάθετη στον άξονα περιστροφής της σφαίρας. Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων βρίσκουμε

$$\mu_{στ.} = \frac{\sin \theta (g + \omega^2 R \cos \theta)}{g \cos \theta - \omega^2 R \sin^2 \theta}. \quad (10.23)$$

Επειδή η γωνία $\theta = 60^\circ$ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης θα είναι

$$\mu_{τρ.ολ.} \leq \mu_{στ.} = \frac{(2g + \omega^2 R)\sqrt{3}}{2g - 3\omega^2 R} \quad (10.24)$$

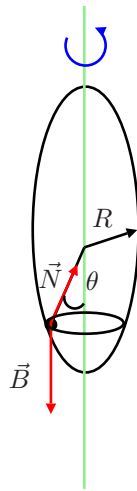
10.3 Κίνηση σε Επιταχυνόμενα Συστήματα Αναφοράς

Στο προηγούμενο κεφάλαιο τονίσαμε ότι οι νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν για αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Θεωρούμε σώμα που κινείται με επιτάχυνση \vec{a} . Ένας μη αδρανειακός παρατηρητής για να εφαρμόσει το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα θα πρέπει να εισαγάγει πλασματικές (ή υποθετικές ή αδρανειακές) δυνάμεις για να περιγράψει την κίνηση ενός σώματος. Οι δυνάμεις αυτές εάν οριστούν σωστά σε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς περιγράφουν την κίνηση ενός σώματος με τον ίδιο τρόπο που περιγράφεται σε αδρανειακό σύστημα όπου μόνο οι πραγματικές δυνάμεις λαμβάνονται υπ' όψιν. Παράδειγμα αποτελεί η έξοδος αυτοκινήτου από δρόμο κάνοντας στροφή προς τα δεξιά. Ο συνεπιβάτης του οδηγού θα γλιστρήσει αριστερά και θα πέσει πάνω στη πόρτα. Ο συνεπιβάτης για να εξηγήσει την κίνησή του αυτή επινοεί την φυγόκεντρη δύναμη με φορά αντίθετη της κεντρομόλου δύναμης. Λόγω του πρώτου νόμου του Νεύτωνα όταν το αυτοκίνητο παρεκκλίνει από την ευθύγραμμή του πορεία ο επιβάτης λόγω αδράνειας τείνει να εξακολουθήσει να κινείται στην αρχική του πορεία. Για ένα ακίνητο παρατηρητή οι μόνες πραγματικές δυνάμεις που δρουν στον συνεπιβάτη είναι εκτός από το βάρος του, η κεντρομόλος δύναμη που οφείλεται στην τριβή με το κάθισμά του. Εάν η κεντρομόλος δεν είναι αρκετά μεγάλη ώστε να κρατηθεί στην καμπύλη τροχιά ο συνεπιβάτης γλιστράει πάνω στο κάθισμα μέχρι να ακουμπήσει στην πόρτα.

Παράδειγμα 10.3.1 Χάντρα μάζας m έχει περαστεί σε κατακόρυφη συρμάτινη στεφάνη που περιστρέφεται με περίοδο T γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Υποθέτουμε ότι η χάντρα κινείται χωρίς τριβές και ηρεμεί ως προς τη στεφάνη σε γωνία θ . Εάν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι \vec{g} να υπολογιστούν:

- (1) Η κάθετη δύναμη \vec{N} που ασκείται στη χάντρα από το σύρμα.
- (2) Η γωνία μεταξύ της κάθετης δύναμης και του άξονα περιστροφής.
- (3) Η κεντρομόλος δύναμη που δρα στη χάντρα.

Λύση



Σχήμα 10.6: Οι δυνάμεις που ασκούνται σε χάντρα που περιστρέφεται μαζί με την στεφάνη.

- (1) Οι δυνάμεις που ασκούνται στην χάντρα για ακίνητο αδρανειακό παρατηρητή είναι το βάρος \vec{B} της χάντρας και η τάση \vec{N} του νήματος. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$N \sin \theta = m \frac{v^2}{r}, \quad N \cos \theta = mg \quad \text{και} \quad v = \frac{2\pi r}{T} \quad (10.25)$$

όπου r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει η χάντρα κάθετα στον άξονα περιστροφής της στεφάνης. Συνδιάζοντας την πρώτη με την τελευταία εξίσωση και χρησιμοποιώντας την $r = R \sin \theta$ έχουμε

$$N = \frac{4\pi^2}{T^2} m R. \quad (10.26)$$

Για μη αδρανειακό παρατηρητή που περιστρέφεται μαζί με το στεφάνη η χάντρα δεν επιταχύνεται. Οπότε ο παρατηρητής υποθέτει την ύπαρξη μιας πλασματικής δύναμης $m \frac{v^2}{r}$, της φυγόκεντρης, που θα εξισορροπήσει την οριζόντια συνιστώσα της \vec{N} . Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για τον παρατηρητή αυτό δίνει

$$N \cos \theta = B, \quad N \sin \theta - m \frac{v^2}{r} = 0. \quad (10.27)$$

- (2) Από την πρώτη εξίσωση (10.27) απαλείφοντας την N και επιλύοντας ως προς θ έχουμε

$$\cos \theta = \frac{gT}{4\pi^2 R} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{gT}{4\pi^2 R} \right). \quad (10.28)$$

- (3) Η κεντρομόλος δύναμη έχει μέτρο

$$F_k = N \sin \theta = N \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{N^2 - m^2 g^2} = m \sqrt{\left(\frac{2\pi R}{T} \right)^4 - g^2}. \quad (10.29)$$

10.4 Κίνηση με την Παρουσία Δυνάμεων που Αντιστέκονται στην Κίνηση

Η τριβή ολίσθησης που μελετήσαμε στην ενότητα (10.2) είναι σχεδόν ανεξάρτητη από την ταχύτητα. Όταν όμως ένα σώμα κινείται μέσα σε κάποιο αέριο ή υγρό τότε ασκείται πάνω του δύναμη αντίστασης που ανάλογα με το μέγεθος του σώματος μπορεί να μεταβάλλεται $\propto v^\alpha$. Για σώματα σε μέγεθος σκόνης η εξάρτηση είναι ανάλογη της v ενώ για μεγάλα σώματα όπως οι αλεξιπτωτιστές (με κλειστό αλεξίπτωτο) μεταβάλλεται ανάλογα με το τετράγωνο της ταχύτητας.

Παράδειγμα 10.4.1 Μελέτη κίνησης σώματος μέσα σε ρευστό που ηρεμεί, με την επίδραση δύναμης αντίστασης που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{R} = -b\vec{v} \quad (10.30)$$

όπου \vec{v} η ταχύτητα του σώματος και b μία σταθερά που εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου, τις διαστάσεις και το σχήμα του σώματος. Εάν το σώμα έχει σφαιρικό σχήμα ακτίνας r τότε το $b \propto r$.

Λύση Θεωρούμε σφαίρα μάζας m που αφήνεται ελεύθερη, χωρίς αρχική ταχύτητα, μέσα σε υγρό. Επιπλέον υποθέτουμε ότι η ακτίνα της σφαίρας και η πυκνότητα του υγρού είναι πολύ μικρές έτσι ώστε η άνωση να αμελείται. Χρησιμοποιώντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και επιλέγοντας σαν θετική την κατεύθυνση κίνησης του σώματος θα έχουμε

$$\begin{aligned} mg - bv &= m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \\ \frac{dv}{dt} &= g - \frac{b}{m}v \Rightarrow \\ \int_0^v \frac{d\tilde{v}}{\left(g - \frac{b}{m}\tilde{v}\right)} &= \int_0^t d\tilde{t} \Rightarrow \\ \ln \left| 1 - \frac{b}{gm}v \right| &= -\frac{b}{m}t \Rightarrow \\ v(t) &= \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) = v_t \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \end{aligned} \quad (10.31)$$

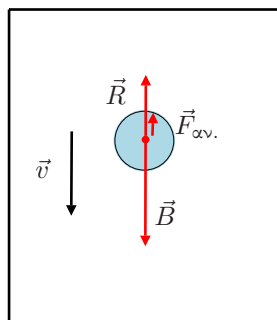
Όπου v_t η οριακή ταχύτητα του σώματος. Παρατηρήστε ότι η αντίσταση του υγρού αυξάνει συνέχεια με την ταχύτητα ενώ η επιτάχυνση μειώνεται. Θα υπάρξει μια τιμή της ταχύτητας στην οποία η επιτάχυνση του σώματος θα μηδενιστεί. Η τιμή αυτή δίνεται από την εξίσωση $a = 0 = mg - bv_t$. Ο χρόνος $\tau = m/b$ ονομάζεται σταθερά χρόνου του προβλήματος και είναι ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το σώμα στο 63% της οριακής του ταχύτητας

Παράδειγμα 10.4.2 Μελέτη κίνησης σώματος σε αέρα, υπό την επίδραση αντίστασης που περιγράφεται από την εξίσωση

$$R = \frac{1}{2}C\rho Av^2 \quad (10.32)$$

όπου C μία αδιάστατη σταθερά που ονομάζεται συντελεστής αντίστασης, ρ η πυκνότητα του αέρα και A η διατομή του αντικειμένου μετρούμενη σε ένα επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση της κίνησής του.

Λύση Όταν το σώμα κινείται προς τη Γη οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του είναι το βάρος \vec{B} , η αντίσταση από το νερό \vec{R} και η άνωση $\vec{F}_{αν.}$. Η άνωση έχει σταθερό μέτρο που ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου αέρα



Σχήμα 10.7: Οι δυνάμεις που ασκούνται σε σώμα που κινείται σε ρευστό που ηρεμεί.

δηλαδή

$$F_{αν.} = m_{εκ.αερ.}g = \rho_{αερ.}V_{σφ.}g = \rho_{αερ.}\frac{4\pi r^3}{3}g. \quad (10.33)$$

Εάν το ρευστό έχει μικρή πυκνότητα και η σφαίρα μικρή ακτίνα, η άνωση μπορεί να αμεληθεί. Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g - \left(\frac{C\rho A}{2m}\right)v^2 \Rightarrow \\ \int_{v_0}^v \frac{d\tilde{v}}{1 - \left(\frac{C\rho A}{2mg}\right)\tilde{v}^2} &= g \int_0^t d\tilde{t} \Rightarrow \\ \int_{\beta v_0}^{\beta v} \frac{du}{1 - u^2} &= g\beta t \end{aligned} \quad (10.34)$$

όπου $u = \beta v$ με $\beta = \sqrt{\frac{C\rho A}{2mg}}$. Το άριστο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την

$$\int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + u} + \frac{1}{1 - u} \right) du = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + u}{1 - u} \right), \quad \text{για } -1 < u < 1. \quad (10.35)$$

Στην περίπτωση μας η $u \in (-1, 1)$ γιατί η οριακή ταχύτητα $v_{max} = v_t = \frac{1}{\beta}$ και άρα η $v < v_t = \frac{1}{\beta}$ οπότε $u = \beta v < 1$. Οπότε η (10.34) χρησιμοποιώντας την (10.35) δίνει

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1 + \beta v}{1 - \beta v} \right) &= \ln \left(\frac{1 + \beta v_0}{1 - \beta v_0} \right) + 2g\beta t \Rightarrow \\ \frac{1 + \beta v}{1 - \beta v} &= D e^{2g\beta t} \Rightarrow \\ v(t) &= v_t \left(\frac{D - e^{-\frac{t}{\tau}}}{D + e^{-\frac{t}{\tau}}} \right) \end{aligned} \quad (10.36)$$

όπου $D = \left(\frac{1 + \beta v_0}{1 - \beta v_0} \right)$ και $\tau = \frac{1}{2g\beta}$. Εάν το σώμα είναι σφαίρα μπορούμε να προσδιορίσουμε πως μεταβάλλεται η οριακή ταχύτητα ως εξής: επειδή το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και ο όγκος σφαίρας δίνονται από τις $A = \pi r^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, η μάζα είναι $m = \rho V \propto r^3$. Άρα $v_t \propto \sqrt{r}$.

Ορισμός 10.4.3 Ορίζουμε μέση ισχύ \bar{P} , το λόγο του έργου ΔW που παράγει μία εξωτερική δύναμη \vec{F} σε ένα σώμα σε χρονικό διάστημα Δt διά το διάστημα αυτό

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W(t + \Delta) - W(t)}{\Delta t} \quad (10.37)$$

Ορισμός 10.4.4 Ορίζουμε στιγμιαία ισχύ P το όριο της μέσης ισχύος όταν το $\Delta t \rightarrow 0$

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \quad (10.38)$$

Εάν η δύναμη \vec{F} που ασκείται στο σώμα είναι σταθερή, η στιγμιαία ισχύ μπορεί να γραφεί και σαν

$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (10.39)$$

10.5 Οι Θεμελιώδεις Δυνάμεις της Φύσης

Το κλειδί για την κατανόηση των ιδιοτήτων των στοιχειωδών σωματιδίων είναι να μπορέσει κανείς να περιγράψει τις δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ τους. Όλα τα σωματίδια στη φύση υπόκεινται σε τέσσερις δυνάμεις:

- (i) Η ισχυρή δύναμη. Σε αυτήν οφείλεται η σύνδεση των νετρονίων και των πρωτονίων στους πυρήνες και έχει μικρή εμβέλεια περίπου $10^{-14}m$ που είναι και το μέγεθος του πυρήνα.
- (ii) Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη. Είναι 100 φορές ασθενέστερη από την ισχυρή δύναμη και είναι υπεύθυνη για τον σχηματισμό των ατόμων και των μορίων. Είναι δύναμη μεγάλης εμβέλειας μεταξύ των φορτισμένων σωματιδίων και ελαττώνεται αντιστρόφως ανάλογα του τετραγώνου της απόστασης μεταξύ των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων.

- (iii) Η ασθενής δύναμη. Είναι πυρηνική δύναμη μικρής εμβέλειας που έχει την τάση να αποσταθεροποιεί ορισμένους πυρήνες. Σε αυτή οφείλονται οι ραδιενεργές διασπάσεις όπως η βήτα και είναι 10^9 φορές ασθενέστερη από την ισχυρή δύναμη. Οι επιστήμονες πιστεύουν ότι η ασθενής και ηλεκτρομαγνητική δύναμη είναι εκφάνσεις μίας μόνο δύναμης που ονομάζεται ηλεκτρασθενής.
- (iv) Η βαρυντική δύναμη. Είναι δύναμη μεγάλης εμβέλειας η οποία μεταβάλλεται σαν $1/r^2$ και είναι περίπου 10^{38} φορές ασθενέστερη από την ισχυρή δύναμη. Αν και η δύναμη αυτή συγκρατεί τους πλανήτες, τους αστέρες και τους γαλαξίες ενωμένους η επίδραση της στα στοιχειώδη σωματίδια είναι αμελητέα. Η δύναμη της βαρύτητας είναι η ασθενέστερη από όλες τις θεμελιώδεις δυνάμεις.

Στη σύγχρονη φυσική οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων περιγράφονται με την ανταλλαγή σωματιδίων πεδίου ή κβάντων. Στην περίπτωση της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης τα σωματίδια πεδίου είναι φωτόνια. Οπότε μπορούμε να πούμε ότι η ηλεκτρομαγνητική δύναμη διαδίδεται μέσω των φωτονίων τα οποία είναι κβάντα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Η ισχυρή δύναμη διαδίδεται μέσω σωματιδίων πεδίου που ονομάζονται γλιόνια, η ασθενής μέσω των μποζονίων W , Z και η βαρυντική δύναμη μέσω των γκραβιτονίων.

Κεφάλαιο 11

Δυναμική Ενέργεια και Διατήρηση Ενέργειας

Η ενέργεια παρουσιάζεται σε διάφορες μορφές, όπως είναι η μηχανική ενέργεια, η ηλεκτρομαγνητική, η χημική, η θερμική και η πυρηνική ενέργεια. Θα μελετήσουμε την μηχανική ενέργεια και θα δούμε πως εφαρμόζοντας τις έννοιες του έργου και της ενέργειας μπορούμε να περιγράψουμε την δυναμική ενός σώματος χωρίς να γίνει αναφορά στους νόμους του Νεύτωνα. Βέβαια οι έννοιες αυτές βασίζονται στους νόμους του Νεύτωνα οπότε δεν συνεπάγονται νέες φυσικές αρχές.

11.1 Έργο

Θεωρούμε υλικό σημείο μάζας m που κινείται κατά μήκος της καμπύλης C από το σημείο P_1 στο P_2 κάτω από την επίδραση εξωτερικής δύναμης \vec{F} .

Ορισμός 11.1.1 Ορίζουμε έργο W που παράγεται σε ένα σώμα από τη δύναμη \vec{F} το μονόμετρο μέγεθος που δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$W_{P_1 \rightarrow P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad (11.1)$$

όπου $d\vec{s} = \vec{e}_T ds$ το στοιχειώδες μήκος τόξου και $\vec{e}_T = \vec{e}_T(x, y, z)$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο της καμπύλης.

Στην καρτεσιανή βάση το \vec{e}_T δίνεται από την σχέση

$$\vec{e}_T(s) = \frac{dx}{ds} \vec{i} + \frac{dy}{ds} \vec{j} + \frac{dz}{ds} \vec{k}. \quad (11.2)$$

Εάν η καμπύλη έχει παραμετρικοποιηθεί χρησιμοποιώντας το χρόνο t , τότε $d\vec{s} = \vec{e}_T \frac{ds}{dt} dt = \vec{v} dt$ και η ταχύτητα σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων έχει μέτρο

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (11.3)$$

Εάν αναλύσουμε τη δύναμη σε δύο συνιστώσες, μια εφαπτομενική \vec{F}_{\parallel} και μια κάθετη \vec{F}_{\perp} στην τροχιά, τότε από τον ορισμό του έργου παρατηρούμε ότι

$$W_{P_1 \rightarrow P_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\parallel} \cdot \vec{v} dt. \quad (11.4)$$

Άρα μία δύναμη θα παράγει έργο όταν

1. Το σώμα μετατοπίζεται
2. Η δύναμη έχει μη μηδενική συνιστώσα κατά την διεύθυνση της κίνησης.

Εάν κάποιος σπρώχνει ένα τοίχο τότε δεν παράγεται έργο όσο ο τοίχος παραμένει ακίνητος. Βέβαια το άτομο αυτό καταναλώνει εσωτερική ενέργεια γιατί οι μυς του μετατοπίζονται. Το πρόσημο του έργου εξαρτάται από την κατεύθυνση της \vec{F} σε σχέση με το $d\vec{s}$. Στο Διεθνές σύστημα μονάδα έργου είναι το *Joule* και εκφράζει το έργο που παράγεται όταν δύναμη ενός *Newton* μετατοπιστεί κατά ένα μέτρο. Εάν στο σώμα ασκούνται περισσότερες δυνάμεις τότε το συνολικό έργο θα ισούται με το έργο της συνισταμένης τους

$$W_{P_1 \rightarrow P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{s}. \quad (11.5)$$

Παράδειγμα 11.1.2 Υπολογίστε το έργο που παράγεται από το πεδίο δυνάμεων

$$\vec{F}(x, y, z) = (2x - y + z)\vec{e}_x + (x + y - z^2)\vec{e}_y + (3x - 2y + 4)\vec{e}_z \quad (11.6)$$

όταν σώμα κινείται n φορές σε κυκλική τροχιά ακτίνας R στο xy -επίπεδο.

Λύση Από τον ορισμό του έργου (11.1) και επειδή η κυκλική τροχιά βρίσκεται στο xy -επίπεδο από υπόθεση, θα έχουμε

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint (F_x dx + F_y dy). \quad (11.7)$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} dx &= -r \sin \theta d\theta, \\ dy &= r \cos \theta d\theta, \quad \text{για } r = R \text{ και } \theta \in [0, 2\pi n) \end{aligned} \quad (11.8)$$

το έργο γράφεται

$$W = R^2 \int_0^{2\pi n} (1 - \sin \theta \cos \theta) d\theta = 2\pi n R^2. \quad (11.9)$$

11.2 Διατηρητικές (ή Συντηρητικές) και μη Διατηρητικές Δυνάμεις

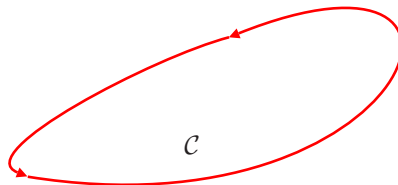
Έστω \vec{F} διανυσματικό πεδίο δυνάμεων κλάσεως C^1 ορισμένο στον R^3 εκτός ίσως από πεπερασμένο πλήθος σημείων.

Ορισμός 11.2.1 Ένα διανυσματικό πεδίο δυνάμεων που ικανοποιεί μία από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες λέγεται διατηρητικό ή συντηρητικό πεδίο δυνάμεων.:

(i) Για κάθε προσανατολισμένη απλή κλειστή καμπύλη C (δηλαδή καμπύλη που δεν τέμνει τον εαυτό της),

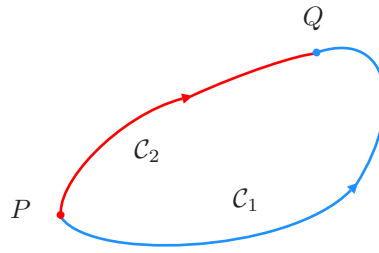
$$W_C = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (11.10)$$

Άρα όταν ένα σώμα διαγράφει κλειστή τροχιά κάτω από την επίδραση συντηρητικής δύναμης το έργο είναι



Σχήμα 11.1: Απλή, κλειστή και προσανατολισμένη καμπύλη.

μηδενικό.



Σχήμα 11.2: Οι απλές και αντίθετα προσανατολισμένες καμπύλες C_1 και C_2 ενώνουν τα σημεία Q και P .

(ii) Για οποιοσδήποτε δύο προσανατολισμένες απλές καμπύλες C_1 και C_2 με τα ίδια άκρα

$$W_{C_1} = W_{C_2} \Rightarrow \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (11.11)$$

Δηλαδή το έργο που παράγει μια διατηρητική δύναμη είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και της ταχύτητας του σώματος. Εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σώματος.

(iii) Το \vec{F} είναι η κλίση κάποιας συνάρτησης $U(\vec{r}, t)$ δηλαδή

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U. \quad (11.12)$$

Εάν κατεξάιρεση σε κάποιο σημείο το \vec{F} δεν ορίζεται τότε ούτε και η U ορίζεται σ' αυτό. Η συνάρτηση U ονομάζεται δυναμική ενέργεια για το πεδίο δυνάμεων \vec{F} και μπορεί να εξαρτάται από το χρόνο αλλά όχι από την ταχύτητα (όπως στον ηλεκτρομαγνητισμό για τα Lienard – Wiechert δυναμικά). Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το σωματίδιο κάτω από την επίδραση της δύναμης \vec{F} κινείται στην κατεύθυνση στην οποία μειώνεται το δυναμικό U .

(iv)

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \quad (11.13)$$

Εάν μια από τις προηγούμενες συνθήκες δεν ικανοποιείται το διανυσματικό πεδίο δυνάμεων ονομάζεται μη συντηρητικό. Παράδειγμα μη συντηρητικής δύναμης είναι η τριβή ολίσθησης. Η δύναμη αυτή μικροσκοπικά οφείλεται στις αλληλεπιδράσεις των μορίων των σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή που αν και εκφράζονται συναρτήσει κάποιας διατηρητικής δύναμης, μακροσκοπικά δεν είναι διατηρητική. Οπότε το έργο της είναι μη μηδενικό κατά μήκος οποιασδήποτε απλής κλειστής καμπύλης.

Παράδειγμα 11.2.2 Εάν $A = (1, 0, 0)$ και $B = (1, 1, 1)$ αποδείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο δυνάμεων

$$\vec{F}(x, y, z) = (z^2, 2y, 2xz) \quad (11.14)$$

είναι συντηρητικό.

Λύση Για την απόδειξη θα ελέγξουμε διαδοχικά τις προηγούμενες τέσσερις συνθήκες.

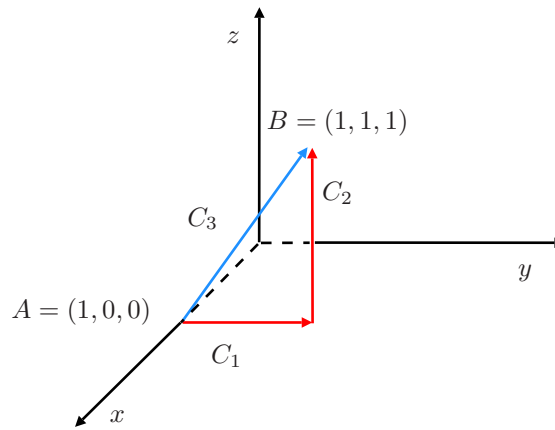
(i) Θεωρούμε την απλή κλειστή καμπύλη του σχήματος που παραμετρικοποιείται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} C_1 &: \vec{r}_1(t) = (1, t, 0), \quad t \in [0, 1], \\ C_2 &: \vec{r}_2(t) = (1, 1, t), \quad t \in [0, 1], \\ C_3 &: \vec{r}_3(t) = (1, 0, 0) + t[(1, 1, 1) - (1, 0, 0)] = (1, 0, 0) + t(0, 1, 1), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα είναι

$$\oint_{C=C_1 \cup C_2 \cup C_3} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} 2tdt + \int_{C_2} 2tdt - \int_{C_3} 4tdt = 1 + 1 - 2 = 0. \quad (11.16)$$

Οπότε το πεδίο είναι συντηρητικό.



Σχήμα 11.3: Καμπύλες ολοκλήρωσης που συνδέουν τα σημεία A και B .

(ii) Υπολογίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του \vec{F} κατά μήκος των $C_1 \cup C_2$ και C_3 .

$$\int_{C_1 \cup C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2, \quad \text{και} \quad \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2. \quad (11.17)$$

Άρα είναι ανεξάρτητα της διαδρομής ολοκλήρωσης.

(iii) Έστω ότι υπάρχει βαθμωτή πραγματική συνάρτηση U τέτοια ώστε $\vec{F} = -\nabla U$. Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -z^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -2y, \quad \text{και} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -2xz \quad (11.18)$$

που έχει λύση την

$$U(x, y, z) = -(xz^2 + y^2) + c, \quad \text{όπου} \quad c = \text{σταθερά}. \quad (11.19)$$

(iv) Ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου είναι

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & 2y & 2xz \end{vmatrix} = \vec{0}. \quad (11.20)$$

Οπότε το πεδίο είναι αστρόβιλο.

11.3 Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας

Θεωρούμε σώμα μάζας m που κινείται κατά μήκος καμπύλης C από το σημείο P_1 στο σημείο P_2 με τη επίδραση δύναμης \vec{F} . Εάν η δύναμη είναι διατηρητική, χρησιμοποιώντας την τρίτη συνθήκη του προηγούμενου υποκεφαλαίου, το έργο δίνεται από την

$$W_{P_1 \rightarrow P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{P_1}^{P_2} \nabla U(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = - \int_{P_1}^{P_2} dU = U_1 - U_2. \quad (11.21)$$

Η τρίτη ισότητα ισχύει γιατί σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

$$\begin{aligned} \nabla U(\vec{r}) \cdot d\vec{s} &= \left(\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU(x, y, z). \end{aligned} \quad (11.22)$$

Για συντηρητική ή μη συντηρητική δύναμη το έργο, χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Νεύτωνα, γράφεται ισοδύναμα

$$W_{P_1 \rightarrow P_2} \equiv \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{p^2}{2m} \right) dt = T_2 - T_1 \quad (11.23)$$

όπου $T = \frac{p^2}{2m}$ η κινητική ενέργεια του σωματιδίου. Εάν $T_1 > T_2$ τότε $W_{12} < 0$ και το σωματίδιο έχει παράγει έργο με μείωση της κινητικής του ενέργειας.

Θεώρημα 11.3.1 Εάν οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα είναι συντηρητικές τότε η συνολική ενέργεια $E(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = T(\dot{\vec{r}}) + U(\vec{r})$ του σώματος διατηρείται δηλαδή η συνάρτηση $E(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

Απόδειξη: Από τις σχέσεις (11.21) και (11.23), για διατηρητικές δυνάμεις, ισχύει

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \Rightarrow E_1 = E_2. \quad (11.24)$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος απόδειξης θα ήταν να παραγωγίσουμε την ολική ενέργεια $E(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ ως προς το χρόνο

$$\begin{aligned} \frac{dE(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{dt} &= \frac{dT(\dot{\vec{r}})}{dt} + \frac{dU(\vec{r}, t)}{dt} \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U(\vec{r}, t)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ &= (\vec{F} + \vec{\nabla}U) \cdot \vec{v} + \frac{\partial U(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (11.25)$$

Οπότε για συντηρητική δύναμη, $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}, t)$, και δυναμική ενέργεια ανεξάρτητη του χρόνου, $\frac{\partial U(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$, προκύπτει ο νόμος διατήρησης της ολικής ενέργειας. \square

Θεώρημα 11.3.2 Εάν οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα δεν είναι συντηρητικές τότε το έργο τους θα ισούται με το άθροισμα της μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας.

Απόδειξη: Το συνολικό έργο που παράγουν οι δυνάμεις είναι

$$W_{\text{ολ.}} = W_{\mu\eta \text{ συν.}} + W_{\text{συν.}} = W_{\mu\eta \text{ συν.}} + U_1 - U_2 \quad \text{και} \quad W_{\text{ολ.}} = T_2 - T_1 \quad (11.26)$$

Άρα

$$W_{\mu\eta \text{ συν.}} = (T_2 + U_2) - (T_1 + U_1). \quad (11.27)$$

\square

Η έκφραση $T_i + U_i$ στην περίπτωση αυτή δεν ονομάζεται ολική ενέργεια του σωματιδίου γιατί δεν περιέχει το σύνολο των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό. Το έργο $W_{\mu\eta \text{ συν.}}$ αντιπροσωπεύει μια μη αντιστρεπτή διαδικασία μεταφοράς ενέργειας μεταξύ σώματος και περιβάλλοντος χώρου.

Παράδειγμα 11.3.3 Ένα βαγόνι ξεκινάει με αρχική ταχύτητα \vec{v}_0 σε ύψος h και κινείται χωρίς τριβή. Η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο σημείο A είναι R . Υπολογίστε:

(α) Τη μέγιστη τιμή της \vec{v}_0 που είναι αναγκαία ώστε το βαγόνι να μην εκτροχιαστεί στο σημείο A .

(β) Χρησιμοποιώντας την τιμή αυτή προσδιορίστε το ύψος H στο οποίο το βαγόνι θα σταματήσει.

