Πανεπιστήμιο Αιγαίου

URL: http://www.aegean.gr

Γραμμικός Προγραμματισμός

Ευστράτιος Ιωαννίδης

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Τμήμα Μαθηματικών

83200 Καρλόβασι

Σάμος

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Το πρόβλημα του μαθηματικού προγραμματισμού

Το γενικό πρόβλημα του μαθηματικού προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Να βρεθούν οι τιμές των μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ που ικανοποιούν m ανισότητες (ή ισότητες):

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \{\leq, =, \geq\} b_i, i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.1}$$

και που επιπλέον μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν τη συνάρτηση:

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.2}$$

Οι συνθήκες (1.1) λέγονται **περιορισμοί**, η συνάρτηση (1.2) ονομάζεται **αντικειμενική συνάρτηση**, οι μεταβλητές x_i καλούνται **μεταβλητές απόφασης**, οι σταθερές b_i θεωρούνται γνωστές και για κάθε i ισχύει ή ανισότητα ή ισότητα. Κάθε $\underline{x} \in R^n$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ που ικανοποιεί τους περιορισμούς καλείται **εφικτή λύση** του προβλήματος και κάθε εφικτή λύση που βελτιστοποιεί (ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση f, ονομάζεται **βέλτιστη εφικτή λύση**.

Το πρόβλημα του μαθηματικού προγραμματισμού είναι κατά συνέπεια ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης. Ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων g_i των περιορισμών (1.1) ή της αντικειμενικής συνάρτησης f (1.2) το πρόβλημα του μαθηματικού προγραμματισμού μπορεί να χαρακτηρισθεί σαν ακέραιος, κυρτός, τετραγωνικός, δυναμικός, στοχαστικός, γραμμικός προγραμματισμός κ.λ.π.

Στον γραμμικό προγραμματισμό οι περιορισμοί και η αντικειμενική συνάρτηση δίδονται από:

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\leq, =, \geq\} b_i, i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.3}$$

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.4}$$

όπου οι a_{ij} και c_j είναι δοσμένες πραγματικές σταθερές και μάλιστα οι σταθερές c_j καλούνται **συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης** ή **συντελεστές κέρδους** (ή κόστους). Για λόγους ευκολίας και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να προσθέσουμε τους ακόλουθους περιορισμούς μη αρνητικότητας:

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.5}$$

Συνεπώς το γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (ΠΓΠ) έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} z = \{\max, \min\}&(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq, =, \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq, =, \geq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad &\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq, =, \geq b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Αν όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις ή ανισώσεις της ίδιας φοράς το παραπάνω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να γραφεί πιο συνοπτικά με μορφή πινάκων:

$$\begin{aligned} z = \{\max, \min\}\ &\underline{c}^T\underline{x}^T \\ A\underline{x}\ \{\leq, =, \geq\}\ &\underline{b} \\ \underline{x} \geq &\ \underline{0} \end{aligned} \tag{1.7}$$

όπου $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\underline{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$, $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$, $\underline{0} = (0, \ldots, 0)^T \in R^m$ και

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2 Παραδείγματα φυσικών προβλημάτων που εκφράζονται σαν προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού (ΠΓΠ)

Υπάρχει πληθώρα πρακτικών προβλημάτων που μπορούν να διατυπωθούν μαθηματικά σαν προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Πριν προχωρήσουμε στη θεωρητική θεμελίωση και παρουσίαση των βασικών μεθοδολογιών επίλυσης τέτοιων προβλημάτων παρουσιάζουμε μερικά παραδείγματα φυσικών προβλημάτων που μπορούν να παρασταθούν ως ΠΓΠ.

Παράδειγμα 1.1

Ένας αγρότης βρίσκει στην αγορά δύο είδη τροφής για τα ζώα του. Γνωρίζει ότι αυτά χρειάζονται τουλάχιστον 60, 84 και 72 μονάδες από τα θρεπτικά συστατικά Α, Β και Γ αντίστοιχα, κάθε ημέρα. Ο πίνακας που ακολουθεί συνοψίζει την περιεκτικότητα σε θρεπτικά συστατικά και το κόστος της κάθε τροφής.

	Θρεπτικά συστατικά (μονάδες/Kg)			
	Α	Β	Γ	Κόστος (€/Kg)
Τροφή 1	3	7	3	3
Τροφή 2	2	2	6	1.2

Ο αγρότης επιθυμεί να εκτιμήσει ποιες είναι οι καθημερινές ποσότητες από κάθε είδος τροφής που ελαχιστοποιούν το ημερήσιο κόστος τροφής ενώ συγχρόνως εξασφαλίζουν ότι τα ζώα παίρνουν τις απαιτούμενες ποσότητες θρεπτικών συστατικών. Περιγράψτε το πρόβλημα ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Λύση

Έστω x_1 η ποσότητα τροφής 1 που θα χρησιμοποιείται ανά ζώο και ανά ημέρα.

Έστω x_2 η ποσότητα τροφής 2 που θα χρησιμοποιείται ανά ζώο και ανά ημέρα.

Προφανώς $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Τα ζώα θα πάρουν $3x_1 + 2x_2$ μονάδες από το συστατικό Α, $7x_1 + 2x_2$ μονάδες από το συστατικό Β και $3x_1 + 6x_2$ μονάδες από το συστατικό Γ. Συνεπώς θα πρέπει:

$$3x_1 + 2x_2 \geq 60$$

$$7x_1 + 2x_2 \geq 84$$

$$3x_1 + 6x_2 \geq 72$$

Το κόστος δίδεται από την $z = 3x_1 + 1.2x_2$. Έτσι η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος ως ΠΓΠ είναι:

$$z = \min(3x_1 + 1.2x_2)$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 60$$

$$7x_1 + 2x_2 \geq 84$$

$$3x_1 + 6x_2 \geq 72$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Παράδειγμα 1.2

Ένα τμήμα ενός μεγάλου εργοστασίου κατασκευάζει δύο μέρη που χρειάζονται στο τελικό προϊόν του εργοστασίου. Το τμήμα διαθέτει 4 γραμμές παραγωγής που είναι δυνατό να κατασκευάζουν τα δύο μέρη χρησιμοποιώντας διαφορετικά ποσά εργασίας και δύο είδη πρώτης ύλης, την Α και την Β. Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τις εισροές-εκροές της κάθε γραμμής παραγωγής για λειτουργία μιας ώρας:

Γραμμή	ΕΙΣΡΟΗ			ΕΚΡΟΗ	
	Εργασία (Ανθρ-ώρες)	Πρώτη Ύλη Α (Kg)	Πρώτη Ύλη Β (Kg)	Μονάδες Μέρους 1	Μονάδες Μέρους 2
1	20	160	30	35	55
2	30	100	35	45	42
3	10	200	60	70	0
4	25	75	80	0	90

Το τμήμα πρέπει να κατασκευάζει 2100 μονάδες του μέρους 1 την εβδομάδα και 1800 μονάδες του μέρους 2 την εβδομάδα. Στη διάθεση του τμήματος βρίσκονται κάθε εβδομάδα 4 τόνοι της πρώτης ύλης Α, 2 τόνοι της πρώτης ύλης Β και 1000 ανθρωποώρες εργασίας. Το κόστος της Α είναι 3 €/Kg και της Β 7 €/Kg. Το κόστος του εργατικού δυναμικού είναι δοσμένο (σταθερό) ακόμη κι αν δεν χρησιμοποιηθούν οι διαθέσιμες ανθρωποώρες. Τέλος η νομοθεσία επιτρέπει επιπλέον υπερωρίες μέχρι 200 ανθρωποώρες την εβδομάδα με κόστος 8 €/Ανθρωποώρα.

α) Περιγράψτε το πρόβλημα ως ΠΓΠ αν ζητείται το ελάχιστο κόστος παραγωγής.

β) Εξετάστε πως αλλάζει το πρόβλημα η χρήση υπερωριών.

Λύση

Έστω x_j $j = 1, \ldots, 4$ ο αριθμός των ωρών εβδομαδιαίως που χρησιμοποιείται η γραμμή παραγωγής j. Οι περιορισμοί εργασίας και πρώτων υλών εκφράζονται ως εξής:

$$20x_1 + 30x_2 + 10x_3 + 25x_4 \leq 1000$$

$$160x_1 + 100x_2 + 200x_3 + 75x_4 \leq 4000$$

$$30x_1 + 35x_2 + 60x_3 + 80x_4 \leq 2000$$

Οι απαιτήσεις παραγωγής που θέτει το εργοστάσιο στο τμήμα συνοψίζονται στους περιορισμούς:

$$35x_1 + 45x_2 + 70x_3 \qquad \geq 2100$$

$$55x_1 + 42x_2 + \qquad 90x_4 \geq 1800$$

Τέλος πρέπει να ικανοποιούνται οι περιορισμοί μη αρνητικότητας $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$.

Το κόστος της παραγωγής δίδεται από:

$$\begin{aligned} z &= 3(160x_1 + 100x_2 + 200x_3 + 75x_4) + 7(30x_1 + 35x_2 + 60x_3 + 80x_4) \\ &= 690x_1 + 545x_2 + 1020x_3 + 755x_4 \end{aligned}$$

Επομένως το ΠΓΠ που περιγράφει το εν λόγω πρόβλημα παραγωγής είναι:

$$\begin{aligned} z = \min(690x_1 + 545x_2 + 1020x_3 + 755x_4)& \\ 20x_1 + 30x_2 + 10x_3 + 25x_4 &\leq 1000 \\ 160x_1 + 100x_2 + 200x_3 + 75x_4 &\leq 4000 \\ 30x_1 + 35x_2 + 60x_3 + 80x_4 &\leq 2000 \\ 35x_1 + 45x_2 + 70x_3 \qquad &\geq 2100 \\ 55x_1 + 42x_2 + \qquad 90x_4 &\geq 1800 \\ x_j \geq 0, j = 1, \ldots, 4.& \end{aligned}$$

Εξετάζουμε τώρα το ερώτημα (β). Έστω x_5 ο αριθμός των ωρών υπερωρίας που θα χρησιμοποιηθούν. Σε αυτή την περίπτωση λόγω των νομικών περιορισμών πρέπει:

$$0 \leq x_5 \leq 200$$

Η χρήση υπερωριών οδηγεί επίσης στην αλλαγή του πρώτου περιορισμού που αφορά το σύνολο των διαθέσιμων ανθρωποωρών και ο οποίος διαμορφώνεται ως εξής:

$$20x_1 + 30x_2 + 10x_3 + 25x_4 \leq 1000 + x_5$$

Τέλος αλλάζει η συνάρτηση κόστους στην οποία πρέπει να προσθέσουμε το κόστος υπερωριών που είναι ίσο με $8x_5$. Έτσι το ΠΓΠ με την προσθήκη των υπερωριών διαμορφώνεται ως ακολούθως:

$$z = \min(690x_1 + 545x_2 + 1020x_3 + 755x_4 + 8x_5)$$

$$
\begin{array}{rrrrrl}
20x_1 + & 30x_2 + & 10x_3 + & 25x_4 - & x_5 & \leq 1000 \\
160x_1 + & 100x_2 + & 200x_3 + & 75x_4 & & \leq 4000 \\
30x_1 + & 35x_2 + & 60x_3 + & 80x_4 & & \leq 2000 \\
35x_1 + & 45x_2 + & 70x_3 & & & \geq 2100 \\
55x_1 + & 42x_2 + & & 90x_4 & & \geq 1800 \\
 & & & & x_5 & \leq \ \ 200
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, 5.$$

Παράδειγμα 1.3

Μια εταιρεία παραγωγής χαρτιού που διαθέτει 2 εργοστάσια, πρέπει να προμηθεύει τυπογραφικό χαρτί σε τρία πιεστήρια κάθε εβδομάδα. Το εργοστάσιο 1παράγει 350 τόνους και το εργοστάσιο 2 550 τόνους τυπογραφικού χαρτιού την εβδομάδα. Τα πιεστήρια 1, 2 και 3 ζητούν 300 τόνους/εβδομάδα, 400 τόνους/εβδομάδα και 200 τόνους/εβδομάδα αντίστοιχα. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα κόστη μεταφοράς σε €/τόνο.

	Πιεστήριο		
Εργοστάσιο	1	2	3
1	17	22	15
2	18	16	12

Το ζητούμενο είναι ο καθορισμός των ποσοτήτων χαρτιού που θα πρέπει να σταλούν από κάθε εργοστάσιο σε κάθε πιεστήριο έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μεταφοράς.

Λύση

Έστω x_{ij} η ποσότητα χαρτιού (σε τόνους) που μεταφέρεται από το εργοστάσιο i στο πιεστήριο j. Έτσι προκύπτουν οι περιορισμοί προσφοράς:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 350$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 550$$

οι περιορισμοί ικανοποίησης της ζήτησης:

$$x_{11} + x_{21} = 300$$
$$x_{12} + x_{22} = 400$$

$$x_{13} + x_{23} = 200$$

και οι περιορισμοί μη αρνητικότητας:

$$x_{ij} \geq 0, \text{ i} = 1, 2, \text{ j} = 1, 2, 3$$

Το κόστος που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είναι:

$$z = 17x_{11} + 22x_{12} + 15x_{13} + 18x_{21} + 16x_{22} + 12x_{23}$$

Το ΠΓΠ που καταλήγουμε είναι το ακόλουθο:

$$z = \min(17x_{11} + 22x_{12} + 15x_{13} + 18x_{21} + 16x_{22} + 12x_{23})$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 350$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 550$$

$$x_{11} + x_{21} = 300$$

$$x_{12} + x_{22} = 400$$

$$x_{13} + x_{23} = 200$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ i} = 1, 2, \text{ j} = 1, 2, 3.$$

1.3 Η γραφική μέθοδος επίλυσης ΠΓΠ

Όταν σε ένα ΠΓΠ υπάρχουν δύο μεταβλητές απόφασης είναι εφικτή η γραφική επίλυση του. Αν και η πρακτική σημασία της γραφικής μεθόδου είναι πολύ μικρή, εντούτοις η εξέταση της γεωμετρικής απεικόνισης του ΠΓΠ σε δύο διαστάσεις οδηγεί σε πολύ χρήσιμες παρατηρήσεις για τα χαρακτηριστικά της βέλτιστης λύσης και μας προσφέρει μια διαισθητική εικόνα του ΠΓΠ. Θα περιγράψουμε αυτή τη μέθοδο με τη βοήθεια δυο παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 1.4

Έστω το ακόλουθο ΠΓΠ:

$$z = \max(x_1 + x_2)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

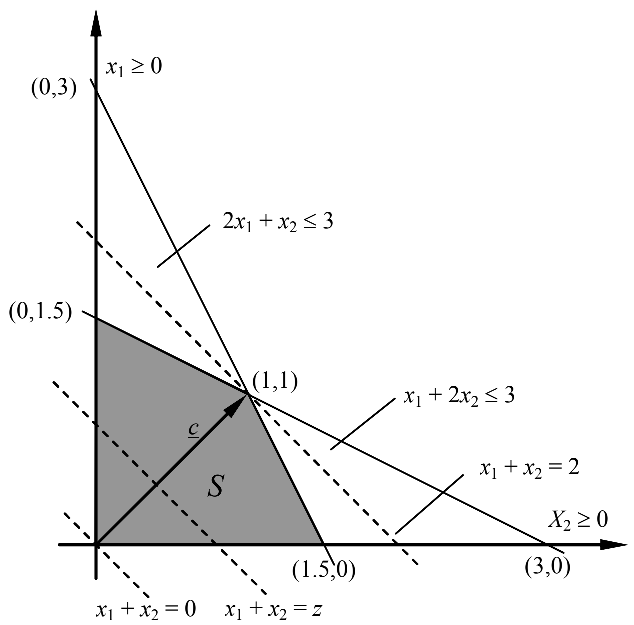
$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Λύση

Στο δυσδιάστατο χώρο κάθε μια από τις ανισώσεις ορίζει ένα ημιεπίπεδο. Η τομή όλων των ημιεπιπέδων είναι το σύνολο όλων των εφικτών λύσεων S που παρουσιάζεται ως η σκιασμένη περιοχή στο Σχήμα 1.1.

Για να υπολογίσουμε τη βέλτιστη λύση προχωράμε ως εξής. Για κάθε πραγματική σταθερά z το σύνολο των σημείων με κέρδος ίσο με z είναι μια γραμμή με εξίσωση $z = x_1 + x_2 = \underline{c}^T\underline{x}$, όπου $\underline{c}^T = (1, 1)$ και $\underline{x}^T = (x_1, x_2)$. Διαφορετικές τιμές του z μας δίδουν διαφορετικές γραμμές παράλληλες μεταξύ τους και κάθετες στο διάνυσμα $\underline{c}$. Η μετατόπιση των γραμμών αυτών προς την κατεύθυνση του διανύσματος των συντελεστών κέρδους $\underline{c}$ οδηγεί στη μεγιστοποίηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Συνεπώς για να μεγιστοποιήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση μετακινούμαστε προς την κατεύθυνση του $\underline{c}$ χωρίς όμως να εγκαταλείπουμε την περιοχή εφικτών λύσεων S, δηλαδή θα πρέπει η γραμμή που αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση να έχει σημεία τομής με την περιοχή εφικτών λύσεων. Στην περίπτωση μας βλέπουμε ότι το κέρδος μας μεγιστοποιείται όταν η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $(x_1, x_2) = (1, 1)$ της περιοχής εφικτών λύσεων. Συνεπώς αυτή είναι η βέλτιστη λύση του ΠΓΠ που εξετάζουμε.



Σχήμα 1.1 Χώρος εφικτών λύσεων Παραδείγματος 1.4.

Παράδειγμα 1.5

Έστω το ΠΓΠ όπου η περιοχή εφικτών λύσεων καθορίζεται από τους περιορισμούς:

$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

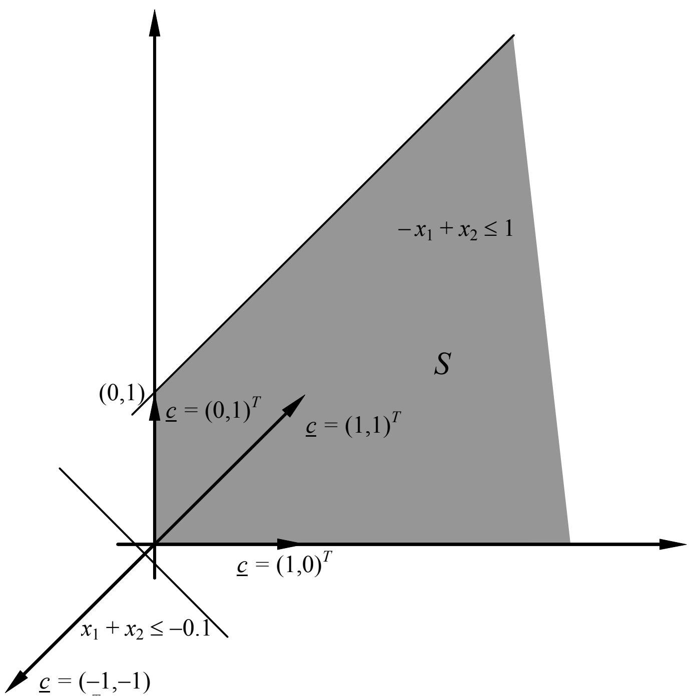
α) Να βρεθεί η βέλτιστη λύση για τις ακόλουθες τιμές του $\underline{c}^T$: (1, 1), (1, 0), (0,1) και (– 1, – 1) όταν ζητείται η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $z = \underline{c}^T\underline{x}$.

β) Ποια είναι η περιοχή εφικτών λύσεων αν προσθέσουμε τον περιορισμό $x_1 + x_2 \le -0.1$;

Λύση

(α) Η περιοχή εφικτών λύσεων φαίνεται στο Σχήμα 1.2.

Όταν το διάνυσμα των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $\underline{c} = (1, 1)^T$ τότε η βέλτιστη λύση είναι το σημείο (0, 0). Εδώ αξίζει να σημειωθεί, ότι στην περίπτωση που έχουμε ελαχιστοποίηση, όπως εδώ, η βελτιστοποίηση επιτυγχάνεται με την μετακίνηση της ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης στην αντίθετη κατεύθυνση από αυτή του διανύσματος $\underline{c}$.



Σχήμα 1.2 Χώρος εφικτών λύσεων Παραδείγματος 1.5.

Όταν το $\underline{c}^T = (1, 0)$, έχουμε άπειρες βέλτιστες λύσεις. Σε αυτή την περίπτωση κάθε διάνυσμα $\underline{x}^T = (0, x_2)$ όπου το x_2 ικανοποιεί την συνθήκη $0 \leq x_2 \leq 1$, δηλαδή κάθε σημείο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (0, 0) και (0, 1) είναι βέλτιστη λύση. Αυτό οφείλεται στο ότι η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης είναι παράλληλη στην ευθεία που αποτελεί το σύνορο του περιορισμού $x_1 \geq 0$.

Αντίστοιχα όταν $\underline{c} = (0, 1)^T$, έχουμε επίσης άπειρες βέλτιστες λύσεις. Πιο συγκεκριμένα εδώ βέλτιστη λύση είναι κάθε διάνυσμα $\underline{x} = (x_1, 0)^T$ όπου το x_1 ικανοποιεί την συνθήκη $0 \leq x_1$. Σε αυτή την περίπτωση το σύνολο των βέλτιστων λύσεων δεν είναι φραγμένο.

Όταν $\underline{c} = (-1, -1)^T$ για κάθε εφικτή λύση $\underline{x} = (x_1, x_2)^T$ μπορούμε να βρούμε μια άλλη λύση με μικρότερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, απλά αυξάνοντας την τιμή της x_1, άρα δεν υπάρχει βέλτιστη λύση. Σε αυτή την περίπτωση το βέλτιστο κόστος τείνει στο $-\infty$. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι η περιοχή εφικτών λύσεων δεν είναι φραγμένη.

(β) Αν προσθέσουμε τον περιορισμό $x_1 + x_2 \leq -0.1$ είναι προφανές ότι δεν υπάρχουν εφικτές λύσεις και το σύνολο των εφικτών λύσεων είναι $S = \emptyset$.

Από τη μελέτη των δύο παραπάνω παραδειγμάτων μπορεί κανείς να οδηγηθεί στις ακόλουθες διαισθητικές παρατηρήσεις:

Παρατήρηση 1.1:

Γενικά φαίνεται ότι υπάρχουν τα παρακάτω ενδεχόμενα σχετικά με την ύπαρξη και τη μορφή των βέλτιστων λύσεων ενός ΠΓΠ:

α) Υπάρχει μία μοναδική βέλτιστη λύση.

β) Υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις.

γ) Το βέλτιστο κόστος (ή κέρδος) είναι $-\infty$ (ή $+\infty$) και δεν υπάρχει βέλτιστη λύση.

δ) Το σύνολο των εφικτών λύσεων είναι κενό.

Παρατήρηση 1.2:

Η περιοχή εφικτών λύσεων φαίνεται ότι αν υπάρχει είναι ένα κυρτό πολύγωνο. Αν υπάρχει βέλτιστη λύση αυτή είναι μια από τις κορυφές του πολυγώνου, ή μια από τις ακμές του, οπότε έχουμε άπειρες βέλτιστες λύσεις.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι οι παραπάνω παρατηρήσεις γενικεύονται και σε προβλήματα μεγαλύτερης διάστασης.

1.4. Η κανονική μορφή του ΠΓΠ

Όπως έχουμε δει υπάρχει μια ποικιλία στον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται τα διάφορα ΠΓΠ. Για λόγους ευκολίας κυρίως στην ανάπτυξη μιας γενικής μεθοδολογίας επίλυσης τέτοιων προβλημάτων θα θέλαμε να τυποποιήσουμε κατά το δυνατόν τη μορφή παρουσίασης τους.

Ορισμός 1.1: Ένα ΠΓΠ είναι σε κανονική μορφή όταν παρουσιάζεται ως εξής

$$
\begin{aligned}
z &= \max(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\
x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Παρατήρηση 1.3.1:

Κάθε ΠΓΠ μπορεί να τεθεί σε κανονική μορφή. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής:

α) Με την εισαγωγή περιθώριων μεταβλητών οι ανισοτικοί περιορισμοί μετατρέπονται σε ισοτικούς. Γενικά περιορισμοί της μορφής $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ μπορούν να γραφούν ως $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i$ και οι περιορισμοί της μορφής $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ μπορούν να παρουσιαστούν ως $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_i$, όπου η x_{n+1} είναι μια νέα μεταβλητή που καλείται περιθώρια μεταβλητή για την οποία βέβαια ισχύει ότι $x_{n+1} \geq 0$. Με την προσθήκη των περιθωρίων μεταβλητών δεν αλλάζει ουσιαστικά η αντικειμενική συνάρτηση αφού θέτουμε $c_{n+1} = 0$.

β) Πολλαπλασιάζοντας την αντικειμενική συνάρτηση με -1 μετατρέπουμε ένα πρόβλημα από πρόβλημα ελαχιστοποίησης σε πρόβλημα μεγιστοποίησης.

γ) Στην περίπτωση που κάποια μεταβλητή x_i δεν ικανοποιεί τον περιορισμό μη αρνητικότητας, δηλαδή $x_i \leq 0$ ή $x_i \in R$, την αντικαθιστούμε. Στην πρώτη περίπτωση με μια νέα μεταβλητή x_{i1} για την οποία ισχύει ότι $x_{i1} = -x_i$ και στην δεύτερη περίπτωση με δύο νέες μη αρνητικές μεταβλητές x_{i1}, x_{i2} για τις οποίες έχουμε ότι $x_i = x_{i1} - x_{i2}$

Κεφάλαιο 2

Γεωμετρική εικόνα του ΠΓΠ

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των βασικών μεθοδολογιών επίλυσης ΠΓΠ είναι απαραίτητο να μελετήσουμε τη γεωμετρική εικόνα αυτών των προβλημάτων. Αυτή η μελέτη μας προσφέρει τις βασικές θεωρητικές αρχές πάνω στις οποίες στηριζόμαστε για να αναπτύξουμε τις μεθοδολογίες επίλυσης των προβλημάτων που εξετάζουμε εδώ.

2.1. Πολύεδρα και κυρτά σύνολα

Σε αυτή την παράγραφο εισάγουμε μερικές βασικές έννοιες που είναι απαραίτητες για τη μελέτη της γεωμετρίας των ΠΓΠ.

Ορισμός 2.1: Ονομάζουμε **πολύεδρο** το σύνολο που μπορεί να περιγραφεί στη μορφή $\{\underline{x} \in R^n \mid A\underline{x} \geq \underline{b}\}$, όπου A είναι ένας πίνακας $m \times n$ και το $\underline{b}$ είναι ένα διάνυσμα που ανήκει στο R^n.

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός ΠΓΠ μπορεί να περιγραφεί με τη μορφή $A\underline{x} \geq \underline{b}$ και συνεπώς είναι πολύεδρο.

Ορισμός 2.2: Ένα σύνολο $S \subset R^n$ είναι φραγμένο αν υπάρχει σταθερά K τέτοια ώστε η απόλυτη τιμή κάθε στοιχείου του S είναι μικρότερη ή ίση της σταθεράς K.

Ορισμός 2.3: Έστω $\underline{a}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του R^n και έστω b μια πραγματική σταθερά.

α) Το σύνολο $\{\underline{x} \in R^n \mid \underline{a}^T\underline{x} = b\}$ ονομάζεται **υπερεπίπεδο**.

β) Το σύνολο $\{\underline{x} \in R^n \mid \underline{a}^T\underline{x} \geq b\}$ ονομάζεται **ημίχωρος**.

Παρατηρείστε ότι ένα υπερεπίπεδο είναι το σύνορο του αντίστοιχου ημιχώρου. Επιπλέον το διάνυσμα $\underline{a}$ είναι κάθετο στο υπερεπίπεδο. Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι ένα πολύεδρο είναι ίσο με την τομή ενός πεπερασμένου πλήθους ημιχώρων.

Πολύ σημαντική για το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού είναι η έννοια του κυρτού συνόλου.

Ορισμός 2.4: Ένα σύνολο $S \subset R^n$ είναι **κυρτό** αν $\forall\ \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in S$ και $\forall\ \lambda \in [0, 1]$ έχουμε ότι $\lambda\underline{x}_1 + (1-\lambda)\,\underline{x}_2 \in S$.

Όταν $\lambda \in [0, 1]$ το στοιχείο $\lambda\underline{x}_1 + (1-\lambda)\,\underline{x}_2$ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα διανύσματα $\underline{x}_1$ και $\underline{x}_2$. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί σε έναν εναλλακτικό ορισμό του κυρτού συνόλου. Ένα σύνολο είναι κυρτό, όταν το ευθύγραμμο τμήμα, που ενώνει δύο οποιαδήποτε από τα στοιχεία του, περιέχεται στο σύνολο αυτό.

Ορισμός 2.5: Έστω $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_k \in R^n$ κι ακόμη $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ πραγματικές σταθερές τέτοιες ώστε $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

α) Το διάνυσμα $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i$ καλείται **κυρτός συνδυασμός** των $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_k$.

β) Η **κυρτή θήκη** των διανυσμάτων $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_k$ είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των διανυσμάτων αυτών.

Το θεώρημα που ακολουθεί παρουσιάζει μερικά σημαντικά αποτελέσματα σχετικά με την κυρτότητα.

Θεώρημα 2.1:

α) Η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο.

β) Κάθε πολύεδρο είναι κυρτό σύνολο.

γ) Ο κυρτός συνδυασμός ενός πεπερασμένου πλήθους στοιχείων ενός κυρτού συνόλου ανήκει επίσης στο κυρτό σύνολο.

δ) Η κυρτή θήκη πεπερασμένου πλήθους διανυσμάτων είναι κυρτό σύνολο.

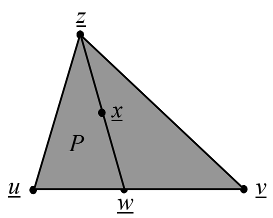
Απόδειξη

Όπως έχουμε δει ένα πολύεδρο ορίζεται ως η τομή ενός συνόλου γραμμικών περιορισμών. Το επόμενο θεώρημα, του οποίου την απόδειξη θα παραλείψουμε επειδή είναι αρκετά μακροσκελής, μας προσφέρει έναν εναλλακτικό ορισμό και τρόπο αναπαράστασης των πολυέδρων.

Θεώρημα 2.2: Ένα μη κενό και φραγμένο πολύεδρο είναι η κυρτή θήκη των ακρότατων του.

Στο Σχήμα 2.1 δίδεται ένα μικρό παράδειγμα αυτού του εναλλακτικού ορισμού. Το πολύεδρο P μπορεί να προκύψει ως το σύνολο των κυρτών συνδυασμών των κορυφών του $\underline{z}$, $\underline{u}$ και $\underline{v}$. Το τυχαίο σημείο $\underline{x}$ είναι κυρτός συνδυασμός των σημείων $\underline{z}$

και $\underline{w}$. Το $\underline{z}$ είναι ακρότατο του P ενώ το $\underline{w}$ είναι κυρτός συνδυασμός των άλλων δύο ακρότατων του P, $\underline{u}$ και $\underline{v}$.



Σχήμα 2.1.

2.2. Ακρότατα, κορυφές και βασικές εφικτές λύσεις

Στην Παράγραφο 1.3 παρατηρήσαμε ότι η βέλτιστη λύση σε ένα ΠΓΠ φαίνεται να συναντάται συνήθως σε κάποια «κορυφή» του πολυέδρου των εφικτών λύσεων. Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε την έννοια των κορυφών ενός πολυέδρου τόσο γεωμετρικά όσο κι αλγεβρικά.

Ορισμός 2.6: Έστω ένα πολύεδρο P. Ένα διάνυσμα $\underline{x} \in P$ καλείται **ακρότατο** του P αν δεν υπάρχουν δύο διανύσματα $\underline{z}_1, \underline{z}_2 \in P$ διαφορετικά του $\underline{x}$ και μια πραγματική σταθερά $\lambda \in [0, 1]$ τέτοια ώστε $\underline{x} = \lambda \underline{z}_1 + (1 - \lambda) \underline{z}_2$

Ορισμός 2.7: Έστω ένα πολύεδρο P. Ένα διάνυσμα $\underline{x} \in P$ καλείται **κορυφή** του P αν υπάρχει κάποιο $\underline{c}$ τέτοιο ώστε $\underline{c}^T\underline{x} < \underline{c}^T\underline{z}$ για κάθε $\underline{z} \in P$ και $\underline{z} \neq \underline{x}$.

Με άλλα λόγια το $\underline{x}$ είναι κορυφή του P αν και μόνο αν το P βρίσκεται στον ένα ημίχωρο, που ορίζει το υπερεπίπεδο $\underline{c}^T\underline{x} = \underline{c}^T\underline{z}$ και η τομή του P με το υπερεπίπεδο είναι το $\underline{x}$.

Οι γεωμετρικοί ορισμοί που δόθηκαν παραπάνω δεν είναι αλγοριθμικά εύχρηστοι. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε αλγεβρικά αυτές τις έννοιες πράγμα που θα μας βοηθήσει στην προσπάθεια να αναπτύξουμε αλγοριθμικά εργαλεία για την εύρεση των κορυφών ενός πολυέδρου.

Έστω ένα πολύεδρο $P \subset R^n$ το οποίο ορίζεται από τις σχέσεις

$$\underline{\alpha}_i^T\underline{x} \geq b_i,\ i = 1, \ldots, k$$

$$\underline{\alpha}_i^T\underline{x} \leq b_i,\ i = k + 1, \ldots, l$$

$$\underline{\alpha}_i^T\underline{x} = b_i,\ i = l + 1, \ldots, m$$

όπου τα $\underline{\alpha}_i$ είναι διανύσματα του R^n και τα b_i, είναι πραγματικές σταθερές

Ορισμός 2.8: Αν ένα διάνυσμα $\underline{x}'$ ικανοποιεί τις σχέσεις $\underline{\alpha}_i^T\underline{x}' = b_i$ για κάποια i, οι αντίστοιχοι περιορισμοί ονομάζονται **ενεργοί** στο $\underline{x}'$.

Αν υπάρχουν n περιορισμοί που είναι ενεργοί σε ένα διάνυσμα $\underline{x}'$, τότε το $\underline{x}'$ ικανοποιεί ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους. Το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση αν και μόνο αν αυτές οι n εξισώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θεώρημα 2.3: Έστω $\underline{x}'$ ένα στοιχείο του R^n κι έστω $I = \{i \mid \underline{\alpha}_i^T\underline{x}' = b_i\}$, όπου I το σύνολο των δεικτών των περιορισμών που είναι ενεργοί στο $\underline{x}'$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) Υπάρχουν n διανύσματα στο σύνολο $\{\underline{\alpha}_i \mid i \in I\}$, που είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

β) Τα διανύσματα $\underline{\alpha}_i$, $i \in I$, παράγουν τον R^n, δηλαδή κάθε διάνυσμα του R^n μπορεί να εκφρασθεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων αυτών.

γ) Το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων $\underline{\alpha}_i^T\underline{x} = b_i$, $i \in I$, έχει μία και μοναδική λύση.

Απόδειξη

Οι έννοιες που ακολουθούν αποτελούν τις αλγεβρικές εκφράσεις των γεωμετρικών εννοιών της κορυφής και του ακρότατου.

Ορισμός 2.9: Έστω ένα πολύεδρο P που ορίζεται από γραμμικούς ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς και $\underline{x}'$ ένα στοιχείο του R^n.

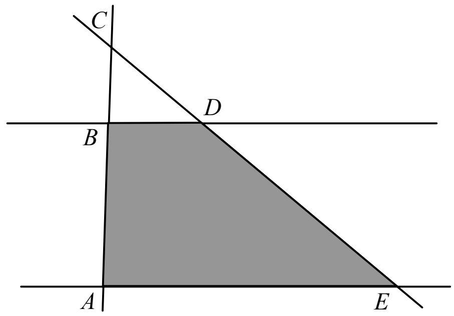
α) Το διάνυσμα $\underline{x}'$ είναι **βασική λύση** αν:

1. Όλοι οι ισοτικοί περιορισμοί είναι ενεργοί και,
2. Από τους περιορισμούς που είναι ενεργοί στο $\underline{x}'$ οι n είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.

β) Αν $\underline{x}'$ είναι μια βασική λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς, τότε καλείται **βασική εφικτή λύση**.

Εδώ όταν λέμε ότι οι περιορισμοί $i \in I$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι εννοούμε ότι τα αντίστοιχα διανύσματα $\underline{\alpha}_i$, $i \in I$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Στο Σχήμα 2.2 βλέπουμε ένα παράδειγμα του παραπάνω ορισμού. Η σκιασμένη περιοχή που περικλείεται από τα σημεία A, B, D και E είναι η περιοχή εφικτών λύσεων ενός ΠΓΠ. Τα σημεία A, B, C, D, E είναι όλα βασικές λύσεις αφού υπάρχουν τουλάχιστον δύο περιορισμοί που είναι ενεργοί για κάθε μια από αυτές. Το σημείο C όμως δεν είναι βασική εφικτή λύση αφού δεν ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς και είναι εκτός της περιοχής εφικτών λύσεων.



Σχήμα 2.2.

Το ακόλουθο θεώρημα επιβεβαιώνει ότι η βασικές εφικτές λύσεις είναι οι αλγεβρικές έκφρασεις των κορυφών και των ακρότατων ενός πολυέδρου.

Θεώρημα 2.4: Έστω ένα πολύεδρο P και $\underline{x}'$ ένα στοιχείο του. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) το $\underline{x}'$ είναι κορυφή του P,

β) το $\underline{x}'$ είναι ακρότατο του P,

γ) το $\underline{x}'$ είναι βασική εφικτή λύση του P.

Απόδειξη

Θεώρημα 2.5: Το σύνολο των βασικών εφικτών λύσεων ενός πολύεδρου είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη

2.3. Πολύεδρα σε κανονική μορφή

Οι ορισμοί των βασικών λύσεων που δόθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο αναφέρονται σε γενικά πολύεδρα. Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τις ίδιες έννοιες σε πολύεδρα που βρίσκονται στην κανονική μορφή (όλοι οι περιορισμοί είναι ισοτικοί εκτός από τους περιορισμούς μη αρνητικότητας). Όπως έχουμε δει όλα τα ΠΓΠ και συνεπώς κι όλα τα πολύεδρα μπορούν να μετασχηματιστούν στην κανονική μορφή. Η χρήση της κανονικής μορφής είναι απαραίτητη για την ανάπτυξη ενός αλγορίθμου επίλυσης ΠΓΠ.

Έστω $P = \{\underline{x} \in R^n \mid A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq \underline{0}\}$ ένα πολύεδρο σε κανονική μορφή, κι ακόμη έστω $m \times n$ οι διαστάσεις του πίνακα A, όπου m είναι το πλήθος των ισοτικών περιορισμών. Από εδώ και πέρα θα κάνουμε την υπόθεση ότι οι m περιορισμοί είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. Αυτό συνεπάγεται ότι $m \leq n$ μιας και οι γραμμές του A ανήκουν στον R^n. Στη συνέχεια θα δούμε ότι όταν το $P \neq \varnothing$ οι γραμμικά εξαρτημένοι περιορισμοί είναι πλεοναστικοί και μπορούν να παραληφθούν.

2.3.1 Η υπόθεση πλήρους βαθμού του πίνακα *A*

Ορισμός 2.10: Το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών ενός πίνακα A λέγεται βαθμός του A και συμβολίζεται $r(A)$. Όταν ο βαθμός ενός πίνακα A, $r(A) = \min\{m, n\}$, λέμε ότι ο A είναι πλήρους βαθμού

Θεώρημα 2.6: Έστω $P = \{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$ ένα μη κενό πολύεδρο, όπου A ένας πίνακας διαστάσεων $m \times n$, με γραμμές $\underline{a}_1^T, ..., \underline{a}_m^T$. Υποθέτουμε ότι $r(A) = k < m$ και ότι οι γραμμές $\underline{a}_{i_1}^T, \ldots, \underline{a}_{i_{k1}}^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Θεωρούμε ακόμη το πολύεδρο

$$Q = \{\underline{x} \mid \underline{a}_{i_1}^T \underline{x} = b_{i_1}, \ldots, \underline{a}_{i_k}^T \underline{x} = b_{i_k}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$$

Τότε έχουμε $P = Q$.

Απόδειξη

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι έχουμε υποθέσει πως το πλήθος των περιορισμών m είναι μικρότερο ή ίσο από το πλήθος των μεταβλητών n ($m \leq n$). Αν $n \leq m$ τότε προφανώς $r(A) = k \leq n \leq m$, $m - k$ περιορισμοί είναι πλεοναστικοί και το πρόβλημα ανάγεται στην προηγούμενη περίπτωση. Αν $r(A) = n = m$, τότε υπάρχει μια μοναδική λύση του προβλήματος.

2.3.2 Ανάπτυξη αλγορίθμου εύρεσης βασικών λύσεων

Παρατηρούμε ότι σε κάθε βασική λύση πρέπει να υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητοι ενεργοί περιορισμοί. Επιπλέον κάθε βασική λύση πρέπει να ικανοποιεί όλους τους ισοτικούς περιορισμούς $A\underline{x} = \underline{b}$, από τους οποίους παίρνουμε m ενεργούς περιορισμούς, που είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητοι λόγω της υπόθεσης ότι ο πίνακας A είναι πλήρους βαθμού. Για να βρεθούν οι υπόλοιποι $n - m$ περιορισμοί, θέτουμε $n - m$ από τις μεταβλητές x_i ίσες με το μηδέν οπότε γίνονται ενεργοί οι αντίστοιχοι περιορισμοί μη αρνητικότητας $x_i \geq 0$. Η επιλογή αυτών των $n - m$ μεταβλητών που θα πρέπει να τεθούν ίσες με το μηδέν δεν είναι αυθαίρετη όπως φαίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.7: Έστω οι περιορισμοί $A\underline{x} = \underline{b}$ και $\underline{x} \geq \underline{0}$ και ας υποθέσουμε ότι ο διαστάσεων $m \times n$ πίνακας A αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές (δηλαδή $r(A) = m$). Ένα διάνυσμα $\underline{x} \in R^n$ είναι βασική λύση αν και μόνο $A\underline{x} = \underline{b}$ και:

α) Υπάρχουν m στήλες $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(m)}$ του πίνακα A που είναι γραμμικά ανεξάρτητες,

β) αν $i \neq B(1), \ldots, B(m)$, τότε $x_i = 0$.

Απόδειξη

Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορούμε να διατυπώσουμε έναν αλγόριθμο για την εύρεση βασικών λύσεων:

Αλγόριθμος εύρεσης βασικών λύσεων

1. Επιλέγουμε m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(m)}$ του πίνακα A.
2. Θέτουμε $x_i = 0$ για κάθε $i \neq B(1), \ldots, B(m)$.
3. Λύνουμε το σύστημα m εξισώσεων $\sum_{i=1}^{m} \underline{A}_{B(i)} x_{B(i)} = \underline{b}$ για τους αγνώστους $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$.

Αν μια βασική λύση $\underline{x}$ είναι και μη αρνητική, δηλαδή $\underline{x} \geq \underline{0}$, τότε είναι βασική εφικτή λύση. Αν $\underline{x}$ είναι βασική λύση τότε οι $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$, καλούνται βασικές μεταβλητές, ενώ οι υπόλοιπες λέγονται μη βασικές. Οι στήλες $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ καλούνται βασικές στήλες και αποτελούν βάση του R^m. Αναδιατάσσοντας τις βασικές στήλες έτσι ώστε να όλες μαζί, σχηματίζεται ένας $m \times m$ πίνακας B που καλείται βασικός πίνακας ή βάση επειδή οι στήλες του είναι βάση του R^m. Το διάνυσμα $\underline{x}_B = [x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}]^T$, περιέχει τις βασικές μεταβλητές οι οποίες καθορίζονται από την επίλυση της εξίσωσης $B\underline{x}_B = \underline{b}$ της οποίας η μοναδική λύση δίδεται από

$$\underline{x}_B = B^{-1}\,\underline{b}$$

Παράδειγμα 2.1

Έστω το πολύεδρο που προκύπτει από τους περιορισμούς σε κανονική μορφή $A\underline{x} = \underline{b}$ και $\underline{x} \geq \underline{0}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } \underline{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

α) Βρείτε δυο διαφορετικές βασικές λύσεις.

β) Τι θα γινόταν αν προσθέταμε μια ακόμη στήλη στον πίνακα A ίση με την έβδομη στήλη;

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι τέσσερις τελευταίες στήλες του A, $\underline{A}_4$, $\underline{A}_5$, $\underline{A}_6$ και $\underline{A}_7$ σχηματίζουν τον μοναδιαίο πίνακα 4×4 και προφανώς είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επιλέγουμε αυτές ως βασικές και επιλύοντας το αντίστοιχο σύστημα οδηγούμαστε στη βασική λύση $\underline{x}_1^T = [0, 0, 0, 8, 12, 4, 6]$ η οποία είναι και μη μηδενική άρα είναι και βασική εφικτή λύση. Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι επειδή ο βασικός πίνακας είναι ο μοναδιαίος το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών $\underline{x}_B$ είναι ίσο με το $\underline{b}$. Μια άλλη βάση προκύπτει να πάρουμε τις στήλες $\underline{A}_3$, $\underline{A}_5$, $\underline{A}_6$ και $\underline{A}_7$ που είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητες. Η αντίστοιχη βασική λύση είναι η $\underline{x}_1^T = [0, 0, 4, 0, -12, 4, 6]$, που δεν είναι εφικτή αφού $x_5 = -12 < 0$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και μια όγδοη στήλη στον πίνακα A, η $\underline{A}_8$ τέτοια ώστε $\underline{A}_8 = \underline{A}_7$. Σε αυτή την περίπτωση οι βάσεις $B_2 = [\underline{A}_3, \underline{A}_5, \underline{A}_6, \underline{A}_7]$ και $B_3 = [\underline{A}_3, \underline{A}_5, \underline{A}_6, \underline{A}_8]$ ενώ είναι ίσες αντιστοιχούν σε διαφορετικές βασικές στήλες και μας δίνουν διαφορετικές βασικές λύσεις.

Διαφορετικές βασικές λύσεις πρέπει να αντιστοιχούν σε διαφορετικές βάσεις, διότι μια βάση ορίζει με μοναδικό τρόπο μια βασική λύση. Παρόλα αυτά δύο διαφορετικές βάσεις μπορεί να οδηγήσουν στην ίδια βασική λύση. Το φαινόμενο αυτό έχει σημαντικές αλγοριθμικές συνέπειες και θα μελετηθεί στην επόμενη παράγραφο.

Όπως έχουμε δει, δυο διαφορετικές βασικές λύσεις λέμε ότι είναι γειτονικές, όταν υπάρχουν $n - 1$ γραμμικά ανεξάρτητοι περιορισμοί, που είναι ενεργοί και στις δύο.

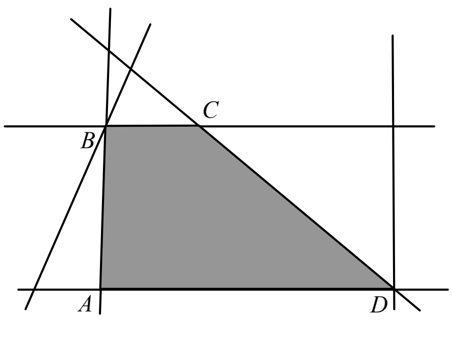
Σε προβλήματα στην κανονική τους μορφή δύο βασικές λύσεις είναι γειτονικές όταν έχουν τις ίδιες βασικές στήλες εκτός από μία.

2.4. Εκφυλισμένες βασικές λύσεις

Σύμφωνα με τον ορισμό σε μια βασική λύση πρέπει να υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητοι ενεργοί περιορισμοί. Στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότεροι από n ενεργοί περιορισμοί λέμε ότι έχουμε μια εκφυλισμένη βασική λύση.

Ορισμός 2.11: Μια βασική λύση $\underline{x} \in R^n$ καλείται **εκφυλισμένη** όταν περισσότεροι από n περιορισμοί είναι ενεργοί στο $\underline{x}$.

Στις δύο διαστάσεις μια εκφυλισμένη βασική λύση συναντάται στην τομή τριών ή περισσότερων γραμμών, ενώ στις τρεις διαστάσεις έχουμε μια εκφυλισμένη λύση όταν τέμνονται τέσσερα διαφορετικά επίπεδα. Στο Σχήμα 2.3 βλέπουμε ένα γεωμετρικό παράδειγμα εκφυλισμένων βασικών λύσεων. Τα σημεία A και C είναι βασικές εφικτές λύσεις ενώ τα σημεία B και D είναι εκφυλισμένες βασικές εφικτές λύσεις.



Σχήμα 2.3.

Παράδειγμα 2.2

Έστω το πολύεδρο που ορίζεται από τους περιορισμούς

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$$

$$x_2 + 6x_3 \leq 12$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Να βρεθεί μια μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση του προβλήματος και μια εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση, αν υπάρχει τέτοια.

Λύση

Το διάνυσμα $\underline{x}_1^T = [2, 6, 0]$ είναι μια μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση επειδή υπάρχουν ακριβώς τρεις ενεργοί γραμμικά ανεξάρτητοι στο σημείο αυτό, ο πρώτος ο τέταρτος και ο περιορισμός μη αρνητικότητας $x_3 \geq 0$. Η λύση $\underline{x}_2^T = [4, 0, 2]$ είναι εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση αφού τέσσερις περιορισμοί είναι ενεργοί στο σημείο αυτό, από τους οποίους οι τρεις είναι γραμμικά εξαρτημένοι. Πιο συγκεκριμένα είναι ενεργοί οι τρεις πρώτοι περιορισμοί και ο περιορισμός μη αρνητικότητας $x_2 \geq 0$.

2.4.1 Εκφυλισμένες βασικές λύσεις σε προβλήματα εκφρασμένα σε κανονική μορφή

Σε μια βασική εφικτή λύση ενός πολυέδρου που βρίσκεται σε κανονική μορφή οι m ισοτικοί περιορισμοί είναι πάντα ενεργοί. Συνεπώς για να υπάρχουν περισσότεροι από n ενεργοί περιορισμοί θα πρέπει να υπάρχουν περισσότερες από $n-m$ μεταβλητές ίσες με το μηδέν. Έτσι οδηγούμαστε στον επόμενο ορισμό, που είναι ειδική περίπτωση του προηγούμενου ορισμού.

Ορισμός 2.12: Έστω ένα πολύεδρο σε κανονική μορφή $P = \{\underline{x} \in R^n \,|\, A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq \underline{0}\}$ κι έστω ακόμη μια βασική λύση $\underline{x}'$. Αν το πλήθος των γραμμών του A είναι m, το διάνυσμα $\underline{x}'$ είναι **εκφυλισμένη** βασική λύση αν περισσότερες από $n-m$ μεταβλητές του $\underline{x}'$ είναι μηδέν.

Παράδειγμα 2.3

Έστω το πολύεδρο του προηγούμενου παραδείγματος (2.4). Εισάγοντας τις περιθώριες μεταβλητές x_4, x_5, x_6, x_7, μετασχηματίζουμε το πολύεδρο στην κανονική μορφή $P = \{\underline{x}^T = [x_1, \ldots, x_7] \,|\, A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq \underline{0}\}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } \underline{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί μια εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση του προβλήματος, αν υπάρχει τέτοια.

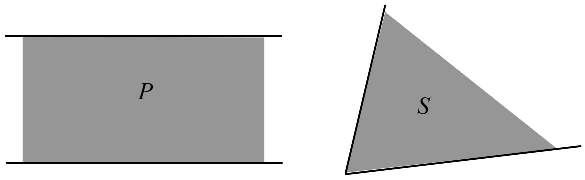
Λύση

Θεωρούμε τη βάση B_1 που αποτελείται από τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$, $\underline{A}_3$ και $\underline{A}_7$ του πίνακα A. Για την εκτίμηση της αντίστοιχης βασικής λύσης μηδενίζουμε τις μη βασικές μεταβλητές x_4, x_5 και x_6 και στη συνέχεια επιλύουμε το σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$, για την εκτίμηση των υπολοίπων μεταβλητών. Η λύση που καταλήγουμε είναι η $\underline{x}_1^T = [4, 0, 2, 0, 0, 0, 6]$. Η λύση αυτή είναι μια εκφυλισμένη βασική λύση διότι έχουμε συνολικά τέσσερις μηδενικές μεταβλητές ενώ $n - m = 7 - 4 = 3$. Η λύση του συστήματος ικανοποιεί έναν ακόμη περιορισμό, τον περιορισμό $x_2 \geq 0$, ισοτικά.

Σε μια μη εκφυλισμένη βασική λύση ακριβώς $n - m$ περιορισμοί μη αρνητικότητας είναι ενεργοί και οι αντίστοιχες μεταβλητές είναι μη βασικές. Όταν έχουμε μια εκφυλισμένη βασική λύση, περισσότεροι από $n - m$ περιορισμοί μη αρνητικότητας είναι ενεργοί και υπάρχουν πολλοί δυνατοί συνδυασμοί επιλογής των $n - m$ μη βασικών μεταβλητών. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν πολλές διαφορετικές βάσεις που αντιστοιχούν στην ίδια βασική λύση.

2.5. Ύπαρξη ακρότατων και η σχέση τους με τις βέλτιστες λύσεις

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένα πολύεδρο να έχει ακρότατα κι επίσης τη σχέση που έχουν αυτά με τις βέλτιστες λύσεις των ΠΓΠ. Αρχικά πρέπει να παρατηρήσουμε ότι δεν έχουν όλα τα πολύεδρα ακρότατα. Για παράδειγμα ένας ημίχωρος στον R^n όπου $n > 1$ είναι ένα πολύεδρο χωρίς ακρότατα. Αποδεικνύεται όπως θα δούμε στη συνέχεια ότι η ύπαρξη ακρότατων εξαρτάται από το αν ένα πολύεδρο περιέχει ευθείες γραμμές ή όχι. Ένα πολύ καθαρό παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 2.4. Το πολύεδρο P περιέχει τουλάχιστον μια (στην πραγματικότητα περιέχει άπειρες ευθείες γραμμές) και δεν διαθέτει ακρότατα, ενώ το πολύεδρο S δεν περιέχει ευθείες γραμμές αλλά διαθέτει ένα ακρότατο.



Σχήμα 2.4.

Ορισμός 2.12: Ένα πολύεδρο $P \subset R^n$ λέμε ότι **περιέχει μια ευθεία γραμμή** αν υπάρχει ένα διάνυσμα $\underline{x} \in P$ και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\underline{d} \in R^n$ τέτοιο ώστε $\underline{x} + \lambda\underline{d} \in P$ για κάθε πραγματικό λ.

Αποδεικνύεται ότι ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.8: Έστω ότι το πολύεδρο $P = \{\underline{x} \in R^n \,|\, \underline{a}_i^T\underline{x} \geq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ είναι μη κενό. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) Το πολύεδρο P έχει τουλάχιστον ένα ακρότατο.

β) Το πολύεδρο P δεν περιέχει ευθείες γραμμές.

γ) Υπάρχουν n διανύσματα από τα $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$, που είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη

Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα φραγμένο πολύεδρο δεν περιέχει ευθεία γραμμή. Όμοια το υποσύνολο $S = \{\underline{x} \,|\, \underline{x} \geq 0\}$ του R^n δεν περιέχει ευθεία γραμμή. Αφού ένα πολύεδρο σε κανονική μορφή περιέχεται από το S δεν περιέχει ούτε αυτό ευθεία γραμμή. Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2.1: Κάθε μη κενό φραγμένο πολύεδρο και κάθε μη κενό πολύεδρο σε κανονική μορφή έχει τουλάχιστον μια βασική εφικτή λύση.

Στη συνέχεια θα επιβεβαιώσουμε την διαισθητική παρατήρηση που κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι κάποια (ή κάποιες) από τις κορυφές του πολυέδρου (εφόσον υπάρχουν) της περιοχής εφικτών λύσεων ενός ΠΓΠ είναι βέλτιστη λύση.

Θεώρημα 2.9: Θεωρούμε ένα ΠΓΠ όπου ζητείται η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $\underline{c}^T\underline{x}$ στο πολύεδρο P. Υποθέτουμε ότι το P έχει τουλάχιστον μια κορυφή (ακρότατο) κι ότι υπάρχει βέλτιστη λύση. Τότε υπάρχει βέλτιστη λύση που είναι κορυφή του P.

Απόδειξη

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ακόμη πιο ισχυρό αφού μας δείχνει ότι υπάρχει βέλτιστη λύση αρκεί η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτηση να είναι φραγμένη.

Θεώρημα 2.10: Θεωρούμε ένα ΠΓΠ όπου ζητείται η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $\underline{c}^T\underline{x}$ στο πολύεδρο P. Υποθέτουμε ότι το P έχει τουλάχιστον μια κορυφή. Τότε είτε η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $+\infty$, είτε υπάρχει μια κορυφή που είναι βέλτιστη λύση.

Απόδειξη

Όπως είδαμε υπάρχουν προβλήματα στα οποία ο χώρος των εφικτών λύσεων είναι ένα πολύεδρο χωρίς ακρότατα. Σε αυτή την περίπτωση η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης απειρίζεται. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στο επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 2.2: Θεωρούμε ένα ΠΓΠ όπου ζητείται η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $\underline{c}^T\underline{x}$ στο μη κενό πολύεδρο P. Τότε είτε η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $+\infty$ είτε υπάρχει τουλάχιστον μία βέλτιστη λύση.