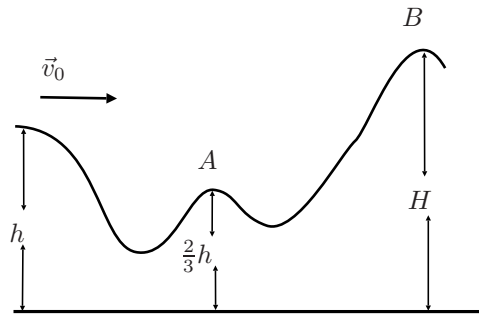
Λύση

(α) Τη στιγμή του εκτροχιασμού η μοναδική δύναμη που ασκείται στο βαγόνι είναι το βάρος του \vec{B} που εάν παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης το βαγόνι θα παραμείνει στις ράγες. Άρα

$$\vec{B} = m \frac{v^2}{R} \vec{e}_r \Rightarrow v = \sqrt{gR}. \quad (11.28)$$

Επειδή η τριβή αμελείται, από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης στο ύψος h και του σημείου A έχουμε

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m v^2 + mg \frac{2}{3} h \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{3} gh}. \quad (11.29)$$



Σχήμα 11.4: Η τροχιά που ακολουθεί το βαγόνι.

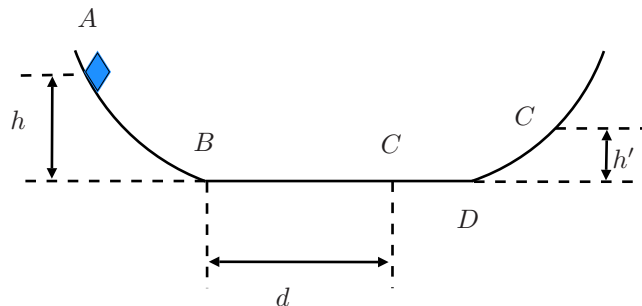
Χρησιμοποιώντας την ταχύτητα στο σημείο A η εξίσωση (11.29) δίνει τη μέγιστη αρχική ταχύτητα που πρέπει να έχει το βαγόνι για να μην εκτροχιαστεί

$$v_{0,\text{μεγ.}}^2 = g \left(R - \frac{2}{3}h \right) \quad (11.30)$$

(β) Όταν το βαγόνι φθάσει στο σημείο B θα σταματήσει λόγω υπόθεσης. Οπότε θα έχει μηδενική κινητική ενέργεια και εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}mv_{0,\text{μεγ.}}^2 + mgh = mgH \Rightarrow H = \frac{R}{2} \left(1 + \frac{4h}{3R} \right). \quad (11.31)$$

Παράδειγμα 11.3.4 Σώμα που αρχικά ηρεμεί αφήνεται σε ύψος h από το οριζόντιο επίπεδο και κινείται κατά μήκος της καμπύλης του σχήματος. Στα τόξα δεν υπάρχει τριβή ενώ στο οριζόντιο τμήμα μήκους l , ο συντελεστής κινητικής τριβής είναι μ_k . Σε ποιο σημείο της τροχιάς το σώμα θα σταματήσει;



Σχήμα 11.5: Η τροχιά που ακολουθεί το σώμα.

Λύση Θεωρούμε το οριζόντιο επίπεδο σαν στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τα σημεία A και B. Έχουμε

$$E_A = E_B \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2. \quad (11.32)$$

Το έργο της τριβής για το οριζόντιο τμήμα είναι

$$W_{B \rightarrow D} = \int_B^D \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\mu_k mgl. \quad (11.33)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

(i) Εάν $|W_{B \rightarrow D}| > E_B$ τότε το σώμα θα σταματήσει σε σημείο του οριζόντιου επιπέδου που προσδιορίζεται από την αρχή έργου - ενέργειας

$$d = \frac{h}{\mu_k} \quad (11.34)$$

(ii) Εάν $|W_{B \rightarrow D}| < E_B$, το σώμα θα σταματήσει σε ύψος h' που δίνεται από τη σχέση

$$W_{B \rightarrow D} = E_C - E_A \Rightarrow h' = h - \mu_k l. \quad (11.35)$$

11.4 Κεντρικές Δυνάμεις

Μία σημαντική υποκατηγορία των διατηρητικών δυνάμεων αποτελούν οι κεντρικές δυνάμεις.

Ορισμός 11.4.1 Μία δύναμη που ασκείται σε σημειακή μάζα m ονομάζεται κεντρική με κέντρο το σημείο O εάν:

(i) Έχει φορέα την ευθεία που ορίζεται από την σημειακή μάζα m και το σταθερό σημείο O (που ταυτίζεται με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων).

(ii) Το μέτρο της εξαρτάται μόνο από την απόσταση $r = \|\vec{r}\|$ από το O .

Μία δύναμη λοιπόν θα είναι κεντρική εάν και μόνο εάν

$$\vec{F}_{ij} = f(\|\vec{r}_{ij}\|)\vec{e}_{ij}. \quad (11.36)$$

Στην περίπτωση που η βαθμωτή συνάρτηση $f(\|\vec{r}_{ij}\|) < 0$ (ή $f > 0$) η δύναμη είναι ελκτική (ή απωστική). Παραδείγματα αποτελούν:

(α) Η βαρυντική δύναμη με

$$f(\|\vec{r}_{ij}\|) = -\frac{Gm_i m_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^2} \quad (11.37)$$

η οποία είναι πάντα ελκτική αφού οι μάζες είναι θετικές και $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}$ η σταθερά του Νεύτωνα.

(β) Η ηλεκτροστατική δύναμη (ή δύναμη *Coulomb*) με

$$f(\|\vec{r}_{ij}\|) = \frac{kq_i q_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^2} \quad (11.38)$$

όπου $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.00 \times 10^9 \text{Nm}^2 \text{C}^{-2}$ η σταθερά του *Coulomb* και τα φορτία μπορούν να έχουν και τα δύο πρόσημα. Η τεράστια διαφορά στις αριθμητικές τιμές των σταθερών υποδηλώνει ότι η βαρυντική δύναμη είναι εξαιρετικά ασθενής συγκριτικά με την ηλεκτροστατική. Επειδή ζούμε στη Γη, που είναι σώμα με μεγάλη μάζα, τα αποτελέσματα της βαρυντικής δύναμης είναι πιο εμφανή από εκείνα των ηλεκτροστατικών που δεν εμφανίζονται μακροσκοπικά λόγω της εξουδετέρωσης των θετικών από τα αρνητικά φορτία.

(γ) Οι ελαστικές δυνάμεις (αποτελούν μακροσκοπική έκφραση των μικροσκοπικών ηλεκτροστατικών δυνάμεων) που αναπτύσσονται μεταξύ δύο σωμάτων που συνδέονται με ένα ελατήριο ή λάστιχο είναι κεντρικές.

Θεώρημα 11.4.2 Ένα κεντρικό πεδίο δυνάμεων είναι πάντα συντηρητικό ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει.

Απόδειξη: Αρχεί να αποδείξουμε ότι $\vec{\nabla} \times \vec{f}(r) = \vec{0}$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\vec{\nabla} \times (g\vec{f}) = (\vec{\nabla}g) \times \vec{f} + g(\vec{\nabla} \times \vec{f}) \quad (11.39)$$

έχουμε

$$\vec{\nabla} \times \vec{f}(r) = \vec{\nabla} \times (f(r)\vec{r}) = (\vec{\nabla}f(r)) \times \vec{r} + f(r)(\vec{\nabla} \times \vec{r}) \quad (11.40)$$

αλλά

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x_i} = \frac{df(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{df(r)}{dr} \frac{\partial (\sum_{j=1}^3 x_j^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_i} = \frac{\sum_{j=1}^3 (\delta_{ij} x_j) df(r)}{r dr}, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (11.41)$$

οπότε

$$\vec{\nabla} f(r) \times \vec{r} = \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}. \quad (11.42)$$

Επίσης

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0} \quad (11.43)$$

όποτε το κεντρικό πεδίο δυνάμεων είναι αστρόβιλο ή συντηρητικό. \square

Πρόταση 11.4.3 Οι κεντρικές δυνάμεις έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Η στροφορμή του σώματος διατηρείται.
- (ii) Η τροχιά κίνησης είναι επίπεδη καμπύλη.
- (iii) Ισχύει ο νόμος των εμβαδών δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού που σαρώνει το διάνυσμα θέσεως του σώματος είναι σταθερός.

Απόδειξη:

- (i) Η ροπή μιάς κεντρικής δύναμης ως προς το κέντρο της είναι μηδέν. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f} = r\vec{e}_r \times f(r)\vec{e}_r = \vec{0}. \quad (11.44)$$

Αλλά

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{f} = \vec{\tau} \quad (11.45)$$

οπότε για κεντρική δύναμη $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{σταθερό διάνυσμα.}$

- (ii) Η στροφορμή θα είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης του σώματος από τον ορισμό της. Άρα θα ισχύει

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = 0, \quad \text{και} \quad \vec{L} = \text{σταθερό λόγω της (i)} \quad (11.46)$$

που είναι η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το κέντρο της δύναμης.

- (iii) Το στοιχειώδες εμβαδόν που σαρώνει το διάνυσμα θέσεως \vec{r} όταν μετατοπιστεί κατά $d\vec{r}$ θα ισούται με το ήμισυ του εμβαδού του παραλληλογράμμου με πλευρές \vec{r} και $d\vec{r}$. Οπότε

$$\|d\vec{S}\| = \frac{1}{2} \|\vec{r} \times d\vec{r}\| = \frac{1}{2} \|\vec{r} \times \vec{v}\| dt \quad (11.47)$$

και ο χρονικός ρυθμός μεταβολής θα δίνεται από την

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\vec{S}}{dt} \right\| &= \frac{1}{2} \|\vec{r} \times \vec{v}\| \\ &= \frac{1}{2} \|\vec{r} \times (\vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel)\| = \frac{1}{2} \|\vec{r} \times \vec{v}_\perp\| \\ &= \frac{1}{2} \frac{\|\vec{L}\|}{m} \end{aligned} \quad (11.48)$$

αφού λόγω της (i), $\|\vec{L}\| = mrv_\perp = \text{σταθερό.}$ Επίσης ο ρυθμός μεταβολής του στοιχειώδους εμβαδού θα έχει την κατεύθυνση της στροφορμής οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\|\vec{L}\|}{m} \vec{e}_L = \text{σταθερό διάνυσμα.} \quad (11.49)$$

\square

Παράδειγμα 11.4.4 Σώμα μάζας m κινείται στο xy -επίπεδο με διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}(t) = a \cos \omega t \vec{e}_x + b \sin \omega t \vec{e}_y \quad (11.50)$$

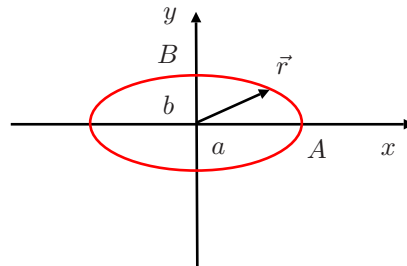
όπου a και b θετικές σταθερές με $a > b$. Δείξτε ότι

- (i) Το σώμα διαγράφει έλλειψη.
- (ii) Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι κεντρική.
- (iii) Το πεδίο δυνάμεων είναι συντηρητικό.

Υπολογίστε επίσης

- (iv) Τη δυναμική ενέργεια στα σημεία A και B .
- (v) Το έργο της δύναμης κατά την κίνηση του σώματος από το σημείο A στο B .
- (vi) Την ολική ενέργεια του σώματος.

Λύση



Σχήμα 11.6: Η ελλειπτική τροχιά που διαγράφει το κινούμενο σώμα.

- (i) Από την (11.50) έχουμε τις σχέσεις

$$x = a \cos \omega t \Rightarrow \frac{x}{a} = \cos \omega t \quad \text{και} \quad y = b \sin \omega t \Rightarrow \frac{y}{b} = \sin \omega t \quad (11.51)$$

Τετραγωνίζοντας και αθροίζοντας τις προηγούμενες σχέσεις παίρνουμε την

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (11.52)$$

που είναι η εξίσωση έλλειψης με μεγάλο ημιάξονα a και μικρό b .

- (ii) Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\omega^2(-a \cos \omega t \vec{e}_x - b \sin \omega t \vec{e}_y) = -m\omega^2 \vec{r}. \quad (11.53)$$

Άρα η δύναμη είναι ελκτική και κεντρική αφού έχει φορά αντίθετη του διανύσματος θέσης, το μέτρο της εξαρτάται από τη σχετική απόσταση r και ο φορέας της διέρχεται από σταθερό σημείο (την αρχή του συστήματος συντεταγμένων). Δυνάμεις που μεταβάλλονται ανάλογα της απόστασης παίζουν σημαντικό ρόλο τόσο στην Κλασική Μηχανική (δύναμη ελατηρίου του *Hooke*) όσο και στις υψηλές ενέργειες (μεταξύ των κουάρκ).

- (iii) Το διανυσματικό πεδίο είναι αστρόβιλο αφού

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -m\omega^2 x & -m\omega^2 y & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}. \quad (11.54)$$

Υπενθυμίζουμε ότι αυτή η συνθήκη είναι ικανή και αναγκαία για να είναι το πεδίο διατηρητικό.

(iv) Το δυναμικό υπολογίζεται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= -m\omega^2 x \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -m\omega^2 y.\end{aligned}\quad (11.55)$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς x και αντικαθιστώντας στη δεύτερη έχουμε

$$U(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + c, \quad \text{όπου } c = \text{σταθερά.} \quad (11.56)$$

Εάν εκλέξουμε το A σαν σημείο αναφοράς με μηδενική δυναμική ενέργεια, η σταθερά c έχει την τιμή

$$U_A = U(a, 0) = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}m\omega^2 a^2. \quad (11.57)$$

Το σημείο B έχει δυναμική ενέργεια

$$U_B = U(0, b) = \frac{1}{2}m\omega^2(b^2 - a^2). \quad (11.58)$$

(v) Το έργο κατά την μετατόπιση του σώματος από το σημείο A στο B εφαρμόζοντας την αρχή της μηχανικής ενέργειας είναι

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = U_A - U_B = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - b^2) \quad (11.59)$$

(vi) Η ολική ενέργεια δίνεται από την

$$\begin{aligned}E &= T + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(r^2 - a^2) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t) + \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t - a^2) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 = \text{σταθερή.}\end{aligned}\quad (11.60)$$

Παρατηρήστε ότι στα σημεία $\vec{r} = \pm \vec{a}$ η ολική ενέργεια είναι μόνο κινητική ενώ στις θέσεις $\vec{r} = \pm \vec{b}$ η ολική ενέργεια είναι αποκλειστικά δυναμική.

11.5 Μελέτη Καμπύλης Δυναμικής Ενέργειας

Θεωρούμε σωματίδιο που κινείται σε μία διάσταση κάτω από την επίδραση συντηρητικής δύναμης. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$\begin{aligned}E &= T + U(x) = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \Rightarrow \\ v(t) &= \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \Rightarrow \\ t - t_0 &= \pm \int_{x_0}^x \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\tilde{x}))}}.\end{aligned}\quad (11.61)$$

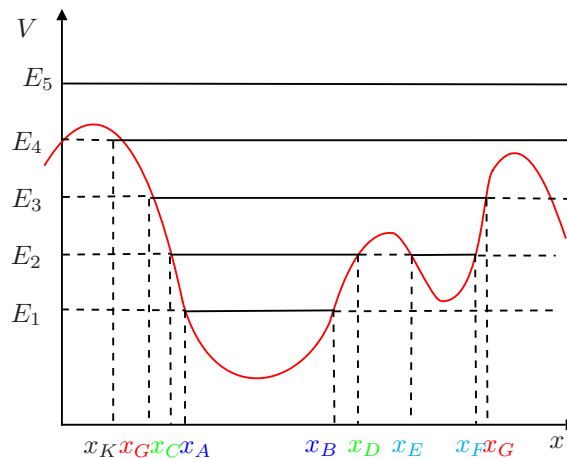
Αντικαθιστώντας τη δυναμική ενέργεια $U(x)$ στην προηγούμενη εξίσωση υπολογίζουμε τη θέση $x(t)$ του σωματιδίου οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .

Θα μελετήσουμε τώρα την καμπύλη δυναμικής ενέργειας σωματίου που κινείται σε μία διάσταση κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης.

Επειδή η δύναμη είναι κεντρική γνωρίζουμε ότι θα είναι και συντηρητική άρα

$$\exists U \in \mathbb{R} : \vec{F} = -\vec{\nabla}U(x) = -\frac{dU(x)}{dx}\vec{i} \quad (11.62)$$

Όμως $\left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x_0}$ είναι η κλίση στο σημείο x_0 της καμπύλης δυναμικής ενέργειας. Είναι θετική εάν η $U(x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ή αρνητική όταν είναι φθίνουσα. Επομένως η δύναμη θα κατευθύνεται προς τα αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) όταν η δυναμική ενέργεια αυξάνεται (ελαττώνεται). Υπάρχουν σημεία x_i για τα οποία $\left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x_i} = 0 = F$. Τα σημεία αυτά ονομάζονται θέσεις ισορροπίας της κίνησης. Εάν $\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2} \right)_{x_i} > 0$ τότε το σημείο x_i είναι τοπικό ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας και ονομάζεται θέση ευσταθούς ισορροπίας γιατί εάν το σώμα εκτραπεί ελάχιστα από την θέση αυτή η δύναμη που ασκείται πάνω του τείνει να το επαναφέρει στη αρχική του θέση. Εάν $\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2} \right)_{x_i} < 0$ το σημείο x_i είναι τοπικό μέγιστο της δυναμικής ενέργειας και ονομάζεται θέση ασταθούς ισορροπίας. Όταν ένα σώμα εκτραπεί ελάχιστα από την θέση ασταθούς ισορροπίας τότε δεν ξαναεπιστρέφει σε αυτή.



Σχήμα 11.7: Η καμπύλη δυναμικής ενέργειας και ενεργειακές στάθμες για τις οποίες η κίνηση του σωματίου είναι φραγμένη ή μη φραγμένη.

Στο σχήμα δυναμικής ενέργειας η ολική ενέργεια απεικονίζεται με την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x . Επειδή η κινητική ενέργεια $T = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$ για οποιαδήποτε πραγματική κίνηση θα ισχύει $E \geq U(x)$. Εάν ένα σωματίο έχει ολική ενέργεια E_1 τότε θα εκτελεί περιοδική κίνηση μεταξύ των σημείων x_A και x_B . Τα σημεία αυτά ονομάζονται σημεία αναστροφής γιατί η ταχύτητα μηδενίζεται και το σωματίδιο αντιστρέφει την κίνησή του. Το σωματίο δεν μπορεί να κινηθεί στις περιοχές $x < x_A$ ή $x > x_B$ γιατί τότε

$$U(x) > E_1 = T + U(x) \Rightarrow T < 0, \quad \forall x \notin [x_A, x_B] \quad (11.63)$$

το οποίο είναι άτοπο.

Εάν το σωματίδιο έχει ενέργεια E_2 τότε μπορεί να κινείται μόνο σε μία από τις περιοχές CD ή FG . Ο λόγος είναι ότι για να περάσει από την μία περιοχή στην άλλη θα χρειαζόταν αρνητική κινητική ενέργεια. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι δύο περιοχές χωρίζονται με φράγμα δυναμικού.

Στην ενεργειακή στάθμη E_3 η κίνηση του σωματιδίου είναι παλινδρομική μεταξύ των θέσεων H και I .

Στην ενεργειακή στάθμη E_4 το σωματίδιο κινείται από το άπειρο στη θέση K και μετά ξαναεπιστρέφει στο άπειρο. Η κίνηση αυτή μοιάζει με την κίνηση μιας μπάλας του τένις που αναπηδά σε τοίχο. Στην Κβαντομηχανική η περιγραφή που δώσαμε εδώ θα τροποποιηθεί σημαντικά.

Τέλος για την ενεργειακή στάθμη E_5 η κίνηση του σωματίου είναι μη φραγμένη και μπορεί να βρισκείται οπουδήποτε. Η ταχύτητά του θα μεταβάλλεται αφού η κινητική του ενέργεια εξαρτάται από την διαφορά $E_5 - U(x)$.

Παράδειγμα 11.5.1 Η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης δύο ατόμων σε διατομικό μόριο σαν συνάρτηση της μεταξύ τους απόστασης r προσεγγίζεται από τον τύπο Lehnard – Jones

$$U(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6} \quad (11.64)$$

όπου $a, b > 0$. Υπολογίστε:

(i) Τη δύναμη αλληλεπίδρασης.

- (ii) Τη θέση ισορροπίας.
 (iii) Τη δυναμική ενέργεια στη θέση ισορροπίας.
 (iv) Τις περιοχές του r για τις οποίες η δύναμη είναι ελκτική και απωστική.
 (v) Σε ποια απόσταση r η δύναμη γίνεται ελάχιστη;

Λύση

- (i) Η δύναμη που ασκεί το ένα άτομο στο άλλο είναι

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dr}\vec{e}_r = \left(12\frac{a}{r^{13}} - 6\frac{b}{r^7}\right)\vec{e}_r. \quad (11.65)$$

- (ii) Στη θέση ισορροπίας η δύναμη θα μηδενίζεται

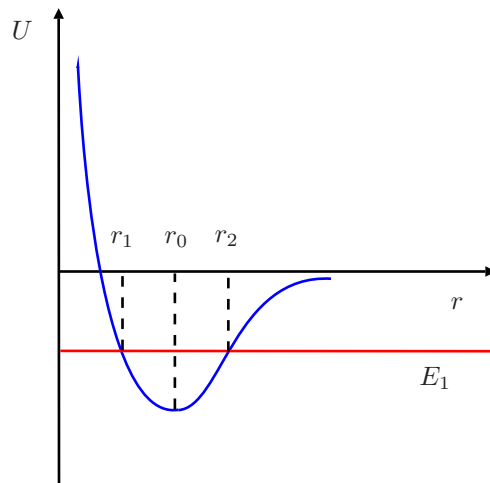
$$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow r_0 = \left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}. \quad (11.66)$$

Η τιμή $r_1 = \infty$ απορρίπτεται γιατί δεν παρουσιάζει φυσικό ενδιαφέρον. Το σημείο r_0 αποτελεί θέση ευσταθούς ισορροπίας αφού είναι τοπικό ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή $\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=r_0} > 0$.

- (iii) Η δυναμική ενέργεια στη θέση ισορροπίας είναι

$$U(r_0) = -\frac{b^2}{4a}. \quad (11.67)$$

- (iv) Η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας σαν συνάρτηση της απόστασης δίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η δύναμη είναι ελκτική όταν η U είναι αύξουσα δηλαδή στο διάστημα $r_0 < r < \infty$ ενώ θα είναι απωστική



Σχήμα 11.8: Η δυναμική ενέργεια σα συνάρτησε της απόστασης για διατομικό μόριο.

όταν η U είναι φθίνουσα δηλαδή στην περιοχή $0 < r < r_0$.

- (v) Υπολογίζουμε τα ακρότατα της δύναμης.

$$\frac{dF}{dr} = 0 \Rightarrow r_F = \left(\frac{26a}{7b}\right)^{\frac{1}{6}} \quad (11.68)$$

Το σημείο r_F είναι τοπικό ελάχιστο γιατί $\left.\frac{d^2F}{dr^2}\right|_{r=r_F} > 0$. Η ελάχιστη τιμή της δύναμης είναι

$$F_{\epsilon\lambda\alpha\chi.} = \frac{12a}{r_F^{13}} - \frac{6b}{r_F^7} = 12a \left(\frac{7b}{26a}\right)^{\frac{13}{6}} - 6b \left(\frac{7b}{26a}\right)^{\frac{7}{6}} \quad (11.69)$$

Κεφάλαιο 12

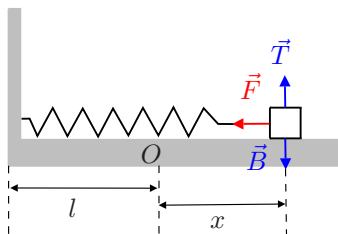
Ταλαντώσεις

Εάν ένα σώμα κινείται περιοδικά γύρω από τη θέση ισοροπίας του θα λέμε ότι εκτελεί ταλάντωση. Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα περιοδικών κινήσεων όπως: η ταλάντωση μιάς μάζας που είναι αναρτημένη από ένα ελατήριο, η κίνηση ενός απλού εκκρεμούς, η ταλάντωση των χορδών μουσικών οργάνων, τα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος όπου η τάση, το ρεύμα και το φορτίο ταλαντώνονται περιοδικά συναρτήσει του χρόνου.

12.1 Ο Αρμονικός Ταλαντωτής

Από όλες τις ταλαντώσεις η πιο σημαντική είναι η απλή αρμονική κίνηση γιατί αποτελεί ένα ακριβές ή προσεγγιστικό πρότυπο πολλών προβλημάτων της Κλασικής και Κβαντικής Φυσικής. Κατά την κίνηση αυτή ένα αντικείμενο ταλαντώνεται ανάμεσα σε δύο θέσεις στο χώρο για απεριόριστο χρόνο, χωρίς απώλειες μηχανικής ενέργειας. Στα υπαρκτά μηχανικά συστήματα υπάρχουν τριβές οι οποίες μεταφέρουν ενέργεια στο περιβάλλον. Η κίνηση αυτή ονομάζεται φθίνουσα ταλάντωση. Εάν προσδώσουμε ενέργεια στο σύστημα με την εφαρμογή εξωτερικής δύναμης η ταλάντωση ονομάζεται εξαναγκασμένη.

Θεωρούμε μάζα m σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η μάζα είναι συνδεδεμένη με ελατήριο αμελητέας μάζας και φυσικού μήκους l . Εάν η μάζα μετατοπιστεί και αφεθεί ελεύθερη θα αρχίσει να ταλαντώνεται γύρω από τη θέση ισοροπίας O . Στο σώμα ενεργεί σύμφωνα με το νόμο του *Hooke* η δύναμη αποκατάστασης



Σχήμα 12.1: Η απλή αρμονική ταλάντωση σώματος που προσδένεται στο άκρο οριζώντιου ελατηρίου.

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\kappa x \vec{i} \quad (12.1)$$

όπου η μετατόπιση x είναι θετική για επιμήκυνση (αρνητική για συμπίεση) και κ μία σταθερά αναλογίας που ονομάζεται σταθερά ελατηρίου ή ελαστική σταθερά ή παράγοντας ακαμψίας ή μέτρο ελαστικότητας. Θεωρώντας ότι το σώμα έχει αρχική απομάκρυνση x_0 και μηδενική αρχική ταχύτητα, από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα θα έχουμε

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} = -\kappa x \vec{i}, \quad x(t=0) = x_0, \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = 0. \quad (12.2)$$

Έτσι οδηγούμαστε στην δευτεροτάξια, ομογενή, με σταθερούς συντελεστές συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{1}{m} \left. \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{\kappa}{m}. \quad (12.3)$$

με χαρακτηριστική εξίσωση

$$r^2 + \omega^2 = 0. \quad (12.4)$$

Έχει μιγαδικές ρίζες τις $r_1 = i\omega$ και $r_2 = \bar{r}_1 = -i\omega$. Οπότε η γενική λύση δίνεται από την

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = A \cos(\omega t + \phi), \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{c_2}{c_1} \right). \quad (12.5)$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες προσδιορίζουμε τις αυθαίρετες σταθερές $\phi = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $A = x_0 \cos \phi = (-1)^n x_0$. Η λύση μας είναι μια φραγμένη και περιοδική συνάρτηση του χρόνου όπως αναμενόταν, δηλαδή, $|x(t)| \leq x_0$, $\forall t$ και $x(t+T) = x(t)$. Ορίζουμε τα ακόλουθα μεγέθη:

- (i) Η μέγιστη απόσταση από τη θέση ισορροπίας ονομάζεται πλάτος της ταλάντωσης. Στην περίπτωση μας συμβολίζεται με την $|A| = |x_0|$.
- (ii) Η ποσότητα $\omega t + \phi$ ονομάζεται φάση της ταλάντωσης και η γωνία ϕ αρχική φάση γιατί αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή $t = 0$.
- (iii) Ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης, δηλαδή ο χρόνος που απαιτείται για την μετατόπιση του σώματος από την θέση $x_0 \rightarrow -x_0 \rightarrow x_0$, ονομάζεται περίοδος της κίνησης. Δίνεται από την σχέση

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \quad (12.6)$$

όπου ω η κυκλική συχνότητα της κίνησης η οποία μετρείται σε rad/s . Η σχέση αυτή εύκολα μπορεί να αποδειχθεί εάν παρατηρήσουμε ότι $\omega t + \phi + 2\pi = \omega(t+T) + \phi$.

- (iv) Ο αριθμός των πλήρων περιστροφών στη μονάδα του χρόνου ονομάζεται συχνότητα και δίνεται από την σχέση

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{m}}. \quad (12.7)$$

Παρατηρήστε ότι η περίοδος και η συχνότητα εξαρτώνται από τη μάζα και τη σταθερά του ελατηρίου. Η συχνότητα αυξάνεται με την τετραγωνική ρίζα της σταθεράς του ελατηρίου και μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα της τετραγωνικής ρίζας της μάζας του σώματος.

Το ίδιο πρόβλημα μπορούμε να το μελετήσουμε χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας γιατί η δύναμη αποκατάστασης είναι κεντρική άρα και διατηρητική. Η ολική ενέργεια οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\kappa x^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}\kappa x^2. \quad (12.8)$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα ηρεμεί οπότε έχει ολική ενέργεια που ισούται με τη δυναμική $E_{αρχικά} = V_{t=0} = \frac{1}{2}\kappa x_0^2$. Εξισώνοντας τις ενέργειες μεταξύ της αρχικής και οποιασδήποτε άλλης τυχαίας θέσης έχουμε

$$v = \frac{dx(t)}{dt} = \omega(x_0^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (12.9)$$

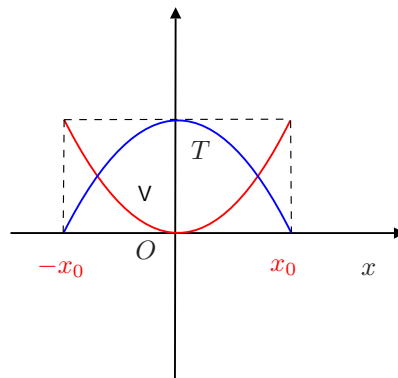
Η λύση της εξίσωσης, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\frac{d \arcsin u}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dt}$ και $\sin(\arcsin u) = u$, είναι

$$x(t) = x_0 \sin \left(\omega t + (2n+1) \frac{\pi}{2} \right). \quad (12.10)$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος θα ήταν να παραγωγίσουμε την ολική ενέργεια ως προς το χρόνο και να πάρουμε τη γνωστή εξίσωση

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{\kappa}{m}. \quad (12.11)$$

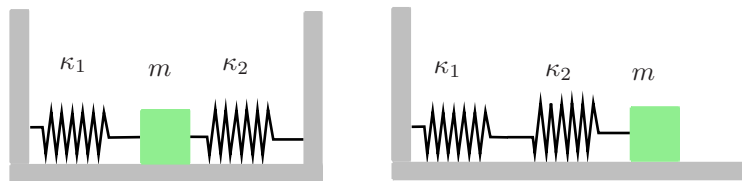
Από τη σχέση της ταχύτητας $v = \omega(x_0^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη στη θέση ισορροπίας ($x = 0$) και μηδενίζεται στα σημεία αναστροφής $x = \pm x_0$. Η δυναμική ενέργεια σε αντίθεση είναι ελάχιστη στη θέση ισορροπίας και αυξάνει καθώς το σώμα πλησιάζει τις ακραίες θέσεις ταλάντωσης. Άρα κατά την διάρκεια μιας ταλάντωσης υπάρχει συνεχής ανταλλαγή δυναμικής και κινητικής ενέργειας.