Μάλιστα θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι όταν το πολύεδρο των εφικτών λύσεων είναι φραγμένο και μη κενό υπάρχει πάντα μια τουλάχιστον βέλτιστη λύση.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα που παρουσιάζει πως μπορούμε να βρούμε της βέλτιστη λύση ενός ΠΓΠ αξιοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα.

Παράδειγμα 2.4

Να λυθεί το παρακάτω ΠΓΠ

$$z = \max(3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4)$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 11 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι περιορισμοί είναι γραμμικά εξαρτημένοι. Αν πολλαπλασιάσουμε επί δύο τον πρώτο και τον προσθέσουμε στον δεύτερο παίρνουμε τον τρίτο. Άρα ένας από τους τρεις περιορισμούς είναι περιττός. Αφού οι δύο πρώτοι είναι γραμμικά ανεξάρτητοι τους κρατάμε και διαγράφουμε τον τρίτο. Έτσι έχουμε το ισοδύναμο πρόβλημα

$$z = \max(3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4)$$

$$x_1 - x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 = 5$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

που είναι πρόβλημα βαθμού $r = 2$.

Αρχικά εξετάζουμε αν η περιοχή εφικτών λύσεων είναι φραγμένη, που είναι ικανή συνθήκη για να έχει το πρόβλημα βέλτιστη λύση. Από τον δεύτερο περιορισμό και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας έχουμε ότι

$$0 \leq x_1 \leq 1/2,\ 0 \leq x_2 \leq 1,\ 0 \leq x_3 \leq 1/2.$$

Ακόμη προσθέτοντας κατά μέλη τους περιορισμούς και χρησιμοποιώντας τους περιορισμούς μη αρνητικότητας, προκύπτει ότι

$$0 \leq x_4 \leq 6.$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι η περιοχή εφικτών λύσεων στο πρόβλημα μας είναι φραγμένη. Αυτό σημαίνει ότι για να λύσουμε το πρόβλημα αρκεί να βρούμε τις κορυφές της περιοχής εφικτών λύσεων. Αφού ο βαθμός του πίνακα A είναι $r = 2$ παίρνουμε τις στήλες του πίνακα A ανά δύο. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα επειδή έχουμε τέσσερις μεταβλητές και δύο περιορισμούς θα υπάρχουν το πολύ $4!/2!2! = 6$ κορυφές.

α) Οι στήλες $\underline{A}_1$ και $\underline{A}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε βρίσκουμε τη λύση του συστήματος

$$\underline{A}_1 x_1 + \underline{A}_2 x_2 = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

το οποίο έχει λύση $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. Βλέπουμε ότι αυτή η λύση είναι βασική αλλά όχι εφικτή αφού δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς μη αρνητικότητας, άρα δε μπορεί να είναι κορυφή της περιοχής εφικτών λύσεων.

β) Οι στήλες $\underline{A}_1$ και $\underline{A}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένες.

γ) Οι στήλες $\underline{A}_1$ και $\underline{A}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε λύνουμε το ακόλουθο σύστημα

$$\underline{A}_1x_1 + \underline{A}_4x_4 = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

κι έχουμε ότι $x_1 = 1/2$ και $x_4 = 9/2$, που γίνεται δεκτή άρα η $\underline{x}^T{}_1 = [1/2, 0, 0, 9/2]$ είναι μια κορυφή της περιοχής εφικτών λύσεων.

δ) Οι στήλες $\underline{A}_2$ και $\underline{A}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε έχουμε

$$\underline{A}_2x_2 + \underline{A}_3x_3 = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $x_2 = -3$ και $x_3 = 2$, που δεν είναι εφικτή λύση.

ε) Οι στήλες $\underline{A}_2$ και $\underline{A}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε από το σύστημα

$$\underline{A}_2x_2 + \underline{A}_4x_4 = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι $x_2 = 1$ και $x_4 = 6$, που γίνεται δεκτή άρα η $\underline{x}^T{}_2 = [0, 1, 0, 6]$ είναι μια κορυφή της περιοχής εφικτών λύσεων.

στ) Τέλος αφού οι στήλες $\underline{A}_3$ και $\underline{A}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, από το σύστημα

$$\underline{A}_3x_3 + \underline{A}_4x_4 = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι $x_3 = 1/2$ και $x_4 = 9/2$, που είναι αποδεκτή άρα η $\underline{x}^T{}_3 = [0, 0, 1/2, 9/2]$ είναι μια κορυφή της περιοχής εφικτών λύσεων.

Άρα υπάρχουν τρεις βασικές εφικτές λύσεις στη περιοχή εφικτών λύσεων. Η βέλτιστη λύση θα πρέπει να αναζητηθεί μεταξύ αυτών. Οι αντίστοιχες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι

$$z_1 = \underline{c}^T\underline{x}_1 = 6,\ z_2 = \underline{c}^T\underline{x}_2 = 11,\ z_3 = \underline{c}^T\underline{x}_3 = 3.5.$$

Συνεπώς η βέλτιστη λύση είναι η $\underline{x}^T{}_2 = [0, 1, 0, 6]$ αφού αυτή μεγιστοποιεί την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Κεφάλαιο 3

Η μέθοδος Simplex για την επίλυση του ΠΓΠ

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αν ένα ΠΓΠ έχει βέλτιστη λύση, τότε υπάρχει κάποια βασική εφικτή λύση, που είναι βέλτιστη. Ο αλγόριθμος της Simplex στηρίζεται σε αυτό το γεγονός. Η Simplex ψάχνει για τη βέλτιστη λύση μεταπηδώντας από βασική εφικτή λύση σε βασική εφικτή λύση της περιοχής εφικτών λύσεων, έτσι ώστε σε κάθε βήμα να βελτιώνεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Όταν καταλήξει σε κορυφή (βασική εφικτή λύση), από την οποία δεν μπορεί να μεταβεί σε κάποια γειτονική κορυφή με καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης τερματίζει, καθώς αυτή είναι η βέλτιστη λύση. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε αναλυτικά τον αλγόριθμο της Simplex. Σε όλο το κεφάλαιο θεωρούμε ότι τα ΠΓΠ που μελετάμε βρίσκονται σε κανονική μορφή δηλαδή

$$z = \max(\underline{c}^T \underline{x})$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

όπου με P συμβολίζουμε το σύνολο των εφικτών λύσεων, ο πίνακας A είναι ένας πίνακας $m \times n$ και θεωρούμε ότι είναι πλήρους βαθμού δηλαδή $r(A) = m$.

3.1. Συνθήκες βελτιστότητας

Συνήθως οι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης έχουν την ακόλουθη δομή. Ξεκινώντας από μια εφικτή λύση αναζητούν στη «γειτονιά» τους μια εφικτή λύση με καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Αν δεν υπάρχει γειτονικό σημείο, που να βελτιώνει την αντικειμενική συνάρτηση, είμαστε σε τοπικό βέλτιστο. Στην περίπτωση του γραμμικού προγραμματισμού τα τοπικά βέλτιστα είναι και ολικά λόγω της κυρτότητας της αντικειμενικής συνάρτησης και του συνόλου εφικτών λύσεων. Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της αναζήτησης βελτιωμένων γειτονικών λύσεων και των συνθηκών βελτιστότητας, εκείνων δηλαδή των συνθηκών που μας εξασφαλίζουν ότι η λύση που έχουμε βρει είναι βέλτιστη.

Υποθέτουμε ότι είμαστε αρχικά σε ένα σημείο $\underline{x} \in P$ κι ότι σχεδιάζουμε να μετακινηθούμε μακριά από το $\underline{x}$ προς την κατεύθυνση ενός διανύσματος $\underline{d} \in R^n$. Προφανώς θα πρέπει να εξετάσουμε τα διανύσματα εκείνα που δε μας μεταφέρουν άμεσα εκτός της περιοχής εφικτών λύσεων, έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.1: Έστω ένα σημείο $\underline{x}$ του πολυέδρου P. Ένα διάνυσμα $\underline{d} \in R^n$ λέμε ότι ορίζει μια **εφικτή κατεύθυνση** στο $\underline{x}$, αν υπάρχει θετικός πραγματικός θ τέτοιος ώστε $\underline{x} + \theta\underline{d} \in P$.

Έστω $\underline{x}$ μια βασική εφικτή λύση ενός ΠΓΠ σε κανονική μορφή. Αν $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$, είναι οι βασικές μεταβλητές, ο πίνακας $B = [\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(m)}]$ είναι ο αντίστοιχος βασικός πίνακας. Προφανώς $x_i = 0$ για κάθε μη βασική μεταβλητή, ενώ το διάνυσμα τιμών των βασικών μεταβλητών δίδεται, όπως έχουμε δει, από

$$\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$$

Μελετάμε τη δυνατότητα μετακίνησης από το σημείο $\underline{x}$, σε ένα νέο διάνυσμα $\underline{x} + \theta\underline{d}$, επιλέγοντας μια μη βασική μεταβλητή x_j και μεταβάλλοντας την τιμή της από μηδέν σε μια θετική τιμή θ. Οι υπόλοιπες μη βασικές μεταβλητές παραμένουν ίσες με το μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι οι αντίστοιχες μεταβλητές του διανύσματος $\underline{d}$ παίρνουν τις τιμές $dj = 1$ και $d_{\underline{i}} = 0$ για όλες τις μη βασικές μεταβλητές x_i εκτός της x_j. Το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών γίνεται $\underline{x}_B + \theta\underline{d}_B$, όπου $\underline{d}_B^T = [d_{B(1)}, \ldots, d_{B(m)}]$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών του $\underline{d}$ που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές.

Αφού μας ενδιαφέρουν μόνο οι εφικτές λύσεις απαιτούμε $A(\underline{x} + \theta\underline{d}) = \underline{b}$ και δεδομένου ότι η $\underline{x}$ είναι εφικτή λύση έχουμε ότι $A\underline{x} = \underline{b}$. Για να ικανοποιούνται οι περιορισμοί δεδομένου ότι $\theta > 0$, θα πρέπει να ισχύει ότι $A\underline{d} = \underline{0}$. Αφού $dj = 1$ και $d_i = 0$ για όλες τις άλλες μη βασικές μεταβλητές x_i, έχουμε

$$\underline{0} = A\underline{d} = \sum_{i=1}^{n} \underline{A}_i d_i = \sum_{i=1}^{m} \underline{A}_{B(i)} d_{B(i)} + \underline{A}_j = B d_B + \underline{A}_j$$

Ο πίνακας B αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητες στήλες άρα είναι αντιστρέψιμος κι έτσι από την προηγούμενη εξίσωση παίρνουμε

$$\underline{d}_B = -B^{-1}\underline{A}_j \tag{3.1}$$

Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζουμε ότι η νέα λύση ικανοποιεί τους περιορισμούς $A\underline{x} = \underline{b}$. Τι γίνεται όμως με τους περιορισμούς μη αρνητικότητας; Στη νέα λύση οι μη βασικές μεταβλητές x_i εκτός της x_j παραμένουν μηδέν, ενώ η x_j γίνεται θετική, άρα θα πρέπει να εξετάσουμε τι γίνεται με τις τιμές των βασικών μεταβλητών. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

α) Υποθέτουμε ότι η $\underline{x}$ είναι μια μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση. Σε αυτή την περίπτωση $\underline{x_B} > \underline{0}$ και τελικά έχουμε ότι $\underline{x_B} + \theta\,\underline{d_B} \geq \underline{0}$ για αρκετά μικρές τιμές του θ, δηλαδή το $\underline{d}$ ορίζει μια εφικτή κατεύθυνση.

β) Αν όμως η βασική εφικτή λύση από την οποία ξεκινάμε είναι εκφυλισμένη τότε το $\underline{d}$ δεν ορίζει πάντα μια εφικτή κατεύθυνση. Είναι δυνατό μια βασική μεταβλητή $x_{B(i)}$ να είναι μηδέν, ενώ η αντίστοιχη μεταβλητή $d_{B(i)}$ του $\underline{d_B} = -B^{-1}\underline{A_j}$ να είναι αρνητική. Σε αυτή την περίπτωση ο περιορισμός μη αρνητικότητας παραβιάζεται για οποιαδήποτε θετική τιμή του θ.

Έστω ότι το $\underline{d}$ ορίζει μια εφικτή κατεύθυνση. Αν το $\underline{d}$ μας οδηγεί στην j-οστή κατεύθυνση, δηλαδή μεταβάλει την τιμή της μεταβλητής x_j που ήταν αρχικά μηδενική, τότε ο ρυθμός μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης $\underline{c}^T\underline{d}$ θα είναι ίσος με $\underline{c_B}^T\underline{d_B} + c_j$, όπου $\underline{c_B}^T = [c_{B(1)}, \ldots, c_{B(m)}]$ είναι το διάνυσμα των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης, που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές. Χρησιμοποιώντας την (3.1) έχουμε ότι $\underline{c}^T\underline{d} = c_j - \underline{c_B}^T B^{-1}\underline{A_j}$. Η ποσότητα αυτή είναι αρκετά σημαντική. Η παράμετρος c_j εκφράζει τη μοναδιαία μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης αν αυξηθεί η μεταβλητή x_j, ενώ ο όρος $-\underline{c_B}^T B^{-1}\underline{A_j}$ εκφράζει τη μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης που προκαλείται από την αλλαγή των τιμών των βασικών μεταβλητών και αντισταθμίζει την μεταβολή λόγω της x_j.

Ορισμός 3.2: Αν $\underline{x}$ μια βασική εφικτή λύση του πολυέδρου P, B ο αντίστοιχος βασικός πίνακας και $\underline{c_B}$ το διάνυσμα των συντελεστών αντικειμενικής συνάρτησης των βασικών μεταβλητών, τότε για κάθε j ορίζουμε ως **μοναδιαία αύξηση του κέρδους** $\bar{c}_j$ της x_j την ποσότητα

$$\bar{c}_j = c_j - \underline{c_B}^T B^{-1}\underline{A_j}.$$

Παράδειγμα 3.1

Έστω το ακόλουθο ΠΓΠ

$$z = \max(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

$$2x_1 + \qquad 3x_3 + 4x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

α) Βρείτε μια βασική εφικτή λύση.

β) Υπολογίστε το διάνυσμα βασικής κατεύθυνσης κατά τη διεύθυνση μιας από τις μη βασικές μεταβλητές και την αντίστοιχη μοναδιαία αύξηση κέρδους.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτες στήλες του A, $\underline{A}_1^T = [1, 2]$ και $\underline{A}_2^T = [1, 0]$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες οπότε μπορούμε να επιλέξουμε τις x_1, x_2 ως βασικές μεταβλητές. Ο αντίστοιχος βασικός πίνακας είναι ο

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Θέτουμε τις $x_3 = x_4 = 0$, κι επιλύοντας ως προς x_1, x_2 προκύπτει ότι $x_1 = 1$ και $x_2 = 1$. Το διάνυσμα βασικής κατεύθυνσης, που αντιστοιχεί στη μεταβολή της μη βασικής μεταβλητής x_3 υπολογίζεται ως ακολούθως. Όπως έχουμε δει θα πρέπει $d_3 = 1$ και $d_4 = 0$. Η κατεύθυνση μεταβολής των βασικών μεταβλητών εκτιμάται με τη χρήση της Εξίσωσης (3.1)

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = d_B = -B^{-1}\underline{A}_3 = -\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Η μοναδιαία αύξηση κέρδους που προκύπτει αν μετακινηθούμε σε αυτή την κατεύθυνση είναι $\overline{c}_3 = c_3 - \underline{c}_B{}^T B^{-1}\underline{A}_3 = 2.5$.

Ας ξαναδούμε λίγο τον ορισμό της μοναδιαίας αύξησης κέρδους για την περίπτωση των βασικών μεταβλητών. Προφανώς $B^{-1}[\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(m)}] = I$, όπου I είναι ο $m \times m$ μοναδιαίος πίνακας. Από τα προηγούμενα έχουμε ότι $B^{-1}\underline{A}_{B(i)}$, είναι η i-στη στήλη του μοναδιαίου πίνακα, που είναι το i-στο μοναδιαίο διάνυσμα $\underline{e}_i$. Συνεπώς για κάθε βασική μεταβλητή $x_{B(i)}$ θα έχουμε

$$\overline{c}_{B(i)} = c_{B(i)} - \underline{c}_B{}^T B^{-1}\underline{A}_{B(i)} = c_{B(i)} - \underline{c}_B{}^T \underline{e}_i = c_{B(i)} - c_{B(i)} = 0,$$

πράγμα που σημαίνει ότι η μοναδιαία αύξηση κέρδους για τις βασικές μεταβλητές είναι μηδέν.

Το επόμενο θεώρημα μας δίδει τις απαραίτητες συνθήκες βελτιστότητας.

Θεώρημα 3.1: Έστω μια βασική εφικτή λύση $\underline{x}$ που αντιστοιχεί σε ένα βασικό πίνακα B κι ακόμη έστω $\underline{\bar{c}}$ το αντίστοιχο διάνυσμα μοναδιαίων αυξήσεων κέρδους.

α) Αν $\underline{\bar{c}} \leq 0$, τότε το $\underline{x}$ είναι βέλτιστη λύση.

β) Αν το $\underline{x}$ είναι βέλτιστη και μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση τότε $\underline{\bar{c}} \leq 0$.

Απόδειξη

Σημειώστε ότι το προηγούμενο θεώρημα επιτρέπει τη δυνατότητα $\bar{c}_j > 0$ για κάποια μη βασική μεταβλητή x_j αν $\underline{x}$ είναι μια εκφυλισμένη βέλτιστη βασική εφικτή λύση.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, ένα κριτήριο απόφασης σχετικά με τη βελτιστότητα μιας μη εκφυλισμένης βασικής εφικτής λύσης είναι ο έλεγχος μη θετικότητας, όλων των μοναδιαίων αυξήσεων κερδών των $n - m$ μη βασικών μεταβλητών. Ένας εναλλακτικός τρόπος διατύπωσης των συνθηκών βελτιστότητας είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 3.3: Ένας βασικός πίνακας B καλείται **βέλτιστος** αν ισχύουν:

α) $\underline{B}^{-1}\underline{b} \geq 0$, και

β) $\underline{\bar{c}}^T = \underline{c}^T - \underline{c_B}^T B^{-1} A \leq \underline{0}^T$

Προφανώς ένας βέλτιστος βασικός πίνακας μας οδηγεί στην αντίστοιχη βασική εφικτή λύση που επειδή ικανοποιεί τις συνθήκες βελτιστότητας είναι βέλτιστη.

3.2. Ανάπτυξη αλγορίθμου Simplex

Ο βασικός μας στόχος σε αυτή την παράγραφο είναι ο καθορισμός των λεπτομερειών ενός βήματος μετάβασης από μια βασική εφικτή λύση σε μια καλύτερη βασική εφικτή λύση. Αυτό αποτελεί το βασικό κορμό της μεθόδου Simplex.

Πριν ξεκινήσουμε υποθέτουμε ότι κάθε βασική εφικτή λύση είναι μη εκφυλισμένη. Υποθέτουμε ακόμη ότι στην αρχή βρισκόμαστε σε μια βασική εφικτή λύση $\underline{x}$ κι ότι έχουμε εκτιμήσει τις μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους $\bar{c}_j$ των μη βασικών μεταβλητών. Αν είναι όλες μικρότερες ή ίσες του μηδενός σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1 η $\underline{x}$ είναι βέλτιστη λύση και μπορούμε να τερματίσουμε τον αλγόριθμο. Αν όμως υπάρχει κάποιο $\bar{c}_j$ κάποιας μη βασικής μεταβλητής x_j που είναι μεγαλύτερο του μηδενός η j-στη κατεύθυνση $\underline{d}$ είναι εφικτή κατεύθυνση και αν την ακολουθήσουμε οδηγούμαστε σε εφικτές λύσεις με βελτιωμένο κέρδος. Η κατεύθυνση $\underline{d}$ είναι αυτή που προκύπτει αν θέσουμε $d_j = 1$, $d_i = 0$, για κάθε x_i που δεν είναι βασική μεταβλητή, ενώ για τις βασικές μεταβλητές έχουμε δει ότι $\underline{d_B} = -B^{-1}\underline{A_j}$. Καθώς μετακινούμαστε κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\underline{d}$, η μη βασική μεταβλητή x_j γίνεται θετική, ενώ όλες οι άλλες μη βασικές μεταβλητές παραμένουν μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η μεταβλητή x_j εισέρχεται στη βάση ή γίνεται βασική.

Καθώς μετακινούμαστε από το σημείο $\underline{x}$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\underline{d}$, οδηγούμαστε σε σημεία που ικανοποιούν την $\underline{x} + \theta\underline{d}$, όπου $\theta \geq 0$. Αφού το κέρδος μας αυξάνει όσο μετακινούμαστε σε αυτή την κατεύθυνση, επιθυμούμε να μετακινηθούμε σε αυτή όσο το δυνατόν περισσότερο. Έτσι οδηγούμαστε στο σημείο $\underline{x} + \theta'\underline{d}$, όπου

$$\theta' = \max\{\theta \geq 0 | \underline{x} + \theta\underline{d} \in P\}$$

όπου P βέβαια το πολύεδρο των εφικτών λύσεων. Η μεταβολή του κέρδους που προκύπτει είναι $\theta'\underline{c}^T\underline{d}$, που είναι ίση με $\theta'\overline{c}_j$. Το ερώτημα είναι πως προκύπτει η τιμή του θ'. Έχουμε δει ότι $A\underline{d} = \underline{0}$, που σημαίνει ότι $A(\underline{x} + \theta\underline{d}) = A\underline{x} = \underline{b}$ για κάθε θ και συνεπώς οι ισοτικοί περιορισμοί δεν παραβιάζονται ποτέ. Η μόνη περίπτωση το σημείο $\underline{x} + \theta\underline{d}$ να μην είναι εφικτή λύση είναι να παραβιάζει τους περιορισμούς μη αρνητικότητας. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

α) Αν $\underline{d} \geq \underline{0}$, τότε $\underline{x} + \theta\underline{d} \geq \underline{0}$, για κάθε $\theta \geq 0$, και το διάνυσμα $\underline{x} + \theta\underline{d}$ θα είναι εφικτή λύση για κάθε τιμή του θ. Σε αυτή την περίπτωση βέβαια $\theta' = +\infty$ και το κέρδος μας απειρίζεται.

β) Αν $d_i < 0$, για κάποιο i, ο περιορισμός μη αρνητικότητας $x_i + \theta d_i \geq 0$, γίνεται $\theta \leq -x_i/d_i$. Αυτοί οι περιορισμοί πρέπει να ικανοποιούνται για κάθε i, με $d_i < 0$. Συνεπώς η μέγιστη δυνατή τιμή του θ είναι

$$\theta' = \min_{\{i|d_i<0\}}\left(-\frac{x_i}{d_i}\right).$$

Σημειώστε ότι αν η μεταβλητή x_i δεν είναι βασική τότε αν εισέρχεται στη βάση $d_i = 1$ αλλιώς $d_i = 0$. Γι' αυτό το λόγο εξετάζουμε μόνο τις βασικές μεταβλητές και η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\theta' = \min_{\{i=1,\ldots,m|d_{B(i)}<0\}}\left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right). \tag{3.2}$$

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι λόγο της υπόθεσης, που έχουμε κάνει, ότι όλες μας οι βασικές εφικτές λύσεις δεν είναι εκφυλισμένες, θα πρέπει $x_{B(i)} > 0$ για όλα τα i και συνεπώς $\theta' > 0$.

Παράδειγμα 3.2

Έχουμε το ακόλουθο ΠΓΠ

$$z = \max(-\,2x_1)$$

$$x_1 + x_2 + \ x_3 + \ \ x_4 = 2$$

$$2x_1 + \qquad 3x_3 + 4x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

α) Βρείτε μια βασική εφικτή λύση.

β) Υπολογίστε το διάνυσμα βασικής κατεύθυνσης κατά τη διεύθυνση μιας από τις μη βασικές μεταβλητές και την αντίστοιχη μοναδιαία αύξηση κέρδους.

γ) Βρείτε ένα νέο εφικτό σημείο που μεγιστοποιεί το κέρδος σε αυτή την κατεύθυνση μετακίνησης.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι με εξαίρεση την αντικειμενική συνάρτηση έχουμε το ίδο πρόβλημα με το Παράδειγμα 3.1. Δηλαδή ο χώρος εφικτών λύσεων είναι ο ίδιος. Ξεκινάμε λοιπόν με την βασική εφικτή λύση του προηγούμενου παραδείγματος που είχαμε δει ότι ήταν η $\underline{x}^T = [1, 1, 0, 0]$. Επίσης είχαμε δει ότι

$$d_B = -B^{-1}\underline{A}_3 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Ακόμη είδαμε ότι η μοναδιαία αύξηση κέρδους που προκύπτει αν μετακινηθούμε σε αυτή την κατεύθυνση είναι $\bar{c}_3 = c_3 - \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{A}_3$, που στην περίπτωση μας που έχουμε $c_3 = 0$ και $\underline{c}_B^T = [-\,2, 0]$ είναι $\bar{c}_3 = 3$. Αφού το $\bar{c}_3 > 0$ μπορούμε μετακινούμενοι κατά την εφικτή κατεύθυνση $\underline{d} = [-\,3/2, 1/2, 1, 0]$ να βελτιώσουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Οι λύσεις που προκύπτουν από αυτή την μετακίνηση είναι τα στοιχεία $\underline{x} + \theta\underline{d}$ με $\theta \geq 0$. Όσο αυξάνει το θ η μοναδική μεταβλητή του $\underline{x}$ που μειώνεται είναι η πρώτη αφού $d_1 < 0$. Η μέγιστη δυνατή τιμή του θ είναι η $\theta' = -(x_1/d_1) = 2/3$. Έτσι οδηγούμαστε στο σημείο $\underline{w} = \underline{x} + 2/3\underline{d} = [0, 4/3, 2/3, 0]^T$. Παρατηρούμε ότι οι μη μηδενικές μεταβλητές αντιστοιχούν στις στήλες $\underline{A}_2$, και $\underline{A}_3$, του πίνακα A οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αυτό σημαίνει ότι το $\underline{w}$ είναι βασική εφικτή λύση. Πιο συγκεκριμένα είδαμε ότι έγινε βασική μεταβλητή η x_3 κι έγινε μη βασική η x_1. Η με άλλα λόγια μπήκε στη βάση η x_3 και βγήκε από αυτήν η x_1.

Από τη στιγμή που έχουμε επιλέξει το θ' κι εφόσον είναι πεπερασμένο, μετακινούμαστε στο νέο σημείο $\underline{z} = \underline{x} + \theta'\underline{d}$. Είδαμε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα το σημείο $\underline{z} = \underline{x} + \theta'\underline{d}$, που οδηγηθήκαμε είναι επίσης βασική εφικτή λύση, όπως και το αρχικό σημείο $\underline{x}$, θα δούμε στη συνέχεια ότι αυτό ισχύει γενικά. Στη γενική περίπτωση έχουμε ότι $x_j = 0$ και $d_j = 1$, άρα $z_j = \theta' > 0$. Έστω $x_{B(l)}$ η βασική μεταβλητή για την οποία ικανοποιείται η Εξίσωση 3.2, δηλαδή

$$-\frac{x_{B(l)}}{d_{B(l)}} = \theta' = \min_{\{i=1,\dots,m \mid d_{B(i)}<0\}} \left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right)$$

ισχύει ότι $d_{B(l)} < 0$ κι ότι $x_{B(l)} + \theta' d_{B(l)} = 0$. Παρατηρούμε ότι ενώ η μη βασική μεταβλητή x_j έγινε θετική η $x_{B(l)}$ μηδενίστηκε. Αυτό σημαίνει ότι η x_j θα πρέπει να αντικατέστησε την $x_{B(l)}$ στη βάση και να έγινε βασική μεταβλητή. Όσον αφορά τον βασικό πίνακα αυτό σημαίνει ότι ο νέος βασικός πίνακας B' προέκυψε από τον αρχικό βασικό πίνακα B αφαιρώντας την στήλη $\underline{A}_{B(l)}$ και τοποθετώντας στην θέση της τη νέα βασική στήλη $\underline{A}_j$

$$B' = [\underline{A}_{B(1)}, \dots, \underline{A}_{B(l-1)}, \underline{A}_j, \underline{A}_{B(l+1)}, \dots, \underline{A}_{B(m)}]. \tag{3.3}$$

Για να είναι βέβαια το νέο σημείο βασική εφικτή λύση θα πρέπει ο νέος πίνακας B' να είναι αντιστρέψιμος δηλαδή θα πρέπει οι στήλες του να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αυτό επαληθεύεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2:

α) Οι στήλες $\underline{A}_{B(i)}$, $i \neq l$ και $\underline{A}_j$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες και συνεπώς ο πίνακας B' είναι βασικός πίνακας.

β) Το διάνυσμα $\underline{z} = \underline{x} + \theta'\underline{d}$ είναι η βασική εφικτή λύση που αντιστοιχεί στον βασικό πίνακα B'.

Απόδειξη

Με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω μπορούμε να μετακινηθούμε από μια βασική εφικτή λύση σε μια άλλη βασική εφικτή λύση με βελτιωμένη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η διαδικασία αυτή αποτελεί το βασικό «βήμα» της μεθόδου Simplex κι ονομάζεται «οδήγηση» (pivot). Ακολουθεί μια συνοπτική περιγραφή του αλγορίθμου της Simplex.

Αλγόριθμος Simplex:

1. Ξεκινάμε από μια αρχική βασική εφικτή λύση $\underline{x}$ και τον αντίστοιχο βασικό πίνακα B που αποτελείται από τις στήλες $\underline{A}_{B(i)}$, $i = m$ του πίνακα A, οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες και συνεπώς ο πίνακας B' είναι βασικός πίνακας.
2. Υπολογίζουμε τη μοναδιαία αύξηση κέρδους $\overline{c}_j = c_j - \underline{c}_B{}^T B^{-1} \underline{A}_j$ για όλες τις μη βασικές μεταβλητές. Αν είναι όλες μη θετικές η υπάρχουσα βασική εφικτή λύση είναι βέλτιστη και ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά επιλέγουμε κάποια μεταβλητή x_j με $\overline{c}_j > 0$ για να γίνει βασική.
3. Υπολογίζουμε το διάνυσμα $\underline{u} = -\underline{d}_B = B^{-1}\underline{A}_j$. Εάν καμία από τις μεταβλητές του $\underline{u}$ δεν είναι θετική έχουμε ότι $\theta' = \infty$ το βέλτιστο κέρδος είναι ∞ κι ο αλγόριθμος τερματίζει.
4. Αν υπάρχουν μεταβλητές του $\underline{u}$ που είναι θετικές τότε

$$\theta' = \min_{\{i=1,\ldots,m|u_i>0\}} \left(\frac{x_{B(i)}}{u_i} \right).$$

5. Έστω l τέτοιο ώστε $\theta' = x_{B(l)}/u_l$. Ο νέος βασικός πίνακας B' προκύπτει από τον προηγούμενο αν αντικαταστήσουμε την στήλη $\underline{A}_{B(l)}$, με τη στήλη $\underline{A}_j$. Αν $\underline{z}$ είναι η νέα βελτιωμένη βασική εφικτή λύση οι τιμές των νέων βασικών μεταβλητών δίδονται από $z_j = \theta'$ και $z_{B(i)} = x_{B(i)} - \theta' u_i$, $i \neq l$
6. Επιστρέφουμε στο βήμα 1.

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει την καλή λειτουργία της Simplex και τον τερματισμό της σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Θεώρημα 3.3: Υποθέτουμε ότι το σύνολο εφικτών λύσεων δεν είναι κενό κι ότι όλες οι βασικές εφικτές λύσεις του είναι μη εκφυλισμένες. Τότε η μέθοδος Simplex τερματίζει μετά από πεπερασμένο πλήθος επαναλήψεων. Στον τερματισμό της μεθόδου υπάρχουν δυο ενδεχόμενα:

α) Η μέθοδος καταλήγει σε μια βασική εφικτή λύση που είναι βέλτιστη.

β) Καταλήγει σε ένα διάνυσμα $\underline{d}$, που ικανοποιεί τις $A\underline{d} = \underline{0}$, $\underline{d} \geq \underline{0}$ και $\underline{c}^T\underline{d} > \underline{0}$, και το βέλτιστο κέρδος είναι $+\infty$.

Απόδειξη

3.2.1 Η περίπτωση των εκφυλισμένων λύσεων

Ο αλγόριθμος που αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους στηρίχθηκε στην υπόθεση ότι δεν υπάρχουν εκφυλισμένες βασικές εφικτές λύσεις. Αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω αλγόριθμο ενώ υπάρχουν εκφυλισμένες βασικές εφικτές λύσεις στο πρόβλημα μας είναι δυνατόν να έρθουμε αντιμέτωποι με τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

α) Αν η τρέχουσα βασική εφικτή λύση $\underline{x}$ είναι εκφυλισμένη τότε το θ' μπορεί να είναι μηδέν, οπότε η νέα βασική εφικτή λύση $\underline{z}$ είναι η ίδια με την $\underline{x}$. Αυτό συμβαίνει όταν κάποια βασική μεταβλητή $x_{B(l)} = 0$ και η αντίστοιχη συνιστώσα $d_{B(l)}$ του διανύσματος κατεύθυνσης $\underline{d}$ είναι αρνητική. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να πάρουμε έναν νέο βασικό πίνακα αντικαθιστώντας τη στήλη $\underline{A}_{B(l)}$ με την στήλη $\underline{A}_j$ και το Θεώρημα 3.2 εξακολουθεί να ισχύει.

β) Ακόμη κι αν το θ' είναι θετικό μπορεί περισσότερες από μία βασικές μεταβλητές να μηδενίζονται στη νέα βασική λύση $\underline{z}$. Αφού μόνο η μία βγαίνει από τη βάση η άλλη παραμένει βασική με συνέπεια η νέα λύση να είναι εκφυλισμένη.

Η αλλαγή βασικού πίνακα μπορεί να μας βγάλει από τη δύσκολη θέση όμως και πάλι μπορεί να οδηγηθούμε στον αρχικό βασικό πίνακα, οπότε ο αλγόριθμος μπορεί να πέσει σε ατέρμονα βρόγχο και να μην τερματίσει ποτέ. Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα.

3.2.2 Η επιλογή κανόνων οδήγησης

Ο αλγόριθμος της Simplex όπως τον έχουμε δει έχει κάποιους βαθμούς ελευθερίας. Στο βήμα 2 μπορούμε να διαλέξουμε οποιαδήποτε μη βασική μεταβλητή x_j με $\overline{c}_j > 0$. Ακόμη στο βήμα 5, μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία βασικές μεταβλητές $x_{B(l)}$ για τις οποίες επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή του θ' κι έχουμε τη δυνατότητα να επιλέξουμε όποιο θέλουμε. Οι κανόνες που καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο γίνονται αυτές οι επιλογές καλούνται κανόνες οδήγησης.

Οι κυριότεροι κανόνες επιλογής των μεταβλητών που θα γίνουν βασικές είναι οι δύο που ακολουθούν:

α) Επιλέγουμε τη στήλη $\underline{A}_j$ με $\bar{c}_j > 0$ και $\bar{c}_j = \max_i\{\bar{c}_i\}$. Αφού η μοναδιαία αύξηση κέρδους μας δίνει το ρυθμό μεταβολής της αντικειμενικής συνάρτησης, με αυτό τον κανόνα επιλέγουμε την κατεύθυνση μετακίνησης με τον μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης του κέρδους. Βέβαια η πραγματική βελτίωση που θα έχουμε εξαρτάται από το πόσο θα προχωρήσουμε προς αυτή την κατεύθυνση.

β) Επιλέγουμε τη στήλη με $\bar{c}_j > 0$ για την οποία η πραγματική αύξηση κέρδους $\theta'|\bar{c}_j|$ είναι η μέγιστη. Αυτός ο κανόνας φαίνεται ότι μπορεί να επιτυγχάνει ταχύτερη σύγκλιση του αλγορίθμου. Το βασικό μειονέκτημα του είναι ότι απαιτείται μεγαλύτερο πλήθος υπολογισμών σε κάθε επανάληψη, αφού πρέπει να εκτιμήσουμε το θ' για κάθε στήλη με $\bar{c}_j > 0$.

Σχετικά με τον κανόνα επιλογής της εξερχόμενης από τη βάση μεταβλητής, σε περίπτωση ισοπαλίας, υπάρχουν διάφοροι κανόνες, από τους οποίους ο συνηθέστερα χρησιμοποιούμενος είναι ο κανόνας του μικρότερου δείκτη, όπου επιλέγουμε τη μεταβλητή $x_{B(l)}$ με τον μικρότερο δείκτη $B(l)$.

3.3. Η εκδοχή του αλγορίθμου Simplex με πλήρες tableau

Η μέθοδος Simplex μπορεί να εκτελεστεί πιο εύκολα με τη βοήθεια μιας σειράς πινάκων που είναι γνωστοί σαν tableaux Simplex. Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την παρουσίαση αυτής της εκδοχής της Simplex, που είναι όχι μόνο απλούστερη αλλά κι αλγοριθμικά αποδοτικότερη.

Η μέθοδος Simplex όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο έχει διάφορα μειονεκτήματα. Το βασικότερο είναι, ότι σε κάθε επανάληψη θα πρέπει να επιλύουμε ένα γραμμικό σύστημα ή εναλλακτικά να υπολογίσουμε τον αντίστροφο του βασικού πίνακα B. Με δεδομένο ότι ο πίνακας B διαφέρει από τον νέο βασικό πίνακα B' μόνο κατά μια στήλη θα πρέπει να υπάρχει τρόπος να εκτιμήσουμε τον B'^{-1} από τον B^{-1} εξοικονομώντας υπολογισμούς. Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να το επιτύχουμε.

Ορισμός 3.4: Αν έχουμε έναν πίνακα, όχι κατ' ανάγκη τετραγωνικό, καλούμε **στοιχειώδη γραμμοπράξη** την διαδικασία πρόσθεσης του γινομένου μιας γραμμής του σε μια άλλη ή την ίδια γραμμή του πίνακα.

Γενικά ισχύει ότι ο πολλαπλασιασμός επί λ της j-οστης γραμμής ενός πίνακα και η πρόσθεση του γινομένου στην i-οστη γραμμή αυτού του πίνακα είναι ισοδύναμος με τον πολλαπλασιασμό του πίνακα εξ αριστερών με τον πίνακα $Q = I + D_{ij}$, όπου D_{ij} είναι ένας πίνακας με όλα του τα στοιχεία ίσα με το μηδέν εκτός από στοιχείο d_{ij} που είναι ίσο με λ. Η ορίζουσα του πίνακα Q είναι ίση με τη μονάδα και συνεπώς είναι αντιστρέψιμος (εκτός αν $i = j$ οπότε η ορίζουσα είναι d_{ii} και ο Q είναι επίσης αντιστρέψιμος). Αν υποθέσουμε ότι πραγματοποιούμε μια σειρά από K στοιχειώδης γραμμοπράξεις, τότε το αποτέλεσμα των γραμμοπράξεων είναι ισοδύναμο με τον πολλαπλασιασμό εξ αριστερών με τον αντιστρέψιμο πίνακα $Q_K Q_{K-1}... Q_2Q_1$, όπου Q_i είναι ο πίνακας, που υλοποιεί την i-οστη γραμμοπράξη.

Αφού $B^{-1}B = I$, θα πρέπει η στήλη $B^{-1}\underline{A}_{B(i)}$ να είναι ίση με το i-οστο μοναδιαίο διάνυσμα $\underline{e}_i$. Γνωρίζουμε ότι ο B' διαφέρει από τον B μόνο ως προς την l-οστη στήλη, άρα ισχύει ότι

$$B^{-1}B' = [\underline{e}_1, ..., \underline{e}_{l-1}, \underline{u}, \underline{e}_{l+1}, \dots, \underline{e}_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & u_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & u_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_l & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_m & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $\underline{u} = B^{-1}\underline{A}_j$. Θέλουμε να πραγματοποιήσουμε μια ακολουθία από στοιχειώδης γραμμοπράξεις που θα μετατρέψει τον πίνακα $B^{-1}B'$ στον μοναδιαίο. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής:

α) Για κάθε $i \neq l$, προσθέτουμε την l-οστη γραμμή πολλαπλασιασμένη με τον συντελεστή $-u_i/u_l$ στην i-οστη γραμμή. Με αυτό τον τρόπο μηδενίζουμε τα u_i.

β) Διαιρούμε την l-οστη γραμμή με το u_l. Έτσι αντικαθίσταται το u_l με τη μονάδα.

Με απλά λόγια προσθέτουμε σε κάθε γραμμή το πολλαπλάσιο της l-οστης γραμμής για να αντικαταστήσουμε την l-οστη στήλη με το μοναδιαίο διάνυσμα $\underline{e}_l$. Αυτή η ακολουθία γραμμοπράξεων είναι ισοδύναμη με τον πολλαπλασιασμό εξ' αριστερών του πίνακα $B^{-1}B'$ με έναν αντιστρέψιμο πίνακα Q. Προφανώς θα έχουμε ότι $QB^{-1}B' = I$, που μας οδηγεί στην εξίσωση $QB^{-1} = B'^{-1}$. Η τελευταία εξίσωση μας δείχνει, ότι αν πραγματοποιήσουμε την ίδια ακολουθία γραμμοπράξεων στον αντίστροφο του πίνακα B θα πάρουμε τον αντίστροφο του B'. Δηλαδή αν γνωρίζουμε τον αντίστροφο του αρχικού βασικού πίνακα για να εκτιμήσουμε τον αντίστροφο του νέου βασικού πίνακα αρκεί να πραγματοποιήσουμε την ακολουθία γραμμοπράξεων που περιγράφηκε παραπάνω.

Παράδειγμα 3.3

Έστω ότι

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \; \underline{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

και $l = 3$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον B'^{-1}.

Λύση

Για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει να πραγματοποιήσουμε την ακόλουθη αλληλουχία γραμμοπράξεων: Πολλαπλασιάζουμε την Τρίτη γραμμή επί 2 (αφού $-u_1/u_3 = 2$) και την προσθέτουμε στην πρώτη γραμμή. Αφαιρούμε την Τρίτη γραμμή από την δεύτερη (αφού $-u_2/u_3 = -1$) και διαιρούμε την Τρίτη γραμμή με το 2. Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε στον αντίστροφο του B'^{-1} που είναι

$$B'^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -4 & -1 \\ -6 & 6 & 3 \\ 2 & -1.5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Έχοντας στη διάθεση μας έναν αλγοριθμικά αποδοτικό τρόπο να υπολογίζουμε τον αντίστροφο των βασικών πινάκων μπορούμε να προχωρήσουμε στην παρουσίαση της εκδοχής της Simplex γνωστή ως Simplex πλήρους tableau. Σε αυτή την εκδοχή αντί να διατηρούμε και να ενημερώνουμε τον πίνακα B^{-1}, χρησιμοποιούμε τον $m \times (n+1)$ πίνακα $B^{-1}[\underline{b} \,|\, A]$, που περιέχει ως στήλες τα διανύσματα $B^{-1}\underline{b}$, $B^{-1}\underline{A}_1, ..., B^{-1}\underline{A}_n$. Ο πίνακας αυτός καλείται tableau της Simplex, ενώ η στήλη $B^{-1}\underline{b}$ καλείται μηδενική στήλη του tableau και είναι το διάνυσμα των τιμών των βασικών μεταβλητών. Η στήλη $\underline{u} = B^{-1}\underline{A}_j$, που αντιστοιχεί στη μη βασική μεταβλητή x_j, η οποία εισέρχεται στη βάση και γίνεται βασική μεταβλητή, λέγεται **στήλη του πιλότου**. Αντίστοιχα η l-οστη γραμμή, που αντιστοιχεί στην μεταβλητή που εξέρχεται της βάσης καλείται **γραμμή του πιλότου**. Το στοιχείο, που ανήκει τόσο στην στήλη του πιλότου, όσο και στη γραμμή του πιλότου ονομάζεται **πιλότος**. Σημειώστε ότι ο πιλότος είναι ίσος με u_l. Τίθεται φυσικά το ερώτημα τι εκφράζει το tableau της Simplex; Το σύνολο των περιορισμών δίδεται αρχικά στη μορφή $A\underline{x} = \underline{b}$. Αν B είναι ο βασικός πίνακας, οι παραπάνω περιορισμοί μπορούν να εκφρασθούν στην ισοδύναμη μορφή

$$B^{-1}\underline{b} = B^{-1}A\underline{x},$$

που είναι ακριβώς αυτό που περιέχεται στο tableau. Με άλλα λόγια οι γραμμές του tableau περιέχουν τους συντελεστές των ισοτικών περιορισμών $B^{-1}\underline{b} = B^{-1}A\underline{x}$.

Στο τέλος κάθε επανάληψης της Simplex πρέπει να ενημερώνουμε το tableau $B^{-1}[\underline{b}\,|\,A]$ και να το αντικαθιστούμε με το $B'^{-1}[\underline{b}\,|\,A]$. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της αλληλουχίας γραμμοπράξεων, που είδαμε παραπάνω. Όπως είδαμε αυτή η αλληλουχία γραμμοπράξεων είναι ισοδύναμη με τον πολλαπλασιασμό εξ' αριστερών με ένα πίνακα Q, που ικανοποιεί την σχέση $QB^{-1} = B'^{-1}$. Αυτή η ακολουθία γραμμοπράξεων είναι η ίδια με αυτή που απαιτείται για την μετατροπή του πίνακα B^{-1} στον B'^{-1}. Πιο συγκεκριμένα προσθέτουμε σε κάθε γραμμή το γινόμενο της γραμμής του πιλότου, ώστε να μηδενίσουμε όλα τα στοιχεία της στήλης του πιλότου, με εξαίρεση τον πιλότο που πρέπει να γίνει ίσος με τη μονάδα.

Σχετικά με την επιλογή της εξερχόμενης από την βάση στήλης $\underline{A}_{B(l)}$ και του θ' στα βήματα 4 και 5 του αλγορίθμου της Simplex θα πρέπει να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα: Ο λόγος $x_{B(i)}/u_i$ είναι ο λόγος του i-οστου στοιχείου της μηδενικής στήλης του tableau προς το i-οστο στοιχείο της στήλης του πιλότου του tableau. Φυσικά υπολογίζουμε αυτούς τους λόγους μόνο για εκείνες τις γραμμές i, που τα στοιχεία u_i είναι θετικά. Ο μικρότερος λόγος είναι ίσος με το θ' και καθορίζει τη μεταβλητή που θα φύγει από τη βάση.

Συνήθως στο κάτω μέρος του tableau της Simplex προσθέτουμε μια ακόμη γραμμή που ονομάζεται **μηδενική γραμμή**. Το πρώτο στοιχείο της μηδενικής γραμμής, που ανήκει επίσης στη μηδενική στήλη, είναι ίσο με $-\underline{c}_B{}^T\underline{x}_B$, δηλαδή είναι το αντίθετο της τρέχουσας τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η υπόλοιπη γραμμή είναι το διάνυσμα γραμμή των μοναδιαίων αυξήσεων κέρδους, δηλαδή είναι $\overline{\underline{c}}^T = \underline{c}^T - \underline{c}_B{}^T B^{-1}A$. Το tableau της Simplex λοιπόν έχει την ακόλουθη μορφή:

$B^{-1}\underline{b}$	$B^{-1}A$
$-\underline{c}_B{}^T B^{-1}\underline{b}$	$\underline{c}^T - \underline{c}_B{}^T B^{-1}A$

ή σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια,

$x_{B(1)}$ $\vdots$ $x_{B(m)}$	$B^{-1}A_1, \ldots, B^{-1}A_n$
$-\underline{c}_B^T \underline{x}_B$	$\bar{c}_1, \quad \ldots, \quad \bar{c}_n$

Η μηδενική γραμμή του tableau της Simplex ενημερώνεται με τον ίδιο τρόπο που ενημερώνεται και το υπόλοιπο tableau, προσθέτοντας το πολλαπλάσιο της γραμμής του πιλότου στη μηδενική γραμμή, έτσι ώστε να μηδενίζεται το στοιχείο της που ανήκει στην γραμμή του πιλότου.

Στην αρχή μιας επανάληψης της Simplex η μηδενική γραμμή έχει τη μορφή

$$[0\,|\,\underline{c}^T] - \underline{c}_B^T B^{-1}[\underline{b}\,|\,A],$$

δηλαδή η μηδενική γραμμή είναι ίση με $[0\,|\,\underline{c}^T]$ συν ένα γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του πίνακα $[\underline{b}\,|\,A]$. Έστω ότι η στήλη j είναι η στήλη του πιλότου και η γραμμή l είναι η γραμμή του πιλότου. Προσέξτε ότι η γραμμή του πιλότου είναι της μορφής $\underline{h}^T[\underline{b}\,|\,A]$, όπου το διάνυσμα $\underline{h}^T$ είναι η l-στη γραμμή του B^{-1}. Κατά συνέπεια μετά την πρόσθεση του πολλαπλασίου της γραμμής του πιλότου στην μηδενική γραμμή αυτή θα είναι πάλι ίση με $[0\,|\,\underline{c}^T]$ συν έναν άλλο γραμμικό συνδυασμό των γραμμών του πίνακα $[\underline{b}\,|\,A]$ και πιο συγκεκριμένα θα είναι

$$[0\,|\,\underline{c}^T] - \underline{p}^T[\underline{b}\,|\,A],$$

για κάποιο διάνυσμα $\underline{p}$. Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε, ότι η γραμμοπράξη που εφαρμόσαμε έχει σαν στόχο το μηδενισμό του στοιχείου της μηδενικής γραμμής, που ανήκει στη στήλη του πιλότου, δηλαδή έχουμε

$$\underline{c}_{B'(l)} - \underline{p}^T \underline{A}_{B'(l)} = \underline{c}_j - \underline{p}^T \underline{A}_j = 0.$$

Θεωρείστε την στήλη $B'(i)$, (i-στη στήλη του νέου βασικού πίνακα B') για $i \neq l$, που αντιστοιχεί σε μια βασική μεταβλητή, η οποία παραμένει βασική. Το τελευταίο στοιχείο αυτής της στήλης που αντιστοιχεί στη μηδενική γραμμή θα πρέπει να είναι μηδέν τόσο πριν όσο και μετά την αλλαγή της βάσης. Επειδή $B^{-1}\underline{A}_{B(i)}$ είναι το i-στο μοναδιαίο διάνυσμα $\underline{e}_i$ και $i \neq l$, το στοιχείο της γραμμής του πιλότου που αντιστοιχεί στη στήλη του πιλότου παραμένει μηδέν. Συνεπώς η συγκεκριμένη γραμμοπράξη δεν επηρεάζει τα στοιχεία που αντιστοιχούν στις μεταβλητές που ήταν και παραμένουν βασικές. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το διάνυσμα $\underline{p}$ ικανοποιεί τη σχέση $\underline{c}_{B'(i)} - \underline{p}^T \underline{A}_{B'(i)} = 0$ για κάθε στήλη $\underline{A}_{B'(i)}$ στη νέα βάση. Αυτό συνεπάγεται ότι

$\underline{c}_{B'}^{T} - \underline{p}^{T} B'^{-1} = 0$ και $\underline{c}_{B'}^{T} = \underline{p}^{T} B'^{-1}$. Άρα με τον συγκεκριμένο κανόνα η νέα μηδενική γραμμή του tableau έχει την επιθυμητή τιμή

$$[0 \,|\, \underline{c}^{T}] - \underline{c}_{B'}{}^{T} B'^{-1} [\underline{b} \,|\, A].$$

Η εκδοχή του αλγορίθμου της Simplex πλήρους tableau παρουσιάζεται συνοπτικά ακολούθως.

Αλγόριθμος Simplex πλήρους tableau:

1. Ξεκινάμε από το tableau που αντιστοιχεί σε μια βασική εφικτή λύση $\underline{x}$ και τον αντίστοιχο βασικό πίνακα B.
2. Εξετάζουμε τις μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους στη μηδενική γραμμή του tableau. Αν είναι όλες μικρότερες του μηδενός η υπάρχουσα βασική εφικτή λύση είναι βέλτιστη και ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά επιλέγουμε τη μεταβλητή x_j με το μεγαλύτερο $\overline{c}_j > 0$ για να γίνει βασική.
3. Υπολογίζουμε το διάνυσμα $\underline{u} = B^{-1}\underline{A}_j$. που είναι η j-στη στήλη του tableau, δηλαδή είναι η στήλη του πιλότου. Αν κανένα στοιχείο του $\underline{u}$ δεν είναι θετικό έχουμε ότι το βέλτιστο κέρδος είναι ∞ κι ο αλγόριθμος τερματίζει.
4. Για κάθε i τέτοιο ώστε $u_i > 0$, υπολογίζουμε τον λόγο $x_{B(i)}/u_i$. Έστω l ο δείκτης της γραμμής που αντιστοιχεί στο μικρότερο λόγο. Η στήλη $\underline{A}_{B(l)}$ εξέρχεται από την βάση και η στήλη $\underline{A}_j$ εισέρχεται στη βάση.
5. Προσθέτουμε την γραμμή του πιλότου (l-οστή γραμμή) πολλαπλασιασμένη με ένα συντελεστή $-x_{B(i)}/u_i$ σε κάθε γραμμή $i \neq l$ του tableau, ενώ την γραμμή του πιλότου την διαιρούμε με το στοιχείο πιλότος, έτσι ώστε το στοιχείο πιλότος u_l να γίνει ίσο με τη μονάδα κι όλα τα άλλα στοιχεία της στήλης του πιλότου να γίνουν μηδέν.
6. Επιστρέφουμε στο βήμα 1.

Παράδειγμα 3.4

Έχουμε το ακόλουθο ΠΓΠ

$$z = \max(14x_1 + 12x_2 + 10x_3)$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Βρείτε τη βέλτιστη λύση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simplex πλήρους tableau.

Λύση

Μετασχηματίζουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή εισάγοντας περιθώριες μεταβλητές:

$$z = \max(14x_1 + 12x_2 + 10x_3)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 20 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 20 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\ x_6 \geq 0$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\underline{x}^T = [0, 0, 0, 20, 20, 20]$ είναι μια βασική εφικτή λύση και συνεπώς μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε στο ξεκίνημα του αλγορίθμου. Η λύση αυτή προέκυψε από την παρατήρηση ότι οι τρεις τελευταίες στήλες του A αποτελούν τον μοναδιαίο πίνακα 3×3 κι άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε αποτελούν ένα βασικό πίνακα. Τότε όπως ξέρουμε το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών δίδεται από $\underline{x_B} = B^{-1}\underline{b} = I\,\underline{b} = \underline{b}$. Για τον υπολογισμό της μηδενικής γραμμής παρατηρούμε ότι $\underline{c_B} = \underline{0}$ που συνεπάγεται ότι $\underline{c_B}^T\underline{x_B} = \underline{0}$ και $\overline{\underline{c}} = \underline{c}$. Έτσι το αρχικό tableau διαμορφώνεται ως εξής:

			14	12	10	0	0	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	θ
$\underline{A}_4$	0	20	1	2	2	1	0	0	20
$\underline{A}_5$	0	20	**2**	1	2	0	1	0	$\underline{10}$
$\underline{A}_6$	0	20	2	2	1	0	0	1	10
		0	$\underline{14}$	12	10	0	0	0	

Σημειώνουμε μερικές συμβάσεις στη μορφή του παραπάνω tableau. Η πρώτη στήλη αναφέρει ποιες και με ποια σειρά είναι οι βασικές στήλες/μεταβλητές. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η σειρά που οι βασικές στήλες τοποθετούνται στο tableau είναι η σειρά με την οποία εμφανίζονται στον βασικό πίνακα. Εδώ ο βασικός πίνακας $B = [\underline{A}_4, \underline{A}_5, \underline{A}_6]$. Έτσι η πρώτη γραμμή αντιστοιχεί στην βασική στήλη $\underline{A}_4$, η δεύτερη γραμμή στην $\underline{A}_5$ κλπ. Η δεύτερη στήλη περιέχει τις τιμές των συντελεστών αντικειμενικής συνάρτησης των βασικών μεταβλητών. Αντίστοιχα η πρώτη γραμμή περιέχει όλες τις τιμές των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης. Η δεύτερη γραμμή απλά αναφέρει τις στήλες του πίνακα A, στις οποίες αντιστοιχεί κάθε στήλη του tableau. Η τελευταία στήλη χρησιμοποιείται για να σημειώνουμε τους λόγους

$x_{B(i)}/u_i$ που θα καθορίσουν ποια στήλη θα βγει από την βάση. Το υπόλοιπο tableau περιέχει τον πίνακα $B^{-1}[\underline{b}|A]$ και βέβαια τη μηδενική γραμμή όπως έχουμε δει. Φυσικά μόνο το κυρίως κομμάτι του tableau είναι απαραίτητο κι όλες οι αρχικές γραμμές και στήλες θα μπορούσαν να παραληφθούν αλλά βοηθούν στην ευχερέστερη και πιο συστηματική εφαρμογή της μεθόδου.