Σχήμα 12.2: Οι καμπύλες δυναμικής και κινητικής ενέργειας για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή.

Παράδειγμα 12.1.1 Σώμα μάζας m βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και έχει συνδεθεί με δύο ελατήρια σταθερών κ_1 και κ_2 , όπως στο σχήμα. Το σώμα εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας του και αφήνεται να κινείται ελεύθερο χωρίς τριβές. Δείξτε ότι το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και υπολογίστε τις αντίστοιχες περιόδους.

Λύση



Σχήμα 12.3: Η 'παράλληλη' και εν σειρά συνδεσμολογία ελατηρίων με σώμα μάζας m .

- (i) 'Παράλληλη' συνδεσμολογία: Όταν το ελατήριο σταθεράς κ_1 εκτείνεται κατά x_1 το δεύτερο ελατήριο συμπιέζεται κατά την ίδια απόσταση. Η συνολική δύναμη που ασκείται στο σώμα κατά την οριζόντια κατεύθυνση είναι

$$\vec{F} = -(\kappa_1 + \kappa_2)x_1\vec{i} = -\kappa x_1\vec{i}. \quad (12.12)$$

Άρα το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa_1 + \kappa_2}}. \quad (12.13)$$

- (ii) Σε σειρά συνδεσμολογία: Έστω ότι η δύναμη επαναφοράς προκαλεί μετατοπίσεις των ελατηρίων κατά $x_1 = \frac{F}{\kappa_1}$ και $x_2 = \frac{F}{\kappa_2}$. Τότε θα ισχύει

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{F}{\kappa} = \frac{F}{\kappa_1} + \frac{F}{\kappa_2} \Rightarrow \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \quad (12.14)$$

όπου κ η σταθερά του ισοδύναμου συστήματος ελατηρίων. Η αναγωγή είναι παρόμοια με την εν σειρά και παράλληλη συνδεσμολογία αντιστάσεων στα ηλεκτρικά κυκλώματα. Η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι στην περίπτωση αυτή

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(\kappa_1 + \kappa_2)}{\kappa_1\kappa_2}}. \quad (12.15)$$

Στη γενικότερη περίπτωση όπου έχουμε n το πλήθος ελατήρια συνδεδεμένα σε σειρά, η σταθερά του ισοδύναμου συστήματος θα δίνεται από την σχέση

$$\frac{1}{\kappa} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\kappa_i} \quad (12.16)$$

και η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{m\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\kappa_i}\right)}. \quad (12.17)$$

12.2 Ο Αποσβενόμενος Αρμονικός Ταλαντωτής

Στην πράξη διάφορες δυνάμεις τείνουν να μειώσουν το πλάτος της ταλάντωσης ενός αρμονικού ταλαντωτή. Μια τέτοια επιβραδύνουσα δύναμη είναι η τριβή

$$\vec{F}(\vec{v}) = -\beta\vec{v} = -\beta\frac{dx}{dt}\vec{i}. \quad (12.18)$$

όπου β η σταθερά απόσβεσης. Η εξίσωση της κίνησης στην περίπτωση αυτή δίνεται από την δευτεροτάξια, ομογενή, με σταθερούς συντελεστές συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0, \quad 2\gamma = \frac{\beta}{m}, \quad \omega^2 = \frac{\kappa}{m}. \quad (12.19)$$

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \quad (12.20)$$

και διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας $\Delta = 4(\gamma^2 - \omega^2)$

(1) Ισχυρή απόσβεση, $\Delta > 0$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο πραγματικές και διακριτές ρίζες τις

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma + \alpha, & \alpha &= \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \\ \lambda_2 &= -\gamma - \alpha. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Η συνήθης διαφορική εξίσωση έχει την γενική λύση

$$x(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t}(c_1e^{\alpha t} + c_2e^{-\alpha t}), \quad \gamma > \alpha. \quad (12.22)$$

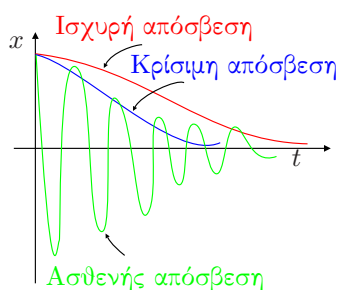
Οι σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

(2) Κρίσιμη απόσβεση, $\Delta = 0$. Η γενική λύση στην περίπτωση αυτή είναι

$$x(t) = (c_1 + c_2t)e^{-\gamma t} = e^{-\gamma t}(c_1 + c_2t). \quad (12.23)$$

(3) Ασθενής απόσβεση, $\Delta < 0$. Η γενική λύση είναι

$$x(t) = e^{-\gamma t}(c_1 \sin bt + c_2 \cos bt), \quad b = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}. \quad (12.24)$$



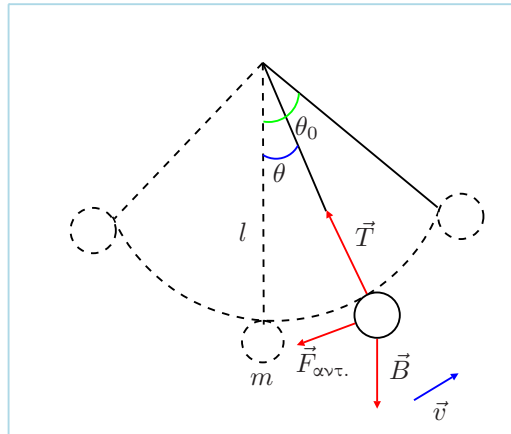
Σχήμα 12.4: Η μετατόπιση του σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου όταν στο σώμα ασκείται η δύναμη της αντίστασης του μέσου.

Στις περιπτώσεις 1 και 2 η απόσβεση είναι τόσο μεγάλη ώστε δεν συμβαίνει ταλάντωση και η μάζα επιστρέφει βαθμιαία στη θέση ισορροπίας. Όταν έχουμε κρίσιμη απόσβεση η μάζα επιστρέφει γρηγορότερα στη θέση ισορροπίας από όταν έχουμε ισχυρή απόσβεση. Στην περίπτωση 3 η απόσβεση έχει ελαττωθεί σε τέτοιο βαθμό ώστε να συμβαίνουν ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας αν και το πλάτος των ταλαντώσεων αυτών τείνει να ελαττωθεί με την πάροδο του χρόνου.

Παράδειγμα 12.2.1 Εκκρεμές, που αποτελείται από μια μάζα m και είναι αναρτημένη στο ένα άκρο άκαμπτης και αβαρούς ράβδου μήκους l , κινείται σε ρευστό με μεγάλο ιξώδες. Η δύναμη αντίστασης είναι ανάλογη της ταχύτητας του σώματος και δίνεται από την σχέση

$$F_{αντ.} = 2m\sqrt{\frac{g}{l}}l\dot{\theta}. \quad (12.25)$$

Η μάζα αρχικά βρίσκεται σε γωνιακή απομάκρυνση $\theta(t=0) = \theta_0$ και έχει ταχύτητα $\dot{\theta}(t=0) = 0$. Υπολογίστε τις θ , $\dot{\theta}$ οποιαδήποτε χρονική στιγμή όπως επίσης και την τάση T της ράβδου.



Σχήμα 12.5: Οι δυνάμεις που ασκούνται σε σώμα που ταλαντώνεται σε ρευστό μεγάλου ιξώδους.

Λύση Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι το βάρος του \vec{B} , η τάση \vec{T} της ράβδου, η αντίσταση $\vec{F}_{αντ.}$ του ρευστού και η άνωση A η οποία αμελείται. Αναλύοντας τις δυνάμεις κατά την ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση και εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Ακτινική κατεύθυνση} & : T - B \cos \theta = m \frac{v^2}{l} \\ \text{Εφαπτομενική κατεύθυνση} & : ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -2m\sqrt{\frac{g}{l}}l \frac{d\theta}{dt} - mg \sin \theta. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Εάν η γωνία απομάκρυνσης είναι πολύ μικρή τότε ισχύει η προσέγγιση $\sin \theta \simeq \theta$ και η ακτινική εξίσωση της κίνησης γράφεται

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\sqrt{\frac{g}{l}} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (12.27)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 + 2\sqrt{\frac{g}{l}}\lambda + \frac{g}{l} = 0 \quad (12.28)$$

έχει μία ρίζα πολλαπλότητας δύο

$$\lambda_1 = -\sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (12.29)$$

Η γενική λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\theta(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t} \quad (12.30)$$

με συντελεστές

$$c_1 = \theta_0, \quad c_2 = \sqrt{\frac{g}{l}} \theta_0 \quad (12.31)$$

που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Άρα

$$\theta(t) = \theta_0 \left(1 + \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t} \quad \text{και} \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\theta_0 g}{l} t e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}. \quad (12.32)$$

Η ταχύτητα του σώματος οποιαδήποτε χρονική στιγμή μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt}. \quad (12.33)$$

Επιλύοντας την εφαπτομενική εξίσωση ως προς την τάση έχουμε

$$T = m \left(l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + g \cos \theta \right). \quad (12.34)$$

12.3 Ο Εξαναγκασμένος Αρμονικός Ταλαντωτής

Έστω ότι εκτός από τη δύναμη επαναφοράς και την δύναμη αντίστασης στο σώμα ασκείται εξωτερική δύναμη

$$\vec{F}(t) = F_0 \cos(\alpha t) \vec{i}. \quad (12.35)$$

Η εξίσωση της κίνησης στην περίπτωση αυτή είναι μία δευτεροτάξια, μη ομογενή, με σταθερούς συντελεστές συνήθους διαφορική εξίσωση και δίνεται από την σχέση

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_0 \cos(\alpha t), \quad f_0 = \frac{F_0}{m} \quad (12.36)$$

Η γενική της λύση θα είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς και μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών η μερική λύση θα έχει την μορφή

$$x_p(t) = c_1 \cos(\alpha t) + c_2 \sin(\alpha t). \quad (12.37)$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση την $x_p(t)$ προσδιορίζουμε τις αυθαίρετες σταθερές

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{f_0(\omega^2 - \alpha^2)}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \alpha^2}, \\ c_2 &= \frac{2f_0 \gamma \omega}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \alpha^2}. \end{aligned} \quad (12.38)$$

Η μερική λύση τότε γράφεται

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \alpha^2}} \cos(\alpha t - \phi), \quad \tan \phi = \frac{2\gamma \alpha}{\alpha^2 - \omega^2}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi. \quad (12.39)$$

Η γενική λύση της ομογενούς τείνει στο μηδέν σε μικρό χρονικό διάστημα και για αυτό ονομάζεται λύση της μεταβατικής κατάστασης. Όταν περάσει αυτός ο χρόνος η κίνηση του σώματος δίνεται με καλή προσέγγιση από την μερική λύση της μη ομογενούς που λέγεται λύση της μόνιμης κατάστασης. Το πλάτος της ταλάντωσης στη μόνιμη κατάσταση γίνεται μέγιστο όταν η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης λάβει την τιμή

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2} \quad (12.40)$$

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(\alpha) = (\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \alpha^2 \quad (12.41)$$

και βρίσκουμε τα ακρότατά της.

$$\frac{dg(\alpha)}{d\alpha} = \alpha(\alpha^2 - \omega^2 + 2\gamma^2) = 0. \quad (12.42)$$

Οπότε $\alpha = 0$ ή $\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$. Η δεύτερη παράγωγος είναι

$$\frac{d^2g(\alpha)}{d\alpha^2} = 12\alpha^2 - 4\omega^2 + 8\gamma^2 \quad (12.43)$$

και το σημείο $\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$ είναι τοπικό ελάχιστο αφού

$$\left. \frac{d^2g(\alpha)}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\sqrt{\omega^2-2\gamma^2}} > 0. \quad (12.44)$$

Στην συχνότητα αυτή το σώμα εκτελεί μεγάλες ταλαντώσεις που μερικές φορές προκαλούν ζημιές στο σύστημα. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται συντονισμός και η τιμή του μέγιστου πλάτους στη συχνότητα συντονισμού είναι

$$x_{0,max} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}. \quad (12.45)$$

Παράδειγμα 12.3.1 Σώμα μάζας m κινείται στο xy -επίπεδο υπό την επίδραση των δυνάμεων $F_{1x} = -m\omega^2x$, $F_{2x} = am\omega^2y$, $a > 0$ στην x -διεύθυνση και της $F_y = -m\omega^2y$ στην y -διεύθυνση.

(i) Επιλύστε τις εξισώσεις της κίνησης με αρχικές συνθήκες

$$x(0) = y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = A\omega \quad (12.46)$$

(ii) Απεικονήστε γραφικά την τροχιά του σώματος.

Λύση

(i) Οι εξισώσεις της κίνησης με τις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες είναι

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2(x - ay), & x(0) &= 0, & \dot{x}(0) &= 0 \\ \ddot{y} &= -\omega^2y, & y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= A\omega \end{aligned} \quad (12.47)$$

Η δεύτερη εξίσωση περιγράφει απλή αρμονική ταλάντωση με λύση

$$y(t) = A \sin \omega t. \quad (12.48)$$

Αντικαθιστώντας τη λύση αυτή στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - aA \sin \omega t) \quad (12.49)$$

Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$x_{\text{ομ.}}(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \quad (12.50)$$

Μια μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας την συνάρτηση

$$x_{\text{μη ομ.}}(t) = df(t) \cos \omega t \quad (12.51)$$

όπου η $f(t)$ θα υπολογιστεί με αντικατάσταση της $x_{\text{μη ομ.}}$ στην εξίσωση. Έχουμε ότι

$$\ddot{x}_{\text{μη ομ.}} = d(\ddot{f} - \omega^2 f) \cos \omega t - 2d\dot{f}\omega \sin \omega t \quad (12.52)$$

οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές των συνημιτόνων και ημιτόνων καταλήγουμε στις

$$\ddot{f} = 0, \quad 2d\dot{f} + aA\omega = 0. \quad (12.53)$$

Άρα

$$f(t) = t \quad \text{και} \quad d = -\frac{1}{2}\omega a A. \quad (12.54)$$

Η γενική λύση γράφεται

$$x(t) = x_{\text{ομ.}}(t) + x_{\text{μη ομ.}}(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t - \frac{1}{2}\omega a A t \cos \omega t \quad (12.55)$$

όπου οι συντελεστές

$$c_1 = \frac{1}{2}aA, \quad c_2 = 0 \quad (12.56)$$

προσδιορίστηκαν χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες.

(ii) Τις χρονικές στιγμές

$$t_n^A = \frac{(2n+1)\pi}{2\omega}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.57)$$

στην y -κατεύθυνση έχουμε αρμονική ταλάντωση με πλάτος $y(t_n^A) = \pm A$ και οι τετμημένες των αντίστοιχων σημείων είναι

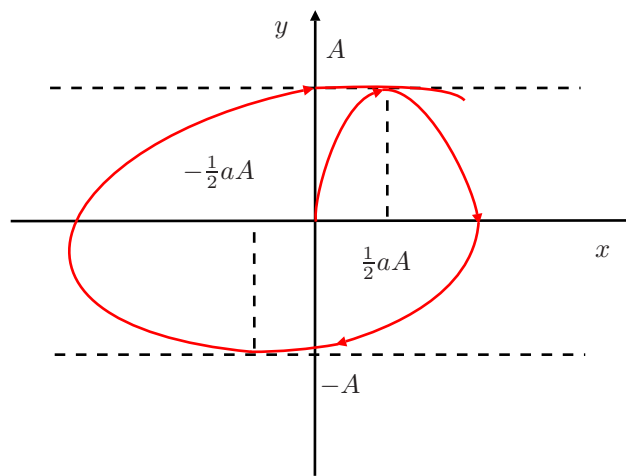
$$x(t_n^A) = \pm \frac{1}{2}aA. \quad (12.58)$$

Η τροχιά του σώματος τέμνει τον x -άξονα στα σημεία

$$(x_n^0, y_n^0) = \left(-\frac{1}{2}aAn\pi(-1)^n, 0\right),$$

$$\text{όπου } x_n^0 = x(t_n^0), \quad y_n^0 = y(t_n^0) \quad \text{και} \quad t_n^0 = \frac{n\pi}{\omega}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.59)$$

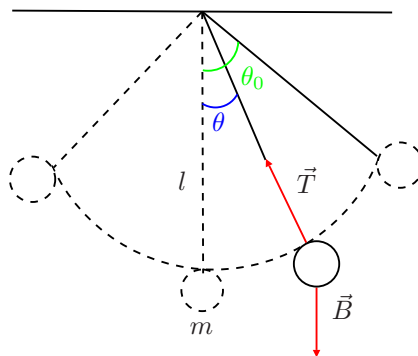
Η γραφική παράσταση της τροχιάς $y(x)$ είναι



Σχήμα 12.6: Η γραφική παράσταση της τροχιάς του σώματος.

12.4 Το Απλό Εκκρεμές

Το απλό εκκρεμές αποτελείται από μια μάζα m δεμένη στο άκρο μιας αβαρούς ράβδου μήκους l . Η μάζα μπορεί να ταλαντώνεται ελεύθερα γύρω από το ανώτερο άκρο της ράβδου και να κινείται σε ένα κατακόρυφο επίπεδο. Έστω s το μήκος τόξου από τη θέση ισορροπίας και θ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφη. Αν \vec{e}_T είναι το



Σχήμα 12.7: Το απλό εκκρεμές.

μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στην κυκλική τροχιά της μάζας του εκκρεμούς, από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{e}_T = -mg \sin \theta \vec{e}_T, \quad s = l\theta \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (12.60)$$

Για μικρές γωνίες (μικρότερες των 5 μοιρών) το $\sin \theta \simeq \theta$ και η γενική λύση της εξίσωσης (12.60) είναι

$$\theta(t) = c_1 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + c_2 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \quad (12.61)$$

όπου οι αυθαίρετες σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες $\theta(t=0) = \theta_0$ και $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = 0$. Η ειδική λύση στην περίπτωση αυτή δίνεται από την

$$\theta = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \quad (12.62)$$

με περίοδο ταλάντωσης $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Εάν η γωνία δεν είναι μικρή τότε η περίοδος μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Η ολική ενέργεια του σώματος οποιαδήποτε χρονική στιγμή δίνεται από την

$$E = \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos \theta). \quad (12.63)$$

Όταν το σώμα βρίσκεται στα σημεία αναστροφής θα έχει μόνο δυναμική ενέργεια

$$E' = mgl(1 - \cos \theta_0). \quad (12.64)$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 1 - \cos \theta$ και την αρχή διατήρησης της ενέργειας καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}. \quad (12.65)$$

Ολοκληρώνοντας την (12.65) για $t \in [0, \frac{T}{4}]$ και αλλάζοντας μεταβλητές σε $\kappa = \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right)$, $u = \frac{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\kappa}$ έχουμε

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2} \sqrt{1-\kappa^2 u^2}}. \quad (12.66)$$

Επειδή $-1 < \kappa < 1$ αναπτύσσουμε τη συνάρτηση $1/\sqrt{1-\kappa^2 u^2}$ σε σειρά

$$\frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2 u^2}} = 1 + \frac{\kappa^2 u^2}{2} + \frac{3\kappa^4 u^4}{8} + \dots \quad (12.67)$$

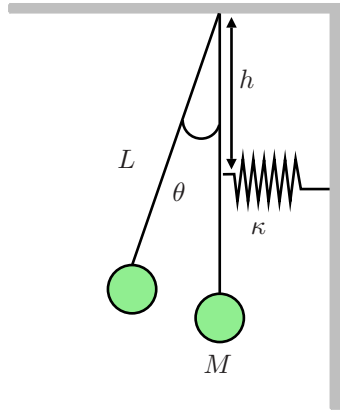
και αντικαθιστούμε στην (12.66). Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση και τον ολοκληρωτικό τύπο

$$\int u^n \arcsin u \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \arcsin u - \frac{1}{n+1} \int \frac{u^{n+1}}{\sqrt{1-u^2}} du \quad (12.68)$$

καταλήγουμε τελικά στην έκφραση

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \kappa^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \kappa^4 + \dots \right). \quad (12.69)$$

Παράδειγμα 12.4.1 Ένα εκκρεμές μήκους L και μάζας M είναι συνδεδεμένο με ελατήριο σταθεράς κ σε απόσταση h από το σημείο ανάρτησής του. Υπολογίστε τη συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος για μικρές τιμές της γωνίας θ όταν η ράβδος είναι άκαμπτη, αβαρής και η αντίσταση του αέρα αμελείται.



Σχήμα 12.8: Το σύστημα εκκρεμές - ελατήριου το οποίο ταλαντώνεται.

Λύση Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα εκκρεμές - ελατήριου είναι συντηρητικές οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Η ολική ενέργεια του συστήματος είναι

$$E_{ολ.} = E_{ολ. \text{ εκρ.}} + E_{ολ. \text{ ελ.}} = \frac{1}{2} M v^2 + mgL(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} \kappa x^2 \quad (12.70)$$

όπου $M \gg m_{ελ.}$. Αλλά $x = h \tan \theta$ και $v = \frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt}$ οπότε η (12.70) γράφεται ισοδύναμα

$$E_{ολ.} = \frac{1}{2} M L^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + MgL(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} \kappa h^2 \tan^2 \theta. \quad (12.71)$$

Η ολική ενέργειας είναι σταθερή, ανεξάρτητη από το χρόνο και θα ισχύει

$$\frac{dE_{ολ.}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{ML^2} \left(MgL \sin \theta + \kappa h^2 \frac{\tan \theta}{\cos^2 \theta} \right) = 0. \quad (12.72)$$

Για μικρές γωνίες απομάκρυνσης $\theta \ll 1$ το $\sin \theta \simeq \theta$ και $\frac{\tan \theta}{\cos^2 \theta} \simeq \theta$. Άρα

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{ML^2} (MgL + \kappa h^2) \theta = 0 \quad (12.73)$$

που είναι εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης με συχνότητα

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{MgL + \kappa h^2}{ML^2}}. \quad (12.74)$$

12.5 Το Φυσικό Εκκρεμές

Το φυσικό ή σύνθετο εκκρεμές αποτελείται από επίπεδο στερεό σώμα που περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από άξονα που δεν διέρχεται από το Κ.Μ. Έστω σώμα αναρτημένο από σταθερό σημείο O που απέχει από το Κ.Μ. απόσταση d . Το βάρος του προκαλεί ροπή γύρω από το O το μέτρο της οποίας είναι

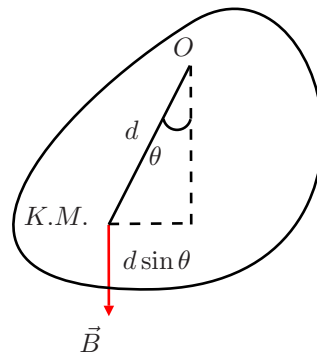
$$\tau = B d \sin \theta. \quad (12.75)$$

Αλλά η ροπή δίνεται από τη σχέση

$$\tau = I \alpha \Rightarrow -mgd \sin \theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgd}{I} \right) \sin \theta = 0 \quad (12.76)$$

όπου I η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής. Για μικρές γωνίες εκτροπής το $\sin \theta \approx \theta$ και η προηγούμενη εξίσωση περιγράφει απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή ταχύτητα

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad (12.77)$$



Σχήμα 12.9: Το φυσικό εκκρεμές περιστρέφεται γύρω από το σημείο O που δεν ταυτίζεται με το κέντρο μάζας του στερεού σώματος.

και γωνιακή απομάκρυνση

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \delta). \quad (12.78)$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}. \quad (12.79)$$

Την σχέση αυτή μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας ενός σώματος όταν είναι γνωστά η θέση του Κ.Μ. και η περίοδος της ταλάντωσης. Όταν η ροπή αδράνειας είναι $I = md^2$ τότε έχουμε την εξίσωση του απλού εκκρεμούς.

Κεφάλαιο 13

Μελέτη Κίνησης σε Κεντρικό Δυναμικό

Θα μελετήσουμε την κίνηση σημειακής μάζας m σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων $1/r^2$ ως προς σταθερό σημείο που ταυτίζεται με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$m\vec{a} = \frac{C}{r^2}\vec{e}_r \quad (13.1)$$

όπου η σταθερά C εάν είναι θετική αντιπροσωπεύει απωστική δύναμη ενώ στην αντίθετη περίπτωση ελκτική. Επειδή η δύναμη είναι κεντρική γνωρίζουμε ότι η στροφορμή του σώματος διατηρείται και η τροχιά του είναι επίπεδη καμπύλη. Οπότε η επιτάχυνσή του θα έχει μόνο δύο συνιστώσες που σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από την έκφραση

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\vec{e}_\theta. \quad (13.2)$$

Οι εξισώσεις της κίνησης κατά την ακτινική και εφαπτομενική κατεύθυνση γράφονται

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= \frac{C}{r^2} \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) &= 0. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Η δεύτερη εξίσωση εκφράζει την διατήρηση της στροφορμής. Μπορούμε να απαλείψουμε την εξάρτηση της πρώτης εξίσωσης από την θ χρησιμοποιώντας την $L = mr^2\dot{\theta}$ ¹. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3} = \frac{C}{mr^2}. \quad (13.4)$$

Η (13.4) μπορεί να επιλυθεί εάν παραμετριοποιήσουμε την τροχιά του σώματος χρησιμοποιώντας την $r = r(\theta)$ αντί των $(r(t), \theta(t))$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και τον μετασχηματισμό $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{mr^2} \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{L^2}{m^2r^4} \left[\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (13.5)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= -\frac{1}{r^2} \frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2. \end{aligned} \quad (13.6)$$

¹Υπενθυμίζουμε ότι

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta$$

Οπότε η εξίσωση (13.4) μετασχηματίζεται στην

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{Cm}{L^2}. \quad (13.7)$$

Αυτή είναι μία δευτεροτάξια, γραμμική, μη ομογενή, με σταθερούς συντελεστές συνήθη διαφορική εξίσωση. Η γενική της λύση είναι

$$u(\theta) = A \cos(\theta + \phi) - \frac{Cm}{L^2}. \quad (13.8)$$

Επειδή η τροχιά είναι επίπεδη μπορούμε να εκλέξουμε το σύστημα αναφοράς έτσι ώστε η αρχική φάση $\phi = 0$. Η λύση γράφεται

$$\frac{1}{r(\theta)} = -\frac{Cm}{L^2} + A \cos \theta. \quad (13.9)$$

Η σταθερά A μπορεί να προσδιοριστεί από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{C}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{C}{r} \\ &= \frac{1}{2}m \left(\frac{L^2}{m^2 r^4} \right) \left[\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right] + \frac{C}{r}. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (13.9), παραγωγίζοντας την ως προς θ και αντικαθιστώντας στην (13.10) καταλήγουμε στην

$$A(E, L) = \frac{Cm}{L^2} \left(1 + \frac{2EL^2}{C^2m} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13.11)$$

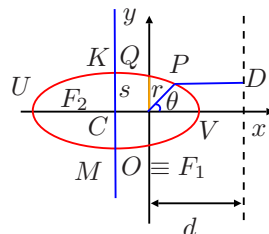
Η τροχιά ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{1}{r} = -\frac{Cm}{L^2} \left[1 - \left(1 + \frac{2EL^2}{C^2m} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right]. \quad (13.12)$$

Η εξίσωση (13.12) είναι η πολική μορφή μιας κωνικής τομής (τομής κώνου με επίπεδο) και μπορεί να είναι κύκλος, έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή. Η γενική εξίσωση της κωνικής τομής είναι

$$\frac{1}{r} = \frac{1 \pm e \cos \theta}{s} \quad (13.13)$$

όπου e η εκκεντρότητα, και s η κάθετη απόσταση QO . Το σημείο O είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων και ταυτίζεται με μία από τις εστίες της κωνικής τομής. Η διαφορά προσήμου του όρου $\frac{\pm e \cos \theta}{s}$ οφείλεται στη διαφορά κατά γωνία π . Στον παρακάτω πίνακα χαρακτηρίζουμε μια κωνική τομή ανάλογα με την τιμή της εκκεντρότητας e



Σχήμα 13.1: Η έλλειψη με τη μια εστία της και την διευθετούσα.

και συμπληρωματικά παραθέτουμε και τις τιμές του s . Στον πίνακα το d συμβολίζει την απόσταση της εστίας από

Είδος καμπύλης	Τιμή εκκεντρότητας	s
Κύκλος	$e = 0$	r
Έλλειψη	$0 < e < 1$	$\alpha(1 - e^2)$
Παραβολή	$e = 1$	d
Υπερβολή	$e > 1$	$\alpha(e^2 - 1)$

Πίνακας 13.1: Οι κωνικές τομές με τις αντίστοιχες τιμές εκκεντρότητας e και s .

την διευθετούσα. Η εκκεντρότητα για το πρόβλημά μας δίνεται από την

$$e = \left(1 + \frac{2EL^2}{C^2m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (13.14)$$

και εξαρτάται από το πρόσημο της ενέργειας. Διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

- (α) Απωστικές δυνάμεις ($C > 0$). Η ολική μηχανική ενέργεια είναι πάντα θετική οπότε η εκκεντρότητα $e > 1$ και η τροχιά θα είναι υπερβολή.
- (β) Ελκτικές δυνάμεις ($C < 0$). Εάν $T > U$ η τροχιά θα είναι πάλι υπερβολή. Εάν $T < U$ τότε $0 < e < 1$ και η τροχιά είναι έλλειψη. Τέλος για $T = U$ έχουμε παραβολή $e = 1$.

Παράδειγμα 13.0.1 Αποδείξτε ότι:

- (1) Η εξίσωση κωνικής τομής δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{r} = \frac{1 \pm e \cos \theta}{s}. \quad (13.15)$$

- (2) Για την έλλειψη ισχύουν

$$s = \alpha(1 - e^2), \quad FV = \alpha(1 - e) \quad \text{και} \quad FU = \alpha(1 + e). \quad (13.16)$$

- (3) Η εκκεντρότητα εναλλακτικά μπορεί να οριστεί από την σχέση

$$e = \frac{c}{a} \quad (13.17)$$

όπου c η απόσταση της εστίας από το κέντρο της έλλειψης. Εάν a και b ο μεγάλος και μικρός ημιάξονας της έλλειψης τότε

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{και} \quad b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (13.18)$$

Λύση

- (1) Από τον ορισμό της εκκεντρότητας έχουμε

$$e = \frac{PF}{PD} = \frac{r}{d \mp r \cos \theta} \quad \text{και} \quad e = \frac{s}{d} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1 \pm e \cos \theta}{s}. \quad (13.19)$$

- (2) Από την εξίσωση της κωνικής τομής για $\theta = 0$ το $r_1 = FV = \frac{s}{1+e}$ και για $\theta = \pi$ το $r_2 = FU = \frac{s}{1-e}$. Αλλά $FV + FU = 2\alpha$ οπότε με αντικατάσταση των r_1, r_2 προκύπτει το ζητούμενο. Οι δύο άλλες σχέσεις εύκολα αποδεικνύονται με παράλληλη χρήση της $s = \alpha(1 - e^2)$. Πράγματι

$$FV = \frac{s}{1+e} = \frac{\alpha(1 - e^2)}{(1+e)} = \alpha(1 - e). \quad (13.20)$$

(3) Γνωρίζουμε ότι

$$c = CF = CV - FV = a - a(1 - e) = ea. \quad (13.21)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο FCK έχουμε

$$(CK)^2 + (CF)^2 = (KF)^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = e^2(KD)^2 = e^2 \left(a + \frac{a-c}{e} \right)^2 = a^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (13.22)$$

Από την προηγούμενη σχέση και την $c = ea$ καταλήγουμε εύκολα στην $b = a\sqrt{1 - e^2}$.

Παράδειγμα 13.0.2 Υπολογίστε το διανυσματικό πεδίο δυνάμεων για σωματίο που διαγράφει την τροχιά

$$r^2 = 2a^2 \cos(2\theta). \quad (13.23)$$

Λύση Για κεντρικές δυνάμεις ισχύει η εξίσωση

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{m}L^2u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) \quad (13.24)$$

όπου $u = \frac{1}{r}$. Η συγκεκριμένη τροχιά δίνει

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} = \frac{1}{a\sqrt{2} \cos(2\theta)}, \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{\sin(2\theta)}{a\sqrt{2}(\cos(2\theta))^{\frac{3}{2}}} \quad (13.25)$$

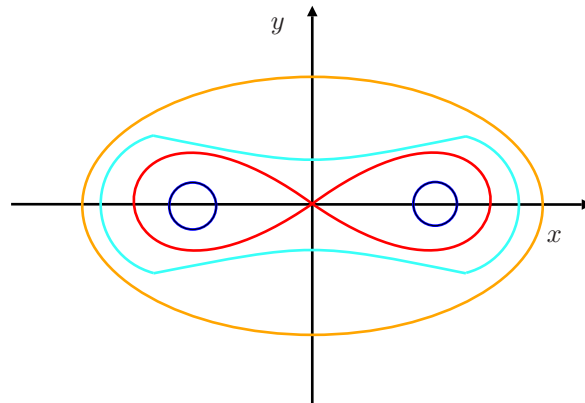
και

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \left(\frac{3 \sin^2(2\theta)}{(\cos 2\theta)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \right) = \frac{1}{a\sqrt{2}} \left(\frac{3 \sin^2(2\theta)}{(\cos 2\theta)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \right). \quad (13.26)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις αυτές στην εξίσωση (13.24) έχουμε

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = 12 \frac{1}{m} L^2 a^4 u^7 \Rightarrow f(r) = -\frac{12L^2 a^4}{mr^7}. \quad (13.27)$$

Η γραφική παράσταση της τροχιάς είναι η κόκκινη καμπύλη και ανήκει στο σύνολο των καμπύλων του *Cassini*



Σχήμα 13.2: Η κόκκινη καμπύλη αναπαριστά την τροχιά του σώματος.

που ορίζονται σαν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που το γινόμενο των αποστάσεων τους από δύο σταθερά σημεία F_1 και F_2 (εστίες) είναι σταθερό

$$r_1 \cdot r_2 = a^2 \Rightarrow |PF_1| |PF_2| = a^2. \quad (13.28)$$

Η απόσταση μεταξύ των σταθερών σημείων είναι $|F_1 F_2| = 2e$ και στην περίπτωση που $a = e$ παίρνουμε την προηγούμενη καμπύλη. Εάν υποθέσουμε ότι οι εστίες έχουν συντεταγμένες $(e, 0)$ και $(-e, 0)$ τότε $r_1^2 = (x - e)^2 + y^2$ και $r_2^2 = (x + e)^2 + y^2$. Οπότε θα έχουμε

$$r_1^2 r_2^2 = a^4 \Rightarrow (x^2 + y^2) - 2e^2(x^2 - y^2) = a^4 - e^4 \quad (13.29)$$

που σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$r^2 = e^2 \cos(2\theta) \pm \sqrt{e^4 \cos^2(2\theta) + (a^4 - e^4)}. \quad (13.30)$$

Για $a = e$ έχουμε την εξίσωση

$$r^2 = 2e^2 \cos(2\theta). \quad (13.31)$$

Κεφάλαιο 14

Η Βαρυντική Έλξη

Ο Νεύτωνας από την ανάλυση των αστρονομικών παρατηρήσεων που αφορούσαν την κίνηση της Σελήνης γύρω από την Γη κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η δύναμη στην οποία οφείλεται η κίνηση των πλανητών έχει την ίδια μαθηματική έκφραση με αυτή που η Γη έλκει ένα σώμα. Το 1687 δημοσίευσε τα αποτελέσματα της έρευνάς του στο σύγγραμμά του *Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας*. Σύμφωνα με αυτές

Ορισμός 14.0.3 (Ο νόμος της βαρύτητας του Νεύτωνα) Κάθε σώμα στο σύμπαν έλκει κάθε άλλο με δύναμη ανάλογη με το γινόμενο των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασής τους.

Μαθηματικά ο νόμος αυτός διατυπώνεται από την σχέση

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (14.1)$$

όπου G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας που στο σύστημα SI έχει την τιμή

$$G = 6.672 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}. \quad (14.2)$$

Για την μέτρησή της χρησιμοποιούμε το ζυγό του *Cavendish* που αποτελείται από δύο ίσες μάζες m που συνδέονται με ελαφριά ράβδο. Η ράβδος μπορεί να κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και είναι αναρτημένη από ψιλό μεταλλικό νήμα. Όταν στο σύστημα πλησιάσουμε δύο άλλες ίσες μάζες M ο ζυγός εκτρέπεται λόγω της βαρυντικής έλξης από τη θέση ισορροπίας του και περιστρέφεται. Η γωνία στροφής της ράβδου μετράται από δέσμη φωτός που ανακλάται σε μικρό καθρέφτη στερεωμένο στο νήμα.

Η βαρυντική δύναμη είναι μια ελκτική δύναμη που δρα από απόσταση. Μία άλλη σημαντική ιδιότητα είναι ότι η βαρυντική δύναμη που ασκείται από μια σφαιρική κατανομή μάζας (επιφανειακή ή χωρική) σε σώμα που βρίσκεται εκτός της σφαίρας είναι ίδια με αυτή που προκύπτει αν όλη η μάζα της κατανομής είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο της σφαίρας.

Για να προσδιορίσουμε πως η επιτάχυνση της βαρύτητας μεταβάλλεται με την απόσταση εξισώνουμε το βάρος ενός σώματος με τη βαρυντική δύναμη και βρίσκουμε

$$mg = G \frac{mM_e}{R_e^2} \Rightarrow g = G \frac{M_e}{R_e^2} \quad (14.3)$$

όπου M_e , R_e η μάζα και η ακτίνα της Γης. Στην (14.3) χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα της σφαιρικής κατανομής μάζας. Από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας ελαττώνεται όσο αυξάνει το ύψος.

14.1 Οι Νόμοι του *Kepler*

Οι αρχαίοι Έλληνες θεωρούσαν τη Γη σαν το κέντρο του σύμπαντος γύρω από το οποίο περιστρέφονταν σε κυκλικές τροχιές τα ουράνια σώματα. Ο αστρονόμος Πτολεμαίος από την Αλεξάνδρεια ανέπτυξε την θεωρία της επικυκλοειδούς κίνησης των πλανητών η οποία κυριάρχησε μέχρι τον δεκατοέκτο αιώνα. Την περίοδο εκείνη ο Πολωνός μοναχός Κοπέρνικος πρότεινε τον ήλιο σαν το κέντρο γύρω από το οποίο κινούνται η Γη και οι υπόλοιποι πλανήτες. Η ιδέα δεν ήταν καινούργια μια και είχε πρωτοδιατυπωθεί από τον Έλληνα αστρονόμο Αρίσταρχο τον τρίτο αιώνα π.χ. Ο Κοπέρνικος ουσιαστικά πρότεινε σαν σύστημα αναφοράς αυτό του Ήλιου αντί της Γης. Η πρόταση αυτή υιοθετήθηκε από τον Γερμανό αστρονόμο *Kepler* ο οποίος μετά από προσεκτική ανάλυση των αστρονομικών μετρήσεων του Δανού αστρονόμου *Brahe* κατέληξε στους εξής τρεις νόμους:

- (i) Οι πλανήτες κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές με την μία εστία στον Ήλιο.
- (ii) Ο νόμος των εμβαδών. Το διάνυσμα θέσεως με αρχή τον Ήλιο και πέρας ένα πλανήτη διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους.
- (iii) Τα τετράγωνα των περιόδων περιφοράς των διαφόρων πλανητών είναι ανάλογα προς τους κύβους των μέσων αποστάσεων των πλανητών από τον ήλιο (δηλαδή των μεγάλων ημιάξονων των ελλείψεων) $T^2 = kr_\mu^3 = k\alpha^3$. Αργότερα ο Νεύτωνας διατύπωσε το νόμο της παγκόσμιας έλξης. Για την απόδειξη του τρίτου νόμου χρησιμοποιούμε τον νόμο των εμβαδών και την αρχή διατήρησης της στροφορμής

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}, \quad L = mr^2\dot{\theta}. \quad (14.4)$$

Απαλείφοντας την $\dot{\theta}$ και ολοκληρώνοντας την (14.4) ως προς το χρόνο μίας περιόδου έχουμε

$$\int_0^S \frac{d\tilde{S}}{dt} dt = \frac{1}{2} \frac{L}{m} \int_0^T dt, \quad \Rightarrow$$

$$S = \frac{LT}{2m}. \quad (14.5)$$

Το εμβαδόν της έλλειψης δίνεται από την ¹

$$S = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-b\sqrt{1-(\frac{x}{\alpha})^2}}^{b\sqrt{1-(\frac{x}{\alpha})^2}} dy dx = 2b \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} dx = 2\alpha b \frac{1}{2} \arcsin u \Big|_{-1}^1 = \pi\alpha b. \quad (14.6)$$

Απαλείφοντας το εμβαδόν επιφανείας S από τις (14.5) και (14.6), επιλύοντας ως προς T , τετραγωνίζοντας και αντικαθιστώντας την $b = \alpha\sqrt{1-e^2}$ έχουμε

$$T^2 = \frac{4}{L^2} m^2 \pi^2 \alpha^4 (1-e^2). \quad (14.7)$$

Χρειάζεται τώρα να εκφράσουμε την στροφορμή σαν συνάρτηση του μεγάλου ημιάξονα. Για το βαρυντικό πεδίο $C = -Gmm'$ και $L^2 = -Cms = Gm^2m'\alpha(1-e^2)$ οπότε με αντικατάσταση στην (14.7) έχουμε ότι

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm'} \alpha^3. \quad (14.8)$$

Στην περίπτωση κυκλικής τροχιάς θα μπορούσαμε να επαληθεύσουμε την ορθότητα του νόμου αυτού εξισώνοντας την βαρυντική δύναμη με την κεντρομόλο. Οπότε

$$G \frac{mm'}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (14.9)$$

αλλά $v = \frac{2\pi r}{T}$ και τελικά

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm'} r^3. \quad (14.10)$$

14.2 Το Βαρυντικό Δυναμικό

Έστω m και m_1 δύο σημειακές μάζες, τότε ορίζουμε σαν ένταση \vec{g} του βαρυντικού πεδίου την ποσότητα ²

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (14.11)$$

¹Εναλλακτικά χρησιμοποιώντας τις νέες μεταβλητές $u = \frac{x}{\alpha}$, $w = \frac{y}{b}$ και παρατηρώντας ότι εξίσωση της έλλειψης μετασχηματίζεται σε εξίσωση κύκλου ακτίνας 1 θα έχουμε

$$S = \alpha b \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \pi\alpha b.$$

²Κατά αναλογία με τον ηλεκτρισμό όπου η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} ορίζεται σαν το πηλίκο της δύναμης *Coulomb* που ασκεί το φορτίο q_1 στο δοκιμαστικό φορτίο q δια το φορτίο q

Γνωρίζουμε ότι η βαρυντική δύναμη είναι κεντρική, άρα συντηρητική. Οπότε η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας μεταξύ δύο σημείων θα ισούται με το έργο που παράγει ή καταναλίσκει η δύναμη της βαρύτητας για να μετακινήσει μια μάζα m από το σημείο A στο B . Εάν επιλέξουμε το άπειρο σαν σημείο αναφοράς τότε επειδή σε άπειρη απόσταση από τη μάζα που παράγει το βαρυντικό πεδίο το δυναμικό μηδενίζεται έχουμε την σχέση

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \Rightarrow U(r) = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r}' = -G \frac{mm_1}{r} \quad (14.12)$$

Ορίζουμε σαν δυναμικό του βαρυντικού πεδίου την ποσότητα

$$V(r) = \frac{U(r)}{m} = -G \frac{m_1}{r}. \quad (14.13)$$

Η ένταση του βαρυντικού πεδίου και το δυναμικό για δύο σημειακές μάζες συνδέονται με τη σχέση

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}V. \quad (14.14)$$

Έστω διακριτή κατανομή μαζών m_i , $i = 1, \dots, n$ στα σημεία \vec{r}_i και m δοκιμαστική μάζα στο σημείο \vec{r} . Εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας, η συνολική βαρυντική δύναμη που ασκείται στην m είναι

$$\vec{F}(\vec{r}) = -Gm \sum_{i=1}^n m_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (14.15)$$

Την ίδια αρχή μπορούμε να εφαρμόσουμε για τον υπολογισμό της ολικής ενέργειας του συστήματος και δίνεται από την σχέση

$$U(\vec{r}) = -Gm \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (14.16)$$

Κάθε όρος αντιστοιχεί στο έργο που απαιτείται για να μεταφέρουμε χωρίς επιτάχυνση από το άπειρο τη μάζα m_i στη θέση \vec{r}_i υπερνικώντας το βαρυντικό πεδίο της m_j , $j \neq i$. Το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από τη σειρά εκτέλεσης των παραπάνω διαδικασιών.

Εάν έχουμε μία συνεχή κατανομή μάζας με χωρική πυκνότητα $\rho = \frac{dm}{d\tau}$ η βαρυντική δύναμη θα δίνεται από τη σχέση

$$\vec{F}(\vec{r}) = -Gm \int_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \vec{e}_{r'r} d\tau', \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (14.17)$$

όπου Ω είναι το χωρίο στο οποίο είναι κατανεμημένη η μάζα. Στην περίπτωση γραμμικής $\lambda = \frac{dm}{dl}$ ή επιφανειακής πυκνότητας $\sigma = \frac{dm}{dS}$ το προηγούμενο ολοκλήρωμα αντικαθίσταται από απλό ή διπλό ολοκλήρωμα αντίστοιχα. Επίσης $\vec{e}_{r'r} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το στοιχείο όγκου $d\tau$ προς το σωματίο m . Το διάνυσμα αυτό δεν είναι σταθερό οπότε αποτελεί μέρος της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα δίνεται από την σχέση

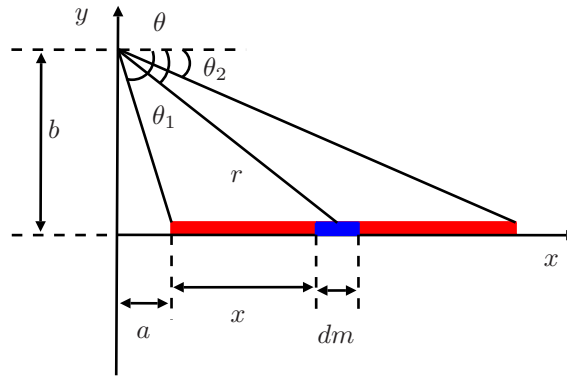
$$U(\vec{r}) = -Gm \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'. \quad (14.18)$$

Στην πράξη είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το βαρυντικό δυναμικό και στη συνέχεια την ένταση του βαρυντικού πεδίου.

Παράδειγμα 14.2.1 Ομογενής λεπτή ράβδος βρίσκεται στον x -άξονα σε απόσταση a από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και έχει μήκος L . Εάν η γραμμική πυκνότητα μάζας είναι λ , υπολογίστε την ένταση του βαρυντικού πεδίου σε σημείο P το οποίο βρίσκεται στον θετικό y -άξονα και σε απόσταση b από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

Λύση Η ένταση του βαρυντικού πεδίου είναι

$$\vec{g} = -G \int \frac{dm}{r^2} \vec{e}_r = G\lambda \int \frac{dx}{r^2} (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}). \quad (14.19)$$



Σχήμα 14.1: Υπολογισμός της έντασης του βαρυντικού πεδίου που οφείλεται σε ομογενή ράβδο.

Αλλά

$$\tan \theta = \frac{b}{a+x} \Rightarrow dx = -\frac{b}{\sin^2 \theta} d\theta \quad (14.20)$$

και επειδή

$$r = \frac{b}{\sin \theta} \quad (14.21)$$

τελικά έχουμε

$$\frac{dx}{r^2} = -\frac{1}{b} d\theta. \quad (14.22)$$

Άρα

$$\begin{aligned} \vec{g} &= \frac{G\lambda}{b} \left((\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \vec{i} + (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \vec{j} \right) \\ &= G\lambda \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a+L)^2 + b^2}} \right) \vec{i} + \frac{1}{b} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{a+L}{\sqrt{(a+L)^2 + b^2}} \right) \vec{j} \right] \end{aligned} \quad (14.23)$$

Για $b \rightarrow 0$ η $\vec{g}_y \rightarrow \vec{0}$ και

$$\vec{g} = \vec{g}_x = \frac{G\lambda L}{a(a+L)} \vec{i} = \frac{GM}{a(a+L)} \vec{i} \quad (14.24)$$

Εάν η γραμμική κατανομή έχει άπειρο μήκος τότε $\theta_1 = \pi$ και $\theta_2 = 0$. Στην περίπτωση αυτή $\vec{g}_x = \vec{0}$ και

$$\vec{g} = \vec{g}_y = -\frac{2G\lambda}{b} \vec{j}. \quad (14.25)$$

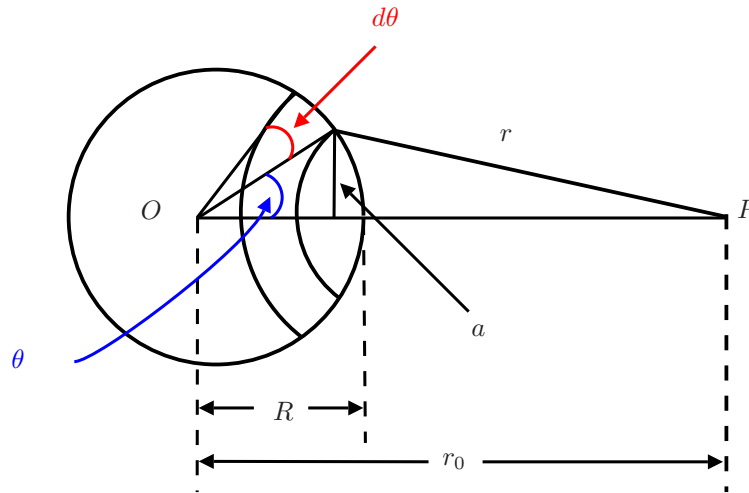
Παράδειγμα 14.2.2 Υπολογίστε τη δύναμη βαρύτητας που ασκείται σε σημειακή μάζα m και οφείλεται σε σφαιρικό φλοιό ακτίνας R με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα μάζας σ .

Λύση Το εμβαδόν της λωρίδας πάχους $dl = R d\theta$ είναι

$$dS = 2\pi a dl = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta. \quad (14.26)$$

Το δυναμικό $V(r)$ δίνεται από την σχέση

$$V(r) = -2G\pi R^2 \sigma \int_0^\pi \sin \theta \frac{d\theta}{r} = -2G\pi R^2 \sigma \int_0^\pi \sin \theta \frac{d\theta}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2r_0 R \cos \theta}} \quad (14.27)$$



Σχήμα 14.2: Η βαρυντική δύναμη που ασκείται από ομοιόμορφη σφαιρική επιφανειακή πυκνότητα μάζας σε σημειακό σώμα μάζας m .

στην οποία χρησιμοποιήσαμε το νόμο των συνημιτόνων. Αλλάζοντας μεταβλητή σε $u = \frac{2Rr_0}{R^2+r_0^2} \cos \theta$, $u \in [\frac{2Rr_0}{R^2+r_0^2}, -\frac{2Rr_0}{R^2+r_0^2}]$ και χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u}} = -2\sqrt{1-u} + C \tag{14.28}$$

έχουμε

$$V(r) = -2G\pi R^2 \sigma \frac{1}{Rr_0} (R + r_0 - |r_0 - R|). \tag{14.29}$$

Επειδή η επιφανειακή πυκνότητα είναι ομοιόμορφη ισχύει

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}. \tag{14.30}$$

Το δυναμικό τότε γράφεται

$$V(r) = -\frac{GM}{2Rr_0} (R + r_0 - |r_0 - R|). \tag{14.31}$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

(1) $r_0 > R$. Το δυναμικό γράφεται

$$V = -\frac{GM}{r_0}. \tag{14.32}$$

(2) $r_0 < R$. Το δυναμικό γράφεται

$$V = -\frac{GM}{R}. \tag{14.33}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι όταν βρισκόμαστε στο εξωτερικό του σφαιρικού κελύφους το δυναμικό είναι ισοδύναμο με αυτό που προκύπτει εάν όλη η μάζα του ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο της σφαίρας. Στο εσωτερικό του κελύφους το δυναμικό είναι σταθερό άρα το πεδίο βαρύτητας θα μηδενίζεται. Το ίδιο ισχύει και για χωρική σφαιρική κατανομή αφού το συνολικό δυναμικό θα είναι το άθροισμα των δυναμικών των σφαιρικών φλοιών.

Παράδειγμα 14.2.3 Υπολογίστε την αρχική ταχύτητα που χρειάζεται σώμα μάζας m για να διαφύγει:

(α) Από την Γη.

(β) Από οποιοδήποτε πλανήτη του ηλιακού μας συστήματος.

Υποθέτουμε ότι η επίδραση της περιστροφικής κίνησης της Γης δεν επηρεάζει την κίνηση.

Λύση Η ολική ενέργεια του σώματος διατηρείται και κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_p m}{R_p} \quad (14.34)$$

όπου M_p , R_p , $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ η μάζα, η ακτίνα του πλανήτη και η σταθερά του Νεύτωνα αντίστοιχα. Όταν το σώμα φτάσει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα η ολική του ενέργεια θα είναι μηδέν αφού $\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = (-GM_p m) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} = 0$. Λόγω όμως της διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_e^2 &= \frac{GM_p m}{R_p} \Rightarrow \\ v_e &= \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}}. \end{aligned} \quad (14.35)$$

Παρατηρήστε ότι η έκφραση αυτή είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του εκτοξευόμενου αντικειμένου οπότε ένα διαστημόπλοιο θα έχει την ίδια ταχύτητα διαφυγής με ένα μόριο. Εάν βρισκόμαστε στην επιφάνεια της Γης τότε $M_e = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_e = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, $g = \frac{GM_e}{R_e^2}$ και η ταχύτητα διαφυγής θα είναι $v_e = \sqrt{2gR_e} = 1.12 \times 10^4 \text{ m/s}$. Όταν το σώμα εκτοξευθεί από την επιφάνεια του Ήλιου έχουμε $v_e = 618 \text{ km/s}$.

Κεφάλαιο 15

Η Μηχανική Συστήματος Σωμάτων

Μέχρι τώρα έχουμε μελετήσει την κίνηση υλικού σημείου κάτω από την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων. Στην καθημερινή όμως ζωή υπάρχουν μηχανικά συστήματα που αποτελούνται από μεγάλο αριθμό υλικών σημείων και για τα οποία θα θέλαμε να μελετήσουμε την κίνησή τους. Μπορούμε να διακρίνουμε δύο κατηγορίες συστημάτων τα διακριτά και τα συνεχή. Στα διακριτά συστήματα η συνολική μάζα υπολογίζεται από το πεπερασμένο άθροισμα των μαζών των υλικών σημείων που το αποτελούν

$$M = \sum_{i=1}^n m_i, \quad (15.1)$$

ενώ στα συνεχή, ανάλογα με το πλήθος των διαστάσεων τους, περιγράφονται από γραμμική, επιφανειακή ή χωρική πυκνότητα μάζας

$$\lambda = \frac{dm}{dl}, \quad \sigma = \frac{dm}{dS}, \quad \rho = \frac{dm}{d\tau}. \quad (15.2)$$

Ορισμός 15.0.4 Ορίζουμε βαθμούς ελευθερίας ενός συστήματος το πλήθος των ανεξάρτητων συντεταγμένων που απαιτούνται για να περιγράψουμε την κίνηση κάθε υλικού σημείου που αποτελεί το σύστημα.

Η κίνηση ενός στερεού σώματος καθορίζεται πλήρως από τρία μη συγγραμμικά σημεία

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2), \quad \vec{r}_3 = (x_3, y_3, z_3). \quad (15.3)$$

Άρα απαιτούνται συνολικά 9 συντεταγμένες. Στο στερεό όμως σώμα οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων παραμένουν αναλλοίωτες οπότε έχουμε τις τρεις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 &= c_1^2 \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 &= c_2^2 \\ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 &= c_3^2. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εξισώσεις μπορούμε να απαλείψουμε 3 συντεταγμένες και να προκύψουν 6 βαθμοί ελευθερίας. Οι τρεις καθορίζουν τη μεταφορική κίνηση του σώματος ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς και οι υπόλοιποι τρεις την περιστροφική. Στην ειδική περίπτωση που ένα σημείο του στερεού σώματος παραμένει σταθερό χρειαζόμαστε 2 σημεία για να περιγράψουμε την κίνησή του

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2). \quad (15.5)$$

Αλλά εάν ταυτίσουμε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων με το σταθερό σημείο θα ισχύουν

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = c_1^2 = \text{σταθερή}, \quad x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = c_2^2 = \text{σταθερή} \quad (15.6)$$

και

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = c_{12}^2. \quad (15.7)$$

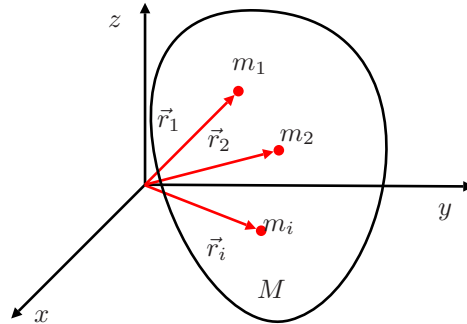
Με την βοήθεια των εξισώσεων αυτών μπορούμε να απαλείψουμε 3 συντεταγμένες οπότε οι υπόλοιπες 3 περιγράφουν την περιστροφική κίνηση του στερεού σώματος. Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας ενός σώματος που μπορεί να παραμορφωθεί ή ενός ρευστού είναι άπειρος.

15.1 Κέντρο Μάζας

Έστω $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ τα διανύσματα θέσης των υλικών σημείων με μάζες m_1, \dots, m_n .

Ορισμός 15.1.1 Ορίζουμε κέντρο μάζας ενός διακριτού συστήματος μαζών το σημείο C με επιβατική ακτίνα που δίνεται από την σχέση

$$\vec{r}_c \equiv \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i. \quad (15.8)$$



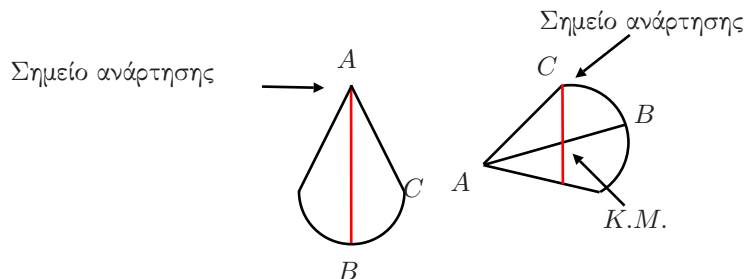
Σχήμα 15.1: Το κέντρο μάζας διακριτής κατανομής μάζας.

Ορισμός 15.1.2 Ορίζουμε κέντρο μάζας στερεού σώματος (σώμα το οποίο δεν παραμορφώνεται) το σημείο C που προσδιορίζεται από το διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_c \equiv \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \vec{r} dm = \frac{\iiint_{\Omega} \vec{r} \rho d\tau}{\iiint_{\Omega} \rho d\tau}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (15.9)$$

Εάν το σώμα περιγράφεται από κάποιο χωρίο Ω υποσύνολο του \mathbb{R} ή \mathbb{R}^2 , τότε χρησιμοποιούμε απλό ή διπλό ολοκλήρωμα στην προηγούμενη σχέση και αντικαθιστούμε τη χωρική πυκνότητα ρ με γραμμική ή επιφανειακή πυκνότητα αντίστοιχα.