Συνεχίζουμε με το παράδειγμα μας. Βλέπουμε ότι το μέγιστο $\overline{c}_i = 14$ για $i = 1$. Έτσι η στήλη του πιλότου είναι η $\underline{u} = \underline{A}_1 = [1, 2, 2]$. Υπολογίζουμε τους λόγους $x_{B(i)}/u_i$ και βλέπουμε ότι ο μικρότερος λόγος παρουσιάζεται για $i = 2$ και $i = 3$. χρησιμοποιώντας τον κανόνα του μικρότερου δείκτη επιλέγουμε για έξοδο από την βάση τη μεταβλητή $x_{B(2)} = x_5$. Το στοιχείο πιλότος είναι σκιασμένο ενώ ο μικρότερος λόγος και η μεγαλύτερη μοναδιαία αύξηση κέρδους είναι υπογραμμισμένα. Οι νέος βασικός πίνακας είναι $B' = [\underline{A}_4, \underline{A}_1, \underline{A}_6]$. Για να μεταβούμε στο επόμενο tableau διαιρούμε τη γραμμή του πιλότου με το στοιχείο πιλότος. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τη νέα γραμμή του πιλότου με i-στο στοιχείο της στήλης του πιλότου και την αφαιρούμε από την i-στη γραμμή, εφόσον αυτή δεν είναι η γραμμή του πιλότου. Έτσι η γραμμή του πιλότου εν προκειμένω η δεύτερη αφού πολλαπλασιασθεί με τον συντελεστή 1/2 αφαιρείται από τη πρώτη γραμμή, ενώ αφού πολλαπλασιασθεί με τον συντελεστή 2/2 αφαιρείται από την τρίτη γραμμή. Για τη νέα μηδενική γραμμή πολλαπλασιάζουμε τη γραμμή του πιλότου με τον συντελεστή 14/2 και την αφαιρούμε από την μηδενική έτσι το νέο tableau διαμορφώνεται όπως φαίνεται παρακάτω:

			14	12	10	0	0	0	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	θ
$\underline{A}_4$	0	10	0	1.5	1	1	– 0.5	0	6.66
$\underline{A}_1$	14	10	1	0.5	1	0	0.5	0	20
$\underline{A}_6$	0	0	0	**1**	– 1	0	– 1	1	$\underline{0}$
		– 140	0	$\underline{5}$	– 4	0	– 7	0	

Η νέα βασική εφικτή λύση είναι η $\underline{x}^T = [10, 0, 0, 10, 0, 0]$ που είναι εκφυλισμένη, επειδή η βασική μεταβλητή x_6 είναι μηδέν. Η μοναδική μεταβλητή με θετική μοναδιαία αύξηση κέρδους είναι η x_2, άρα γίνεται κι αυτή βασική μεταβλητή. Η στήλη του πιλότου είναι τώρα $\underline{u} = B^{-1}\underline{A}_2 = [1.5, 0.5, 1]$. Εκτιμούμε τους λόγους $x_{B(i)}/u_i$ και βλέπουμε ότι ο μικρότερος λόγος παρουσιάζεται για $i = 3$, που σημαίνει ότι η τρίτη γραμμή που αντιστοιχεί στη μεταβλητή x_6 είναι η γραμμή του πιλότου. Το στοιχείο πιλότος είναι πάλι σκιασμένο. Αφού ολοκληρώσουμε τις απαραίτητες γραμμοπράξεις (Η γραμμή του πιλότου δεν αλλάζει αφού ο πιλότος είναι μονάδα, αφαιρούμε την γραμμή του πιλότου αφού την πολλαπλασιάσουμε με συντελεστή 1.5 από την πρώτη γραμμή, με συντελεστή 0.5 από την δεύτερη γραμμή και συντελεστή 5 από τη μηδενική γραμμή) οδηγούμαστε στο νέο tableau:

			14	12	10	0	0	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	θ
$\underline{A}_4$	0	10	0	0	**2.5**	1	1	– 1.5	$\underline{0}$
$\underline{A}_1$	14	10	1	0	1.5	0	1	– 0.5	9.33
$\underline{A}_2$	12	0	0	1	– 1	0	– 1	1	–
		– 140	0	0	$\underline{1}$	0	– 2	– 5	

Η νέα βασική εφικτή λύση είναι η $\underline{x}^T = [10, 0, 0, 10, 0, 0]$ που είναι επίσης εκφυλισμένη, επειδή η βασική μεταβλητή x_2 είναι μηδέν. Παρατηρούμε ότι το κέρδος μας παρέμεινε ίσο με 140 και δεν βελτιώθηκε. Η μοναδική μεταβλητή με θετική μοναδιαία αύξηση κέρδους είναι η x_3, άρα γίνεται κι αυτή βασική μεταβλητή. Η στήλη του πιλότου είναι τώρα $\underline{u} = B^{-1}\underline{A}_3 = [2.5, 1.5, -1]$. Εκτιμούμε τους λόγους $x_{B(i)}/u_i$ και βλέπουμε ότι ο μικρότερος λόγος παρουσιάζεται για $i = 1$, που σημαίνει ότι η 1η γραμμή που αντιστοιχεί στη μεταβλητή x_4 είναι η γραμμή του πιλότου. Το στοιχείο πιλότος είναι πάλι σκιασμένο. Αφού ολοκληρώσουμε τις απαραίτητες γραμμοπράξεις οδηγούμαστε στο νέο tableau:

			14	12	10	0	0	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	θ
$\underline{A}_3$	10	4	0	0	1	0.4	0.4	– 0.6	
$\underline{A}_1$	14	4	1	0	0	– 0.6	0.4	0.4	
$\underline{A}_2$	12	4	0	1	0	0.4	– 0.6	0.4	
		– 144	0	0	0	– 0.4	– 2.4	– 4.4	

Η νέα βασική εφικτή λύση είναι η $\underline{x}^T = [4, 4, 4, 0, 0, 0]$ που είναι επίσης και η βέλτιστη αφού δεν υπάρχουν θετικά $\bar{c}_i$. Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η $z = 144$.

Παράδειγμα 3.5

Έχουμε το ακόλουθο ΠΓΠ που περιγράφεται στο ακόλουθο αρχικό tableau:

			0.75	– 20	– 2.5	– 6	0	0	– 3	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	θ
$\underline{A}_5$	0	0	0.25	– 8	– 1	9	1	0	0	
$\underline{A}_6$	0	0	0.5	– 12	– 0.5	3	0	1	0	
$\underline{A}_7$	– 3	1	0	0	1	0	0	0	1	
		3	0.75	– 20	0.5	– 6	0	0	0	

Βρείτε τη βέλτιστη λύση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simplex πλήρους tableau.

Λύση

Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο της Simplex πλήρους tableau, όπως προηγουμένως. Να σημειώσουμε εδώ ότι σε περίπτωση ισοπαλίας χρησιμοποιούμε το κριτήριο του μικρότερου δείκτη. Παραλείποντας τις επεξηγήσεις έχουμε:

			0.75	– 20	– 2.5	– 6	0	0	– 3	
	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_5	0	0	**0.25**	– 8	– 1	9	1	0	0	0
A_6	0	0	0.5	– 12	– 0.5	3	0	1	0	0
A_7	– 3	1	0	0	1	0	0	0	1	–
		3	0.75	– 20	0.5	– 6	0	0	0	

			0.75	– 20	– 2.5	– 6	0	0	– 3	
	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_1	0.75	0	1	– 32	– 4	36	4	0	0	–
A_6	0	0	0	**4**	1.5	– 15	– 2	1	0	0
A_7	– 3	1	0	0	1	0	0	0	1	–
		3	0	4	3.5	– 33	– 3	0	0	

			0.75	– 20	– 2.5	– 6	0	0	– 3	
	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_1	0.75	0	1	0	**8**	– 84	– 12	8	0	0
A_2	– 20	0	0	1	0.375	– 3.75	– 0.5	0.25	0	0
A_7	– 3	1	0	0	1	0	0	0	1	1
		3	0	0	2	– 18	– 1	– 1	0	

			0.75	– 20	– 2.5	– 6	0	0	– 3	
	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_3	– 2.5	0	0.125	0	1	– 10.5	– 1.5	1	0	–
A_2	– 20	0	– 0.046875	1	0	**0.1875**	0.0625	– 0.125	0	0
A_7	– 3	1	– 0.125	0	0	10.5	1.5	– 1	1	0.952
		3	– 0.25	0	0	3	2	– 3	0	

			0.75	– 20	– 2.5	– 6	0	0	– 3	
	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_3	– 2.5	0	– 2.5	56	1	0	**2**	– 6	0	0
A_4	– 6	0	– 0.25	5.333	0	1	0.333	– 0.667	0	0
A_7	– 3	1	2.5	– 56	0	0	– 2	6	1	–
		3	0.5	– 16	0	0	1	– 1	0	

			0.75	– 20	– 2.5	– 6	0	0	– 3	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	θ
$\underline{A}_5$	0	0	– 1.25	28	0.5	0	1	– 3	0	–
$\underline{A}_4$	– 6	0	0.1667	– 4	– 0.1667	1	0	**0.333**	0	$\underline{0}$
$\underline{A}_7$	– 3	1	0	0	1	0	0	0	1	–
		3	1.75	– 44	0.5	0	0	$\underline{2}$	0	

			0.75	– 20	– 2.5	– 6	0	0	– 3	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	θ
$\underline{A}_5$	0	0	0.25	– 8	– 1	9	1	0	0	
$\underline{A}_6$	0	0	0.5	– 12	– 0.5	3	0	1	0	
$\underline{A}_7$	– 3	1	0	0	1	0	0	0	1	
		3	0.75	– 20	0.5	– 6	0	0	0	

Βλέπουμε ότι μετά από έξι επαναλήψεις του αλγορίθμου καταλήξαμε στην ίδια βασική λύση και στο ίδιο tableau από το οποίο ξεκινήσαμε. Σε κάθε αλλαγή βάσης είχαμε $\theta' = 0$. Πιο συγκεκριμένα σε κάθε επανάληψη είχαμε την ίδια λύση $\underline{x}^T = [0, 0, 0, 0, 0, 1]$ και το ίδιο κέρδος $z = -3$. Εδώ βλέπουμε αυτό που είχαμε παρατηρήσει στην Παράγραφο 2.4.1, ότι σε περίπτωση εκφυλισμένων λύσεων μπορεί μια λύση να αντιστοιχεί σε διαφορετικές βάσεις. Αν συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο θα είχαμε αέναη επανάληψη των ίδιων βημάτων και η Simplex δεν θα τερμάτισει ποτέ.

3.4 Τεχνικές αντιμετώπισης της αέναης επανάληψης λόγω ύπαρξης εκφυλισμένων βασικών εφικτών λύσεων

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο η ύπαρξη εκφυλισμένων λύσεων μπορεί να οδηγήσει στην αδυναμία τερματισμού του αλγορίθμου της Simplex. Εδώ θα μελετήσουμε κάποιες τεχνικές, που θα μας επιτρέψουν να αντιμετωπίσουμε με επιτυχία αυτό το πρόβλημα.

3.4.1 Ο λεξικογραφικός κανόνας οδήγησης

Η πρώτη τεχνική που θα μελετήσουμε είναι ο λεξικογραφικός κανόνας οδήγησης, ο οποίος όπως θα δούμε αποδεικνύεται ότι εμποδίζει αποτελεσματικά την ατέρμονη επανάληψη της Simplex και της επιτρέπει να τερματίζει.

Ορισμός 3.5: Ένα διάνυσμα $\underline{u} \in R^n$ θα λέμε **ότι είναι λεξικογραφικά μεγαλύτερο** (ή **μικρότερο**) από ένα άλλο διάνυσμα $\underline{v} \in R^n$ αν $\underline{u} \neq \underline{v}$ και το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο του διανύσματος $\underline{u} - \underline{v}$ είναι θετικό (ή αρνητικό αντίστοιχα). Συμβολικά εκφράζουμε την παραπάνω ιδιότητα ως εξής: $\underline{u} \overset{L}{>} \underline{v}$ ή $\underline{u} \overset{L}{<} \underline{v}$

Για παράδειγμα, $[0, 2, 3, 0]^T \overset{L}{>} [0, 2, 1, 1]^T$ και $[0, 4, 5, 7]^T \overset{L}{<} [1, 2, 1, 4]^T$. Ακόμη όταν $\underline{u} \overset{L}{>} \underline{0}$ λέμε ότι το $\underline{u}$ είναι λεξικογραφικά θετικό.

Λεξικογραφικός κανόνας οδήγησης:

1. Διαλέγουμε οποιαδήποτε μη βασική στήλη $\underline{A_j}$ για να την εισάγουμε στη βάση αρκεί να ισχύει ότι $\overline{c}_j > 0$. Έστω $\underline{u} = B^{-1}\underline{A_j}$ η j-στη στήλη του tableau της Simplex.
2. Για κάθε i με $u_i > 0$, διαιρούμε την i-στη γραμμή του tableau, (συμπεριλαμβανομένων των στοιχείων της μηδενικής στήλης) με το u_i κι επιλέγουμε την λεξικογραφικά μικρότερη γραμμή. Αν η l-στη γραμμή είναι η λεξικογραφικά μικρότερη τότε η l-στη βασική μεταβλητή $x_{B(l)}$ εξέρχεται από την βάση.

Παράδειγμα 3.6

Έχουμε το ακόλουθο tableau σε απλοποιημένη μορφή αφού παραλείπεται τόσο η μηδενική γραμμή όσο και οι γραμμές και οι στήλες ετικέτες, που χρησιμοποιούνται για εποπτικούς λόγους:

1	0	5	3	1	0
2	4	6	–1	0	0
3	0	7	9	0	2

Έστω ότι η στήλη του πιλότου είναι η 3η. Εφαρμόστε το δεύτερο βήμα του λεξικογραφικού κανόνα για να βρείτε την γραμμή που αντιστοιχεί στην βασική μεταβλητή που θα βγει από την βάση

Λύση

Διαιρούμε τα στοιχεία κάθε γραμμής i με το u_i αν αυτό είναι θετικό. Εδώ έχουμε ότι $u_1 = 3$, ότι $u_2 = -1$ και ότι $u_3 = 9$, άρα διαιρούμε την πρώτη γραμμή με το $u_1 = 3$ και την τρίτη με το $u_3 = 9$, οπότε παίρνουμε:

1/3	0	5/3	1	1/3	0
–	–	–	–	–	–
1/3	0	7/9	1	0	2/9

Βλέπουμε ότι η $3^η$ γραμμή είναι λεξικογραφικά μικρότερη αφού $7/9 < 5/3$ και συνεπώς επιλέγεται η μεταβλητή $x_{B(3)}$ για να εξέλθει από την βάση.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο λεξικογραφικός κανόνας οδηγεί πάντα σε μια μοναδική επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής. Αν εμφανιζόταν ισοπαλία σε αυτό το κριτήριο θα σήμαινε ότι δύο από τις γραμμές του tableau είναι ανάλογες. Αυτό όμως σημαίνει ότι ο πίνακας $B^{-1}A$ έχει βαθμό μικρότερο από m, άρα κι ο πίνακας A έχει βαθμό μικρότερο από m, ενώ έχουμε υποθέσει ότι ο A έχει γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές.

Θεώρημα 3.4: Υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος Simplex ξεκινάει με ένα tableau όπου όλες οι γραμμές πλην της μηδενικής είναι λεξικογραφικά θετικές. Υποθέτουμε ότι ακολουθούμε τον λεξικογραφικό κανόνα οδήγησης. Τότε:

α) Κάθε γραμμή του tableau Simplex, με τη εξαίρεση της μηδενικής, παραμένει λεξικογραφικά θετική μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου.

β) Η μηδενική γραμμή μειώνεται αυστηρά λεξικογραφικά σε κάθε επανάληψη.

γ) Ο αλγόριθμος Simplex τερματίζει σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Απόδειξη

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι για να χρησιμοποιηθεί ο λεξικογραφικός κανόνας οδήγησης θα πρέπει όλες οι γραμμές του αρχικού tableau να είναι λεξικογραφικά θετικές. Έστω ότι έχουμε ένα αρχικό tableau, ακόμη κι αν δεν είναι όλες του οι γραμμές λεξικογραφικά θετικές μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά και την ονομασία των μεταβλητών, έτσι ώστε οι m πρώτες μεταβλητές να είναι οι βασικές μεταβλητές. Αυτό είναι ισοδύναμο με την αναδιάταξη του tableau κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι m πρώτες στήλες του $B^{-1}A$ να είναι οι στήλες του μοναδιαίου πίνακα, δηλαδή τα m μοναδιαία διανύσματα. Προφανώς αυτό το tableau έχει λεξικογραφικά θετικές γραμμές.

3.4.2 Ο κανόνας του Bland

Ο επόμενος κανόνας οδήγησης είναι γνωστός και σας κανόνας του μικρότερου δείκτη.

Κανόνας οδήγησης του Bland:

1. Διαλέγουμε το μικρότερο j για το οποίο ισχύει ότι $\bar{c}_j > 0$ και εισάγουμε την στήλη $\underline{A}_j$ στη βάση.

2. Αν υπάρχει ισοβαθμία σε σχέση με το κριτήριο εξόδου από την βάση, επιλέγουμε τη μεταβλητή x_i με το μικρότερο δείκτη i.

Ο παραπάνω κανόνας οδήγησης αντιμετωπίζει αποτελεσματικά το πρόβλημα των αέναων επαναλήψεων και εγγυάται τον τερματισμό της Simplex σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

3.4.3 Η μέθοδος διαταραχής του Charnes

Τέλος θα δούμε τη μέθοδο διαταραχής του Charnes όπου δε μεταβάλλουμε τον χρησιμοποιούμενο κανόνα οδήγησης αλλά διαταράσσουμε το πρόβλημα με τέτοιο τρόπο ώστε το διαταραγμένο πρόβλημα να έχει την ίδια βάση στην βέλτιστη λύση με το αρχικό πρόβλημα.

Μέθοδος διαταραχής:

1. Στο tableau από το οποίο θα προκύψει εκφυλισμένη λύση διαταράσσουμε το διάνυσμα $\underline{b}$ θέτοντας στη θέση του το διάνυσμα

   $$\underline{b}(\varepsilon) = \underline{b} + \varepsilon \underline{A}_1 + \varepsilon^2 \underline{A}_1 +, ..., + \varepsilon^n \underline{A}_n = \underline{b} + A\underline{w}(\varepsilon),\ \underline{w}^T(\varepsilon) = [\varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^n]$$

   όπου ε είναι ένας αυθαίρετα μικρός θετικός αριθμός. Στο διαταραγμένο πρόβλημα προφανώς θα έχουμε $\underline{b}(\varepsilon) > \underline{0}$.
2. Συνεχίζουμε κανονικά με τη μέθοδο Simplex μέχρι να βρούμε τη βέλτιστη λύση $\underline{x}_0$ του διαταραγμένου προβλήματος. Έστω $\underline{x}_{0B}$ το διάνυσμα τιμών των m βασικών μεταβλητών της $\underline{x}_0$.
3. Θέτουμε

   $$\underline{x}_B = \underline{x}_{0B} - \varepsilon B^{-1}\underline{A}_1 - \varepsilon^2 B^{-1}\underline{A}_1 -, ..., - \varepsilon^n B^{-1}\underline{A}_n = \underline{x}_{0B} - B^{-1}A\underline{w}(\varepsilon),$$

   Το διάνυσμα $\underline{x}_B$ είναι το διάνυσμα τιμών των βασικών μεταβλητών της βέλτιστης λύσης $\underline{x}'$ του αρχικού προβλήματος.

Αν θεωρήσουμε τα δύο ΠΓΠ, το αρχικό και το διαταραγμένο

$$\begin{array}{ccc} \max(\underline{c}^T\underline{x}) & & \max(\underline{c}^T\underline{x}) \\ A\underline{x} = \underline{b} & , & A\underline{x} = \underline{b} + A\underline{w}(\varepsilon), \\ \underline{x} \geq \underline{0} & & \underline{x} \geq \underline{0} \end{array}$$

είναι προφανές ότι, αφού το ε είναι αυθαίρετα μικρός θετικός αριθμός, οι βέλτιστες λύσεις $\underline{x}_0$ και $\underline{x}'$ των δύο προβλημάτων αντιστοιχούν στον ίδιο βασικό πίνακα B. Σε αυτή την περίπτωση από τους περιορισμούς του διαταραγμένου προβλήματος έχουμε ότι

$$B^{-1}A\,\underline{x}_0 = B^{-1}[\underline{b} + A\underline{w}(\varepsilon)] = \underline{x}_{0B}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\underline{x}_{0B} = \underline{x}_B + B^{-1}A\underline{w}(\varepsilon),$$

ή ισοδύναμα

$$\underline{x}_B = \underline{x}_{0B} - B^{-1}A\underline{w}(\varepsilon),$$

Μια πιο απλοποιημένη μορφή της προηγούμενης μεθόδου είναι η παρακάτω. Στο tableau που εμφανίζεται η εκφυλισμένη λύση αντικαθιστούμε το μηδέν της βασικής μεταβλητής με ένα αυθαίρετα μικρό θετικό ε και συνεχίζουμε κανονικά μέχρι να φθάσουμε στο τελικό tableau. Θέτοντας τότε $\varepsilon = 0$ παίρνουμε την βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος.

Παράδειγμα 3.7

Έχουμε το ακόλουθο ΠΓΠ

$$\begin{aligned} z = \max(4x_1 + 3x_2) \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Βρείτε τη βέλτιστη λύση.

Λύση

Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι

$$\begin{aligned} & z = \max(4x_1 + 3x_2) \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι τρεις τελευταίες στήλες του πίνακας A αποτελούν τον 3×3 μοναδιαίο πίνακα κι έτσι οδηγούμαστε στο αρχικό tableau της Simplex.

			4	3	0	0	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	θ
$\underline{A}_3$	0	4	1	2	1	0	0	4
$\underline{A}_4$	0	4	2	1	0	1	0	2
$\underline{A}_5$	0	2	1	1	0	0	1	2
		0	$\underline{4}$	3	0	0	0	

Βλέπουμε ότι η στήλη A_1 γίνεται βασική στο επόμενο tableau ενώ υπάρχει ισοβαθμία στο κριτήριο εξόδου μεταξύ των στηλών $\underline{A}_4$ και $\underline{A}_5$. Αυτό σημαίνει ότι στο επόμενο tableau θα έχουμε εκφυλισμένη λύση. Για αυτό τον λόγο εφαρμόζουμε τη μέθοδο διαταραχών παίρνοντας $\varepsilon = 0.1$. Τότε το διάνυσμα $\underline{b}$ αντικαθίσταται από το διάνυσμα

$$\underline{b}(\varepsilon) = \underline{b} + A\underline{w}(\varepsilon),\ \underline{w}^T(\varepsilon) = [\varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^5]$$

που είναι $\underline{b}^T(\varepsilon) = [4.121, 4.2101, 4.11001]$. Το αρχικό Tableau του διαταραγμένου προβλήματος είναι:

			4	3	0	0	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	θ
$\underline{A}_3$	0	4.121	1	2	1	0	0	4.121
$\underline{A}_4$	0	4.2101	**2**	1	0	1	0	$\underline{2.10505}$
$\underline{A}_5$	0	2.11001	1	1	0	0	1	2.11001
		0	$\underline{4}$	3	0	0	0	

Στο διαταραγμένο πρόβλημα εξάγεται από τη βάση η στήλη $\underline{A}_4$ και το επόμενο tableau διαμορφώνεται ως εξής:

			4	3	0	0	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	θ
$\underline{A}_3$	0	2.01595	0	3/2	1	– 1/2	0	1.34397
$\underline{A}_1$	4	2.10505	1	1/2	0	1/2	0	4.2101
$\underline{A}_2$	3	0.00496	0	**1/2**	0	– 1/2	1	$\underline{0.0099}$
		– 8.4202	0	$\underline{1}$	0	– 2	0	

Σε αυτή την επανάληψη εισάγουμε στη βάση την $\underline{A}_2$ εξάγουμε την $\underline{A}_5$ κι έχουμε:

			4	3	0	0	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	θ
$\underline{A}_3$	0	2.00107	0	0	1	1	– 3	
$\underline{A}_1$	4	2.10009	1	0	0	1	– 1	
$\underline{A}_5$	0	0.00992	0	1	0	– 1	2	
		– 8.43012	0	0	0	– 1	– 2	

Παρατηρούμε ότι ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας άρα έχουμε καταλήξει στην βέλτιστη λύση του διαταραγμένου προβλήματος που είναι η $\underline{x}^T{}_0 = [2.10009, 0, 2.00107, 0, 0.00992]$, ενώ το διάνυσμα τιμών των βασικών μεταβλητών είναι $\underline{x}^T{}_{0B} = [2.00107, 2.10009, 0.00992]$. Επομένως το διάνυσμα τιμών των βασικών μεταβλητών του αρχικού Π.Γ.Π. είναι $\underline{x}_B = \underline{x}^T{}_{0B} - B^{-1}A\underline{w}(\varepsilon) = [2, 2, 0]$ κι άρα η βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος είναι $\underline{x}^T = [2, 0, 2, 0, 0]$ και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $z = 8$.

3.5 Το πρόβλημα της αναζήτησης αρχικής βασικής εφικτής λύσης

Σε όλες τις εκδοχές της Simplex που έχουμε δει χρειαζόμαστε μια αρχική βασική εφικτή λύση. Σε κάποιες περιπτώσεις όπως στο Παράδειγμα 3.4 αυτό είναι εύκολο σε κάποιες άλλες όμως χρειάζεται κάποια προεργασία. Το Παράδειγμα 3.4 ανήκει στη γενικότερη περίπτωση, που έχουμε ένα πρόβλημα μόνο με ανισοτικούς περιορισμούς της μορφής $A\underline{x} \leq \underline{b}$, όπου $\underline{b} > \underline{0}$. Εισάγοντας m περιθώριες μεταβλητές, έστω $\underline{s}$ το διάνυσμα αυτών των μεταβλητών μετασχηματίζουμε το πρόβλημα στην κανονική του μορφή $A\underline{x} + \underline{s} = \underline{b}$. Το διάνυσμα $\underline{x}'^T = [\underline{x}^T, \underline{s}^T]$ με $\underline{x} = \underline{0}$ και $\underline{s} = \underline{b}$, είναι μια βασική εφικτή λύση και ο αντίστοιχος βασικός πίνακας είναι ο $m \times m$ μοναδιαίος πίνακας I. Όταν ο πίνακας A περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα η αναζήτηση μιας αρχικής βασικής εφικτής λύσης είναι εύκολη υπόθεση, όπως είδαμε προηγουμένως. Στη γενική περίπτωση πρέπει να τον δημιουργήσουμε και για να το επιτύχουμε αυτό εισάγουμε κάποιες βοηθητικές μεταβλητές στο πρόβλημα που ονομάζονται **τεχνητές μεταβλητές**. Οι μεταβλητές αυτές δεν έχουν καμία φυσική έννοια κι ο μοναδικός λόγος χρησιμοποίησης τους είναι η εμφάνιση του μοναδιαίου πίνακα μέσα στον πίνακα A, έτσι ώστε να μπορέσουμε εύκολα να βρούμε μια αρχική βασική εφικτή λύση. Το πρόβλημα σε αυτή την περίπτωση είναι να «ξεφορτωθούμε» αυτές τις τεχνητές μεταβλητές και να οδηγηθούμε σε μια βασική εφικτή λύση που δεν έχει τεχνητές μεταβλητές ως βασικές.

3.5.1 Ο αλγόριθμος Simplex δύο φάσεων

Στη γενική περίπτωση έχουμε ένα πρόβλημα σε κανονική μορφή

$$\max \underline{c}^T\underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\underline{b} \geq \underline{0}$. Ακόμη κι αν αυτό δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχουν κάποια $b_i < 0$ τότε πολλαπλασιάζοντας τους αντίστοιχους περιορισμούς με -1 φέρνουμε το πρόβλημα στη μορφή που θέλουμε. Αν ο πίνακας A δεν περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα εισάγουμε το διάνυσμα των τεχνητών μεταβλητών $\underline{z} \in R^m$ και χρησιμοποιούμε την Simplex για να λύσουμε το ακόλουθο **βοηθητικό πρόβλημα**

$$\min \underline{c}_u^T \underline{z} \text{ ή ισοδύναμα } -\max(-\underline{c}_u^T \underline{z})$$

$$A\underline{x} + \underline{z} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{z} \geq \underline{0}.$$

όπου $\underline{c}_u^T = [1, ..., 1]$, $\underline{c}_u \in R^m$. Η έναρξη του αλγορίθμου της Simplex είναι εύκολη στο βοηθητικό πρόβλημα. Θέτοντας $\underline{x} = \underline{0}$ και $\underline{z} = \underline{b}$ έχουμε την πρώτη βασική εφικτή λύση και ο αντίστοιχος βασικός πίνακας είναι ο μοναδιαίος. Αν $\underline{x}$ είναι μια εφικτή λύση του αρχικού ΠΓΠ θέτοντας παράλληλα $\underline{z} = \underline{0}$ μας δίδει μια λύση του βοηθητικού προβλήματος με μηδενική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Γενικά θα πρέπει αν υπάρχουν εφικτές λύσεις στο αρχικό πρόβλημα το βοηθητικό να καταλήγει σε βέλτιστη λύση με μηδενική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, αλλιώς το αρχικό πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις. Αν στη βέλτιστη λύση του βοηθητικού προβλήματος η αντικειμενική συνάρτηση έχει τιμή μηδέν και δεν υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές ως βασικές, τότε η βέλτιστη λύση του βοηθητικού προβλήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί, ως αρχική βασική εφικτή λύση της Simplex. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε ως αρχικό tableau της Simplex το τελικό tableau του βοηθητικού προβλήματος, χωρίς τις στήλες των τεχνητών μεταβλητών. Υπάρχει όμως το ενδεχόμενο να οδηγηθούμε σε μηδενικού κόστους βέλτιστη λύση που περιέχει στη βάση κάποιες τεχνητές μεταβλητές. Αυτό σημαίνει ότι η λύση είναι εκφυλισμένη και οι τεχνητές μεταβλητές που είναι βασικές έχουν τιμή ίση με το μηδέν. Τότε μπορούμε να βγάλουμε τις μεταβλητές αυτές από την βάση και τελικά να οδηγηθούμε σε μια βασική εφικτή λύση χωρίς τεχνητές μεταβλητές.