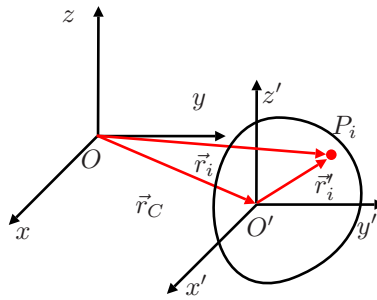
Το κέντρο μάζας ομογενών και συμμετρικών σωμάτων κείται πάνω στον άξονα συμμετρίας τους. Το κέντρο μάζας ομογενούς ράβδου, κύβου και σφαίρας συμπίπτει με το γεωμετρικό τους κέντρο. Πειραματικά το κέντρο μάζας στερεού προσδιορίζεται με την ακόλουθη μέθοδο. Αναρτούμε το σώμα από τυχαίο σημείο και όταν ισορροπήσει χαράζουμε την κατακόρυφη γραμμή AB με τη βοήθεια νήματος στάθμης. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για διαφορετικό σημείο χαράζοντας την κατακόρυφη γραμμή CD . Το κέντρο μάζας συμπίπτει με την τομή των δύο αυτών γραμμών. Θεωρούμε στερεό σώμα με ένταση πεδίου βαρύτητας \vec{g} σταθερή σε όλη την κατανομή μάζας. Το



Σχήμα 15.2: Πειραματικός προσδιορισμός του κέντρου μάζας στερεού σώματος.

βάρος του σώματος θα δίνεται από την σχέση

$$\vec{B} = M\vec{g} \quad (15.10)$$



Σχήμα 15.3: Το αδρανειακό σύστημα O' ηρεμεί ως προς κέντρο μάζας του στερεού σώματος που κινείται με σταθερή σχετική ταχύτητα ως προς το σύστημα O του εργαστηρίου.

και ονομάζεται κέντρο βάρους. Το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο μάζας.

Έστω O το αδρανειακό σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου και O' το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας ενός στερεού σώματος που κινείται με σχετική ταχύτητα \vec{v}_c . Το υλικό σημείο m_i του στερεού σώματος στη θέση P_i θα περιγράφεται από την εξίσωση

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_c(t) + \vec{r}'_i(t) \quad \text{ή} \quad \vec{r}_c(t) = \vec{r}_i(t) - \vec{r}'_i(t). \quad (15.11)$$

Συνδιάζοντας την εξίσωση αυτή με τον ορισμό του κέντρου μάζας (15.8) καταλήγουμε στην

$$M\vec{r}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_c + \vec{r}'_i) = M\vec{r}_c + \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i = \vec{0}. \quad (15.12)$$

Παραγωγίζοντας την (15.12) ως προς το χρόνο έχουμε

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \vec{r}'_i) = \vec{0} \quad (15.13)$$

που εκφράζει το μηδενισμό του αθροίσματος των γραμμικών ορμών ενός συστήματος σωμάτων ως προς το κέντρο μάζας τους.

Η φυσική σημασία του κέντρου μάζας γίνεται κατανοητή εάν παραγωγίσουμε ως προς τον χρόνο τη σχέση που ορίζει το κέντρο μάζας

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i, \quad (15.14)$$

οπότε

$$M\vec{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{P}. \quad (15.15)$$

Δηλαδή η ολική ορμή του συστήματος ισούται με την ολική μάζα πολλαπλασιασμένη με την ταχύτητα του κέντρου μάζας. Εάν παραγωγίσουμε άλλη μια φορά την (15.14) ως προς το χρόνο

$$\vec{\alpha}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad (15.16)$$

οπότε

$$M\vec{\alpha}_c = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,\varepsilon\xi} + \sum_{i,j=1; i \neq j}^n \vec{F}_{i,j,\varepsilon\sigma}. \quad (15.17)$$

Η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν λόγω της αρχής δράσης και αντίδρασης. Οπότε

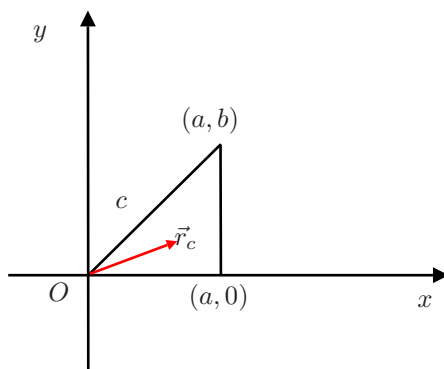
$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,\varepsilon\xi} = M\vec{\alpha}_c = \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (15.18)$$

Άρα το κέντρο μάζας κινείται σαν να ήταν ένα υποθετικό σώμα μάζας M , το οποίο υπόκειται στην επίδραση της συνισταμένης των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν πάνω στο σύστημα. Εάν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική τότε

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_c = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = M\vec{v}_c = \text{σταθερή} \quad (15.19)$$

δηλαδή σε απομονωμένο σύστημα σωμάτων η ολική γραμμική ορμή και ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι σταθερές.

Παράδειγμα 15.1.3 Αντικείμενο μάζας M έχει το σχήμα ορθογώνιου τριγώνου με διαστάσεις όπως στο σχήμα. Υπολογίστε τις συντεταγμένες του κέντρου μάζας εάν το σώμα έχει σταθερή μάζα ανά μονάδα επιφάνειας.



Σχήμα 15.4: Προσδιορισμός του κέντρου μάζας ορθογώνιου τριγώνου με δεδομένη επιφανειακή πυκνότητα.

Λύση Το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας \vec{r}_c δίνεται από τη σχέση

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm = \frac{\sigma}{M} \int_0^a \int_0^{cx} \vec{r} dy dx = \frac{\sigma}{M} \int_0^a \left[\int_0^{cx} (x\vec{i} + y\vec{j}) dy \right] dx = \frac{\sigma}{M} \left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{6}c\vec{j} \right) ca^3. \quad (15.20)$$

Αλλά η επιφανειακή πυκνότητα του αντικειμένου είναι

$$\sigma = \frac{M}{ab/2} = \frac{2M}{ab} \quad (15.21)$$

και $c = \tan \theta = \frac{b}{a}$. Άρα το κέντρο μάζας του σώματος προσδιορίζεται από το διάνυσμα

$$\vec{r}_c = \frac{2}{3}a\vec{i} + \frac{1}{3}b\vec{j}. \quad (15.22)$$

Παράδειγμα 15.1.4 Υπολογίστε το κέντρο μάζας για

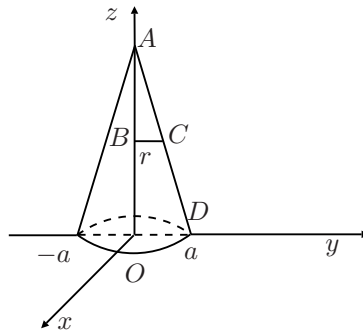
- (i) Ομογενή κυκλικό κώνο με ακτίνα βάσης a και ύψος h .
- (ii) Στερεό που προκύπτει με την προσθήκη στη βάση του κώνου ενός ομογενούς ημισφαιρίου ακτίνας a ίδιας πυκνότητας με τον κώνο.
- (iii) Στερεό που προκύπτει από την αφαίρεση κυκλικού κώνου ύψους h_1 από τον αρχικό.

Λύση

(i) Λόγω συμμετρίας το κέντρο μάζας θα βρισκείται στον z -άξονα. Άρα

$$x_{C,\Omega_1} = y_{C,\Omega_1} = 0 \quad \text{και} \quad z_{C,\Omega_1} = \frac{\int_{\Omega_1} z dV}{\int_{\Omega_1} dV} = \frac{\int_{\Omega_1} z dV}{\frac{1}{3}\pi a^2 h}. \quad (15.23)$$

Για τον υπολογισμό του τριπλού ολοκληρώματος στον αριθμητή χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες

Σχήμα 15.5: Ομογενής κυκλικός κώνος με την κορυφή του στον z -άξονα.

$$\int_{\Omega_1} z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{h(1-\frac{r}{a})} z r dz dr d\theta = \frac{\pi}{12} a^2 h^2. \quad (15.24)$$

Τα σημεία που ανήκουν στην τομή του επιπέδου παράλληλου προς το xy -επίπεδο με τον κώνο, έχουν z -συνιστώσα

$$z = h - |AB| = h \left(1 - \frac{r}{a}\right) \quad (15.25)$$

όπως προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων $\triangle ABC$ και $\triangle AOD$. Άρα

$$z_{C,\Omega_1} = \frac{1}{4}h. \quad (15.26)$$

Παρατηρούμε ότι η θέση του κέντρου μάζας είναι ανεξάρτητη από την ακτίνα της βάσης και εξαρτάται μόνο από το ύψος του.

(ii) Υπολογίζουμε το κέντρο μάζας του ημισφαιρίου χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες

$$x_{C,\Omega_2} = y_{C,\Omega_2} = 0 \quad \text{και} \quad z_{C,\Omega_2} = \frac{\int_{\Omega_2} z dV}{\int_{\Omega_2} dV} = \frac{\int_{\Omega_2} z dV}{\frac{2}{3}\pi a^3} \quad (15.27)$$

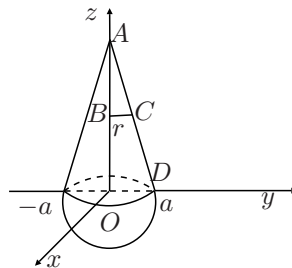
με

$$\int_{\Omega_2} z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-r^2}}^0 z r dz dr d\theta = -\frac{\pi}{4}a^4. \quad (15.28)$$

Άρα

$$z_{C,\Omega_2} = -\frac{3}{8}a. \quad (15.29)$$

Το κέντρο μάζας του συστήματος που αποτελείται από τις σημειακές μάζες M_1 και M_2 στις θέσεις $z_{C,\Omega_1} = \frac{1}{4}h$



Σχήμα 15.6: Το στερεό σώμα κυκλικός κώνος - ημισφαίριο.

και $z_{C,\Omega_2} = -\frac{3}{8}a$ είναι

$$z_{C,\Omega} = z_{C,\Omega_1 \cup \Omega_2} = \frac{M_1 z_{C,\Omega_1} + M_2 z_{C,\Omega_2}}{M_1 + M_2} = \frac{V_1 z_{C,\Omega_1} + V_2 z_{C,\Omega_2}}{V_1 + V_2} = \frac{\frac{1}{12}\pi a^2 h^2 - \frac{\pi}{4}a^4}{\frac{1}{3}\pi a^2 h + \frac{2}{3}\pi a^3} = \frac{1}{4} \frac{h^2 - 3a^2}{h + 2a} \quad (15.30)$$

(iii) Το κέντρο μάζας του χωρίου $\Omega_2 = \Omega/\Omega_1$ έχει συντεταγμένες

$$\begin{aligned} x_{C,\Omega_2} &= y_{C,\Omega_2} = 0, \\ z_{C,\Omega_2} &= \frac{M_{\Omega} z_{C,\Omega} - M_{1,\Omega} z_{1C,\Omega}}{M_{\Omega} - M_{1,\Omega}} = \frac{-\frac{\pi}{4} a^2 h^2 + \frac{\pi}{4} a_1^2 h_1^2}{\frac{1}{3}\pi (a^2 h - a_1^2 h_1)} = \frac{3}{4} \frac{\left[\left(\frac{a_1}{a}\right)^2 h_1^2 - h^2\right]}{\left(h - \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 h_1\right)} = -\frac{3(h^4 - h_1^4)}{4(h^3 - h_1^3)} \end{aligned} \quad (15.31)$$

όπου η αρχή του συστήματος συντεταγμένων έχει ταυτιστεί για ευκολία με την κορυφή του κώνου.

15.2 Στροφορμή, Ροπή και Ενέργεια Συστήματος Σωμάτων

Γνωρίζουμε ότι η στιγμιαία στροφορμή \vec{L} ως προς σημείο O για υλικό σημείο μάζας m , με επιβατική ακτίνα \vec{r} και ταχύτητα \vec{v} δίνεται από το διανυσματικό γινόμενο

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}. \quad (15.32)$$

Χρησιμοποιώντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την (15.32) έχουμε

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\tau} \quad (15.33)$$

όπου η ροπή και η στροφορμή υπολογίζονται ως προς το ίδιο σημείο O .

Η στροφορμή (ή η ροπή) ενός διακριτού συστήματος υλικών σημείων με μάζες m_1, \dots, m_n ως προς δεδομένο σημείο O του χώρου, θα ισούται με το διανυσματικό άθροισμα της στροφορμής (ή της ροπής) κάθε υλικού σημείου ως προς το ίδιο σημείο O . Άρα

$$\vec{L}_{\text{συστ.}} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i \quad \text{και} \quad \vec{\tau}_{\text{συστ.}} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_{i,\varepsilon\xi} + \sum_{j,j \neq i} \vec{F}_{i,j,\varepsilon\sigma} \right). \quad (15.34)$$

Εάν υποθέσουμε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις είναι κεντρικές, θα έχουν μηδενική ροπή¹ και ο ρυθμός μεταβολής της ολικής στροφορμής θα ισούται με την ολική ροπή μόνο των εξωτερικών δυνάμεων

$$\vec{\tau}_{\text{συστ.}} = \vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{L}_{\text{συστ.}}}{dt}. \quad (15.35)$$

Στην περίπτωση που η συνισταμένη ροπή μηδενίζεται, $\vec{\tau}_{\text{συστ.}} = \vec{0}$, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται.

Υπολογίζουμε τώρα την κινητική ενέργεια του συστήματος. Για ένα υλικό σημείο μάζας m_i θα ισχύει²

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{i,\varepsilon\xi} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{i,\varepsilon\sigma} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = \frac{dT_i}{dt} = \dot{\vec{r}}_i \cdot \left(\vec{F}_{i,\varepsilon\xi} + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{i,j,\varepsilon\sigma} \right). \quad (15.36)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dT_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{i,\varepsilon\xi} + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{i,j,\varepsilon\sigma}. \quad (15.37)$$

οπότε η μεταβολή της συνολικής κινητικής ενέργειας για το χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ θα είναι

$$\begin{aligned} \Delta T_{\text{ολ.}} &= T_{\text{ολ.}}(t_2) - T_{\text{ολ.}}(t_1) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{i,\varepsilon\xi} \cdot d\vec{r}_i \right) + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{i,j,\varepsilon\sigma} \cdot d\vec{r}_i \right) \\ &= \Delta W_{\text{ολ. ε}\xi} + \Delta W_{\text{ολ. ε}\sigma}. \end{aligned} \quad (15.38)$$

¹ Στο διπλό άθροισμα εμφανίζονται όροι της μορφής

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{j,i} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{F}_{i,j} = \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$$

χρησιμοποιώντας τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα και υποθέτοντας ότι οι δυνάμεις είναι κεντρικές.

² Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\frac{dT_i}{dt} = \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d\vec{p}_i}{dt}.$$

Εάν υποθέσουμε ότι οι εξωτερικές δυνάμεις είναι συντηρητικές και πηγάζουν από τη δυναμική ενέργεια $U_{i,εξ.}$ ενώ οι εσωτερικές από τη $U_{ij,εσ.}$ θα ισχύει

$$\begin{aligned}\Delta W_{ολ. εξ.} &= \sum_{i=1}^n \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{i,εξ.} \cdot d\vec{r}_i \right) = - \sum_{i=1}^n \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{\nabla}_i U_{i,εξ.} \cdot d\vec{r}_i \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\int_{t_1}^{t_2} dU_{i,εξ.} \right) = -(U_{εξ.}(t_2) - U_{εξ.}(t_1))\end{aligned}\quad (15.39)$$

και

$$\begin{aligned}\Delta W_{ολ. εσ.} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1, i \neq j}^n \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ij,εσ.} \cdot d\vec{r}_i \right) + \sum_{j,i=1, i \neq j}^n \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ji,εσ.} \cdot d\vec{r}_j \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ij,εσ.} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) \right)\end{aligned}\quad (15.40)$$

χρησιμοποιώντας το νόμο δράσης - αντίδρασης. Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση

$$d\vec{r}_{ij} = d\vec{r}_i - d\vec{r}_j \quad \text{και} \quad \vec{F}_{ij,εσ.} = -\vec{\nabla}_{ij} U_{ij,εσ.}\quad (15.41)$$

έχουμε

$$\Delta W_{ολ. εσ.} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n (U_{ij,εσ.}(t_2) - U_{ij,εσ.}(t_1)).\quad (15.42)$$

Η ποσότητα αυτή είναι χρήσιμη για σώματα τα οποία παραμορφώνονται. Για στερεά σώματα όπου οι αποστάσεις μεταξύ των υλικών σημείων παραμένουν αναλλοίωτες το έργο των εσωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται. Το συνολικό δυναμικό θα δίνεται από την έκφραση

$$U_{ολ.} = \sum_{i=1}^n U_{i,εξ.} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n U_{ij,εσ.}\quad (15.43)$$

και θα ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας του συστήματος

$$T(t_1) + U(t_1) = T(t_2) + U(t_2) = \text{σταθερή}.\quad (15.44)$$

Παράδειγμα 15.2.1 Ομογενές σκοινί γραμμικής πυκνότητας λ και μάζας m είναι τυλιγμένο μια φορά γύρω από κύλινδρο μάζας M και ακτίνας R . Ο κύλινδρος περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς τριβή γύρω από τον άξονα του. Εάν το ένα άκρο του σκοινιού είναι δεμένο στον κύλινδρο ενώ το άλλο ελεύθερο, υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου σε συνάρτηση της γωνιακής του μετατόπισης θ . Υποθέστε ότι τα δύο άκρα του σκοινιού όταν $\theta = 0$ βρίσκονται σε μηδενικό ύψος.

Λύση Θεωρούμε τμήμα dy του σκοινιού που βρίσκεται σε ύψος y από το οριζόντιο επίπεδο (στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας) και έχει μάζα λdy . Όταν το τμήμα αυτό είναι τυλιγμένο στον κύλινδρο θα έχει το ίδιο μήκος αλλά θα βρίσκεται σε ύψος $R \sin \phi = R \sin \left(\frac{y}{R} \right)$. Το στοιχειώδες βάρος $dB = \lambda g dy$ θα παράγει έργο ίσο με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας

$$\Delta W = dB (y - R \sin \phi) = \lambda g \left[y - R \sin \left(\frac{y}{R} \right) \right] dy\quad (15.45)$$

οπότε το ολικό έργο θα είναι

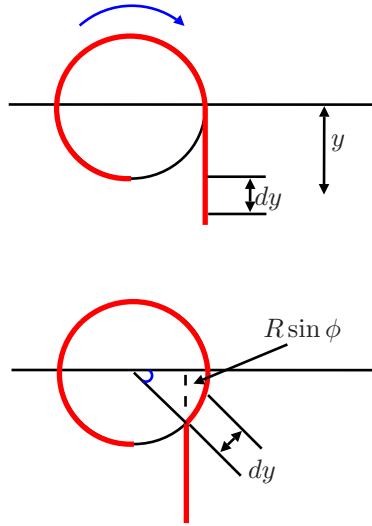
$$W = \int_0^{R\theta} \lambda g \left[y - R \sin \left(\frac{y}{R} \right) \right] dy = \lambda g R^2 \left(\frac{\theta^2}{2} + \cos \theta - 1 \right).\quad (15.46)$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος κύλινδρος - σκοινί θα είναι

$$T = \frac{1}{2} M (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2.\quad (15.47)$$

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη σχέση $\lambda = \frac{m}{2\pi R}$ έχουμε

$$W = T \Rightarrow \theta^2 = \frac{mg(\theta^2 + 2 \cos \theta - 2)}{2\pi R(m + M)}\quad (15.48)$$



Σχήμα 15.7: Το ένα άκρο του σκοινιού είναι σταθερά δεμένο στον κύλινδρο ενώ το δεύτερο ελεύθερο.

15.3 Μετασχηματισμός της Στροφορμής και της Κινητικής Ενέργειας στο Σύστημα του Κέντρου Μάζας

Η στροφορμή ενός στερεού σώματος ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς O δίνεται από την

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_c + \vec{r}'_i) \times (\vec{v}_c + \vec{v}'_i) = \vec{L}_c + \vec{L}_{O'} + \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_c \times \vec{v}'_i + \vec{r}'_i \times \vec{v}_c). \quad (15.49)$$

Αλλά

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i = \vec{0} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i = \vec{0} \quad (15.50)$$

οπότε

$$\vec{L}_O = \vec{L}_c + \vec{L}_{O'}. \quad (15.51)$$

Άρα η στροφορμή ως προς το σύστημα του εργαστηρίου μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες: τη στροφορμή του κέντρου μάζας και τη στροφορμή του στερεού ως προς το κέντρο μάζας.

Εάν παραγωγίσουμε την (15.51) ως προς το χρόνο τότε μια παρόμοια σχέση ισχύει για τις ροπές

$$\vec{\tau}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{L}_c}{dt} + \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \frac{d\vec{L}_c}{dt} + \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt'} = \vec{\tau}_c + \vec{\tau}_{O'}. \quad (15.52)$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο χρόνος στην Κλασική Μηχανική έχει παγκόσμιο χαρακτήρα, δηλαδή $t = t'$. Εάν υποθέσουμε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις είναι κεντρικές τότε

$$\vec{\tau}_{O,\text{εξ.}} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}. \quad (15.53)$$

Η απουσία των εξωτερικών δυνάμεων οδηγεί στο νόμο διατήρησης της στροφορμής στερεού σώματος που εκφράζεται από την εξίσωση

$$\vec{\tau}_{O,\text{εξ.}} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \text{σταθερή}. \quad (15.54)$$

Η κινητική ενέργεια γράφεται

$$T_O = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_c^2 + 2\vec{v}_c \cdot \vec{v}'_i + v_i'^2) = T_c + T_{O'} + \vec{v}_c \cdot \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i. \quad (15.55)$$

Αλλά

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_c \cdot \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = 0 \quad (15.56)$$

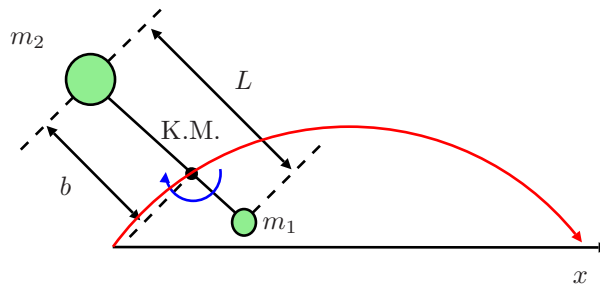
οπότε

$$T_O = T_C + T_{O'} \quad (15.57)$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της (15.57) αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια ενός σώματος μάζας $M = \sum_{i=1}^n m_i$ που κινείται με το κέντρο μάζας και ονομάζεται μεταφορική κινητική ενέργεια του συστήματος. Ο δεύτερος όρος ονομάζεται εσωτερική κινητική ενέργεια του συστήματος.

Παράδειγμα 15.3.1 Δύο μάζες m_1 και m_2 , με $m_1 < m_2$, συνδέονται με αβαρές νήμα μήκους L . Περιστρέφουμε το σύστημα κατακόρυφα, κατά την φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού, κρατώντας την ελαφρότερη μάζα και μετά την αφήνουμε ελεύθερη. Περιγράψτε την κίνηση του συστήματος και υπολογίστε την τάση του νήματος μετά την απελευθέρωση.

Λύση Το κέντρο μάζας του συστήματος βρίσκεται πάνω στο νήμα και έστω σε απόσταση b από την μάζα m_2 .



Σχήμα 15.8: Το σύστημα των δύο σωμάτων περιστρέφεται γύρω από τη μικρότερη μάζα και ακολούθως αφήνεται ελεύθερο.

Για παρατηρητή στο Κ.Μ. θα ισχύει

$$m_2 b = (L - b) m_1 \Rightarrow b = \frac{m_1}{M} L \quad (15.58)$$

Εάν $\vec{v}_{c,0}$ είναι η αρχική ταχύτητα του κέντρου μάζας, το κέντρο μάζας θα διαγράψει παραβολική τροχιά ενώ οι μάζες m_1 και m_2 θα περιστρέφονται γύρω από αυτό αφού μετά την απελευθέρωση του συστήματος οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται είναι τα βάρη των δύο μαζών. Η τάση του νήματος θα παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης οπότε

$$N = m_2 \frac{v_2^2}{b} = m_2 b \dot{\theta}^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} L \dot{\theta}^2 = \mu L \dot{\theta}^2 \quad (15.59)$$

όπου μ η ανηγμένη μάζα του συστήματος.

Κεφάλαιο 16

Περιστροφή Στερεού Σώματος Γύρω από Σταθερό Άξονα

Θεωρούμε στερεό σώμα πάνω σε επίπεδο που περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετο σ' αυτό. Το σημείο P του στερεού βρίσκεται σε απόσταση r από την αρχή των συντεταγμένων και διαγράφει τόξο s που σχετίζεται με την γωνία θ μέσω της σχέσης

$$s = r\theta. \quad (16.1)$$

Μονάδα μέτρησης της γωνίας θ είναι το ακτίνιο που το συμβολίζουμε με rad .

Ορισμός 16.0.2 Ορίζουμε μέση γωνιακή ταχύτητα $\bar{\omega}$ ενός περιστρεφόμενου σώματος το λόγο της γωνιακής μετατόπισης προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα

$$\bar{\omega} \equiv \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t}. \quad (16.2)$$

Μονάδα μέτρησης της γωνιακής ταχύτητας είναι rad/s ή s^{-1} , αφού το ακτίνιο δεν έχει διάσταση.

Ορισμός 16.0.3 Ορίζουμε στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ω το όριο της μέσης γωνιακής ταχύτητας όταν $\Delta t \rightarrow 0$

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (16.3)$$

Μονάδα μέτρησης της γωνιακής επιτάχυνσης είναι rad/s^2 ή s^{-2} .

Ορισμός 16.0.4 Ορίζουμε μέση γωνιακή επιτάχυνση $\bar{\alpha}$ ενός περιστρεφόμενου σώματος το λόγο της γωνιακής ταχύτητας προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t}. \quad (16.4)$$

Ορισμός 16.0.5 Ορίζουμε στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση α το όριο της μέσης γωνιακής επιτάχυνσης όταν $\Delta t \rightarrow 0$

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (16.5)$$

Όλα τα σημεία ενός στερεού σώματος περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση. Η γωνιακή μετατόπιση θ , γωνιακή ταχύτητα ω και η γωνιακή επιτάχυνση α είναι μεγέθη αντίστοιχα με τη γραμμική μετατόπιση x , γραμμική ταχύτητα v και γραμμική επιτάχυνση a . Οι ποσότητες θ, ω, α διαφέρουν ως προς τις διαστάσεις από τις x, v, a κατά ένα παράγοντα μήκους. Η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση είναι διανυσματικά μεγέθη αλλά οι αντίστοιχες μέσες ποσότητες δεν είναι. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η γωνιακή μετατόπιση δεν είναι διάνυσμα για πεπερασμένες στροφές. Η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα $\bar{\omega}$ έχει κατεύθυνση που καθορίζεται από τον κανόνα της δεξιάς χειρός ενώ η στιγμιαία επιτάχυνση $\bar{\alpha}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\bar{\omega}$ όταν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας αυξάνει.

Θα μελετήσουμε τώρα την περιστροφική κίνηση στερεού σώματος γύρω από σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο τη (16.5) έχουμε

$$\int_0^t \alpha dt' = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{dt'} dt' \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t. \quad (16.6)$$

Επίσης με ολοκλήρωση της (16.3) βρίσκουμε

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2. \quad (16.7)$$

Απαλείφοντας τον χρόνο από τις (16.6) και (16.7) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0). \quad (16.8)$$

16.1 Σχέσεις Ανάμεσα σε Γωνιακές και Γραμμικές Ποσότητες

Θεωρούμε σημείο P στερεού σώματος που διαγράφει τόξο s κύκλου ακτίνας r . Η γραμμική του ταχύτητα θα έχει μόνο εφαπτομενική συνιστώσα αφού σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από την

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad (16.9)$$

και η απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων είναι σταθερή $\dot{r} = 0$. Όποτε

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta = \frac{ds}{dt}\hat{e}_\theta = r\omega\hat{e}_\theta. \quad (16.10)$$

Η γωνιακή επιτάχυνση σχετίζεται με την εφαπτομενική συνιστώσα της γραμμικής επιτάχυνσης με την

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad (16.11)$$

και η κεντρομόλος επιτάχυνση δίνεται από την

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2. \quad (16.12)$$

16.2 Κινητική Ενέργεια Περιστροφής

Η ολική κινητική ενέργεια ενός περιστρεφόμενου στερεού σώματος ισούται με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των επιμέρους σωμάτων

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2. \quad (16.13)$$

Η ποσότητα $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ ονομάζεται ροπή αδράνειας και συμβολίζεται με I

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (16.14)$$

Την ποσότητα

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (16.15)$$

την ονομάζουμε κινητική ενέργεια περιστροφής. Η ροπή αδράνειας στερεού σώματος με χωρική πυκνότητα μάζας ρ δίνεται από την

$$I = \int_{\Omega} r^2 dm = \int_{\Omega} r^2 \rho d\tau \quad (16.16)$$

όπου r η κάθετη απόσταση από τον άξονα περιστροφής.

Παράδειγμα 16.2.1 Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ενός ομογενούς κοίλου κύλινδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του όταν δίνονται η μάζα του M , η εσωτερική του ακτίνα R_1 και η εξωτερική R_2 .

Λύση Θεωρώντας ότι ο κύλινδρος έχει ύψος h και χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς τον z -άξονα (ο άξονας συμμετρίας του κυλίνδρου) θα είναι

$$I_z = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^3 \rho dr d\theta dz = \frac{\pi h}{2} \rho (R_2^4 - R_1^4). \quad (16.17)$$

Η πυκνότητα του στερεού θα είναι

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi h (R_2^2 - R_1^2)} \quad (16.18)$$

οπότε

$$I_z = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2). \quad (16.19)$$

Θεώρημα 16.2.2 (Steiner ή των παράλληλων αξόνων) Η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος ως προς οποιονδήποτε άξονα που είναι παράλληλος και σε απόσταση d από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας είναι

$$I = I_c + Md^2. \quad (16.20)$$

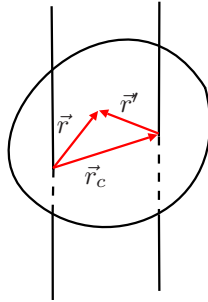
Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει για επίπεδο στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο O . Εάν η σχετική απόσταση της μάζας dm από το κέντρο μάζας είναι \vec{r}' τότε

$$I = \int_{\Omega} r^2 dm = \int_{\Omega} (\vec{r}_c + \vec{r}') \cdot (\vec{r}_c + \vec{r}') dm = \int_{\Omega} r'^2 dm + 2\vec{r}_c \cdot \int_{\Omega} \vec{r}' dm + r_c^2 \int_{\Omega} dm = I + Md^2. \quad (16.21)$$

Ο δεύτερος όρος είναι μηδέν γιατί από τον ορισμό του κέντρου μάζας

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int_{\Omega} (\vec{r}' + \vec{r}_c) dm = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \vec{r}' dm + \vec{r}_c \Rightarrow \int_{\Omega} \vec{r}' dm = \vec{0} \quad (16.22)$$

□



Σχήμα 16.1: Επίπεδο στερεό σώμα περιστρεφόμενο γύρω από άξονα παράλληλο προς τον άξονα που διέρχεται από το Κ.Μ.

Θεώρημα 16.2.3 (Των κάθετων αξόνων) Θεωρούμε επίπεδο στερεό σώμα με επιφανειακή κατανομή μάζας στο xy -επίπεδο. Εάν I_x , I_y και I_z οι ροπές αδράνειας του σώματος γύρω από τους άξονες x , y και z τότε

$$I_z = I_x + I_y. \quad (16.23)$$

Απόδειξη: Η ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα I_z είναι

$$I_z = \int_{\Omega} \int_{\Omega} r^2 dm = \int_{\Omega} \int_{\Omega} x^2 dm + \int_{\Omega} \int_{\Omega} y^2 dm = I_x + I_y. \quad (16.24)$$

□

Παράδειγμα 16.2.4 Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας μιας ορθογώνιας πλάκας με πλευρές a και b γύρω από άξονα που διέρχεται από οποιαδήποτε κορυφή του ορθογωνίου και είναι κάθετος στην πλάκα. Ακολουθώντας υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας της πλάκας.

Λύση Η ροπή αδράνειας της πλάκας γύρω από την πλευρά a είναι

$$I_a = \int_{\Omega} \int y^2 dm = \int_0^a \int_0^b y^2 \sigma dy dx = \frac{1}{3} \sigma ab^3 = \frac{1}{3} Mb^2. \quad (16.25)$$

Παρόμοια η ροπή αδράνειας του σώματος γύρω από την πλευρά b δίνεται από την

$$I_b = \frac{1}{3} Ma^2. \quad (16.26)$$

Από το θεώρημα των κάθετων αξόνων η ροπή αδράνειας ως προς άξονα κάθετο στην πλάκα και διερχόμενο από οποιαδήποτε κορυφή του ορθογωνίου θα είναι

$$I_z = I_x + I_y = I_a + I_b = \frac{1}{3} M(b^2 + a^2) = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2). \quad (16.27)$$

Το κέντρο μάζας του ορθογωνίου λόγω συμμετρίας ταυτίζεται με το σημείο τομής των διαγωνίων του. Εφαρμόζοντας το θεώρημα των παράλληλων αξόνων έχουμε

$$I_c = I_z - M \left(\frac{a^2 + b^2}{4} \right) = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2). \quad (16.28)$$

16.3 Ροπή

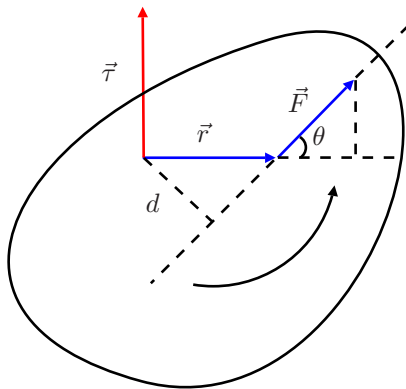
Θεωρούμε στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από άξονα ή σημείο O κάτω από την επίδραση εξωτερικής δύναμης \vec{F} .

Ορισμός 16.3.1 Ορίζουμε ροπή $\vec{\tau}$ της δύναμης \vec{F} ως προς τον άξονα περιστροφής το διάνυσμα

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (16.29)$$

όπου \vec{r} η επιβατική ακτίνα του σημείου εφαρμογής της δύναμης από τον άξονα περιστροφής.

Η ροπή είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα \vec{r} , \vec{F} και έχει κατά σύμβαση φορά θετική όταν τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από την φορά των δεικτών του ρολογιού. Η ποσότητα $d = r \sin \theta$ ονομάζεται μοχλοβραχίονας της δύναμης \vec{F} και εκφράζει την κάθετη απόσταση του άξονα περιστροφής από την κατεύθυνση της δύναμης. Δεν πρέπει να συγχέουμε την έννοια της δύναμης με την ροπή γιατί η τελευταία έχει μονάδες δύναμης επί



Σχήμα 16.2: Στερεό σώμα περιστρεφόμενο γύρω από άξονα κάτω από την επίδραση εξωτερικής δύναμης.

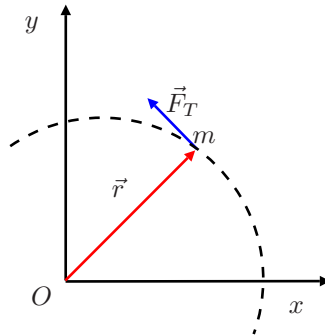
την μετατόπιση, ή $N \cdot m$ στο SI . Εάν αναλύσουμε την δύναμη \vec{F} σε δύο συνιστώσες μία παράλληλη της επιβατικής ακτίνας \vec{F}_{\parallel} και μία κάθετη σε αυτή \vec{F}_{\perp} τότε

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times (\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}) = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp} \quad (16.30)$$

δηλαδή μόνο η κάθετη συνιστώσα της δύναμης στο \vec{r} συνεισφέρει.

16.4 Σχέση Ανάμεσα στη Ροπή και στη Γωνιακή Επιτάχυνση

Θεωρούμε σημειακή μάζα m που περιστρέφεται σε κύκλο ακτίνας r υπό την επίδραση μιας εφαπτομενικής δύναμης \vec{F}_T . Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα



Σχήμα 16.3: Υλικό σημείο περιστρεφόμενο σε κυκλική τροχιά κάτω από την επίδραση εφαπτομενικής δύναμης.

$$F_T = ma_T \quad (16.31)$$

και η ροπή της δύναμης θα έχει μέτρο

$$\tau = F_T r = ma_T r. \quad (16.32)$$

Η εφαπτομενική επιτάχυνση συνδέεται με την στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση μέσω της σχέσης $a_T = r\alpha$. Οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\tau = mr^2\alpha = I\alpha. \quad (16.33)$$

Δηλαδή η ροπή της εφαπτομενικής δύναμης είναι ανάλογη της στιγμιαίας γωνιακής επιτάχυνσης και η σταθερά αναλογίας είναι η ροπή αδράνειας.

Θεωρούμε τώρα στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα και αποτελείται από άπειρο αριθμό μαζών dm . Κάθε μάζα περιστρέφεται με την ίδια στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση α διαγράφοντας κύκλο γύρω από τον άξονα περιστροφής που ταυτίζεται με την αρχή των συντεταγμένων. Εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία με αυτή που αναπτύχθηκε για τη σημειακή μάζα καταλήγουμε στη σχέση

$$d\tau = (r^2 dm)\alpha. \quad (16.34)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση βρίσκουμε την ολική ροπή γύρω από τον άξονα περιστροφής

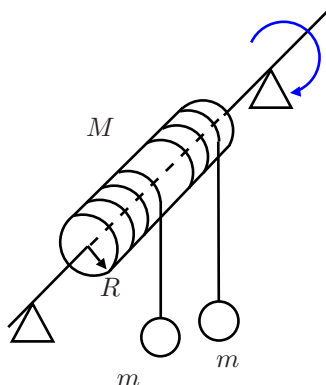
$$\tau_{\text{ολ.}} = \int \alpha r^2 dm = \alpha \int r^2 dm = I\alpha. \quad (16.35)$$

Παράδειγμα 16.4.1 Ένας ομογενής στερεός κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R περιστρέφεται γύρω από ένα άξονα χωρίς τριβές. Δύο ίσες μάζες είναι αναρτημένες από ελαφρά νήματα τυλιγμένα γύρω από τον κύλινδρο. Αν το σύστημα αρχικά ήταν ακίνητο και αφηθεί ελεύθερο βρείτε

- (α) Την τάση κάθε νήματος.
- (β) Την επιτάχυνση κάθε μάζας.
- (γ) Την γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου όταν οι μάζες έχουν κατεβεί κατά απόσταση h .

Λύση

- (α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στον άξονα περιστροφής είναι το ζεύγος των αντιδράσεων \vec{F}' από τα σημεία στήριξης και μία δύναμη $-\vec{N}$ κάθετη σε αυτόν λόγω επαφής με το σύστημα κύλινδρος - μάζες. Στον κύλινδρο



Σχήμα 16.4: Κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του κάτω από την επίδραση σωμάτων που συνδέονται με νήματα τυλιγμένα σε αυτόν.

ασκούνται το βάρος του $\vec{B}_κ = M\vec{g}$, η κάθετη δύναμη \vec{N} από τον άξονα στο σύστημα και οι τάσεις \vec{T} των νημάτων. Η συνολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται στον κύλινδρο είναι

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{\vec{B}_κ} + \vec{\tau}_{\vec{N}} + 2\vec{\tau}_{\vec{T}} = 2\vec{\tau}_{\vec{T}}. \quad (16.36)$$

Αλλά η ολική ροπή είναι ανάλογη της στιγμιαίας γωνιακής επιτάχυνσης οπότε

$$\tau = 2TR = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4T}{M}, \quad \text{όπου } I_{\text{κύλινδρου}} = \frac{1}{2}MR^2. \quad (16.37)$$

Η εξίσωση κίνησης της μάζας m δίνεται από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$mg - T = ma' \Rightarrow a' = g - \frac{T}{m} \quad (16.38)$$

όπου a' η γραμμική επιτάχυνση του σώματος. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (16.11) που συνδέει την επιτροχία επιτάχυνση $a' = a_T$ με την στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση α ενός σημείου στην περιφέρεια του κυλίνδρου, η εξίσωση (16.38) όταν επιλυθεί ως προς T δίνει

$$T = \frac{mMg}{4m + M} \quad (16.39)$$

(β) Άρα

$$a_T = R\alpha = \frac{4mg}{4m + M}. \quad (16.40)$$

(γ) Το σύστημα αρχικά ηρεμεί οπότε η αρχική κινητική του ενέργεια $T_{\text{αρχ.}} = 0$. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι

$$\Delta T = T_{\text{τελ.}} - T_{\text{αρχ.}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \left(m + \frac{1}{4}M\right) R^2\omega^2. \quad (16.41)$$

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος είναι

$$\Delta U = -2mgh. \quad (16.42)$$

Εάν οι τριβές είναι αμελητέες από το θεώρημα διατήρησης της ενέργειας έχουμε

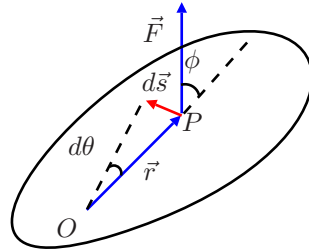
$$\Delta U + \Delta T = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{8mgh}{4m + M}}. \quad (16.43)$$

16.5 Το Θεώρημα Έργου - Ενέργειας για την Περιστροφική Κίνηση

Θεωρούμε στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από σημείο O κάτω από την επίδραση δύναμης \vec{F} με σημείο εφαρμογής το σημείο P . Όταν το σώμα μετατοπιστεί κατά $d\vec{s}$ το παραγόμενο έργο θα είναι

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) r d\theta = (F \sin \phi) r d\theta = \tau d\theta. \quad (16.44)$$

Ο ρυθμός παραγωγής έργου από την \vec{F} καθώς το σώμα περιστρέφεται γύρω από τον σταθερό άξονα είναι



Σχήμα 16.5: Στερεό σώμα περιστρεφόμενο γύρω από σημείο κάτω από την επίδραση εξωτερικής δύναμης.

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega. \quad (16.45)$$

Στην γραμμική κίνηση το θεώρημα έργου - ενέργειας απλοποιούσε την μελέτη της κίνησης σημαντικά. Στην περιστροφική κίνηση μπορούμε να εξάγουμε ανάλογο θεώρημα χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγωγής σύνθετης συνάρτησης για την ροπή

$$\tau = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \omega. \quad (16.46)$$

Αλλά $dW = \tau d\theta$ οπότε

$$dW = I\omega d\omega \Rightarrow \Delta W = I \int_{\omega_0}^{\omega} \omega' d\omega' = \frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} I\omega_0^2. \quad (16.47)$$

Δηλαδή το ολικό έργο που παράγουν οι εξωτερικές δυνάμεις ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας περιστροφής του σώματος.

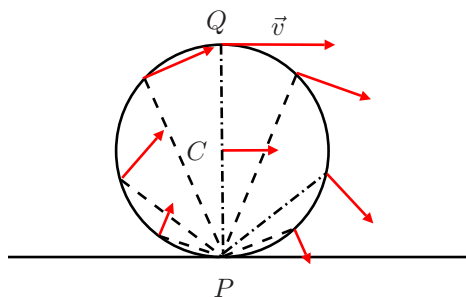
Κεφάλαιο 17

Κύλιση και Στροφορμή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την κίνηση στερεού σώματος ως προς άξονα περιστροφής που δεν είναι σταθερός στο χώρο. Θα υποθέσουμε ότι το σώμα είναι ομογενές, έχει συμμετρικό σχήμα και κυλιέται πάνω σε επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει. Αρχικά θα περιγράψουμε την κύλιση ενός σώματος και με την βοήθεια της έννοιας της στροφορμής συστήματος σωμάτων θα αποδείξουμε ότι για απομονωμένο στερεό σώμα αυτή διατηρείται.

17.1 Κύλιση Στερεού Σώματος

Θεωρούμε κύλινδρο μάζας M με ακτίνα R που κυλιέται πάνω σε επίπεδη επιφάνεια χωρίς να ολισθαίνει. Η κίνηση του σώματος μπορεί να θεωρηθεί σαν η σύνθεση μιας περιστροφικής γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας (Κ.Μ.) και είναι κάθετος στο σχήμα, και μιας μεταφορικής του Κ.Μ. Η ίδια όμως κίνηση μπορεί να θεωρηθεί σαν μια καθαρά περιστροφική γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής P (που έχει μηδενική ταχύτητα λόγω της μη ολίσθησης) και είναι κάθετος στο σχήμα. Ο άξονας αυτός ονομάζεται στιγμιαίος άξονας περιστροφής. Οποιαδήποτε χρονική στιγμή η γραμμική ταχύτητα κάθε υλικού σημείου του κυλίνδρου είναι κάθετη στην ευθεία που συνδέει το υλικό σημείο με το P ή ισοδύναμα $v_Q = r_{QP}\omega_P$ όπου ω_P η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα. Εάν I_P είναι η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής, η κινητική



Σχήμα 17.1: Κύλινδρος κυλιέται σε επίπεδη επιφάνεια.

ενέργεια του σώματος θα είναι

$$T = \frac{1}{2}I_P\omega_P^2. \quad (17.1)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα των παράλληλων αξόνων $I_P = I_c + MR^2$, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$$T = \frac{1}{2}I_c\omega_P^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega_P^2 \quad (17.2)$$

όπου $R\omega_P$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας ως προς το P . Άρα

$$T = \frac{1}{2}I_c\omega_P^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2. \quad (17.3)$$

Επειδή η ταχύτητα του κέντρου μάζας ως προς P είναι ίδια με την ταχύτητα του P ως προς το κέντρο μάζας, η γωνιακή ταχύτητα ω_P του Κ.Μ. ως προς ακίνητο παρατηρητή σχετικά με το έδαφος θα είναι ίση με τη ω_c του P ως προς παρατηρητή που κινείται με το Κ.Μ. Άρα $\omega_P = \omega_c$ και η ανάλυση της κίνησης σε καθαρά περιστροφική γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το Κ.Μ. και σε καθαρά μεταφορική με γραμμική ταχύτητα v_c είναι προφανής.

Ας μελετήσουμε τις ταχύτητες των σημείων P και Q χρησιμοποιώντας τις δύο διαφορετικές ερνημίες για την κίνηση του στερεού σώματος. Θεωρώντας ότι το σώμα εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από το P με στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{v_c}{R}$, το σημείο P ηρεμεί και το σημείο Q κινείται με ταχύτητα $v_Q = 2R\omega = 2v_c$. Ας τώρα υιοθετήσουμε την ανάλυση της κίνησης σε μεταφορική του Κ.Μ. και περιστροφική ως προς τον άξονα που διέρχεται από το Κ.Μ. Στην καθαρά μεταφορική κίνηση όλα τα σημεία του κυλίνδρου κινούνται με ταχύτητα v_c ενώ στην καθαρά περιστροφική κίνηση το Κ.Μ. ηρεμεί, το Q έχει γραμμική ταχύτητα $+\omega R$ και το P έχει $-\omega R$. Άρα οι συνισταμένες ταχύτητες θα είναι

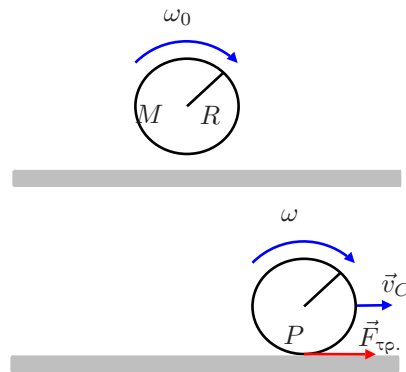
$$(\alpha) \text{ Σημείο } P: v_P = v_c - \omega R = v_c - v_c = 0$$

$$(\beta) \text{ Σημείο } C: v_c = v_c + 0 = v_c.$$

$$(\gamma) \text{ Σημείο } Q: v_Q = v_c + \omega R = 2v_c.$$

Παράδειγμα 17.1.1 Κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R που περιστρέφεται με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 τοποθετείται σε οριζόντιο επίπεδο. Εάν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου είναι μ μετά από πόσο χρόνο ο κύλινδρος θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει; Μελετήστε τις περιπτώσεις $\mu \rightarrow 0$ και $\mu \rightarrow \infty$.

Λύση Ο κύλινδρος εφάπτεται κατά μήκος ευθύγραμμου τμήματος με το οριζόντιο επίπεδο. Κάθε σημείο του



Σχήμα 17.2: Κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από άξονα πριν και μετά την επαφή του με οριζόντιο επίπεδο.

τμήματος αυτού θα έχει αρχικά ταχύτητα περιστροφής $v_{P,αρχ.} = v_{αρχ.περ.} = \omega_0 R$ (ως προς το Κ.Μ.) οπότε θα αναπτυχθεί δύναμη τριβής στην αντίθετη κατεύθυνση. Για την περιστροφική κίνηση του σημείου επαφής γύρω από το κέντρο μάζας θα ισχύει η εξίσωση

$$\tau_F = F_{\tau\phi} \cdot R = -I\alpha \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = -\frac{F_{\tau\phi} \cdot R}{I} \quad (17.4)$$

με λύση

$$\omega = \omega_0 - 2\frac{\mu g}{R}t. \quad (17.5)$$

Άρα η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα μειώνεται με το πέρασμα του χρόνου. Για την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$F_{\tau\phi} = M \frac{dv_c}{dt} \Rightarrow \mu g = \frac{dv_c}{dt} \Rightarrow v_c = \mu g t \quad (17.6)$$

δηλαδή η ταχύτητα του κέντρου μάζας αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο. Η συνισταμένη ταχύτητα του σημείου επαφής θα είναι

$$v_P = v_c - v_{περ.} \quad (17.7)$$

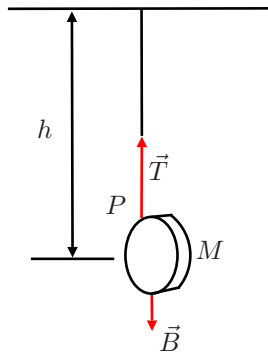
Ο κύλινδρος θα αρχίσει να κυλιέται την χρονική στιγμή που η συνθήκη κύλισης ικανοποιείται

$$v_c - v_{\text{περ.}} = v_C - \omega R = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}. \quad (17.8)$$

Όταν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι αμελητέος τότε $v_C = 0$ και ο κύλινδρος θα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = \omega_0$ στο σημείο που τοποθετήθηκε. Στην περίπτωση που το οριζόντιο επίπεδο είναι πολύ τραχύ η κύλιση θα αρχίσει αμέσως αφού τότε $t_0 = 0$

Παράδειγμα 17.1.2 Σπάγγος είναι τυλιγμένος γύρω από ομογενή δίσκο ακτίνας R και μάζας M . Ο δίσκος αφήνεται ελεύθερος ενώ αρχικά ήταν ακίνητος με το σπάγγο δεμένο σε σταθερό υποστήριγμα. Όταν ο δίσκος βρίσκεται σε απόσταση h από τη θέση στήριξης του σπάγγου υπολογίστε:

- (α) Την τάση του σπάγγου σαν συνάρτηση του βάρους του δίσκου.
 (β) Την επιτάχυνση του Κ.Μ. του δίσκου.
 (γ) Την ταχύτητα του Κ.Μ. του δίσκου.



Σχήμα 17.3: Ο δίσκος περιστρέφεται καθώς κινείται προς τα κάτω.

Λύση Οι δυνάμεις που ασκούνται στον δίσκο είναι η τάση \vec{T} του σπάγγου και το βάρος \vec{B} του δίσκου με σημείο εφαρμογής το Κ.Μ. λόγω συμμετρίας και επειδή η επιτάχυνση \vec{g} της βαρύτητας είναι σταθερή σε όλη την κατανομή της μάζας. Η ροπή αδράνειας I_P του δίσκου ως προς τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο επαφής P και είναι κάθετος στο νήμα δίνεται από την

$$I_P = I_c + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2. \quad (17.9)$$

- (α) Η ροπή του βάρους ως προς το σημείο P είναι

$$\tau_P = BR = I_P \alpha \quad (17.10)$$

ενώ η ροπή της τάσης ως προς το Κ.Μ. δίνεται από τη σχέση

$$\tau_c = TR = I_c \alpha. \quad (17.11)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (17.10) και (17.11) έχουμε

$$T = \frac{I_c}{I_P} B = \frac{1}{3}B. \quad (17.12)$$

- (β) Η στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση είναι

$$\alpha = \frac{BR}{I_P} = \frac{2g}{3R} \quad (17.13)$$

και η γραμμική επιτάχυνση του Κ.Μ.

$$a_c = R\alpha = \frac{2}{3}g. \quad (17.14)$$

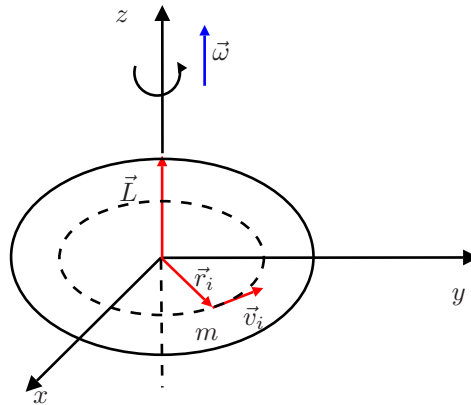
(γ) Από την Κινητική γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$v_c^2 = 2a_c h \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{4gh}{3}} \quad (17.15)$$

αφού ο δίσκος αρχικά ήταν ακίνητος $v_{c,αρχ.} = 0$ και η απόσταση $h = 0$.

17.2 Στροφορμή Συστήματος Σωμάτων

Θεωρούμε επίπεδο στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από άξονα σταθερής κατεύθυνσης. Έστω ότι ο άξονας αυτός ταυτίζεται με τον z -άξονα. Η στροφορμή διακριτού συστήματος σωμάτων δίνεται γενικά από την



Σχήμα 17.4: Επίπεδος δίσκος περιστρέφεται γύρω από τον σταθερό z -άξονα.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^n m_i (r_i^2 \vec{\omega} - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})) \quad (17.16)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την διανυσματική ταυτότητα

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A}) = A^2 \vec{B} - \vec{A} (\vec{A} \cdot \vec{B}). \quad (17.17)$$

Αλλά τα \vec{r}_i είναι κάθετα στην $\vec{\omega}$ στην παρούσα περίπτωση, και η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega} \Rightarrow L_z = I \omega_z. \quad (17.18)$$

Η στροφορμή στερεού σώματος, με συνεχή κατανομή μάζας ρ , που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα στον χώρο δίνεται από την

$$\vec{L} = \int_{\Omega} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \int_{\Omega} \rho (r^2 \vec{\omega} - \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{\omega})) d\tau = \left(\int_{\Omega} \rho r^2 d\tau \right) \vec{\omega} = I \vec{\omega} \quad (17.19)$$

όπου θεωρήσαμε ότι $\vec{r} \perp \vec{\omega}$. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο τη (17.19), θεωρώντας τη ροπή αδράνειας σταθερή, έχουμε

$$\vec{\tau}_{ολ. \text{ εξ.}} = \frac{d\vec{L}_z}{dt} = I \vec{\alpha}. \quad (17.20)$$

Όταν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα είναι μηδέν τότε γνωρίζουμε ότι ισχύει η διατήρηση της γραμμικής ορμής. Παρόμοια για στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από άξονα όταν η συνισταμένη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων μηδενιστεί η στροφορμή του σώματος διατηρείται δηλαδή

$$\vec{\tau}_{ολ. \text{ εξ.}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{σταθερή}. \quad (17.21)$$

Εάν σε ένα σύστημα γίνει ανακατανομή της μάζας με την επίδραση εσωτερικών δυνάμεων τότε η ροπή αδράνειας του μεταβάλλεται και η αρχή διατήρησης της στροφορμής γίνεται

$$\vec{L}_{αρχ.} = \vec{L}_{τελ.} \quad (17.22)$$

Για σύστημα που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, έστω τον z , μπορούμε να γράψουμε $L_z = I\omega$ και ο νόμος διατήρησης παίρνει την μορφή

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{σταθερή.} \quad (17.23)$$

Η εξίσωση αυτή δίνει ένα τρίτο νόμο διατήρησης. Έτσι η ενέργεια, η γραμμική ορμή και η στροφορμή ενός απομονωμένου συστήματος παραμένουν σταθερές. Υπάρχουν πολλά παραδείγματα διατήρησης της στροφορμής. Θα έχετε δει αθλητές του καλλιτεχνικού πατινάζ να στριφογυρίζουν στο παγοδρόμιο. Η γωνιακή ταχύτητα των αθλητών αυξάνεται όταν συμπύσσουν τα χέρια και πόδια τους. Εάν θεωρήσουμε τις τριβές αμελητέες, η μείωση της ροπής αδράνειας εξαιτίας της σύμπτυξης προκαλεί αύξηση της γωνιακής ταχύτητας έτσι ώστε η στροφορμή να διατηρείται σταθερή. Οι κολυμβητές καταδύσεων όταν θέλουν να στριφογυρίζουν γρηγορότερα συμπύσσουν τα χέρια και πόδια τους κοντά στο σώμα. Η δύναμη της βαρύτητας δεν δημιουργεί ροπές γιατί δρα στο Κ.Μ. και έχει μηδενική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.

Παράδειγμα 17.2.1 Ομογενής στερεός κύβος ακμής $L = 2a$ και μάζας M γλιστράει σε λείο τραπέζι με σταθερή ταχύτητα \vec{v}_0 . Στη συνέχεια κτυπά στην άκρη του τραπεζιού. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της v_0 ώστε ο κύβος να πέσει από το τραπέζι.

Λύση Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του κύβου ως προς την ακμή του L . Δίνεται από την σχέση

$$I_L = \int r^2 dm = \int \int_{\Omega} \int \rho r^2 d\tau = \rho \int_0^L \int_0^L \int_0^L (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{2}{3} \rho L^5 = \frac{2}{3} ML^2 = \frac{8}{3} Ma^2. \quad (17.24)$$

Κατά την στιγμή της χρούσης όλες οι εξωτερικές δυνάμεις δρουν κατά μήκος του άξονα περιστροφής οπότε η συνισταμένη τους ροπή θα μηδενίζεται. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής μπορούμε να υπολογίσουμε την στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα μετά την χρούση

$$L_{αρχ.} = L_{μετ.} \Rightarrow Mdv_0 = I_L\omega \Rightarrow \omega = \frac{Mdv_0}{I_L} \quad (17.25)$$

όπου $d = a$. Έστω h_1 και h_2 οι αποστάσεις του Κ.Μ. από το τραπέζι που το θεωρούμε σαν στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας. Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι

$$\Delta U = Mg(h_2 - h_1) = Mgd(\sqrt{2} - 1). \quad (17.26)$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας αμέσως μετά την χρούση και όταν το Κ.Β. έχει μηδενική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής, θα έχουμε

$$\Delta U = T_{περισ.} \Rightarrow Mgd(\sqrt{2} - 1) = \frac{M^2 d^2 v_0^2}{2I_L} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{16}{3} ag(\sqrt{2} - 1)}. \quad (17.27)$$

Παράδειγμα 17.2.2 Υπολογίστε τη στροφορμή και την κινητική ενέργεια στερεού σώματος που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από δεδομένο σημείο O του σώματος.

Λύση Η στροφορμή στερεού σώματος χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^n m_i (r_i^2 \vec{\omega} - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})) = \sum_{i=1}^n m_i (r_i^2 (\omega_x \vec{e}_x + \omega_y \vec{e}_y + \omega_z \vec{e}_z) - (x_i \vec{e}_x + y_i \vec{e}_y + z_i \vec{e}_z) (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i ((r_i^2 \omega_x - x_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})) \vec{e}_x + (r_i^2 \omega_y - y_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})) \vec{e}_y + (r_i^2 \omega_z - z_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})) \vec{e}_z) = \vec{L}_x + \vec{L}_y + \vec{L}_z \end{aligned} \quad (17.28)$$

όπου

$$\begin{aligned}
 L_x &= \left(\sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) \right) \omega_x + \left(- \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \right) \omega_y + \left(- \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \right) \omega_z = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\
 L_y &= \left(- \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \right) \omega_x + \left(\sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) \right) \omega_y + \left(- \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right) \omega_z = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\
 L_z &= \left(- \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \right) \omega_x + \left(- \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right) \omega_y + \left(\sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \right) \omega_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z
 \end{aligned} \tag{17.29}$$

ή διαφορετικά

$$L_i = \sum_{j=1}^n I_{ij} \omega_j, \quad i = 1, \dots, n. \tag{17.30}$$

Οι ποσότητες I_{ij} είναι τα στοιχεία ενός συμμετρικού πίνακα που ονομάζεται ταυσιτής αδράνειας και έχει 6 ανεξάρτητες συνιστώσες. Στην περίπτωση που έχουμε συνεχή κατανομή μάζας η αντίστοιχη σχέση θα είναι για το πρώτο στοιχείο του πίνακα

$$I_{xx} = \int_{\Omega \subset \mathbb{R}^3} (y^2 + z^2) \rho(\vec{r}) d\tau. \tag{17.31}$$

Για να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του στερεού σώματος, αναλύουμε την ταχύτητα κάθε υλικού σημείου σε δύο συνιστώσες, μια που περιγράφει τη μεταφορική κίνηση και μια την περιστροφική κίνηση

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{\mu\epsilon\tau.} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i. \tag{17.32}$$

Η κινητική ενέργεια του στερεού σώματος δίνεται τότε από την

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v_{\mu\epsilon\tau.}^2 + \vec{v}_{\mu\epsilon\tau.} \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \\
 &= \frac{1}{2} M v_{\mu\epsilon\tau.}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2
 \end{aligned} \tag{17.33}$$

όπου η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής, χρησιμοποιώντας τη σχέση $L_i = \sum_{j=1}^n I_{ij} \omega_j$, γράφεται

$$T_{\text{περ.}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \omega \cdot (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \omega_i I_{ij} \omega_j. \tag{17.34}$$

Άρα το στερεό σώμα θα έχει κινητική ενέργεια

$$T = \frac{1}{2} M v_{\mu\epsilon\tau.}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \omega_i I_{ij} \omega_j. \tag{17.35}$$

Κεφάλαιο 18

Μηχανική των Ρευστών

Στο κεφάλαιο αυτό θα ξεκινήσουμε με την ερμηνεία των διαφόρων καταστάσεων της ύλης. Μετά θα μελετήσουμε ένα ρευστό που ηρεμεί και θα υπολογίσουμε την πίεση σαν συνάρτηση της πυκνότητας του ρευστού και του βάθους από την ελεύθερη επιφάνεια του. Θα περιγράψουμε τα είδη της ροής ενός κινούμενου ρευστού και στη συνέχεια κάνοντας κάποιες παραδοχές θα κατασκευάσουμε ένα μοντέλο για να μελετήσουμε ορισμένα πρακτικά προβλήματα. Τέλος ο νόμος του *Bernoulli* που αποτελεί άμεση συνέπεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας σε ένα ιδανικό ρευστό, θα μας βοηθήσει να καθορίσουμε τη σχέση μεταξύ της πίεσης του ρευστού με την πυκνότητα και την ταχύτητα σε κάθε σημείο του ρευστού.