3.5.1.1 Οδηγώντας τις τεχνητές μεταβλητές εκτός βάσης

Έστω ότι είμαστε στην παραπάνω περίπτωση δηλαδή το αρχικό πρόβλημα έχει εφικτές λύσεις και η βέλτιστη λύση $\underline{x}'$ του βοηθητικού προβλήματος είναι εκφυλισμένη. Έστω $k < m$ το πλήθος των βασικών μεταβλητών στη βέλτιστη λύση του βοηθητικού προβλήματος που δεν είναι τεχνητές μεταβλητές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι αυτές αντιστοιχούν στις στήλες $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(k)}$, του πίνακα $\underline{A}$. Προφανώς οι στήλες $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(k)}$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες αφού ανήκουν στη βάση. Αφού έχουμε υποθέσει ότι ο πίνακας A είναι πλήρους βαθμού, προφανώς υπάρχουν m στήλες του που είναι γραμμικά ανεξάρτητες και άρα μπορούμε να επιλέξουμε $m - k$ επιπλέον στήλες $\underline{A}_{B(k+1)}, \ldots, \underline{A}_{B(m)}$, έτσι ώστε να έχουμε ένα σύνολο m γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A, που αποτελούν μια νέα βάση. Μιας και η βέλτιστη λύση $\underline{x}'$ είναι εκφυλισμένη και μόνο οι μεταβλητές $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(k)}$, είναι μη μηδενικές, (άρα και οι $x_{B(k+1)}, \ldots, x_{B(m)}$ είναι μηδέν) η νέα βάση είναι βάση και της $\underline{x}'$ (θυμηθείτε ότι μια εκφυλισμένη λύση μπορεί να αντιστοιχεί σε πολλές διαφορετικές βάσεις). Έχοντας βγάλει τις τεχνητές μεταβλητές εκτός βάσης μπορούμε να διαγράψουμε αυτές και τις στήλες τους από το tableau.

Η προηγούμενη διαδικασία στηρίζεται στην υπόθεση ότι ο πίνακας A είναι πλήρους βαθμού. Αν ο A δεν είναι πλήρους βαθμού δεν υπάρχει βάση του R^m που να αποτελείται από m στήλες του A και προφανώς κάποιος περιορισμός είναι πλεοναστικός και πρέπει να απαλειφθεί.

Πως όμως μπορούμε να υλοποιήσουμε την παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της Simplex πλήρους tableau; Έστω ότι η l-στη βασική μεταβλητή της βέλτιστης λύσης του βοηθητικού προβλήματος είναι τεχνητή μεταβλητή και η τιμή της είναι ίση με το μηδέν (αν δεν είναι μηδέν τότε δεν υπάρχουνε εφικτές λύσεις όπως είδαμε παραπάνω). Εξετάζουμε την l-στη γραμμή του tableau και βρίσκουμε κάποιο j τέτοιο ώστε το l-στο στοιχείο της στήλης $B^{-1}\underline{A}_j$ να είναι διαφορετικό του μηδενός. Η στήλη $\underline{A}_j$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη από τις στήλες $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(k)}$. Θυμηθείτε ότι $B^{-1}\underline{A}_{B(i)} = \underline{e}_i$, (το i-στο μοναδιαίο διάνυσμα) $i = 1, \ldots, k$ κι αφού $k < l$, το l-στο στοιχείο των διανυσμάτων αυτών θα είναι μηδέν. Ακόμη το l-στο στοιχείο κάθε γραμμικού συνδυασμού των $B^{-1}\underline{A}_{B(1)}, \ldots, B^{-1}\underline{A}_{B(k)}$, θα είναι επίσης μηδέν. Αφού το l-στο στοιχείο του $B^{-1}\underline{A}_j$ δεν είναι μηδέν, το διάνυσμα αυτό δεν προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των $B^{-1}\underline{A}_{B(1)}, \ldots, B^{-1}\underline{A}_{B(k)}$ κι άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εισάγουμε το $\underline{A}_j$ στη βάση στη θέση της l-στης βασικής μεταβλητής. Αυτό επιτυγχάνεται με τον συνήθη τρόπο: πραγματοποιώντας τις στοιχειώδης γραμμοπράξεις που απαιτούνται για την αντικατάσταση της στήλης $B^{-1}\underline{A}_j$ από το l-στο μοναδιαίο διάνυσμα. Η βασική διαφορά από την Simplex πλήρους tableau είναι το στοιχείο πιλότος (το l-στο στοιχείο της $B^{-1}\underline{A}_j$) μπορεί να είναι αρνητικό. Επειδή η l-στη βασική μεταβλητή ήταν μηδέν η πρόσθεση ενός πολλαπλασίου της l-στης γραμμής στις άλλες γραμμές δεν αλλάζει τις τιμές των βασικών μεταβλητών. Δηλαδή παρά την αλλαγή βάσης έχουμε την ίδια βασική εφικτή λύση. Το κέρδος μας είναι ότι έχουμε μειώσει κατά ένα το πλήθος των τεχνητών βασικών μεταβλητών. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία αυτή όσες φορές χρειαστεί τελικά οδηγούμε όλες τις τεχνητές μεταβλητές εκτός βάσης.

Η παραπάνω διαδικασία δυστυχώς δεν λειτουργεί αν όλα τα στοιχεί της l-στης γραμμής του $B^{-1}A$ είναι μηδέν. Παρατηρούμε ότι η l-στη γραμμή του $B^{-1}A$ είναι ίση με $\underline{\upsilon}^T A$, όπου $\underline{\upsilon}^T$ είναι η l-στη γραμμή του B^{-1}. Δηλαδή έχουμε ότι $\underline{\upsilon}^T A = \underline{0}^T$ για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα $\underline{\upsilon}$, κι ο πίνακας A έχει γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές. Αν το πρόβλημα μας έχει εφικτές λύσεις θα πρέπει ακόμη να ισχύει ότι $\underline{\upsilon}^T \underline{b} = 0$. Έτσι ο περιορισμός $\underline{\upsilon}^T A\underline{x} = \underline{\upsilon}^T \underline{b}$ είναι πλεοναστικός και μπορεί να απαλειφθεί. Σε αυτή την περίπτωση διαγράφουμε από το tableau της Simplex την l-στη γραμμή και συνεχίζουμε.

Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή του αλγορίθμου δύο φάσεων που αναπτύξαμε παραπάνω:

Αλγόριθμος Simplex δύο φάσεων:

Φάση Ι

1. Αν υπάρχουν στοιχεία του $\underline{b}$ που είναι αρνητικά πολλαπλασιάζουμε τους αντίστοιχους περιορισμούς με -1 έτσι ώστε να έχουμε $\underline{b} \geq \underline{0}$.
2. Εισάγουμε τεχνητές μεταβλητές $z_1, \ldots, z_m$ αν είναι απαραίτητο κι εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Simplex στο βοηθητικό πρόβλημα, με αντικειμενική συνάρτηση $-\sum_{i=1}^{m} z_i$.
3. Αν το βέλτιστο κέρδος του βοηθητικού προβλήματος είναι αρνητικό το αρχικό πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις κι ο αλγόριθμος τερματίζει.
4. Αν το βέλτιστο κέρδος του βοηθητικού προβλήματος είναι μηδέν έχουμε βρει μια εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος. Αν δεν υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές

στη βάση της βέλτιστης λύσης, έχουμε μια βάση του αρχικού προβλήματος και οι τεχνητές μεταβλητές καθώς και οι αντίστοιχες στήλες διαγράφονται από το tableau.

5. Αν η l-οστη βασική μεταβλητή είναι τεχνητή, εξετάζουμε το l-οστο στοιχείο των στηλών $B^{-1}\underline{A}_j$ $j=1, \ldots, n$. Αν όλα αυτά τα στοιχεία είναι μηδέν η l-οστη γραμμή αντιστοιχεί σε έναν πλεοναστικό περιορισμό και διαγράφεται από το tableau. Διαφορετικά αν το j-οστο στοιχείο της l-οστης γραμμής είναι διάφορο του μηδενός αλλάζουμε την βάση (χρησιμοποιώντας αυτό το στοιχείο σαν πιλότο) εξάγοντας από την βάση την l-οστη βασική μεταβλητή κι εισάγοντας την μεταβλητή x_j. Επαναλαμβάνουμε αυτή την διαδικασία μέχρι να εξάγουμε από τη βάση όλες τις τεχνητές μεταβλητές.

Φάση ΙΙ

1. Χρησιμοποιούμε την τελική βάση και το tableau της Φάσης Ι ως την αρχική βάση και το αρχικό tableau της Φάσης ΙΙ.
2. Αλλάζουμε τους συντελεστές κόστους της αντικειμενικής συνάρτησης επαναφέροντας τις τιμές του αρχικού προβλήματος. Με βάση αυτούς του συντελεστές κέρδους επανεκτιμούμε τα στοιχεία της μηδενικής γραμμής, δηλαδή υπολογίζουμε τη νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και τις νέες μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους.
3. Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Simplex στο αρχικό πρόβλημα.

Ο αλγόριθμος δύο φάσεων είναι ένας πλήρης αλγόριθμος με την έννοια ότι αντιμετωπίζει όλα τα πιθανά ενδεχόμενα:

α) Αν το πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις αυτό ανιχνεύεται στο τέλος της Φάσης Ι.

β) Αν το πρόβλημα έχει λύσεις αλλά υπάρχουν πλεοναστικοί περιορισμοί αυτό γίνεται αντιληπτό και διορθώνεται με την διαγραφή των αντίστοιχων γραμμών στο tableau στο τέλος της Φάσης Ι.

γ) Αν το βέλτιστο κέρδος δεν είναι φραγμένο και είναι ίσο με $+\infty$, αυτό γίνεται αντιληπτό στη Φάση ΙΙ.

δ) Διαφορετικά η Φάση ΙΙ τερματίζει με την εκτίμηση της βέλτιστης λύσης.

Παράδειγμα 3.8

Έχουμε το ακόλουθο ΠΓΠ

$$z = -\max(-x_1 - x_2 - x_3)$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$
$$-x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2$$
$$4x_2 + 9x_3 = 5$$
$$3x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Βρείτε τη βέλτιστη λύση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simplex δύο φάσεων.

Λύση

Βλέπουμε ότι ο πίνακας A δεν περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα έτσι χρησιμοποιούμε τη μέθοδο δύο φάσεων για να λύσουμε το πρόβλημα. Προκειμένου να βρούμε μια αρχική βασική εφικτή λύση εισάγουμε τρεις νέες τεχνητές μεταβλητές και έχουμε το ακόλουθο βοηθητικό πρόβλημα:

$$z = -\max(-x_5 - x_6 - x_7)$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3$$
$$-x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 2$$
$$4x_2 + 9x_3 + x_7 = 5$$
$$3x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Εδώ αρκούν τρεις τεχνητές μεταβλητές αφού η τέταρτη στήλη του μοναδιαίου πίνακα υπήρχε στον πίνακα A και ήταν η στήλη $\underline{A}_4$. Γενικά εισάγουμε τόσες τεχνητές μεταβλητές όσες χρειαζόμαστε για να σχηματίσουμε τον μοναδιαίο πίνακα.

Παρατηρούμε ότι έχουμε μια βασική εφικτή λύση του βοηθητικού προβλήματος αν θέσουμε $[x_5, x_6, x_7, x_4] = \underline{b}^T = [3, 2, 5, 1]$ και τις υπόλοιπες μεταβλητές ίσες με μηδέν. Ο αντίστοιχος βασικός πίνακας είναι ο μοναδιαίος και $\underline{c}_B^T = [-1, -1, -1, 0]$. Εκτιμούμε τις μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους για τις υπόλοιπες μη βασικές μεταβλητές κι έχουμε:

			0	0	0	0	− 1	− 1	− 1	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	θ
$\underline{A}_5$	− 1	3	1	2	3	0	1	0	0	1
$\underline{A}_6$	− 1	2	− 1	2	6	0	0	1	0	2/6
$\underline{A}_7$	− 1	5	0	4	9	0	0	0	1	5/9
$\underline{A}_4$	0	1	0	0	3	1	0	0	0	1/3
		10	0	8	$\underline{18}$	0	0	0	0	

Βλέπουμε ότι υπάρχει ισοπαλία στο κριτήριο εξόδου από την βάση που σημαίνει ότι στο επόμενο tableau θα έχουμε εκφυλισμένη λύση, γι αυτό χρησιμοποιούμε τον κανόνα οδήγησης του Bland. Σύμφωνα με αυτόν τον κανόνα οδήγησης επιλέγουμε το μικρότερο j για το οποίο $\bar{c}_j > 0$ και εισάγουμε την στήλη $\underline{A}_j$ στη βάση.

			0	0	0	0	−1	−1	−1	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	θ
$\underline{A}_5$	−1	3	1	2	3	0	1	0	0	3/2
$\underline{A}_6$	−1	2	−1	**2**	6	0	0	1	0	$\underline{2/2}$
$\underline{A}_7$	−1	5	0	4	9	0	0	0	1	5/4
$\underline{A}_4$	0	1	0	0	3	1	0	0	0	–
		10	0	$\underline{8}$	18	0	0	0	0	

Συνεπώς επιλέγουμε να εισάγουμε στις βασικές μεταβλητές την x_2. Υπολογίζουμε τους λόγους $x_{B(i)}/u_i$ και βλέπουμε ότι εξέρχεται από την βάση η $\underline{A}_6$:

			0	0	0	0	−1	−1	−1	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	θ
$\underline{A}_5$	−1	1	**2**	0	−3	0	1	−1	0	$\underline{1/2}$
$\underline{A}_2$	0	1	−1/2	1	3	0	0	1/2	0	–
$\underline{A}_7$	−1	1	2	0	−3	0	0	−2	1	1/2
$\underline{A}_4$	0	1	0	0	3	1	0	0	0	–
		2	$\underline{4}$	0	−6	0	0	−4	0	

Τώρα εισάγουμε στη βάση την x_1 αφού είναι η μόνη μεταβλητή με θετική μοναδιαία αύξηση κέρδους και εξάγουμε την x_5 σύμφωνα και με τον κανόνα του μικρότερου δείκτη:

			0	0	0	0	−1	−1	−1	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	θ
$\underline{A}_1$	0	1/2	1	0	−3/2	0	1/2	−1/2	0	–
$\underline{A}_2$	0	5/4	0	1	9/4	0	1/4	1/4	0	5/9
$\underline{A}_7$	−1	0	0	0	0	0	−1	−1	1	–
$\underline{A}_4$	0	1	0	0	**3**	1	0	0	0	$\underline{1/3}$
		0	0	0	$\underline{0}$	0	−2	−2	0	

Σε αυτή την επανάληψη βλέπουμε ότι ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας αλλά υπάρχει μια μη βασική μεταβλητή, η x_3, με μοναδιαία αύξηση κέρδους μηδενική πράγμα που σημαίνει ότι έχουμε άπειρες βέλτιστες λύσεις κι ότι αν εισάγουμε την εισάγουμε στη βάση την x_3 η λύση θα είναι επίσης βέλτιστη. Σε αυτή την περίπτωση εξάγουμε την x_4:

			0	0	0	0	−1	−1	−1	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	θ
$\underline{A}_1$	0	1	1	0	0	1/2	1/2	−1/2	0	
$\underline{A}_2$	0	1/2	0	1	0	−3/4	1/4	1/4	0	
$\underline{A}_7$	−1	0	0	0	0	0	−1	−1	1	
$\underline{A}_3$	0	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	
		0	0	0	0	0	−2	−2	0	

Βλέπουμε ότι στα δύο τελευταία tableau που αντιστοιχούν σε βέλτιστες λύσεις του βοηθητικού προβλήματος η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μηδέν που σημαίνει ότι το αρχικό πρόβλημα έχει λύση. Δυστυχώς όμως και στα δύο tableau υπάρχει μεταξύ των βασικών μεταβλητών η x_7, που είναι τεχνητή μεταβλητή, αλλά είναι ίση με το μηδέν Προφανώς πρέπει να την βγάλουμε από την βάση πριν προχωρήσουμε στην επόμενη φάση. Η x_7 είναι η τρίτη βασική μεταβλητή. Παρατηρούμε ότι όλα τα στοιχεία της τρίτης γραμμής που αντιστοιχούν σε πραγματικές μεταβλητές του αρχικού προβλήματος, δηλαδή τα τέσσερα πρώτα είναι όλα μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι οι γραμμές του πίνακα A δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες κι άρα υπάρχουν πλεοναστικοί περιορισμοί. Όντως αν παρατηρήσουμε το αρχικό πρόβλημα θα δούμε ότι ο τρίτος περιορισμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο πρώτων. Διαγράφουμε λοιπόν την γραμμή, που αντιστοιχεί στην x_7 κι οδηγούμαστε στο επόμενο tableau, που είναι το αρχικό της δεύτερης φάσης του αλγορίθμου:

			−1	−1	−1	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	θ
$\underline{A}_1$	−1	1	1	0	0	1/2	2
$\underline{A}_2$	−1	1/2	0	1	0	−3/4	–
$\underline{A}_3$	−1	1/3	0	0	1	**1/3**	$\underline{1}$
		11/6	0	0	0	$\underline{1/12}$	

Αντικαθιστούμε τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης με αυτούς του αρχικού προβλήματος υπολογίζουμε τα στοιχεία της μηδενικής γραμμής και συνεχίζουμε εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Simplex. Βλέπουμε ότι το $\overline{c}_4 = 1/12 > 0$ άρα η λύση που έχουμε δεν είναι η βέλτιστη. Συνεχίζουμε εισάγοντας στην βάση την x_4 κι εξάγοντας από αυτήν την x_3:

			−1	−1	−1	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	θ
$\underline{A}_1$	−1	1/2	1	0	−3/2	0	2
$\underline{A}_2$	−1	5/4	0	1	9/4	0	–
$\underline{A}_4$	0	1	0	0	3	1	1
		7/4	0	0	−1/4	0	

Το tableau που οδηγούμαστε είναι το τελικό αφού ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας. Η βέλτιστη λύση είναι η $\underline{x}'^T = [1/2, 5/4, 1]$.

3.5.2 Η μέθοδος του μεγάλου *M*

Εδώ θα παρουσιάσουμε μια εναλλακτική μέθοδο εξεύρεσης αρχικής βασικής εφικτής λύσης, τη μέθοδο του μεγάλου *M*. Η μέθοδος αυτή συνδυάζει τις δύο φάσεις της προηγούμενης μεθόδου σε μία. Πάλι βέβαια εισάγουμε τις απαραίτητες τεχνητές μεταβλητές, όμως εδώ δεν χρησιμοποιούμε κάποιο βοηθητικό πρόβλημα για να εξάγουμε αυτές από την βάση. Η βασική ιδέα είναι ότι χρησιμοποιούμε ως αντικειμενική συνάρτηση την

$$\underline{c}^T\underline{x} + M\underline{c}_u{}^T\underline{z}$$

όπου $\underline{c}_u{}^T = [1, ..., 1]$, $\underline{c}_u \in R^m$, $\underline{z}$ είναι το διάνυσμα των τεχνητών μεταβλητών και *M* είναι μια πολύ μεγάλη αρνητική σταθερά. Εφόσον το *M* είναι αρκετά μεγάλο (μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M = -\infty$), αν το αρχικό μας πρόβλημα έχει εφικτές λύσεις και το βέλτιστο κέρδος είναι πεπερασμένο όλες οι τεχνητές μεταβλητές μηδενίζονται κι οδηγούμαστε στο αρχικό μας πρόβλημα. Αν στη βέλτιστη λύση υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές μη μηδενικές τότε το αρχικό ΠΓΠ δεν έχει εφικτές λύσεις. Προφανώς δεν υπάρχει λόγος να ορίσουμε μια συγκεκριμένη τιμή του *M* στο tableau. Το αφήνουμε ως μια μεταβλητή, η οποία πάντοτε είναι μικρότερη από κάθε άλλη ποσότητα με την οποία συγκρίνεται.

Παράδειγμα 3.9

Έχουμε το ίδιο ΠΓΠ με το προηγούμενο παράδειγμα

$$\begin{aligned} z = -\max(-x_1 - x_2 - x_3)& \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 \qquad &= 2 \\ 4x_2 + 9x_3 \qquad &= 5 \\ 3x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0& \end{aligned}$$

Βρείτε τη βέλτιστη λύση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μεγάλου *M*.

Λύση

Με βάση την παρατήρηση που κάναμε στο προηγούμενο παράδειγμα εισάγουμε τρεις νέες τεχνητές μεταβλητές κι έχουμε το ακόλουθο βοηθητικό ΠΓΠ:

$$z = -\max(-x_1 - x_2 - x_3 + Mx_5 + Mx_6 + Mx_7)$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 \qquad\qquad & = & 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 \qquad\qquad + x_6 \qquad & = & 2 \\ 4x_2 + 9x_3 \qquad\qquad\qquad + x_7 & = & 5 \\ 3x_3 + x_4 \qquad\qquad\qquad\qquad & = & 1 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Έχουμε μια βασική εφικτή λύση του βοηθητικού προβλήματος αν θέσουμε $[x_5, x_6, x_7, x_4] = \underline{b}^T = [3, 2, 5, 1]$ και τις υπόλοιπες μεταβλητές ίσες με μηδέν. Ο αντίστοιχος βασικός πίνακας είναι ο μοναδιαίος και $\underline{c_B}^T = [M, M, M, 0]$. Εκτιμούμε τα μοναδιαία κέρδη για κάθε τις υπόλοιπες μη βασικές μεταβλητές κι έχουμε:

			-1	-1	-1	0	M	M	M	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A_1}$	$\underline{A_2}$	$\underline{A_3}$	$\underline{A_4}$	$\underline{A_5}$	$\underline{A_6}$	$\underline{A_7}$	θ
$\underline{A_5}$	M	3	1	2	3	0	1	0	0	1
$\underline{A_6}$	M	2	-1	2	6	0	0	1	0	1/3
$\underline{A_7}$	M	5	0	4	9	0	0	0	1	5/9
$\underline{A_4}$	0	1	0	0	**3**	1	0	0	0	$\underline{1/3}$
		$-10M$	-1	$-1-8M$	$\underline{-1-18M}$	0	0	0	0	

Επιλέγουμε να εισάγουμε στις βασικές μεταβλητές την x_3 αφού το $\overline{c}_3 = -1 - 18M$ είναι μεγαλύτερο από το $\overline{c}_3 = -1 - 8M > 0$. Υπολογίζουμε τους λόγους $x_{B(i)}/u_i$ και βλέπουμε ότι τον ελάχιστο λόγο τον έχουμε για x_4 και x_6 οπότε με βάση τον κανόνα του μικρότερου δείκτη επιλέγουμε να εξάγουμε από τις βασικές μεταβλητές την x_4. Αξίζει να σημειωθεί ότι εφόσον υπάρχει ισοβαθμία στο κριτήριο εισόδου αναμένουμε εκφυλισμένη λύση στο επόμενο tableau:

			-1	-1	-1	0	M	M	M	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A_1}$	$\underline{A_2}$	$\underline{A_3}$	$\underline{A_4}$	$\underline{A_5}$	$\underline{A_6}$	$\underline{A_7}$	θ
$\underline{A_5}$	M	2	1	2	0	-1	1	0	0	
$\underline{A_6}$	M	0	-1	2	0	-2	0	1	0	
$\underline{A_7}$	M	2	0	4	0	-3	0	0	1	
$\underline{A_3}$	-1	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	
		$1/3-4M$	-1	$-8M-1$	0	$6M-1/3$	0	0	0	

Σε αυτό το παράδειγμα χρησιμοποιούμε την απλοποιημένη μέθοδο διαταραχής του Charnes σύμφωνα με την οποία αντικαθιστούμε το μηδέν της βασικής μεταβλητής με ένα αυθαίρετα μικρό ε και συνεχίζουμε κανονικά μέχρι να φθάσουμε στο τελικό tableau οπότε και θέτουμε $\varepsilon = 0$. Κατά συνέπεια το επόμενο tableau διαμορφώνεται ως εξής:

			-1	-1	-1	0	M	M	M	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A_1}$	$\underline{A_2}$	$\underline{A_3}$	$\underline{A_4}$	$\underline{A_5}$	$\underline{A_6}$	$\underline{A_7}$	θ
$\underline{A_5}$	M	2	1	2	0	-1	1	0	0	1
$\underline{A_6}$	M	ε	-1	**2**	0	-2	0	1	0	$\underline{\varepsilon/2}$
$\underline{A_7}$	M	2	0	4	0	-3	0	0	1	2
$\underline{A_3}$	-1	$1/3$	0	0	1	$1/3$	0	0	0	$-$
		$1/3-(4+\varepsilon)M$	-1	$\underline{-8M-1}$	0	$6M-1/3$	0	0	0	

Τώρα εισάγουμε στη βάση την x_2 αφού το $\overline{c}_2 = -1-8M > 0$ ενώ τον ελάχιστο λόγο $\theta' = \varepsilon/2$ τον έχουμε για x_6:

			-1	-1	-1	0	M	M	M	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A_1}$	$\underline{A_2}$	$\underline{A_3}$	$\underline{A_4}$	$\underline{A_5}$	$\underline{A_6}$	$\underline{A_7}$	θ
$\underline{A_5}$	M	$2-\varepsilon$	2	0	0	1	1	-1	0	$1-\varepsilon/2$
$\underline{A_2}$	-1	$\varepsilon/2$	$-1/2$	1	0	-1	0	$1/2$	0	$-$
$\underline{A_7}$	M	$2-2\varepsilon$	**2**	0	0	1	0	-2	1	$\underline{1-\varepsilon}$
$\underline{A_3}$	-1	$1/3$	0	0	1	$1/3$	0	0	0	$-$
		$\varepsilon/2+1/3-(4-3\varepsilon)M$	$\underline{-4M-3/2}$	0	0	$-2M-2/3$	0	$4M+1/2$	0	

Σε αυτή την επανάληψη εισάγουμε στη βάση την x_1 και βγάζουμε την x_7. Το επόμενο tableau είναι:

			-1	-1	-1	0	M	M	M	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A_1}$	$\underline{A_2}$	$\underline{A_3}$	$\underline{A_4}$	$\underline{A_5}$	$\underline{A_6}$	$\underline{A_7}$	θ
$\underline{A_5}$	M	ε	0	0	0	0	1	1	-1	$-$
$\underline{A_2}$	-1	$1/2$	0	1	0	$-3/4$	0	0	$1/4$	$-$
$\underline{A_1}$	-1	$1-\varepsilon$	1	0	0	$1/2$	0	-1	$1/2$	$2-2\varepsilon$
$\underline{A_3}$	-1	$1/3$	0	0	1	**$1/3$**	0	0	0	$\underline{1}$
		$11/6-\varepsilon$	0	0	0	$\underline{19/12}$	0	-1	$-1/4$	

Εισάγουμε στη βάση την x_4 και εξάγουμε την x_3. Το νέο tableau είναι:

			-1	-1	-1	0	M	M	M	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A_1}$	$\underline{A_2}$	$\underline{A_3}$	$\underline{A_4}$	$\underline{A_5}$	$\underline{A_6}$	$\underline{A_7}$	θ
$\underline{A_5}$	M	ε	0	0	0	0	1	1	-1	
$\underline{A_2}$	-1	$5/4$	0	1	$9/4$	0	0	0	$1/4$	
$\underline{A_1}$	-1	$1/2-\varepsilon$	1	0	$-3/2$	0	0	-1	$1/2$	
$\underline{A_4}$	0	1	0	0	3	1	0	0	0	
		$7/4-\varepsilon-\varepsilon M$	0	0	$-1/4$	0	0	-1	$2M+3/4$	

Τώρα όλα τα στοιχεία της μηδενικής γραμμής είναι μικρότερα ή ίσα του μηδενός οπότε έχουμε οδηγηθεί στην βέλτιστη λύση του βοηθητικού προβλήματος. Θέτουμε το ε ίσο με το μηδέν κι έχουμε:

			-1	-1	-1	0	M	M	M	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	θ
$\underline{A}_5$	M	0	0	0	0	0	1	1	-1	
$\underline{A}_2$	-1	5/4	0	1	9/4	0	0	0	1/4	
$\underline{A}_1$	-1	1/2	1	0	$-3/2$	0	0	-1	1/2	
$\underline{A}_4$	0	1	0	0	3	1	0	0	0	
		7/4	0	0	$-1/4$	0	0	-1	$2M+3/4$	

Αφού όλες οι τεχνητές μεταβλητές είναι ίσες με το μηδέν η λύση αυτή είναι βέλτιστη και για το αρχικό πρόβλημα. Η βέλτιστη λύση λοιπόν είναι $\underline{x}'^T = [1/2, 5/4, 0, 1]$.