18.1 Καταστάσεις της Ύλης

Η ύλη γενικά μπορεί να υπάρχει σε μια από τις ακόλουθες καταστάσεις: στερεά, υγρά, αέρια και πλάσμα. Από την καθημερινή εμπειρία μας τα στερεά έχουν καθορισμένο όγκο και σχήμα, τα υγρά έχουν καθορισμένο όγκο αλλά όχι σχήμα και τέλος τα αέρια δεν έχουν καμία από τις δύο ιδιότητες. Οι ιδιότητες αυτές βοηθούν στην ταξινόμηση των καταστάσεων της ύλης αλλά δεν είναι καθοριστικές λόγω της δράσης εξωτερικών παραγόντων όπως η θερμοκρασία και η πίεση που μπορούν να μεταβάλλουν την μια κατάσταση σε μια άλλη. Παραδείγματα αποτελούν η άσφαλτος, τα πλαστικά και το νερό. Η τέταρτη κατάσταση της ύλης δημιουργείται όταν η ύλη θερμαίνεται σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες. Ηλεκτρόνια ελευθερώνονται από τα άτομα οπότε δημιουργείται ένα ιοντισμένο αέριο που αποτελείται από ίσο πλήθος αρνητικά φορτισμένων ηλεκτρονίων και θετικά φορτισμένων ιόντων. Η κατάσταση του πλάσματος συναντάται στους αστέρες.

Θα ερμηνεύσουμε τώρα τις διάφορες καταστάσεις της ύλης μελετώντας την ατομική δομή. Τα άτομα στα στερεά κατέχουν συγκεκριμένες θέσεις στο χώρο υπό την επίδραση των ηλεκτρικών δυνάμεων και ταλαντώνονται γύρω από τις θέσεις αυτές λόγω της θερμικής ενέργειας. Βασικός παράγοντας που επηρεάζει το εύρος των ταλαντώσεων είναι η θερμοκρασία. Τις ταλαντώσεις των ατόμων στα στερεά μπορούμε να τις περιγράψουμε θεωρώντας ότι τα άτομα στις θέσεις ισορροπίας τους συνδέονται με ελατήρια με τα γειτονικά τους άτομα. Εάν εφαρμοστεί εξωτερική δύναμη τότε τα ελατήρια συμπιέζονται ενώ όταν απομακρυνθεί η δύναμη το στερεό τείνει να ανακτήσει το αρχικό του σχήμα. Για το λόγο αυτό λέμε ότι τα στερεά έχουν ελαστικότητα. Τα στερεά ταξινομούνται σε κρυσταλλικά όταν τα άτομα εμφανίζουν περιοδική δομή και άμορφα όταν η διάταξη των ατόμων είναι τυχαία. Παράδειγμα κρυσταλλικού υλικού είναι το χλωριούχο νάτριο όπου τα ιόντα νατρίου και χλωρίου κατέχουν εναλλάξ τις κορυφές ενός κύβου. Το γυαλί είναι ένα άμορφο υλικό.

Η υγρή κατάσταση στα υλικά υπάρχει σε υψηλότερη θερμοκρασία από ότι στα στερεά. Η θερμική κίνηση είναι μεγαλύτερη στην υγρή από ότι στη στερεά κατάσταση. Οι μοριακές δυνάμεις στα υγρά δεν είναι αρκετά ισχυρές για να συγκρατήσουν τα μόρια σε συγκεκριμένες θέσεις οπότε κινούνται σε τυχαίες κατευθύνσεις. Τα στερεά και τα υγρά όταν συμπιέζονται αντιδρούν εσωτερικά με ισχυρές απωστικές δυνάμεις που αντιστέκονται στη συμπίεση.

Στην αέρια κατάσταση τα μόρια κινούνται σε τυχαίες κατευθύνσεις χωρίς να αλληλεπιδρούν.

18.2 Μεταβολή της Πίεσης Συναρτήσει του Βάθους

Γνωρίζουμε ότι η δύναμη που ασκεί ένα ρευστό που ηρεμεί σε ένα αντικείμενο είναι πάντοτε κάθετη στις επιφάνειες του αντικειμένου. Την πίεση σε οποιοδήποτε σημείο του ρευστού μπορούμε να την μετρήσουμε χρησιμοποιώντας μια συσκευή που αποτελείται από κύλινδρο που περιέχει ελατήριο σε κενό. Το ένα άκρο του ελατηρίου συνδέεται

με την σταθερή βάση του κυλίνδρου ενώ το άλλο με έμβολο. Εάν το ελατήριο είναι βαθμονομημένο τότε εύκολα μετράμε την πίεση.

Έστω έμβολο εμβαδού επιφανείας A και F η κάθετη σε αυτό δύναμη. Ορίζουμε πίεση P του ρευστού στο επίπεδο που βρίσκεται βυθισμένο το έμβολο το λόγο της δύναμης προς το εμβαδόν επιφανείας του εμβόλου

$$P = \frac{F}{A}. \quad (18.1)$$

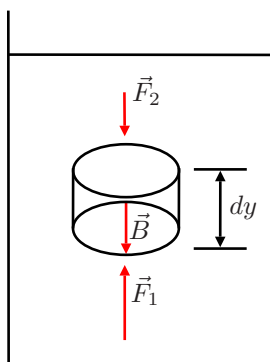
Η πίεση σε ένα σημείο του ρευστού ορίζεται σαν

$$P = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(A + \epsilon) - F(A)}{\epsilon} = \frac{dF}{dA}. \quad (18.2)$$

Μονάδα πίεσης στο σύστημα SI είναι το *Pascal* και ισούται με

$$1Pa = 1N/m^2. \quad (18.3)$$

Θα προσδιορίσουμε τώρα τη σχέση μεταξύ της πίεσης σε σημείο ενός ρευστού το οποίο υπόκειται σε βαρυντική δύναμη με την πυκνότητα και το βάθος. Θεωρούμε ρευστό που ηρεμεί και ένα κύλινδρο υγρού βάσης A και ύψους dy . Υπενθυμίζουμε ότι όλα τα σημεία που βρίσκονται στο ίδιο βάθος υφίστανται την ίδια πίεση. Έστω



Σχήμα 18.1: Ιδεατός κύλινδρος υγρού σε δοχείο με ρευστό που ηρεμεί.

$\vec{F}_1 = PA\vec{j}$ η δύναμη που δέχεται η κάτω βάση του κυλίνδρου από το ρευστό. Στην άνω βάση θα ασκείται δύναμη $\vec{F}_2 = -(P + dP)A\vec{j}$. Οι δυνάμεις στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου εξουδετερώνονται λόγω συμμετρίας. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$F_1 - F_2 - B = 0 \Rightarrow PA - (P + dP)A - \rho g A dy = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dy} = -\rho g. \quad (18.4)$$

Η λύση της (18.4) είναι

$$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1). \quad (18.5)$$

Εάν το δεύτερο σημείο βρίσκεται στην επιφάνεια του ρευστού όπου η πίεση ισούται με την ατμοσφαιρική τότε

$$P = P_\alpha + \rho gh \quad (18.6)$$

δηλαδή η πίεση P σε βάθος h κάτω από την επιφάνεια ρευστού ανοιχτού στην ατμόσφαιρα είναι μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική κατά ρgh . Παρατηρήστε ότι η πίεση είναι ανεξάρτητη από το σχήμα του δοχείου που περιέχει το ρευστό. Επίσης αφού η πίεση σε ένα ρευστό εξαρτάται μόνο από το βάθος οποιαδήποτε μεταβολή της πίεσης στην επιφάνεια του ρευστού μεταδίδεται σε κάθε σημείο του ρευστού. Οδηγούμαστε έτσι στο νόμο του *Pascal*

Ορισμός 18.2.1 (Νόμος του *Pascal*) Κάθε μεταβολή στην πίεση ενός αποθηκευμένου ρευστού μεταδίδεται χωρίς να μειωθεί σε κάθε σημείο του ρευστού και στα τοιχώματα του δοχείου αποθήκευσης.

Σημαντική εφαρμογή του νόμου αποτελούν οι υδραυλικές πρέσες. Εάν F_1 είναι η δύναμη που ασκείται στο έμβολο εμβαδού επιφανείας A_1 η δύναμη F_2 στο έμβολο A_2 είναι

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 > F_1. \quad (18.7)$$

18.3 Η Άνωση και η Αρχή του Αρχιμήδη

Η Αρχή του 18.3.1 (Αρχιμήδη) Κάθε σώμα που είναι βυθισμένο σε ένα ρευστό δέχεται άνωση ίση με το βάρος του εκτοπιζόμενου ρευστού.

Η άνωση είναι δύναμη με φορά προς την επιφάνεια του ρευστού και κατεύθυνση που ταυτίζεται με εκείνη του κέντρου βάρους του εκτοπιζόμενου υγρού. Για την απόδειξη της αρχής θα θεωρήσουμε ρευστό που ηρεμεί μέσα σε δοχείο και ιδεατό κύβο ρευστού. Επειδή ο κύβος ηρεμεί θα πρέπει το βάρος του να εξουδετερώνεται από μία ίση και αντίθετη δύναμη, που ονομάζουμε άνωση. Υποθέστε τώρα ότι αντικαθιστούμε τον ιδεατό κύβο με συμπαγή χαλύβδινο κύβο ίδιας ακμής a . Η δύναμη της άνωσης που ασκείται στον νέο κύβο είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη που ασκείται στον κύβο του νερού. Η διαφορά πίεσης μεταξύ των βάσεων του κύβου είναι σύμφωνα με τα προηγούμενα

$$\Delta P = \rho_{\text{υγρού}} g a \quad (18.8)$$

Η διαφορά όμως της πίεσης ισούται με το λόγο της άνωσης ανά μονάδα επιφανείας του κύβου

$$\Delta P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = (\rho_{\text{υγρού}} g a) A = \rho_{\text{υγρού}} g V. \quad (18.9)$$

Αλλά η μάζα του ρευστού στον κύβο είναι $M = \rho_{\text{υγρού}} V$ οπότε

$$F = \rho_{\text{υγρού}} g V = M g = B \quad (18.10)$$

όπου B το βάρος του εκτοπιζόμενου ρευστού.

Θα μελετήσουμε τώρα την κίνηση ενός αντικειμένου που είναι εντελώς βυθισμένο σε ένα ρευστό. Οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό είναι το βάρος του

$$B = M_{\text{σώματος}} g = \rho_{\text{σώματος}} V_{\text{σώματος}} g \quad (18.11)$$

και η άνωση

$$F = M_{\text{υγρού}} g = \rho_{\text{υγρού}} V_{\text{υγρού}} g. \quad (18.12)$$

Αλλά $V_{\text{σώματος}} = V_{\text{υγρού}} = V$ επειδή το σώμα είναι πλήρως βυθισμένο στο ρευστό και η συνισταμένη δύναμη θα είναι

$$F - B = (\rho_{\text{υγρού}} - \rho_{\text{σώματος}}) V g. \quad (18.13)$$

Εάν η πυκνότητα του ρευστού είναι μεγαλύτερη από την πυκνότητα του αντικειμένου το σώμα θα επιταχυνθεί προς την επιφάνεια ενώ σε αντίθετη περίπτωση θα επιταχυνθεί προς τα κάτω.

Εάν το αντικείμενο επιπλέει λόγω στατικής ισορροπίας θα ισχύει

$$F = B \Rightarrow \rho_{\text{υγρού}} V_{\text{υγρού}} = \rho_{\text{σώματος}} V_{\text{σώματος}}. \quad (18.14)$$

Τα ψάρια έχουν πυκνότητα λίγο μεγαλύτερη από την πυκνότητα του νερού και διαθέτουν μηχανισμό (νηκτική κύστη) μεταβολής της πυκνότητάς τους. Έτσι μπορούν να βρίσκονται σε στατική όταν πηγαίνουν σε μεγάλα βάθη.

Παράδειγμα 18.3.2 Καλώδιο πυκνότητας ρ_{κ} και διαμέτρου d απλώνεται κατακόρυφα προς τα κάτω κατά απόσταση h μέσα στο νερό. Σώμα μάζας M_{σ} και πυκνότητας ρ_{σ} είναι δεμένο στο κάτω άκρο του καλωδίου. Οι πυκνότητες $\rho_{\kappa}, \rho_{\sigma}$ είναι και οι δύο μεγαλύτερες της πυκνότητας ρ_{ν} του νερού. Υπολογίστε

(α) Την τάση T_l στο κάτω άκρο του καλωδίου.

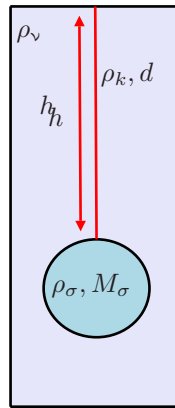
(β) Την τάση T_u στο άνω άκρο του καλωδίου.

(γ) Τις τάσεις T'_l και T'_u εάν όλη η διάταξη είναι στον αέρα. Η άνωση του αέρα αμελήται.

Λύση

(α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι το βάρος του \vec{B}_{σ} , η τάση \vec{T}'_l του καλωδίου και η άνωση $\vec{F}'_{\text{αν. } \sigma}$. Επειδή το σώμα ισορροπεί θα ισχύει

$$T_l = (M_{\sigma} - M_{\text{εκ.υ}}) g = (\rho_{\sigma} - \rho_{\text{εκ.υ}}) V_{\sigma} g = \left(\frac{\rho_{\sigma} - \rho_{\text{εκ.υ}}}{\rho_{\sigma}} \right) M_{\sigma} g. \quad (18.15)$$



Σχήμα 18.2: Το σύστημα καλώδιο - σώμα βυθισμένο σε δοχείο με υγρό.

(β) Η τάση \vec{T}_u στο άνω άκρο του καλώδιου θα οφείλεται στην τάση που ασκεί το σύστημα καλώδιο - σώμα. Η τάση του καλώδιου δίνεται από την εξίσωση

$$T_x = B_x - F_{αν.κ} = (\rho_κ - \rho_{εκ.υ})V_{εκ.υ}g = (\rho_κ - \rho_{εκ.υ})\pi\frac{d^2}{4}hg. \quad (18.16)$$

Άρα

$$T_u = T_l + T_x = \left(\frac{\rho_\sigma - \rho_{εκ.υ}}{\rho_\sigma}\right)M_\sigma g + (\rho_κ - \rho_{εκ.υ})\pi\frac{d^2}{4}hg. \quad (18.17)$$

(γ) Όταν η διάταξη είναι στον αέρα οι τάσεις θα δίνονται από τις

$$T'_l = M_\sigma g, \quad T'_u = T'_l + \pi\frac{d^2}{4}\rho_x hg. \quad (18.18)$$

18.4 Δυναμική των Ρευστών

Θα μελετήσουμε τώρα ρευστά που κινούνται. Η ροή ενός ρευστού μπορεί είναι στρωτή ή τυρβώδης. Στη στρωτή ροή οι τροχιές των μορίων του ρευστού δεν τέμνονται και η ταχύτητα σε δεδομένο σημείο του χώρου είναι σταθερή ως προς το χρόνο. Έτσι οποιοδήποτε μόριο διέρχεται από συγκεκριμένη θέση του ρευστού θα έχει την ίδια ταχύτητα. Όταν η ταχύτητα υπερβεί μια κρίσιμη τιμή τότε η ροή είναι ακανόνιστη και εμφανίζονται στρόβιλοι. Η ροή αυτή λέγεται τυρβώδης και η ταχύτητα μεταβάλλεται και ως προς τον χώρο και το χρόνο. Ο όρος ιξώδες ενός ρευστού περιγράφει την εσωτερική τριβή μεταξύ συνεχόμενων στρώσεων του υγρού και αποτέλεσμα αυτής είναι η μετατροπή της κινητικής ενέργειας σε θερμική.

Η κίνηση των ρευστών είναι πολύπλοκο πρόβλημα και για την απλούστευση της μελέτης τους θα υποθέσουμε τα ακόλουθα

- (1) Το ρευστό δεν έχει ιξώδες. Η εσωτερική τριβή είναι αμελητέα οπότε το ρευστό δεν υπόκειται σε καμιά επιβραδύνουσα δύναμη.
- (2) Η ροή είναι στρωτή. Κάθε σημείο του ρευστού στο χώρο έχει σταθερή ταχύτητα ανεξάρτητη του χρόνου.
- (3) Το ρευστό είναι ασυμπίεστο. Η πυκνότητα του ρευστού διατηρείται σταθερή με το χρόνο.
- (4) Η ροή είναι αστρόβιλη. Η στροφορμή ενός στοιχείου ρευστού ως προς οποιοδήποτε σημείο του μηδενίζεται. Εάν τοποθετήσουμε ένα τροχό μέσα στο ρευστό τότε αυτός δεν περιστρέφεται αλλά εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση.

Ένα ρευστό που ικανοποιεί και τις τέσσερις αυτές συνθήκες ονομάζεται ιδανικό ρευστό.

Η τροχιά ενός μορίου του ρευστού ονομάζεται ρευματική γραμμή. Η ταχύτητα του μορίου είναι πάντα εφαπτόμενη της ρευματικής γραμμής. Στην στρωτή ροή οι ρευματικές γραμμές δεν τέμνονται γιατί εάν υπήρχε κοινό σημείο τότε παραβιάζεται η συνθήκη της σταθερής ταχύτητας στη συγκεκριμένη θέση.

Θεωρούμε σωλήνα μεταβλητής διατομής στον οποίο τα μόρια του ρευστού κινούνται σε συνθήκες στρωτής ροής. Στο χρονικό διάστημα Δt το ρευστό διανύει απόσταση $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$. Εάν A_1 είναι η διατομή του σωλήνα στην περιοχή αυτή, η μάζα που ρέει μέσα στην ίδια περιοχή είναι

$$\Delta m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 \Delta x_1 A_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t. \quad (18.19)$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το ρευστό που κινείται στην δεξιά πλευρά του σωλήνα θα έχει μάζα

$$\Delta m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t. \quad (18.20)$$

Από την αρχή διατήρησης της μάζας και επειδή η ροή είναι στρωτή, η μάζα που περνάει μέσα από την διατομή A_1 θα ισούται με την μάζα που περνάει μέσα από την διατομή A_2 στον ίδιο χρονικό διάστημα. Επομένως

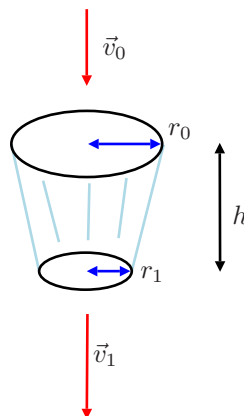
$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad (18.21)$$

και ονομάζεται εξίσωση συνέχειας. Για ασυμπίεστο ρευστό η πυκνότητα ρ είναι σταθερή οπότε η εξίσωση γράφεται

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{σταθερή} \quad (18.22)$$

δηλαδή σε όλα τα σημεία της φλέβας το γινόμενο της διατομής επί την ταχύτητα του ρευστού είναι σταθερό. Το μέτρο της ταχύτητας είναι μεγάλο εκεί που ο σωλήνας είναι στενός.

Παράδειγμα 18.4.1 Νερό ρέει συνεχώς από το στόμιο βρύσης εσωτερικής διαμέτρου d_0 και αρχικής ταχύτητας v_0 . Υπολογίστε τη διάμετρο ροής του νερού σε ύψος h από το στόμιο. Η αντίσταση του αέρα αμελείται και υποθέτουμε ότι δεν δημιουργούνται σταγόνες νερού.



Σχήμα 18.3: Η ροή του νερού από το στόμιο βρύσης.

Λύση Η ταχύτητα του νερού σε ύψος h από το στόμιο της βρύσης είναι

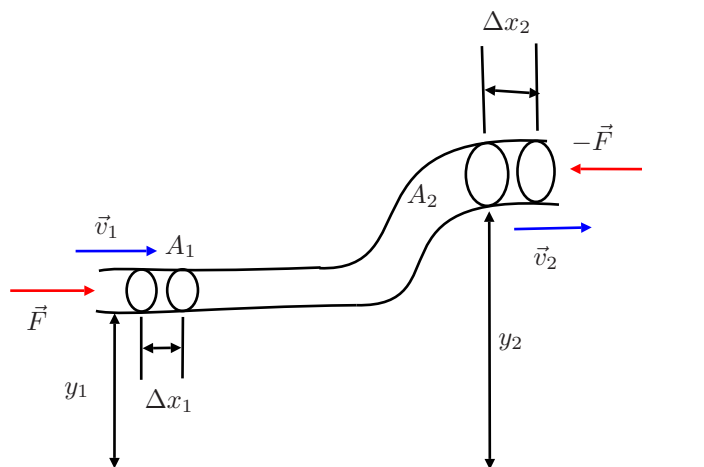
$$v_h = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \quad (18.23)$$

Εφαρμόζοντας το νόμο της συνέχειας έχουμε

$$v_0 A_0 = v_h A_h \Rightarrow d_h = \sqrt{\frac{v_0}{v_h}} d_0 = d_0 \sqrt{\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}}. \quad (18.24)$$

18.5 Η Εξίσωση του Bernoulli

Εάν θεωρήσουμε ρευστό που κινείται σε σωλήνα μεταβλητής διατομής και ύψους, η πίεση θα μεταβάλλεται κατά μήκος του σωλήνα. Ο Bernoulli (1700-1782) επινόησε μια σχέση που συνδέει την πίεση με την ταχύτητα του ρευστού και το ύψος. Υποθέτουμε ότι το ρευστό είναι ιδανικό. Εάν η πίεση στην αριστερή πλευρά του σωλήνα



Σχήμα 18.4: Σωλήνας μεταβλητής διατομής που διαρρέεται από ρευστό.

είναι P_1 , η δύναμη που ασκείται κάθετα στην διατομή του σωλήνα A_1 θα είναι $P_1 A_1$. Το έργο που παράγει η δύναμη αυτή είναι

$$W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 \Delta V_1. \quad (18.25)$$

Παρόμοια το έργο που παράγει η δύναμη $-P_2 A_2$ στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt θα είναι

$$W_2 = -P_2 \Delta V_2. \quad (18.26)$$

Αλλά $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ γιατί ο όγκος του ρευστού που περνάει από αριστερά κατά το χρονικό διάστημα Δt είναι ίσος με τον όγκο που περνάει στα δεξιά στο ίδιο χρονικό διάστημα. Το έργο είναι αρνητικό γιατί η δύναμη του ρευστού εναντιώνεται στη μετατόπιση. Το συνολικό έργο που παράγουν οι δυνάμεις είναι

$$\Delta W = (P_1 - P_2) \Delta V. \quad (18.27)$$

Εάν εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας για τον όγκο ΔV του ρευστού έχουμε

$$\Delta W = \Delta T + \Delta U \Rightarrow (P_2 - P_1) \Delta V = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 + \Delta m g (y_2 - y_1). \quad (18.28)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση της πυκνότητας $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ βρίσκουμε

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2. \quad (18.29)$$

Αυτή είναι η εξίσωση του *Bernoulli*. Πολλές φορές γράφεται στην μορφή

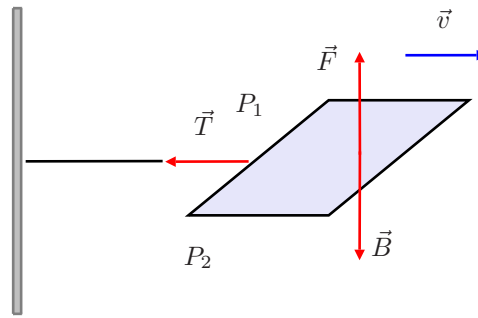
$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{σταθερό} \quad (18.30)$$

δηλαδή το άθροισμα της πίεσης, της πυκνότητας κινητικής ενέργειας και της πυκνότητας δυναμικής ενέργειας είναι σταθερή σε οποιοδήποτε σημείο της ρευματικής γραμμής.

Παράδειγμα 18.5.1 Πλάκα εμβαδού A και μάζας M είναι στερεωμένη στη μια πλευρά της. Αν ρεύμα αέρα κινείται στην πάνω επιφάνεια της, ποια ταχύτητα πρέπει να έχει ο αέρας για να συγκρατηθεί σε οριζόντια θέση η πλάκα.

Λύση Η διαφορά ταχύτητα του αέρα μεταξύ των δύο επιφανειών της πλάκας θα προκαλέσει δυναμική άνωση μέτρου

$$F_{\alpha\nu.} = (P_2 - P_1)A. \quad (18.31)$$



Σχήμα 18.5: Η πλάκα ισορροπεί λόγω της δυναμικής άνωσης που δημιουργείται από ρεύμα αέρα στην πάνω της επιφάνεια.

Όταν η πλάκα ισορροπεί στην οριζόντια θέση θα ισχύει

$$F_{\text{αν.}} = B \Rightarrow P_2 - P_1 = \frac{M}{A}g. \quad (18.32)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του *Bernoulli* και λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας μηδενίζεται έχουμε

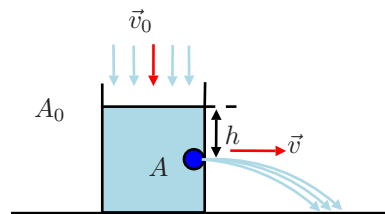
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_2 \Rightarrow P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho v^2. \quad (18.33)$$

Άρα η ταχύτητα θα πρέπει να ισούται με

$$v = \sqrt{\frac{2Mg}{A\rho}}. \quad (18.34)$$

Παράδειγμα 18.5.2 Υπολογίστε την ταχύτητα εκροής ρευστού από οπή δοχείου, λαμβάνοντας υπ' όψιν την ταχύτητα \vec{v}_0 της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού. Ποιά το βεληνεκές της ροής του ρευστού εάν το δοχείο έχει ύψος H ; Εάν το εμβαδόν επιφάνειας της οπής είναι πολύ μικρότερο από το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειας, ποια η ταχύτητα εκροής και το βεληνεκές προσεγγιστικά;

Λύση Η εξίσωση του *Bernoulli* για $P_1 = P_2 = P_{\text{ατμ.}}$ γράφεται



Σχήμα 18.6: Εκροή ρευστού από οπή δοχείου.

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho gh \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2gh. \quad (18.35)$$

Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε

$$Av = A_0 v_0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A}{A_0}\right)^2}} \simeq \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{A_0}\right)^2\right). \quad (18.36)$$

Η ροή του ρευστού εκτελεί πλάγια βολή με αρχική ταχύτητα $u_{0x} = v$ και $u_{0y} = 0$. Ο χρόνος καθόδου του ρευστού θα είναι

$$t_{\text{καθ.}} = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \quad (18.37)$$

και το βεληνεκές θα δίνεται από την

$$x = u_{0x} t_{\text{καθ.}} = 2 \sqrt{\frac{h(H-h)}{1 - \left(\frac{A}{A_0}\right)^2}}. \quad (18.38)$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $A_0 \gg A$ η προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$$x \simeq 2\sqrt{h(H-h)} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{A_0}\right)^2\right). \quad (18.39)$$

Κεφάλαιο 19

Σχετικότητα

Η καθημερινή εμπειρία μας υποδεικνύει ότι η Νευτώνεια Μηχανική ερμηνεύει με μεγάλη επιτυχία φαινόμενα που εξελίσσονται σε μικρές ταχύτητες αλλά αποτυγχάνει να περιγράψει την κίνηση σωμάτων που κινούνται με ταχύτητα συγκρίσιμη της ταχύτητας του φωτός. Κλασικά στην ορμή $\vec{p} = m\vec{v}$ και στην κινητική ενέργεια $T = \frac{1}{2}mv^2$ ενός σώματος η μάζα θεωρείται μια αναλλοίωτη ποσότητα για κάθε σώμα ανεξάρτητα από το σύστημα αναφοράς. Η υπόθεση αυτή βρίσκεται σε ασυμφωνία όταν μελετούμε την κίνηση σωματιδίων σε υψηλές ενέργειες. Επίσης πειραματικά εάν επιταχύνουμε ηλεκτρόνια τετραπλασιάζοντας τη διαφορά δυναμικού, η Νευτώνεια Μηχανική προβλέπει ότι η ταχύτητα τους θα διπλασιαστεί. Ωστόσο πειραματικά έχει αποδειχθεί ότι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου παραμένει πάντα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός.

Ο *Einstein* δημιούργησε την θεωρία της σχετικότητας βάσει της οποίας μπορούμε να ερμηνεύσουμε φαινόμενα που παρατηρούνται από μηδενικές ταχύτητες ως την ταχύτητα του φωτός. Θα μελετήσουμε την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας η οποία βασίζεται σε δύο θεμελιώδη αξιώματα:

- (α) Οι νόμοι της Φυσικής είναι ίδιοι για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Δηλαδή, οι νόμοι της Φυσικής έχουν την ίδια μαθηματική μορφή για όλους τους παρατηρητές που κινούνται με σταθερή ταχύτητα μεταξύ τους.
- (β) Η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει τιμή $c = 3 \times 10^{18} \text{ m/s}$ και είναι ανεξάρτητη από την κίνηση του παρατηρητή ή από την κίνηση της φωτεινής πηγής.