Κεφάλαιο 4

Δυϊκή θεωρία

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε την έννοια του δυϊκού προβλήματος. Η δυϊκή θεωρία ασχολείται με τη μελέτη αυτού του προβλήματος. Η σημασία της δυϊκής θεωρίας είναι μεγάλη καθώς υπάρχουν πολλές εφαρμογές που σχετίζονται με αυτή, συμβάλλει στην βαθύτερη κατανόηση της θεωρίας του γραμμικού προγραμματισμού, ενώ έχει οδηγήσει και στην ανάπτυξη μιας νέας μεθόδου επίλυσης ΠΓΠ την δυϊκή Simplex.

Η δυϊκή θεωρία μπορεί να ειδωθεί σαν μια επέκταση της θεωρίας πολλαπλασιαστών Lagrange σε προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Οι πολλαπλασιαστές Lagrange χρησιμοποιούνται για την βελτιστοποίηση συναρτήσεων με ισοτικούς περιορισμούς. Για παράδειγμα αν θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$z = \max(-x_1^2 - x_2^2)$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

εισάγουμε τον πολλαπλασιαστή Lagrange λ και σχηματίζουμε την συνάρτηση

$$L(x_1, x_2, \lambda) = -x_1^2 - x_2^2 + \lambda(1 - x_1 - x_2).$$

Στην συνέχεια μεγιστοποιούμε την $L(x_1, x_2, \lambda)$ χωρίς να λάβουμε υπόψη μας περιορισμούς. Αυτό επιτυγχάνεται αν βρούμε τα x_1, x_2, για τα οποία μηδενίζονται οι μερικές παράγωγοι της $L(x_1, x_2, \lambda)$ ως προς x_1, x_2. Η βέλτιστη λύση του παραπάνω προβλήματος είναι $x_1 = x_2 = \lambda/2$ και όπως βλέπουμε είναι συνάρτηση του λ. Αντικαθιστώντας την παραπάνω λύση στον περιορισμό $x_1 + x_2 = 1$, έχουμε ότι $\lambda = 1$ και άρα $x_1 = x_2 = 1/2$.

Η βασική ιδέα των πολλαπλασιαστών Lagrange είναι η ακόλουθη. Αντί να απαιτούμε την αυστηρή τήρηση των περιορισμών, επιτρέπουμε την παραβίαση τους και εισάγουμε τους αντίστοιχους πολλαπλασιαστές Lagrange, που εκφράζουν μια μορφή ποινής που προκύπτει από την παραβίαση των περιορισμών. Έτσι οδηγούμαστε στην βελτιστοποίηση της συνάρτησης L χωρίς περιορισμούς. Με την κατάλληλη επιλογή των πολλαπλασιαστών Lagrange ($\lambda = 1$ στο παραπάνω παράδειγμα) οι λύσεις των δύο προβλημάτων ταυτίζονται. Η επιλογή των πολλαπλασιαστών γίνεται έτσι ώστε να ικανοποιούνται αυστηρά οι περιορισμοί του αρχικού προβλήματος, από την λύση του προβλήματος χωρίς περιορισμούς.

Η ιδέα των πολλαπλασιαστών Lagrange εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο στα ΠΓΠ. Εισάγουμε μεταβλητές ποινής για κάθε περιορισμό και προσπαθούμε να καθορίσουμε τις τιμές τους για τις οποίες βρίσκουμε τη βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος. Αποδεικνύεται, όπως θα δούμε στη συνέχεια, ότι οι τιμές των μεταβλητών ποινής προκύπτουν από τη λύση ενός νέου ΠΓΠ, που καλείται δυϊκό του αρχικού προβλήματος.

Θεωρούμε το ακόλουθο ΠΓΠ σε κανονική μορφή

$$z = \max(\underline{c}^T\underline{x})$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

το οποίο καλούμε **πρωτεύων** κι έστω ότι έχει βέλτιστη λύση που είναι η $\underline{x}'$. Ακολουθώντας τη λογική των πολλαπλασιαστών Lagrange εισάγουμε ένα πρόβλημα όπου οι περιορισμοί $A\underline{x} = \underline{b}$ αντικαθίστανται από τη συνάρτηση ποινής $\underline{\upsilon}^T(\underline{b} - A\underline{x})$, όπου $\underline{\upsilon}$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών ποινής και ανήκει στον R^m, όπως και το $\underline{b}$. Έχουμε τότε το πρόβλημα

$$z = \max[\underline{c}^T\underline{x} + \underline{\upsilon}^T(\underline{b} - A\underline{x})]$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Έστω $g(\underline{\upsilon})$ η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του νέου προβλήματος σαν συνάρτηση του διανύσματος ποινών $\underline{\upsilon}$. Το νέο πρόβλημα, αφού δεν απαιτεί την αυστηρή ικανοποίηση των περιορισμών του αρχικού προβλήματος, θα πρέπει να επιτυγχάνει καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, οπότε θα έχουμε

$$g(\underline{\upsilon}) = \max_{\underline{x} \geq \underline{0}}[\underline{c}^T\underline{x} + \underline{\upsilon}^T(\underline{b} - A\underline{x})] \geq \underline{c}^T\underline{x}' + \underline{\upsilon}^T(\underline{b} - A\underline{x}') = \underline{c}^T\underline{x}' \qquad (4.1)$$

αφού η $\underline{x}'$είναι λύση του πρωτεύοντος προβλήματος. Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι το νέο πρόβλημα για κάθε τιμή του $\underline{\upsilon}$ μας δίδει ένα άνω όριο $g(\underline{\upsilon})$ του βέλτιστου κέρδους $\underline{c}^T\underline{x}'$. Το πρόβλημα $\min_{\underline{\upsilon}}[g(\underline{\upsilon})]$ μπορεί να ειδωθεί σαν το πρόβλημα αναζήτησης του αυστηρότερου άνω ορίου του κέρδους του πρωτεύοντος προβλήματος. Το πρόβλημα αυτό καλείται **δυϊκό** κι ένα από τα θεμελιώδη αποτελέσματα της δυϊκής θεωρίας είναι ότι, η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος, είναι ίση με την βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος. Αυτό πρακτικά μας λέει ότι τελικά δεν συμφέρει η παραβίαση των περιορισμών $A\underline{x} = \underline{b}$.

Από την σχέση (4.1) έχουμε ότι η $g(\underline{\upsilon})$ μπορεί να γίνει

$$g(\underline{\upsilon}) = \max_{\underline{x} \geq \underline{0}} [\underline{c}^T \underline{x} + \underline{\upsilon}^T(\underline{b} - A\underline{x})] = \max_{\underline{x} \geq \underline{0}} [(\underline{c}^T - \underline{\upsilon}^T A)\underline{x}] + \underline{\upsilon}^T \underline{b}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\max_{\underline{x} \geq \underline{0}} [(\underline{c}^T - \underline{\upsilon}^T A)\underline{x}] = \begin{cases} 0, & \text{αν } \underline{c}^T - \underline{\upsilon}^T A \leq \underline{0}^T, \\ +\infty, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Για την ελαχιστοποίηση της $g(\underline{\upsilon})$ μας ενδιαφέρουν οι τιμές του $\underline{\upsilon}$ για τις οποίες η $g(\underline{\upsilon})$ δεν απειρίζεται. Αυτό σημαίνει ότι το δυϊκό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το παρακάτω ΠΓΠ

$$z = \min(\underline{\upsilon}^T \underline{b})$$

$$\underline{\upsilon}^T A \geq \underline{c}^T.$$

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι οι περιορισμοί του πρωτεύοντος είναι της μορφής $A\underline{x} = \underline{b}$ ενώ στο δυϊκό δεν έχουμε περιορισμούς μη αρνητικότητας για το διάνυσμα $\underline{\upsilon}$. Αν αντιθέτως οι περιορισμοί του πρωτεύοντος ήταν της μορφής $A\underline{x} \geq \underline{b}$, τότε θα μπορούσαμε να τους αντικαταστήσουμε με τους ισοδύναμους περιορισμούς $A\underline{x} - \underline{s} = \underline{b}$, $\underline{s} \geq \underline{0}$, όπου $\underline{s} \in R^m$, είναι το διάνυσμα των περιθωρίων μεταβλητών. Οι ισοτικοί περιορισμοί μπορούν να περιγραφούν ισοδύναμα στη μορφή

$$[A \mid -I]\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{s} \end{bmatrix} = \underline{b},$$

και οι περιορισμοί του δυϊκού σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\underline{\upsilon}^T [A \mid -I] \geq [\underline{c}^T \mid \underline{0}^T],$$

ή ισοδύναμα

$$\underline{\upsilon}^T A \geq \underline{c}^T, \underline{\upsilon} \leq \underline{0}.$$

Αν τέλος το διάνυσμα $\underline{x}$ δεν περιορίζεται από τους περιορισμούς μη αρνητικότητας, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\max_{\underline{x}} [(\underline{c}^T - \underline{\upsilon}^T A)\underline{x}] = \begin{cases} 0, & \text{αν } \underline{c}^T - \underline{\upsilon}^T A = \underline{0}^T, \\ +\infty, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

οδηγούμαστε στους περιορισμούς $\underline{\upsilon}^T A = \underline{c}^T$ του δυϊκού. Στη συνέχεια γενικεύουμε τις προηγούμενες παρατηρήσεις για να παρουσιάσουμε τη γενική μορφή του δυϊκού προβλήματος.

4.1 Η γενική μορφή του δυϊκού προβλήματος

Έστω A ένας πίνακας με γραμμές $\underline{a_i}^T$ και στήλες $\underline{A_j}^T$. Αν δοθεί το παρακάτω πρωτεύων ΠΓΠ

$$z = \max(\underline{c}^T \underline{x})$$

$$\underline{a_i}^T \underline{x} \geq b_i,\ i \in M_1,$$

$$\underline{a_i}^T \underline{x} \leq b_i,\ i \in M_2,$$

$$\underline{a_i}^T \underline{x} = b_i,\ i \in M_3,$$

$$x_j \geq 0,\ j \in N_1,$$

$$x_j \leq 0,\ j \in N_2,$$

$$x_j \in R^n,\ j \in N_3,$$

το δυϊκό του πρόβλημα είναι το ακόλουθο:

$$z = \min(\underline{\upsilon}^T \underline{b})$$

$$\upsilon_i \leq 0,\ i \in M_1,$$

$$\upsilon_i \geq 0,\ i \in M_2,$$

$$\upsilon_i \in R^n,\ i \in M_3,$$

$$\underline{\upsilon}^T \underline{A_j} \geq c_j,\ j \in N_1,$$

$$\underline{\upsilon}^T \underline{A_j} \leq c_j,\ j \in N_2,$$

$$\underline{\upsilon}^T \underline{A_j} = c_j,\ j \in N_3.$$

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για κάθε περιορισμό στο πρωτεύων πρόβλημα εισάγουμε μια μεταβλητή στο δυϊκό κι ακόμη για κάθε μεταβλητή του πρωτεύοντος εισάγουμε έναν περιορισμό στο δυϊκό. Υπάρχει δηλαδή μια αντιστοιχία μεταξύ των μεταβλητών του πρωτεύοντος και των περιορισμών του δυϊκού και το αντίστροφο. Ανάλογα με το αν ένας περιορισμός του πρωτεύοντος είναι ισοτικός ή ανισοτικός η αντίστοιχη μεταβλητή του δυϊκού παίρνει τιμές σε όλο το R ή έχει περιορισμούς που καθορίζουν το πρόσημο της. Ακόμη ανάλογα με το αν μια μεταβλητή στο πρωτεύον περιορίζεται από περιορισμούς μη αρνητικότητας, ή μη θετικότητας, ή τίποτα από τα δύο, έχουμε αντίστοιχα, περιορισμούς ανισοτικούς (με φορά $\geq$ ή $\leq$ αντίστοιχα) ή ισοτικούς αντίστοιχα στο δυϊκό πρόβλημα. Γενικότερα η σχέση μεταξύ της φοράς των περιορισμών στο ένα πρόβλημα και του προσήμου των μεταβλητών στο άλλο συνοψίζεται στον ακόλουθο πίνακα:

Πρωτεύων		**Δυϊκό**	
αντικειμενική συνάρτηση	max	min	αντικειμενική συνάρτηση
περιορισμοί	$\leq b_i$ $\geq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 $\in R$	μεταβλητές
μεταβλητές	≥ 0 ≤ 0 $\in R$	$\geq c_i$ $\leq c_i$ $= c_i$	περιορισμοί

Πίνακας 4.1: Σχέση μεταβλητών και περιορισμών πρωτεύοντος και δυϊκού.

Αν ξεκινήσουμε από ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, μπορούμε εύκολα να το μετατρέψουμε σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μεγιστοποίησης και να ορίσουμε στη συνέχεια το δυϊκό του σύμφωνα με τους κανόνες που είδαμε παραπάνω. Γενικά για να αποφύγουμε τη σύγχυση θα θεωρούμε ως πρωτεύων το πρόβλημα μεγιστοποίησης και το πρόβλημα ελαχιστοποίησης ως το δυϊκό του.

Ένα ΠΓΠ και το δυϊκό του μπορούν να εκφρασθούν πιο κομψά και συνοπτικά σε μορφή πινάκων, αν υποθέσουμε ότι οι περιορισμοί του πρωτεύοντος έχουν μια συγκεκριμένη μορφή. Για παράδειγμα μπορούμε να έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Πρωτεύων	**Δυϊκό**
$\max(\underline{c}^T\underline{x})$	$\min(\underline{\upsilon}^T\underline{b})$
$A\underline{x} = \underline{b}$	$\underline{\upsilon}^T A \geq \underline{c}^T$
$\underline{x} \geq \underline{0}$	
$\max(\underline{c}^T\underline{x})$	$\min(\underline{\upsilon}^T\underline{b})$
$A\underline{x} \leq \underline{b}$	$\underline{\upsilon}^T A = \underline{c}^T$
	$\underline{\upsilon}^T \geq \underline{0}^T$

Παράδειγμα 4.1

Έστω το ακόλουθο ΠΓΠ

$$
\begin{aligned}
z = \max(-\,x_1 - 2x_2 - 3x_3)& \\
-x_1 + 3x_2 \qquad\quad &= 5 \\
2x_1 - \; x_2 + 3x_3 &\ge 6 \\
x_3 &\le 4 \\
x_1 \ge 0,\, x_2 \le 0,\, x_3 &\in R
\end{aligned}
$$

α) Βρείτε το δυϊκό του.

β) Στη συνέχεια βρείτε το δυϊκό του δυϊκού.

Λύση

Το δυϊκό είναι το ακόλουθο πρόβλημα

$$
\begin{aligned}
z = \min(5\upsilon_1 + 6\upsilon_2 + 4\upsilon_3)& \\
-\,\upsilon_1 + 2\upsilon_2 \qquad\quad &\ge -\,1 \\
3\upsilon_1 - \; \upsilon_2 + \qquad &\le -\,2 \\
3\upsilon_2 + \; \upsilon_3 &= -\,3 \\
\upsilon_1 \in R,\, \upsilon_2 \le 0,\, \upsilon_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Μετασχηματίζουμε το δυϊκό σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μεγιστοποίησης και μετονομάζουμε τις μεταβλητές υ_1, υ_2 και υ_3 σε x_1, x_2 και x_3 αντίστοιχα. Οπότε έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα που είναι ισοδύναμο του δυϊκού και το δυϊκό του δυϊκού:

$$
\begin{aligned}
z = -\max(-5x_1 - 6x_2 - 4x_3)& \\
-\,x_1 + 2x_2 \qquad\quad &\ge -\,1 \\
3x_1 - \; x_2 + \qquad &\le -\,2 \\
3x_2 + \; x_3 &= -\,3 \\
x_1 \in R,\, x_2 \le 0,\, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
z = -\min(-\,\upsilon_1 - 2\upsilon_2 - 3\upsilon_3)& \\
-\,\upsilon_1 + 3\upsilon_2 \qquad\quad &= -\,5 \\
2\upsilon_1 - \; \upsilon_2 + 3\upsilon_3 &\le -\,6 \\
+ \; \upsilon_3 &\ge -\,4 \\
\upsilon_1 \le 0,\, \upsilon_2 \ge 0,\, \upsilon_3 &\in R
\end{aligned}
$$

Αν στο τελευταίο πρόβλημα θέσουμε $x_1 = -\,\upsilon_1$, $x_2 = -\,\upsilon_2$, $x_3 = -\,\upsilon_3$, το μετατρέψουμε από πρόβλημα ελαχιστοποίησης σε πρόβλημα μεγιστοποίησης και πολλαπλασιάσουμε τους περιορισμούς με $-\,1$ θα έχουμε το ισοδύναμο πρόβλημα

$$
\begin{aligned}
z = \max(-\,x_1 - 2x_2 - 3x_3)& \\
-x_1 + 3x_2 \qquad\quad &= 5 \\
2x_1 - \; x_2 + 3x_3 &\ge 6 \\
+ \; x_3 &\le 4
\end{aligned}
$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο ΠΓΠ είναι το πρόβλημα που μας δόθηκε στην αρχή.

Το προηγούμενο παράδειγμα μας δημιουργεί την υποψία ότι αν έχω ένα πρωτεύων πρόβλημα και το δυϊκό του, τότε το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτεύων. Δηλαδή το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτεύων. Το ακόλουθο θεώρημα επιβεβαιώνει την υποψία μας.

Θεώρημα 4.1: Αν μετατρέψουμε το δυϊκό ενός πρωτεύοντος σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μεγιστοποίησης και στη συνέχεια βρούμε το δυϊκό του, αυτό θα είναι ισοδύναμο με το πρωτεύων.

Απόδειξη

4.2 Το δυϊκό θεώρημα

Είδαμε σε κάποιο από τα παραδείγματα στην αρχή του κεφαλαίου, ότι για προβλήματα σε κανονική μορφή η αντικειμενική συνάρτηση $g(\underline{\upsilon})$ ενός δυϊκού προβλήματος μας δίδει ένα άνω φράγμα του βέλτιστου κέρδους του πρωτεύοντος. Αυτή η ιδιότητα ισχύει γενικά όπως φαίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.2: Αν $\underline{x}$ είναι μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος ΠΓΠ και $\underline{\upsilon}$ μια εφικτή λύση του δυϊκού του, τότε

$$\underline{\upsilon}^T \underline{b} \geq \underline{c}^T \underline{x}.$$

Απόδειξη

Το προηγούμενο θεώρημα μας προσφέρει χρήσιμες πληροφορίες για τη σχέση ανάμεσα στο πρωτεύων και το δυϊκό. Για παράδειγμα από το Θεώρημα 4.2 προκύπτει το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 4.1:

α) Αν το βέλτιστο κέρδους του πρωτεύοντος είναι $+\infty$, τότε το δυϊκό δεν έχει λύση.

β) Αν η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού είναι $-\infty$, τότε το πρωτεύων δεν έχει λύση.

Απόδειξη

Ένα ακόμη αποτέλεσμα που προκύπτει εύκολα από το Θεώρημα 4.2 είναι το εξής.

Πόρισμα 4.2: Έστω $\underline{x}$ και $\underline{\upsilon}$ εφικτές λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού αντίστοιχα. Υποθέτουμε ακόμη ότι $\underline{\upsilon}^T\underline{b} = \underline{c}^T\underline{x}$. Τότε τα $\underline{x}$ και $\underline{\upsilon}$ είναι βέλτιστες λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού αντίστοιχα.

Απόδειξη Πορίσματος 4.2

Έστω $\underline{x}$ και $\underline{\upsilon}$ εφικτές λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει ότι $\underline{\upsilon}^T\underline{b} = \underline{c}^T\underline{x}$. Από το Θεώρημα 4.2 έχουμε ότι για κάθε εφικτή λύση του πρωτεύοντος $\underline{z}$ ισχύει η σχέση $\underline{c}^T\underline{x} = \underline{\upsilon}^T\underline{b} \geq \underline{c}^T\underline{z}$, που αποδεικνύει ότι η $\underline{x}$ είναι βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος. Όμοια αποδεικνύεται ότι η $\underline{\upsilon}$ είναι βέλτιστη λύση του δυϊκού.

Το επόμενο είναι το σημαντικότερο αποτέλεσμα της δυϊκής θεωρίας.

Θεώρημα 4.3: Αν ένα ΠΓΠ έχει βέλτιστη λύση, τότε και το δυϊκό του έχει βέλτιστη λύση και οι αντίστοιχες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων τους είναι ίσες.

Απόδειξη

Η απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος έχει ένα ενδιαφέρον υποπροϊόν. Βλέπουμε ότι όταν είναι γνωστή η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος $\underline{x}$ η βέλτιστη λύση του δυϊκού δίδεται από την σχέση $\underline{\upsilon}^T = \underline{c}_B{}^T B^{-1}$. Όταν λοιπόν γνωρίζουμε τη βέλτιστη λύση και τον αντίστροφο του βασικού πίνακα της βέλτιστης λύσης του πρωτεύοντος, μπορούμε εύκολα να βρούμε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού. Αν έχουμε το αρχικό και το τελικό tableau της Simplex μπορούμε εύκολα να εκτιμήσουμε το B^{-1} ως ακολούθως. Το κυρίως τμήμα του tableau της Simplex αποτελείται από τον πίνακα $B^{-1}[A\,|\,I] = [B^{-1}A\,|\,B^{-1}]$, όπου $[A\,|\,I]$ είναι το αρχικό tableau, αφού όπως έχουμε δει στο tableau της Simplex υπάρχει πάντα ο μοναδιαίος πίνακας I. Βλέπουμε ότι ο αντίστροφος του βασικού πίνακα περιέχεται στο τελικό tableau και αποτελείται από τις στήλες του τελικού tableau που στο αρχικό tableau αποτελούσαν τον I.

Όπως έχουμε δει σε ένα ΠΓΠ υπάρχουν τρία πιθανά ενδεχόμενα:

α) Υπάρχει βέλτιστη λύση.

β) Το πρόβλημα δεν είναι φραγμένο, που σημαίνει ότι η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $+\infty$ ή $-\infty$ (σε προβλήματα ελαχιστοποίησης).

γ) Το πρόβλημα δεν έχει λύσεις.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν θεωρητικά εννέα δυνατά ενδεχόμενα για το πρωτεύων και το δυϊκό του. Από το Θεώρημα 4.3 έχουμε ότι όταν το ένα έχει βέλτιστη λύση το ίδιο ισχύει και για το άλλο. Ακόμη το Πόρισμα 4.1 μας λεει ότι όταν το ένα πρόβλημα δεν είναι φραγμένο το δυϊκό του δεν έχει λύση. Τα υπόλοιπα ενδεχόμενα είναι στην πραγματικότητα αδύνατο να συμβούν. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει όλα τα πιθανά ενδεχόμενα.

	Πρωτέυων		
Δυϊκό	**Ύπαρξη βελτίστου**	**Μη φραγμένο κέρδος**	**Μη ύπαρξη λύσης**
Ύπαρξη βελτίστου	Δυνατό	Αδύνατο	Αδύνατο
Μη φραγμένο κέρδος	Αδύνατο	Αδύνατο	Δυνατό
Μη ύπαρξη λύσης	Αδύνατο	Δυνατό	Δυνατό

Πίνακας 4.2: Όλα τα πιθανά ενδεχόμενα για το πρωτεύων και το δυϊκό.

Μια σημαντική σχέση μεταξύ των βέλτιστων λύσεων του πρωτεύοντος και του δυϊκού παρουσιάζεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.4: Έστω $\underline{x}$ μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος ΠΓΠ και $\underline{\upsilon}$ μια εφικτή λύση του δυϊκού του, τότε τα διανύσματα $\underline{x}$ και $\underline{\upsilon}$ είναι βέλτιστες λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού αντίστοιχα αν και μόνο αν

$$\upsilon_i(b_i - \underline{a_i}^T\underline{x}) = 0,\ \forall i,$$

$$(\underline{\upsilon}^T\underline{A_j} - c_j)x_j. = 0,\ \forall j.$$

Απόδειξη

Η πρώτη συνθήκη του Θεωρήματος 4.4 ικανοποιείται από όλες τις εφικτές λύσεις του πρωτεύοντος όταν αυτό είναι σε κανονική μορφή. Αν δεν είναι σε κανονική μορφή κι έχει ανισοτικούς περιορισμούς της μορφής $\underline{a_i}^T\underline{x} \geq b_i$, τότε είτε θα πρέπει η μεταβλητή υ_i να είναι μηδέν ή ο περιορισμός να είναι ενεργός. Μια διαισθητική ερμηνεία του θεωρήματος είναι ότι ένας περιορισμός, που δεν είναι ενεργός στην βέλτιστη λύση, μπορεί να παραληφθεί χωρίς να επηρεάσει το βέλτιστο κέρδος και δεν υπάρχει λόγος να δώσει κανείς μη μηδενική τιμή στη μεταβλητή ποινής που αντιστοιχεί σε έναν τέτοιο περιορισμό.

Αν το πρωτεύων πρόβλημα είναι σε κανονική μορφή κι είναι γνωστή μια μη εκφυλισμένη βέλτιστη λύση του, μπορούμε χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα να εκτιμήσουμε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού του, όπως φαίνεται και στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.2

Έστω το ακόλουθο ΠΓΠ

$$z = \max(2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ 2x_2 + x_3 + \ \ x_4 &= 6 \\ 2x_3 - \ \ x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

α) Βρείτε το δυϊκό του.

β) Αν είναι γνωστή η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος $\underline{x}'^T = [1/5, 0, 21/5, 9/5]$ να βρείτε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού.

Λύση

Το δυϊκό είναι το ακόλουθο πρόβλημα

$$z = \min(8\upsilon_1 + 6\upsilon_2 + 3\upsilon_3)$$

$$\begin{aligned} \upsilon_1 \qquad\qquad &\geq \ \ 2 \\ 2\upsilon_1 + \ \ \upsilon_2 + \qquad &\geq -3 \\ \upsilon_1 + \ \ \upsilon_2 + 2\upsilon_3 &\geq \ \ 1 \\ 2\upsilon_1 + \ \ \upsilon_2 - 3\upsilon_3 &\geq \ \ 2 \end{aligned}$$

Αφού το πρωτεύων είναι σε κανονική μορφή οι συνθήκες $\upsilon_i(b_i - \underline{a}_i^T\underline{x}) = 0$, ικανοποιούνται για όλα τα i. Οι συνθήκες $(\underline{\upsilon}^T\underline{A}_j - c_j)x_j = 0$ ικανοποιούνται για $j = 2$ αφού $x_2' = 0$. Μιας και $x_1', x_3', x_4' > 0$ θα πρέπει να ικανοποιείται το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} \upsilon_1 \qquad\qquad &= 2 \\ \upsilon_1 + \upsilon_2 + 2\upsilon_3 &= 1 \\ 2\upsilon_1 + \upsilon_2 - 3\upsilon_3 &= 2 \end{aligned}$$

που έχει λύση την $\upsilon_1 = 2$, $\upsilon_2 = -7/5$, $\upsilon_3 = 1/5$. Συνεπώς η βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος είναι η $\underline{\upsilon}^T = [2, -7/5, 1/5]$. Η βέλτιστη τιμή των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο προβλημάτων είναι $z = 8.2$.

Γενικεύοντας το προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να βρούμε τη βέλτιστη λύση του δυϊκού αν γνωρίζουμε τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος (και αντίστροφα) με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω x_j μια βασική μεταβλητή σε μια βέλτιστη μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση ενός πρωτεύοντος προβλήματος σε κανονική μορφή. Τότε η συνθήκη $(\underline{\upsilon}^T \underline{A}_j - c_j)x_j = 0$ συνεπάγεται ότι $\underline{\upsilon}^T \underline{A}_j = c_j$ δηλαδή όλοι οι περιορισμοί του δυϊκού που αντιστοιχούν σε βασικές μεταβλητές είναι ενεργοί. Αφού οι βασικές στήλες $\underline{A}_j$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες καταλήγουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων ως προς το διάνυσμα $\underline{\upsilon}^T$. Δυστυχώς η μέθοδος αυτή μπορεί να μην είναι αποτελεσματική στην περίπτωση που έχουμε εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση στο πρωτεύων, καθώς τότε έχουμε λιγότερες εξισώσεις από αγνώστους.