19.1 Η Αρχή της Σχετικότητας

Για να περιγράψουμε ένα φυσικό γεγονός πρέπει πρώτα να ορίσουμε ένα σύστημα αναφοράς. Ορίζουμε αδρανειακό σύστημα αναφοράς εκείνο που ένα ελεύθερο σώμα δεν επιταχύνεται. Ένα φυσικό φαινόμενο που πραγματοποιείται σε αδρανειακό σύστημα ονομάζεται γεγονός και καθορίζεται από μια τετράδα πραγματικών αριθμών (x, y, z, t) . Οι τρεις πρώτες συντεταγμένες προσδιορίζουν τη χωρική θέση του γεγονότος ενώ η τέταρτη τη χρονική στιγμή που συντελείται.

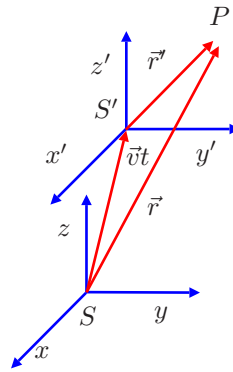
Θεωρούμε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς S και S' όπου το δεύτερο κινείται ως προς το πρώτο με σταθερή ταχύτητα \vec{v} , όπως μετράτε από το πρώτο σύστημα. Γεγονός συμβαίνει στο σημείο P . Ο παρατηρητής που βρίσκεται στο πρώτο αδρανειακό σύστημα περιγράφει το γεγονός χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες (x, y, z, t) ενώ ο δεύτερος παρατηρητής περιγράφει το ίδιο γεγονός με τις συντεταγμένες (x', y', z', t') . Οι συντεταγμένες του γεγονότος ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς συνδέονται με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad (19.1)$$

όταν τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι αρχές των αδρανειακών συστημάτων ταυτίζονται. Στην περίπτωση που αρχικά απέχουν απόσταση \vec{R}_0 ο μετασχηματισμός γράφεται

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t + \vec{R}_0. \quad (19.2)$$

Παρατηρήστε ότι στην Κλασική Μηχανική όλα τα ρολόγια μετρούν χρόνο πάντα με τον ίδιο ρυθμό, δηλαδή, η χρονική στιγμή που ένα γεγονός συμβαίνει στο σύστημα S' είναι ίδια με εκείνη που το ίδιο γεγονός συμβαίνει στο σύστημα S . Η υπόθεση ότι ο χρόνος είναι απόλυτος είναι λάθος όπως θα αποδειχθεί αργότερα.



Σχήμα 19.1: Αδρανειακά συστήματα αναφοράς που κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα.

Υποθέτουμε τώρα ότι δύο γεγονότα σύμφωνα με παρατηρητή στο S σύστημα απέχουν απόσταση Δr στο χώρο και Δt στο χρόνο. Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου για διαφορές έχουμε

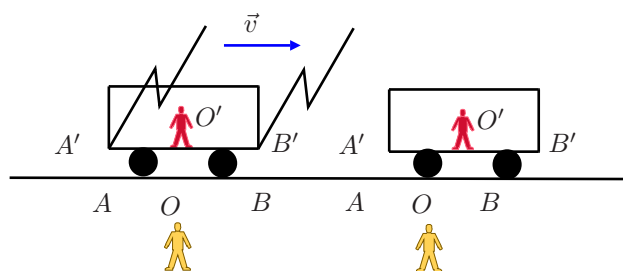
$$\frac{\Delta r'}{\Delta t} = \frac{\Delta r'}{\Delta t'} = \frac{\Delta r}{\Delta t} - \vec{v} \Rightarrow \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{r}'(t' + \Delta t') - \vec{r}'(t')}{\Delta t'} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right) - \vec{v} \Rightarrow \vec{u}' = \vec{u} - \vec{v} \quad (19.3)$$

όπου \vec{u} και \vec{u}' οι στιγμιαίες ταχύτητες ως προς τα συστήματα S και S' αντίστοιχα. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως ο νόμος πρόσθεσης των ταχυτήτων του Γαλιλαίου. Ο νόμος αυτός έρχεται σε αντίφαση με το δεύτερο αξίωμα της σχετικότητας. Γιατί εάν φανταστούμε ένα παρατηρητή σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς να κινείται με ταχύτητα \vec{v} και να ανάβει ένα φακό, τότε σύμφωνα με τον νόμο πρόσθεσης των ταχυτήτων ο ακίνητος παρατηρητής θα παρατηρεί το φως να κινείται με ταχύτητα $\vec{v} + \vec{c}$.

19.2 Συγχρονισμός Ρολογιών και Ταυτόχρονα Γεγονότα

Πολλές φορές ένας παρατηρητής που βρίσκεται σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς πρέπει να συγχρονίσει τα ρολόγια που θα χρησιμοποιήσει για να μετρήσει διάφορα γεγονότα. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας ένα φωτεινό σήμα που εκπέμπεται από το ρολόι (1) τη χρονική στιγμή t_1 από την θέση x_1 και φτάνει στο ρολόι (2) στη θέση x_2 στον πεπερασμένο χρόνο $t_2 = t_1 + \frac{x_2 - x_1}{c}$.

Βασική προϋπόθεση της Νευτώνειας Μηχανικής είναι ότι υπάρχει μια παγκόσμια κλίμακα χρόνου που είναι ίδια για όλους τους παρατηρητές. Αλλά σύμφωνα με τον *Einstein* οι μετρήσεις των χρονικών διαστημάτων εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς που γίνεται η μέτρηση. Για την περιγραφή του ταυτόχρονου ας θεωρήσουμε το παρακάτω ιδεατό πείραμα. Δύο κεραυνοί χτυπούν ένα βαγόκι και το έδαφος. Έστω A' και B' τα σημάδια που αφήνουν οι κεραυνοί στο βαγόκι και A, B τα σημάδια στο έδαφος. Οι παρατηρητές O και O' βρίσκονται στο μέσο της απόστασης των σημαδιών. Εάν το φως των κεραυνών φτάσει στον O την ίδια χρονική στιγμή ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται

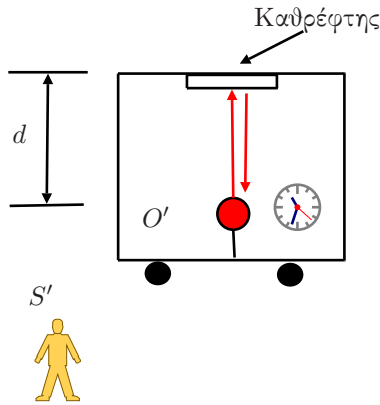


Σχήμα 19.2: Ιδεατό πείραμα για την έννοια του ταυτόχρονου.

ότι τα φωτεινά σήματα κινήθηκαν με την ίδια ταχύτητα και κάλυψαν ίσες αποστάσεις. Οπότε συμπεραίνει ότι τα συμβάντα συντελέστηκαν ταυτόχρονα. Τα φωτεινά σήματα μέχρι να φτάσουν στον παρατηρητή O , ο O' έχει μετακινηθεί. Οπότε το φως του κεραυνού B' έχει ήδη φτάσει στον O' αλλά δεν έχει φτάσει εκείνο από το A' . Άρα οι κεραυνοί δεν έπεσαν ταυτόχρονα. Δύο λοιπόν γεγονότα που είναι ταυτόχρονα σε ένα σύστημα αναφοράς δεν είναι κατ' ανάγκη ταυτόχρονα και σε ένα άλλο που κινείται ως προς το πρώτο.

19.3 Η Σχετικότητα του Χρόνου

Θεωρούμε όχημα που κινείται με ταχύτητα \vec{v} παράλληλα με το έδαφος. Παρατηρητής που είναι ακίνητος ως προς

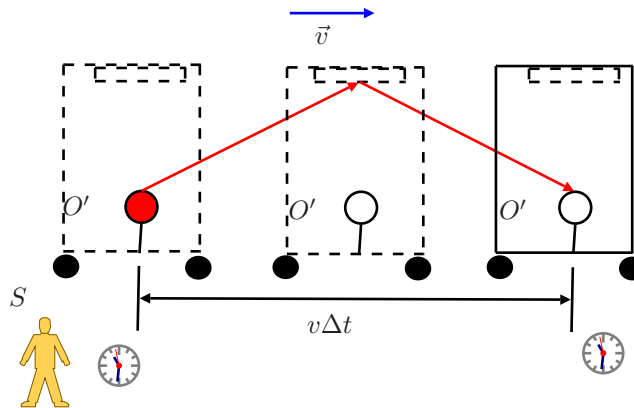


Σχήμα 19.3: Συσκευή λέιζερ εκπέμπει ακτίνα προς τη οροφή κινούμενου οχήματος και ανακλάται από καθρέφτη. Η κόκκινη καμπύλη αναπαριστά την πορεία της ακτίνας όπως την περιγράφει παρατηρητής που ηρεμεί με το όχημα.

το όχημα εκπέμπει ακτίνα λέιζερ προς καθρέφτη που βρίσκεται σε απόσταση d κάθετα στη διεύθυνση της κίνησης. Το χρονικό διάστημα $\Delta t'$ που χρειάζεται η ακτίνα για να καλύψει την απόσταση $2d$ είναι

$$\Delta t' = \frac{\text{Απόσταση που έχει διανυθεί}}{\text{Ταχύτητα}} = \frac{2d}{c}. \tag{19.4}$$

Ο παρατηρητής που βρίσκεται σε ηρεμία στο έδαφος βλέπει τον καθρέφτη και τη συσκευή λέιζερ να κινούνται δεξιά με ταχύτητα v μαζί με το όχημα. Επειδή η ακτίνα διανύει μεγαλύτερη απόσταση ο παρατηρητής θα μετρήσει



Σχήμα 19.4: Η καινούργια πορεία της ακτίνας όπως περιγράφεται από παρατηρητή που ηρεμεί με το έδαφος.

μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Όταν η ακτίνα φτάσει στον καθρέφτη σε χρόνο $\Delta t/2$ το όχημα θα έχει διανύσει απόσταση $v\Delta t/2$. Ο παρατηρητής αυτός για να μετρήσει το χρονικό διάστημα Δt μεταξύ των γεγονότων εκπομπή ακτίνας και λήψη ακτίνας, πρέπει να χρησιμοποιήσει δύο συγχρονισμένα ρολόγια που βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του συστήματος αναφοράς του. Η σχέση μεταξύ των δύο χρονικών διαστημάτων Δt και $\Delta t'$ δίνεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + d^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2d}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\Delta t'. \tag{19.5}$$

Το χρονικό διάστημα $\Delta t'$ λέγεται ιδιόχρονος και ορίζεται σαν το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο γεγονότων που συμβαίνουν στο ίδιο σημείο του χώρου. Επειδή $\Delta t > \Delta t'$ θα έχουμε διαστολή χρόνου. Παρατηρούμε λοιπόν ότι όλες οι φυσικές διαδικασίες, συμπεριλαμβανομένων των χημικών αντιδράσεων και των βιολογικών διαδικασιών, εκτυλίσσονται με αργότερο ρυθμό σε κινούμενο σύστημα.

19.4 Η Σχετικότητα του Μήκους

Ορίζουμε ιδιομήκος ενός αντικειμένου το μήκος του αντικειμένου που μετράται όταν αυτό ηρεμεί στο σύστημα αναφοράς του. Το ιδιομήκος δεν είναι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων που μετρούνται την ίδια στιγμή.

Για να κατανοήσουμε την συστολή του μήκους θεωρούμε το εξής πείραμα. Παρατηρητής που είναι ακίνητος πάνω στη Γη μετράει την απόσταση ανάμεσα σε δύο αστέρια και τη βρίσκει L' . Ο χρόνος που χρειάζεται ένα διαστημόπλοιο για να καλύψει αυτή την απόσταση είναι $\Delta t = L'/v$. Ένας άλλος παρατηρητής βρίσκεται σε διαστημόπλοιο που κινείται από τον ένα αστέρα στον άλλο, με ταχύτητα v ως προς τη γη. Ο παρατηρητής αυτός νομίζει ότι είναι ακίνητος και βλέπει τον αστέρα να τον πλησιάζει με ταχύτητα v . Η απόσταση που μετράει ο ταξιδιώτης είναι

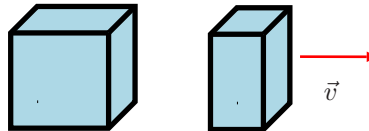
$$L = v\Delta t' = v\frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{L'}{\gamma} \Rightarrow L = L' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (19.6)$$

Επειδή $L < L'$ θα έχουμε συστολή του μήκους.

Θεωρούμε κύβο που κινείται με σταθερή ταχύτητα v κατά μήκος μιας ακμής του. Ο όγκος του κύβου στο σύστημα ηρεμίας του είναι $\Delta V' = \Delta x'\Delta y'\Delta z'$. Για τον ακίνητο παρατηρητή ο όγκος δίνεται από την

$$\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta x'\Delta y'\Delta z' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta V'. \quad (19.7)$$

Παρατηρήστε ότι οι σε διευθύνσεις που είναι κάθετες στην ταχύτητα δεν έχουμε μεταβολή του μετρούμενου μήκους.

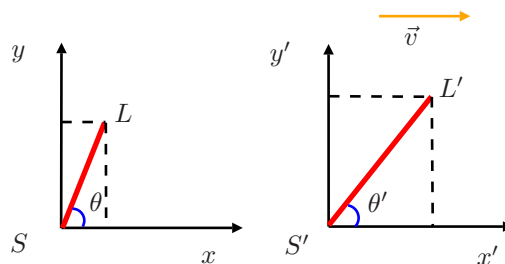


Σχήμα 19.5: Συστολή μόνο της ακμής του κύβου που είναι παράλληλη με την διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας.

Στο προηγούμενο παράδειγμα ισχύει $\Delta y' = \Delta y$ και $\Delta z' = \Delta z$.

Παράδειγμα 19.4.1 Θεωρούμε ράβδο μήκους L' που κινείται με σταθερή σχετική ταχύτητα v παράλληλα με την οριζόντια διεύθυνση και σχηματίζει γωνία θ' με τον x' -άξονα. Υπολογίστε το μήκος και τη γωνία που σχηματίζει η ράβδος στο σύστημα του εργαστηρίου.

Λύση Στο κινούμενο σύστημα αναφοράς S' η ράβδος έχει συνιστώσες



Σχήμα 19.6: Το μήκος της ράβδου όπως αυτό μετράται σε αδρανειακά συστήματα που βρίσκονται σε σχετική κίνηση.

$$L'_x = L' \cos \theta' \quad \text{και} \quad L'_y = L' \sin \theta'. \quad (19.8)$$

Στο σύστημα του εργαστηρίου S η ράβδος έχει συνιστώσες

$$L_x = L \cos \theta \quad \text{και} \quad L_y = L \sin \theta \quad (19.9)$$

ενώ το μήκος της είναι

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}. \quad (19.10)$$

Οι y -συνιστώσες, επειδή είναι κάθετες στη διεύθυνση της ταχύτητας, παραμένουν αναλλοίωτες

$$L_y = L'_y \quad (19.11)$$

ενώ οι x -συνιστώσες μετασχηματίζονται σύμφωνα με

$$L_x = \frac{L'_x}{\gamma}. \quad (19.12)$$

Άρα το μήκος της ράβδου στο εργαστήριο είναι

$$\begin{aligned} L^2 &= \left(\frac{L'_x}{\gamma}\right)^2 + L'^2_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) L'^2 \cos^2 \theta' + L'^2 \sin^2 \theta' = L'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta'\right) \Rightarrow \\ L &= L' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta'}. \end{aligned} \quad (19.13)$$

Η γωνία που σχηματίζει η ράβδος στο σύστημα του εργαστηρίου είναι

$$\tan \theta = \frac{L_y}{L_x} = \gamma \frac{L'_y}{L'_x} = \gamma \tan \theta'. \quad (19.14)$$

Επειδή $\gamma > 1$ η γωνία $\theta > \theta'$ και η ράβδος περιστρέφεται.

19.5 Ο Μετασχηματισμός του Lorentz

Θεωρούμε γεγονός που πραγματοποιείται στο σημείο P του χωρόχρονου και παρατηρείται από δύο παρατηρητές. Ο O είναι ακίνητος στο σύστημα αναφοράς S και ο O' είναι ακίνητος στο σύστημα αναφοράς S' που κινείται με ταχύτητα \vec{v} παράλληλα με τον άξονα x . Εάν (x, y, z, t) είναι οι συντεταγμένες του γεγονότος ως προς το S και (x', y', z', t') οι συντεταγμένες ως προς το S' οι μετασχηματισμοί που δίνουν τη δυνατότητα να περνάμε από το S στο S' και αντίστροφα λέγονται μετασχηματισμοί του Lorentz

Θεωρούμε δύο αδρανειακούς παρατηρητές S και S' που κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα \vec{v} ως προς τον xx' -άξονα. Τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$ συγχρονίζουν τα ρολόγια τους σε κάποια θέση του χώρου. Τη στιγμή αυτή ένα φωτεινό σήμα εκπέμπεται από την κοινή τους θέση. Για τον παρατηρητή S σε χρόνο t το σήμα θα έχει φθάσει στο σημείο P και θα έχει διανύσει απόσταση $\vec{r} = \vec{ct}$. Οι συντεταγμένες του P θα ικανοποιούν

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2. \quad (19.15)$$

Παρόμοια για τον παρατηρητή S' μπορούμε να γράψουμε

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2. \quad (19.16)$$

Επειδή η ταχύτητα είναι κάθετη στις διευθύνσεις y και z θα ισχύει

$$y = y', \quad z = z'. \quad (19.17)$$

Για τον παρατηρητή S ο S' θα έχει διανύσει απόσταση $SS' = vt$ οπότε

$$x' = \lambda(x - vt) \quad (19.18)$$

Επίσης θα υποθέσουμε ότι

$$t' = a(t - bx) \quad (19.19)$$

Οι συντελεστές λ, a, b θα προσδιοριστούν αντικαθιστώντας τις προηγούμενες σχέσεις στην εξίσωση του σφαιρικού κύματος όπως περιγράφεται από τον S'

$$(\lambda^2 - a^2 b^2 c^2)x^2 - 2(\lambda^2 v - a^2 b c^2)xt + y^2 + z^2 = (a^2 - \lambda^2 \frac{v^2}{c^2})c^2 t^2 \quad (19.20)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι εκ ταυτότητας ίσο με την εξίσωση του σφαιρικού κύματος όπως αυτό περιγράφεται από τον S όταν

$$\lambda^2 - a^2 b^2 c^2 = 1, \quad \lambda^2 v - a^2 b c^2 = 0, \quad a^2 - \lambda^2 \frac{v^2}{c^2} = 1. \quad (19.21)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων έχουμε

$$\lambda = a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad b = \frac{v}{c^2}. \quad (19.22)$$

Οπότε ο μετασχηματισμός που συνδέει τις μετρήσεις των S και S' και είναι συμβιβαστός με την αναλλοιώτητα της ταχύτητας του φωτός είναι

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (19.23)$$

όπου $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι η τιμή t' με την οποία περιγράφει ο S' ένα γεγονός εξαρτάται από το χρόνο t και τη θέση x που μετράει ο S . Αυτή είναι μια βασική διαφορά της σχετικότητας από τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου όπου $t = t'$. Οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί υπολογίζονται εάν αντικαταστήσουμε όπου \vec{v} την $-\vec{v}$ και όπου (x, y, z, t) τα (x', y', z', t')

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \quad (19.24)$$

Όταν $v \ll c$, τότε $v/c^2 \ll 1$ και $v^2/c^2 \ll 1$ οπότε οι μετασχηματισμοί *Lorentz* ανάγονται στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου. Πολλές φορές στα προβλήματα υπολογίζουμε τη διαφορά στις συντεταγμένες των γεγονότων οπότε οι μετασχηματισμοί *Lorentz* γράφονται

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t), \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right), \quad S \rightarrow S' \\ \Delta x &= \gamma(\Delta x' + v\Delta t'), \quad \Delta y = \Delta y', \quad \Delta z = \Delta z', \quad \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right), \quad S' \rightarrow S \end{aligned} \quad (19.25)$$

Δεν έχουμε γράψει κανένα νόμο μετασχηματισμού για τις συντεταγμένες y και z αφού η σχετική κίνηση γίνεται στη διεύθυνση του x -άξονα.

Παράδειγμα 19.5.1 Υπολογίστε το γενικό μετασχηματισμό *Lorentz* όταν οι άξονες συντεταγμένων των αδρανειακών παρατηρητών δεν είναι παράλληλοι στη σχετική ταχύτητα.

Λύση Θεωρούμε δύο αδρανειακούς παρατηρητές S και S' οι οποίοι τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$ συγχρονίζουν τα ρολόγια τους. Έστω γεγονός που συμβαίνει στο σημείο P του χωρόχρονου. Το διάνυσμα θέσης του γεγονότος ως προς τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς S και S' είναι \vec{r} και \vec{r}' αντίστοιχα. Κάθε διάνυσμα θέσης μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες κάθετα και παράλληλα προς τη διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας. Άρα για το αδρανειακό σύστημα αναφοράς S έχουμε

$$\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel, \quad \text{όπου } \vec{r}_\parallel = (\vec{v} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{v}}{v^2}. \quad (19.26)$$

Στο αδρανειακό σύστημα S' θα ισχύει παρόμοια

$$\vec{r}' = \vec{r}'_\perp + \vec{r}'_\parallel. \quad (19.27)$$

Οι κάθετες συνιστώσες παραμένουν αναλλοιώτες

$$\vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp \quad (19.28)$$

ενώ οι παράλληλες ικανοποιούν το νόμο μετασχηματισμού

$$\vec{r}'_\parallel = \gamma(\vec{r}_\parallel - \vec{v}t), \quad \text{όπου } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (19.29)$$

Αντικαθιστώντας τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε

$$\vec{r}' = \vec{r}'_{\perp} + \gamma(\vec{r}'_{\parallel} - \vec{v}t) = \vec{r} + (\gamma - 1)\vec{r}_{\parallel} - \gamma\vec{v}t = \vec{r} + (\gamma - 1)(\vec{v} \cdot \vec{r})\frac{\vec{v}}{v^2} - \gamma\vec{v}t. \quad (19.30)$$

Για το μετασχηματισμό του χρόνου ισχύει

$$r'^2 = (ct')^2 \Rightarrow r^2 + 2(\gamma - 1)\vec{r} \cdot \vec{r}_{\parallel} + (\gamma - 1)^2 r_{\parallel}^2 - 2\gamma^2(\vec{v} \cdot \vec{r}_{\parallel})t + \gamma^2 v^2 t^2 = (ct')^2. \quad (19.31)$$

Αλλά $r^2 = (ct)^2$, $\vec{r} \cdot \vec{r}_{\parallel} = r_{\parallel}^2$ και $\vec{r}_{\parallel} \cdot \vec{v} = r' \cdot \vec{v}$. Οπότε τελικά

$$t' = \gamma \left(t - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{r})}{c^2} \right). \quad (19.32)$$

19.6 Ο Μετασχηματισμός Ταχυτήτων του Lorentz

Για να εξάγουμε τους μετασχηματισμούς των ταχυτήτων υποθέτουμε ότι το μέτρο της ταχύτητας u'_x μετρούμενο στο σύστημα S' είναι

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad (19.33)$$

Αλλά

$$dx' = \gamma(dx - vdt), \quad dt' = \gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right) \quad (19.34)$$

οπότε με αντικατάσταση βρίσκουμε

$$u'_x = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}. \quad (19.35)$$

Όταν $u_x = c$ τότε

$$u'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c^2} c} = c \quad (19.36)$$

και το αποτέλεσμα είναι συνεπές με το δεύτερο αξίωμα του *Einstein*. Επίσης η ταχύτητα ενός σώματος δεν μπορεί να ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός. Για τις συνιστώσες u'_y, u'_z εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο και έχουμε

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2} dx)} = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2} u_x)}. \quad (19.37)$$

Η τρίτη συνιστώσα της ταχύτητας δίνεται από την ίδια έκφραση με μόνη αλλαγή την αντικατάσταση των u'_y και u_y με u'_z και u_z αντίστοιχα. Στην περίπτωση του αντίστροφου μετασχηματισμού Lorentz θέτουμε όπου \vec{v} την $-\vec{v}$ και όπου (u_x, u_y, u_z) τα (u'_x, u'_y, u'_z)

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}. \quad (19.38)$$

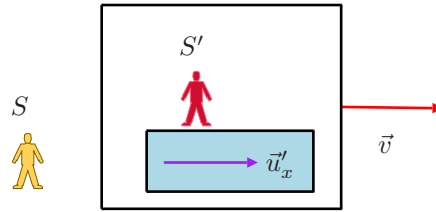
Παράδειγμα 19.6.1 Θεωρούμε ακτίνα φωτός που διέρχεται μέσα από οριζόντια στήλη νερού με δείκτη διάθλασης n , και κινείται με σχετική ταχύτητα v . Η ακτίνα φωτός κινείται παράλληλα με τη στήλη του νερού με ταχύτητα c/n στο κινούμενο σύστημα αναφοράς. Να υπολογίστε τη ταχύτητα του φωτός στο σύστημα του εργαστηρίου.

Λύση Η ταχύτητα του φωτός στο σύστημα εργαστηρίου είναι

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}} = \frac{c}{n} \left(\frac{1 + \frac{nv}{c}}{1 + \frac{v}{nc}} \right). \quad (19.39)$$

Εάν $v \ll c$ τότε η προηγούμενη έκφραση γράφεται

$$u_x \approx \left(\frac{c}{n} + v \right) \left(1 - \frac{v}{nc} \right) = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) - \frac{v^2}{nc} \approx \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (19.40)$$



Σχήμα 19.7: Ακτίνα φωτός που διέρχεται μέσα από στήλη νερού που κινείται με σταθερή σχετική ταχύτητα.

19.7 Η Σχετικιστική Ορμή και Ενέργεια

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας για να περιγραφεί σωστά η κίνηση των σωμάτων θα πρέπει να γενικεύσουμε τους νόμους του Νεύτωνα και ειδικότερα τις έννοιες της ορμής, της δύναμης και της ενέργειας. Η σχετικιστική ορμή θα πρέπει να ικανοποιεί τις εξής προϋποθέσεις

(α) Να διατηρείται σε όλες τις κρούσεις

(β) Να έχει κλασικό όριο την $m\vec{u}$ όταν η ταχύτητα δεν είναι συγκρίσιμη με την ταχύτητα του φωτός.

Οι όροι πληρούνται όταν η σχετικιστική ορμή δίνεται από την

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \vec{u} = \gamma m_0 \vec{u} \quad (19.41)$$

όπου m η μάζα ηρεμίας και

$$\text{Σχετικιστική μάζα} = \gamma m_0 \quad (19.42)$$

Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι η σχετικιστική μάζα του σώματος αυξάνεται καθώς αυξάνεται το μέτρο της ταχύτητάς του.

Η σχετικιστική δύναμη \vec{F} ενός σώματος με ορμή \vec{p} ορίζεται από την

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (19.43)$$

Η σχετικιστική έκφραση του θεωρήματος έργου - ενέργειας στηρίζεται στον ορισμό του έργου

$$\begin{aligned} W &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} dt \\ &= \int_0^u \vec{u}' \cdot d \left(\frac{m_0 \vec{u}'}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_0 u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \int_0^u \frac{m_0 \vec{u}'}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \cdot d\vec{u}' \\ &= \frac{m_0 u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - m_0 c^2 = (m - m_0) c^2 \end{aligned} \quad (19.44)$$

όπου υποθέσαμε ότι το σώμα ξεκίνησε από την ηρεμία και επιταχύνθηκε μέχρι την ταχύτητα u . Η σχετικιστική κινητική του ενέργεια θα είναι

$$W = T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2. \quad (19.45)$$

Η σχέση αυτή έχει επαληθευτεί στους επιταχυντές υψηλών ενεργειών. Για πολύ μικρές ταχύτητες χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2} + n - 1}{n} x^{2n}, \quad \binom{r}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{m=0}^{n-1} (r - m) \quad (19.46)$$

έχουμε

$$T = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^4} \cdots \right) - m_0 c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 u^2 \quad (19.47)$$

που είναι το αποτέλεσμα της Κλασικής Φυσικής. Ο όρος $\gamma m c^2$ είναι η ολική ενέργεια E δηλαδή

$$E = T + m_0 c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (19.48)$$

Για ένα φωτόνιο με μάζα ηρεμίας $m = 0$ η ενέργεια του θα είναι $E = pc$. Όταν μελετούμε υποατομικά σωματίδια εκφράζουμε την ενέργεια τους σε ηλεκτρονιοβόλτ eV γιατί αποκτούν ενέργεια με ηλεκτροστατική επιτάχυνση σε διαφορά δυναμικού.

$$1eV = 1.60 \times 10^{-19} J \quad (19.49)$$

Παράδειγμα 19.7.1 Υπολογίστε το γενικό μετασχηματισμό της ορμής και ενέργειας για αδρανειακούς παρατηρητές που κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα \vec{v} .

Λύση Η εξίσωση που συνδέει την ενέργεια και ορμή στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S είναι

$$E^2 = c^2(p^2 + m_0^2 c^2) \Rightarrow p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2. \quad (19.50)$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι μια αναλλοίωτη ποσότητα οπότε θα ισχύει

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = p'^2 - \frac{E'^2}{c^2} \Rightarrow p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2 - \frac{E'^2}{c^2} \quad (19.51)$$

Η δομή αυτής της εξίσωσης είναι παρόμοια με την

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 \quad (19.52)$$

εάν κάνουμε τις αντιστοιχίες

$$x \rightarrow p_x, \quad y \rightarrow p_y, \quad z \rightarrow p_z, \quad t \rightarrow \frac{E}{c^2}. \quad (19.53)$$

Άρα εάν στο μετασχηματισμό *Lorentz*

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1)(\vec{v} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{v}}{v^2} - \gamma \vec{v} t, \quad t' = \gamma \left(t - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{r})}{c^2} \right) \quad (19.54)$$

εφαρμόσουμε την προηγούμενη αντιστοιχία θα έχουμε

$$\vec{p}' = \vec{p} + (\gamma - 1)(\vec{v} \cdot \vec{p}) \frac{\vec{p}}{p^2} - \gamma \vec{v} \frac{E}{c^2}, \quad E' = \gamma (E - \vec{v} \cdot \vec{p}). \quad (19.55)$$