4.3 Οι βέλτιστες δυϊκές μεταβλητές ως οριακά κέρδη

Εδώ θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια εναλλακτική ερμηνεία στις δυϊκές μεταβλητές. Θεωρούμε αρχικά το παρακάτω ΠΓΠ σε κανονική μορφή

$$z = \max(\underline{c}^T \underline{x})$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}.$$

Υποθέτουμε ότι ο A είναι πλήρους βαθμού, η $\underline{x}'$ είναι μια βέλτιστη μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση και B ο αντίστοιχος βασικός πίνακας. Τότε το διάνυσμα $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$ των βασικών μεταβλητών είναι αυστηρά θετικό αφού η $\underline{x}'$ δεν είναι εκφυλισμένη. Αντικαθιστούμε το $\underline{b}$ με το διάνυσμα $\underline{b} + \underline{d}$, όπου $\underline{d}$ είναι ένα μικρό διάνυσμα διαταραχής δηλαδή τα στοιχεία του $\underline{d}$ είναι πολύ μικροί θετικοί αριθμοί. Αφού $B^{-1}\underline{b} > \underline{0}$ και το $\underline{d}$ είναι «πολύ μικρό» θα έχουμε κι ότι $B^{-1}(\underline{b} + \underline{d}) > \underline{0}$. Αυτό σημαίνει ότι ο ίδιος βασικός πίνακας αντιστοιχεί σε μια βασική εφικτή λύση του διαταραγμένου προβλήματος. Επειδή η $\underline{x}'$ είναι βέλτιστη λύση στο αρχικό πρόβλημα οι μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους είναι μη θετικές $\underline{c}^T - \underline{c}_B^T B^{-1} A \leq 0$ και συνεπώς το ίδιο ισχύει και για το διαταραγμένο πρόβλημα αφού η διαταραχή του διανύσματος $\underline{b}$ δεν έχει καμία επίδραση στις μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους. Το βέλτιστο κέρδος στο διαταραγμένο πρόβλημα θα είναι

$$\underline{c_B}^T B^{-1}(\underline{b} + \underline{d}) = \underline{\upsilon}^T(\underline{b} + \underline{d}),$$

όπου $\underline{\upsilon}^T = \underline{c_B}^T B^{-1}$ είναι η βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος. Συνεπώς μια μικρή μεταβολή $\underline{d}$ στο διάνυσμα των σταθερών συντελεστών των περιορισμών $\underline{b}$ οδηγεί σε μια μεταβολή του βέλτιστου κέρδους κατά $\underline{\upsilon}^T\underline{d}$. Συμπεραίνουμε ότι κάθε μεταβλητή υ_i της βέλτιστης λύσης του δυϊκού μπορεί να ειδωθεί σαν το οριακό κέρδος από την αύξηση κατά μία μονάδα της σταθεράς b_i του i-στου περιορισμού.

4.4 Η δυϊκή μέθοδος Simplex

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε τη δυϊκή Simplex που είναι μια παραλλαγή της μεθόδου Simplex. Εδώ θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια εναλλακτική ερμηνεία στις δυϊκές μεταβλητές.

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3 είδαμε ότι, αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο Simplex σε ένα ΠΓΠ σε κανονική μορφή και καταλήξουμε στο τελικό tableau που μας δίνει τη βέλτιστη λύση, τότε το διάνυσμα $\underline{\upsilon}^T = \underline{c_B}^T B^{-1}$ είναι λύση του δυϊκού προβλήματος. Ακόμη είδαμε ότι η συνθήκη βελτιστότητας $\underline{c}^T - \underline{c_B}^T B^{-1} A \le \underline{0}^T$ του πρωτεύοντος είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με τους περιορισμούς του δυϊκού $\underline{\upsilon}^T A \ge \underline{c}^T$. Από αυτή την οπτική γωνία μπορούμε να δούμε την Simplex ως ένας αλγόριθμο που κινείται στο σύνολο των εφικτών λύσεων του πρωτεύοντος αναζητώντας μια εφικτή λύσεις του δυϊκού. Ένας τέτοιος αλγόριθμος λέγεται γενικά πρωτεύων αλγόριθμος. Μια εναλλακτική δυνατότητα είναι να ξεκινήσουμε από μια εφικτή λύση του δυϊκού αναζητώντας μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος. Ένας αλγόριθμος με αυτή την λογική καλείται **δυϊκός**. Εδώ θα δούμε τον δυϊκό αλγόριθμο Simplex πλήρους tableau.

Έστω ένα ΠΓΠ σε κανονική μορφή. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι πλήρους βαθμού. Ο βασικός πίνακας B αποτελείται από m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A. Σχηματίζουμε το ακόλουθο tableau

$B^{-1}\underline{b}$	$B^{-1}A$
$-\underline{c_B}^T B^{-1}\underline{b}$	$\underline{\bar{c}}^T$

ή σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια,

$x_{B(1)}$ $\vdots$ $x_{B(m)}$	$B^{-1}A_1, \ldots, B^{-1}A_n$
$-\underline{c}_B^T\underline{x}_B$	$\overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_n$

Δεν απαιτούμε οι τιμές των βασικών μεταβλητών $B^{-1}\underline{b}$ να είναι μη μηδενικές, δηλαδή μπορεί να έχουμε μια βασική αλλά όχι απαραίτητα εφικτή λύση του πρωτεύοντος προβλήματος. Υποθέτουμε όμως ότι $\underline{\overline{c}} \leq \underline{0}$, που ισοδυναμεί με την ικανοποίηση των περιορισμών $\underline{\upsilon}^T A \geq \underline{c}^T$ του δυϊκού από το διάνυσμα $\underline{\upsilon} = \underline{c}_B^T B^{-1}$. Συνεπώς το $\underline{\upsilon}$ είναι εφικτή λύση του δυϊκού με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $\underline{\upsilon}^T\underline{b} \geq \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} = \underline{c}_B^T\underline{x}_B$, η αντίθετη της οποίας παρουσιάζεται στην κάτω αριστερή γωνία του tableau. Αν ικανοποιείται η συνθήκη $B^{-1}\underline{b} \geq \underline{0}$ τότε έχουμε και μια βασική εφικτή λύση του πρωτεύοντος με την ίδια τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που σημαίνει ότι έχουμε βρει τις βέλτιστες λύσεις και στα δύο προβλήματα. Αν η συνθήκη $B^{-1}\underline{b} \geq \underline{0}$ δεν ικανοποιείται προχωράμε σε αλλαγή βάσης.

Για να προχωρήσουμε σε μια νέα βασική εφικτή λύση θα πρέπει να καθορίσουμε πως θα επιλέξουμε τη μη βασική μεταβλητή που θα εισαχθεί στη βάση αλλά και τη διαδικασία επιλογής της μεταβλητής που θα φύγει από την βάση. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται στη συνέχεια.

Βρίσκουμε κάποιο l τέτοιο ώστε $x_{B(l)} < 0$ και εξετάζουμε την l-στη γραμμή του tableau, που καλείται γραμμή του πιλότου. Αυτή η γραμμή αποτελείται από τα στοιχεία $x_{B(l)}, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$, όπου υ_i είναι το l-στο στοιχείο του διανύσματος $B^{-1}\underline{A}_i$. Για κάθε $\upsilon_i < 0$ (αν υπάρχουν τέτοια στοιχεία) εκτιμούμε τον λόγο $|\overline{c}_i / \upsilon_i|$. Αναζητούμε το j για το οποίο ισχύει ότι $\upsilon_j < 0$ και

$$\left|\frac{\overline{c}_j}{\upsilon_j}\right| = \min_{\{i|\upsilon_i<0\}}\left|\frac{\overline{c}_i}{\upsilon_i}\right| \tag{4.1}$$

αναζητούμε δηλαδή το στοιχείο με τον μικρότερο λόγο. Το στοιχείο υ_j είναι το στοιχείο πιλότος. Σημειώνουμε ότι το x_j είναι μη βασική μεταβλητή, αφού η j-στη στήλη του tableau περιέχει το αρνητικό στοιχείο υ_j. Στη συνέχεια αλλάζουμε βάση εισάγοντας σε αυτή την στήλη $\underline{A}_j$ κι εξάγοντας την στήλη $\underline{A}_{B(l)}$. Η αλλαγή βάσης υλοποιείται εδώ όπως και στον πρωτεύοντα αλγόριθμο Simplex: προσθέτουμε σε κάθε γραμμή του tableau το πολλαπλάσιο της γραμμής του πιλότου, έτσι ώστε όλα τα στοιχεία της στήλης του πιλότου, να γίνουν ίσα με το μηδέν, εκτός από το στοιχείο πιλότος. Το στοιχείο πιλότος πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα στο νέο tableau και για να γίνει αυτό θα πρέπει η γραμμή του πιλότου να πολλαπλασιαστεί με τον αντίστροφο του πιλότου. Πιο συγκεκριμένα για να μηδενιστεί η μοναδιαία αύξηση κέρδους στη στήλη του πιλότου πολλαπλασιάζουμε την γραμμή του πιλότου με τον λόγο $|\bar{c}_j / \upsilon_j|$ και την αφαιρούμε από την μηδενική γραμμή του tableau. Για κάθε i η νέα τιμή του $\bar{c}_i$ είναι ίση με

$$\bar{c}_i - \upsilon_i \left| \frac{\bar{c}_j}{\upsilon_j} \right|$$

που είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός λόγω του κανόνα επιλογής του j (βλ. Εξίσωση (4.1)). Έτσι έχουμε ότι η μη αρνητικότητα της μηδενικής γραμμής διατηρείται στο νέο tableau και συνεπώς το νέο tableau μας δίνει μια νέα εφικτή λύση του δυϊκού προβλήματος.

Παράδειγμα 4.3

Έχουμε το αρχικό tableau ενός ΠΓΠ

			-2	-6	-10	0	0	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	θ
$\underline{A}_4$	0	2	-2	4	1	1	0	
$\underline{A}_5$	0	-1	4	-2	-3	0	1	
		0	-2	-6	-10	0	0	

Βρείτε τη βέλτιστη λύση χρησιμοποιώντας τη δυϊκή Simplex.

Λύση

Βλέπουμε ότι η μηδενική γραμμή είναι μη θετική κι επίσης το $x_{B(2)} = x_5 < 0$. Συνεπώς επιλέγουμε να εξάγουμε από την βάση τη δεύτερη γραμμή του tableau. Στη δεύτερη γραμμή υπάρχουν αρνητικά στοιχεία στην δεύτερη και τρίτη στήλη. Οι αντίστοιχοι λόγοι είναι |– 6/– 2| και |– 10/– 3|. Προφανώς ο μικρότερος λόγος είναι ο |– 6/– 2| που αντιστοιχεί στην στήλη $\underline{A}_2$ και γι' αυτό εισάγουμε στη βάση το x_2.

			-2	-6	-10	0	0	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	θ
$\underline{A}_4$	0	2	-2	4	1	1	0	
$\underline{A}_5$	0	$\underline{-1}$	4	$\mathbf{-2}$	-3	0	1	
		0	-2	$\underline{-6}$	-10	0	0	

Για να μεταπηδήσουμε στο επόμενο tableau πολλαπλασιάζουμε την γραμμή του πιλότου επί τρία και την αφαιρούμε από τη μηδενική γραμμή. Ακόμη πολλαπλασιάζουμε την γραμμή του πιλότου επί δύο και την προσθέτουμε στην πρώτη γραμμή, ενώ τέλος διαιρούμε την γραμμή του πιλότου με τον πιλότο. Το νέο Tableau είναι

			-2	-6	-10	0	0	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	θ
$\underline{A}_4$	0	0	6	0	-5	1	2	
$\underline{A}_2$	-6	$1/2$	-2	1	$3/2$	0	$-1/2$	
		3	-14	0	-1	0	-3	

Βλέπουμε ότι τώρα όλες οι βασικές μεταβλητές είναι μη αρνητικές και συνεπώς έχουμε βρει την βέλτιστη λύση.

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το στοιχείο πιλότος υ_j επιλέγεται έτσι ώστε να είναι πάντα αρνητικό, ενώ η αντίστοιχη μοναδιαία αύξηση κέρδους $\overline{c}_j$ είναι μη θετική. Αν υποθέσουμε ότι η $\overline{c}_j$ είναι αυστηρά αρνητική, για να την μηδενίσουμε στο νέο tableau θα πρέπει να προσθέσουμε ένα αρνητικό πολλαπλάσιο της γραμμής του πιλότου στη μηδενική γραμμή. Αφού η $x_{B(l)} < 0$ είναι αρνητική αυτό σημαίνει ότι προσθέτουμε μια θετική ποσότητα στο στοιχείο της μηδενικής γραμμής που αντιστοιχεί στην αντίθετη τιμή της αντικειμενική συνάρτησης. Αυτό σημαίνει ότι το κέρδος στην πραγματικότητα μειώνεται. Συνεπώς όσο οι μοναδιαίες αυξήσεις κόστους κάθε βασικής μεταβλητής είναι αυστηρά αρνητικές, το δυϊκό κέρδος μειώνεται με κάθε αλλαγή βάσης και δεν έχουμε επιστροφή σε μια βάση κατά την πορεία εκτέλεσης του αλγορίθμου. Δηλαδή ο αλγόριθμος τελικά τερματίζει και υπάρχουν δύο δυνατά τελικά αποτελέσματα:

α) Καταλήγουμε σε μια μη αρνητική βασική λύση που είναι βέλτιστη.

β) Όλα τα στοιχεία $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$ της γραμμής του πιλότου είναι μη αρνητικά και δεν είναι δυνατή η συνέχιση του αλγορίθμου. Όπως και στον πρωτεύοντα αλγόριθμο της Simplex αυτό σημαίνει ότι το βέλτιστο κέρδος του δυϊκού προβλήματος δεν είναι φραγμένο κι άρα δεν υπάρχει βέλτιστη λύση.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε συνοπτικά τον αλγόριθμο της δυϊκής Simplex.

Αλγόριθμος δυϊκής Simplex:

1. Ξεκινάμε από ένα tableau που αντιστοιχεί σε μια αρχική βασική λύση $\underline{x}$ και τον αντίστοιχο βασικό πίνακα B. Όλα οι μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους πρέπει να είναι μη αρνητικές.
2. Εξετάζουμε τις τιμές των βασικών μεταβλητών στη μηδενική στήλη του tableau. Αν είναι όλες μη αρνητικές έχουμε μια βέλτιστη βασική εφικτή λύση κι ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά επιλέγουμε κάποιο l τέτοιο ώστε $x_{B(l)} < 0$.
3. Εξετάζουμε την l-στη γραμμή του tableau με στοιχεία τα $x_{B(l)}, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$. Αν $\upsilon_i \geq 0$ για κάθε i, τότε η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος είναι $-\infty$ κι ο αλγόριθμος τερματίζει.
4. Για κάθε i τέτοιο ώστε $\upsilon_i < 0$ υπολογίζουμε τον λόγο $|\overline{c}_i / \upsilon_i|$. Έστω j ο δείκτης της στήλης που αντιστοιχεί στον μικρότερο από αυτούς τους λόγους. Η στήλη $\underline{A}_{B(l)}$ φεύγει από την βάση κι εισέρχεται στη θέση της η στήλη $\underline{A}_j$.
5. Προσθέτουμε σε κάθε γραμμή του tableau ένα πολλαπλάσιο της l-στης γραμμής έτσι ώστε όλα τα στοιχεία της j-στης στήλης εκτός από το l-στο (πιλότος) να μηδενιστούν. Τέλος διαιρούμε την l-στη γραμμή (γραμμή του πιλότου) με το υ_j (πιλότος) έτσι ώστε το j-στο στοιχείο της να γίνει ίσο με την μονάδα στο νέο tableau.
6. Επιστρέφουμε στο βήμα 1.

Υπάρχει βέβαια ένα ακόμη ενδεχόμενο το οποίο θα πρέπει να εξετάσουμε. Αν το τελευταίο στοιχείο στην στήλη του πιλότου είναι μηδέν $\overline{c}_j = 0$, η μηδενική γραμμή δεν αλλάζει και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού παραμένει ως έχει. Σε αυτή την περίπτωση δυστυχώς μπορεί να έχουμε αέναη ανακύκλωση του αλγορίθμου. Αυτό μπορεί να αποφευχθεί αν χρησιμοποιήσουμε τον επόμενο κανόνα οδήγησης.

Λεξικογραφικός κανόνας οδήγησης για τη δυϊκή μέθοδο Simplex:

1. Διαλέγουμε ως γραμμή του πιλότου οποιαδήποτε γραμμή l τέτοια ώστε $x_{B(l)} < 0$.
2. Επιλέγουμε την στήλη j που θα εισαχθεί στην βάση ως εξής: Διαιρούμε κάθε στήλη i για την οποία ισχύει ότι $\upsilon_i < 0$ (το στοιχείο της στήλης που ανήκει στην γραμμή του πιλότου) με $|\upsilon_i|$ και επιλέγουμε την λεξικογραφικά μικρότερη στήλη. Σε περίπτωση ισοπαλίας διαλέγουμε τη στήλη με τον μικρότερο δείκτη.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω κανόνα εξασφαλίζουμε ότι ο αλγόριθμος της δυϊκής Simplex θα τερματίσει, αν οι στήλες του tableau (δηλαδή τα διανύσματα $B^{-1}\underline{A}_j$) είναι λεξικογραφικά θετικά.

Όπως έχουμε δει $\overline{c}_i = c_i - \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{A}_i = c_i - \underline{\upsilon}^T\underline{A}_i$. Αν λοιπόν $\overline{c}_i = 0$ σημαίνει ότι $\underline{\upsilon}^T\underline{A}_i = c_i$ δηλαδή ο i-στος περιορισμός του δυϊκού προβλήματος είναι ενεργός. Το διάνυσμα μεταβλητών του δυϊκού προβλήματος $\underline{\upsilon} \in R^m$, άρα αν το $\overline{\underline{c}}$ έχει περισσότερα από m στοιχεία του μηδενικά σημαίνει ότι υπάρχουν περισσότεροι από m ενεργοί περιορισμοί και η τρέχουσα βασική εφικτή λύση του δυϊκού προβλήματος είναι εκφυλισμένη. Βλέπουμε ότι η κατάρα των εκφυλισμένων λύσεων μας ακολουθεί κι εδώ.

Όπως έχουμε δει βασική προϋπόθεση για την εφαρμογή της δυϊκής Simplex είναι όλες οι μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους να είναι μη θετικές. Παρακάτω θα δούμε κάποιες μεθοδολογίες για την ανεύρεση βασικών λύσεων που ικανοποιούν αυτή την συνθήκη.

4.4.1 Η γεωμετρία της δυϊκής Simplex

Αφού μελετήσαμε την δυϊκή Simplex από την σκοπιά της αλγεβρικής υλοποίησης της με την χρήση των tableaux, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια γεωμετρική ερμηνεία της δυϊκής Simplex.

Έχουμε ένα ΠΓΠ σε κανονική μορφή και ο πίνακας A των περιορισμών είναι πλήρους βαθμού, δηλαδή έχει γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές. Έστω B ένας βασικός πίνακας με στήλες $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(m)}$, που αποτελούν μια βάση του R^m. Αυτός ο βασικός πίνακας ορίζει μια βασική εφικτή λύση του ΠΓΠ όπου οι τιμές των βασικών μεταβλητών είναι $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$. Από τον ίδιο βασικό πίνακα μπορούμε να εκτιμήσουμε το διάνυσμα $\underline{\upsilon}$ χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις

$$\underline{\upsilon}^T\underline{A}_{B(i)} = c_{B(i)}\,,\; i = 1, \ldots, m. \tag{4.2}$$

Αυτές οι εξισώσεις ορίζουν ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με m αγνώστους κι αφού τα διανύσματα $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(m)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα υπάρχει μια μοναδική λύση $\underline{\upsilon}$. Σε μορφή πινάκων μπορούμε να πούμε ότι το διάνυσμα $\underline{\upsilon}$ ικανοποιεί την εξίσωση $\underline{\upsilon}^T B = \underline{c}_B^T$ ή δίδεται από την εξίσωση $\underline{\upsilon}^T = \underline{c}_B^T B^{-1}$. . Επειδή ικανοποιεί τις Εξισώσεις (4.2) έχουμε ότι στο $\underline{\upsilon}$, που ανήκει στον R^m, υπάρχουν m ενεργοί περιορισμοί άρα είναι βασική λύση του δυϊκού προβλήματος. Αν το $\underline{\upsilon}$ ικανοποιεί τους περιορισμούς του δυϊκού προβλήματος, δηλαδή έχουμε ότι $\underline{\upsilon}^T A \geq \underline{c}^T$, τότε είναι βασική εφικτή λύση του δυϊκού. Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι ένας βασικός πίνακας B αντιστοιχεί σε μια βασική λύση του πρωτεύοντος αλλά και σε μια βασική λύση του δυϊκού. Αν ικανοποιούνται και οι περιορισμοί των προβλημάτων οι λύσεις αυτές είναι κι εφικτές.

Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει η γεωμετρική ερμηνεία του δυϊκού αλγορίθμου Simplex: Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου έχουμε μια βασική εφικτή λύση του δυϊκού προβλήματος. Οι βασικές εφικτές λύσεις του δυϊκού που αντιστοιχούν σε δύο διαδοχικές επαναλήψεις (tableau) έχουν $m - 1$ κοινούς γραμμικά ανεξάρτητους ενεργούς περιορισμούς. Αυτό σημαίνει ότι είναι γειτονικές ή ταυτίζονται.

Το επόμενο παράδειγμα θα μας δώσει μια πιο καθαρή εικόνα της γεωμετρικής ερμηνείας της δυϊκής Simplex.

Παράδειγμα 4.4

Έστω το ακόλουθο ΠΓΠ σε κανονική μορφή και το δυϊκό του

$z = \max(-x_1 - x_2)$	$z = \min(-2\upsilon_1 - \upsilon_2)$
$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$	$\upsilon_1 + \upsilon_2 \leq 1$
$x_1 - x_4 = 1$	$2\upsilon_1 \leq 1$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$\upsilon_1, \upsilon_2 \geq 0$

Βρείτε το βρείτε τη βέλτιστη λύση χρησιμοποιώντας τη δυϊκή Simplex.

Λύση

Είναι προφανές ότι στο πρωτεύων οι μεταβλητές x_3 και x_4 είναι περιθώριες άρα το πρωτεύων είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο δυσδιάστατο ΠΓΠ

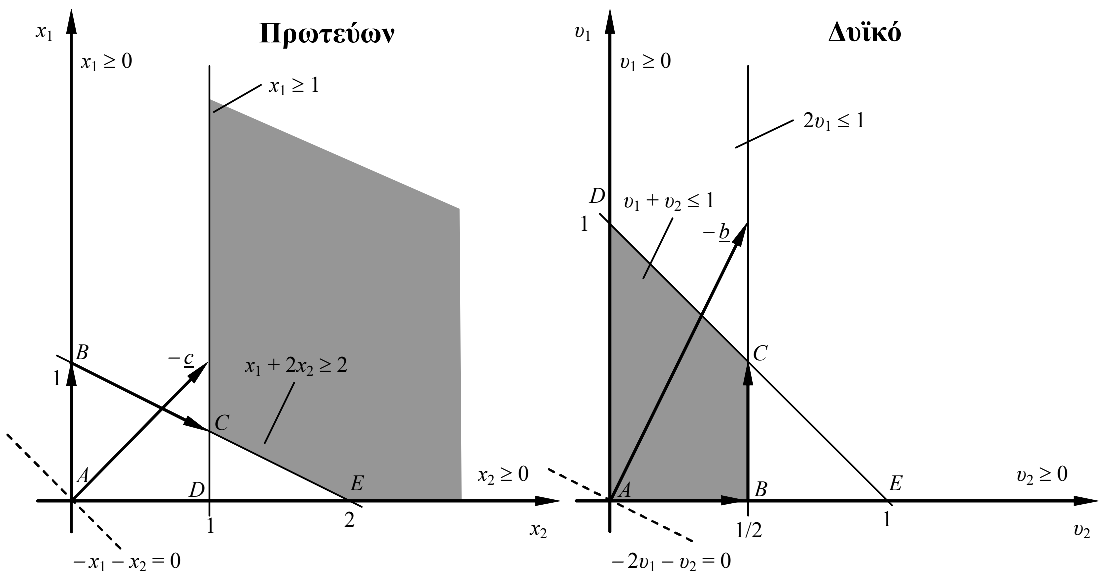
$$z = \max(-x_1 - x_2)$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Αφού και τα δύο προβλήματα είναι δυσδιάστατα μπορούμε να περιγράψουμε τους χώρους εφικτών λύσεων γραφικά. Στο Σχήμα 4.1 παρουσιάζονται οι περιοχές εφικτών και των δύο προβλημάτων.



Σχήμα 4.1 Χώροι εφικτών λύσεων Παραδείγματος 4.4.

Συνολικά βλέπουμε ότι υπάρχουν πέντε διαφορετικές βασικές λύσεις κι άρα πέντε διαφορετικές βάσεις στο πρωτεύον πρόβλημα. Αυτές αντιστοιχούν στα σημεία A, B, C, D και E όπως φαίνονται στο Σχήμα 4.1. Οι ίδιες βάσεις οδηγούν στις πέντε βασικές λύσεις A, B, C, D και E του δυϊκού προβλήματος που επίσης παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.1. Για παράδειγμα αν επιλέξουμε ως βασικές στήλες τις $\underline{A}_3$ και $\underline{A}_4$ οδηγούμαστε στην αρχική μη εφικτή βασική λύση $\underline{x}^T = [0, 0, -2, -1]$ του πρωτεύοντος, που είναι το σημείο A. Η αντίστοιχη βασική λύση του δυϊκού εκτιμάται από τις εξισώσεις $\underline{\upsilon}^T\underline{A}_3 = c_3 = 0$ και $\underline{\upsilon}^T\underline{A}_4 = c_4 = 0$ η λύση των οποίων μας δίδει $\underline{\upsilon}^T = [0, 0]$. Η τελευταία είναι μια βασική εφικτή λύση του δυϊκού και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκκίνηση της δυϊκής Simplex. Το αρχικό tableau της μεθόδου παρουσιάζεται παρακάτω

			-1	-1	0	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	θ
$\underline{A}_3$	0	$\underline{-2}$	-1	$\mathbf{-2}$	1	0	
$\underline{A}_4$	0	-1	-1	1	0	1	
		0	-1	$\underline{-1}$	0	0	

Εφαρμόζουμε την δυϊκή Simplex και έχουμε τα ακόλουθα tableau

			-1	-1	0	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	θ
$\underline{A}_2$	-1	1	1/2	1	$-1/2$	0	
$\underline{A}_4$	0	$\underline{-1}$	$\mathbf{-1}$	0	0	1	
		1	$\underline{-1/2}$	0	$-1/2$	0	

			-1	-1	0	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A_1}$	$\underline{A_2}$	$\underline{A_3}$	$\underline{A_4}$	θ
$\underline{A_2}$	-1	$1/2$	1	0	$-1/2$	$1/2$	
$\underline{A_1}$	-1	1	0	1	0	-1	
		$3/2$	0	0	$-1/2$	$-1/2$	

Η ακολουθία των tableau αντιστοιχεί στη διαδρομή A - B - C και στους δύο χώρους εφικτών λύσεων στο Σχήμα 4.1. Στον χώρο εφικτών λύσεων του πρωτεύοντος η διαδρομή ξεκινάει και περνάει από μια σειρά βασικών αλλά μη εφικτών λύσεων μέχρι την τελευταία βασική λύση που είναι εφικτή και βέλτιστη. Στον χώρο εφικτών λύσεων του δυϊκού προβλήματος ο αλγόριθμος συμπεριφέρεται όπως ο πρωτεύων αλγόριθμος Simplex αν τον εφαρμόζαμε απευθείας στο δυϊκό πρόβλημα: σε κάθε επανάληψη μετακινείται από μια βασική εφικτή λύση του δυϊκού σε μια άλλη έτσι ώστε να βελτιώνεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Το προηγούμενο παράδειγμα μπορεί να οδηγήσει στην παραπλανητική αντίληψη ότι η δυϊκή Simplex δεν είναι τίποτε άλλο από την απλή εφαρμογή του πρωτεύοντος αλγορίθμου Simplex απευθείας στο δυϊκό πρόβλημα. Αυτό δεν είναι ακριβές γιατί σε αυτή την περίπτωση θα έπρεπε να φέρουμε το δυϊκό πρόβλημα στην κανονική του μορφή και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τον πρωτεύοντα αλγόριθμο Simplex. Το αποτέλεσμα δεν είναι απαραίτητα το ίδιο με την δυϊκή Simplex όπως την έχουμε δει.

4.4.2 Αναζήτηση αρχικής βασικής εφικτής λύσης του δυϊκού προβλήματος: η μέθοδος του τεχνητού περιορισμού

Η δυϊκή Simplex όπως και η πρωτεύουσα Simplex προϋποθέτει την ύπαρξη μιας αρχικής βασικής εφικτής λύσης του δυϊκού προβλήματος. Αυτό στην πράξη σημαίνει ότι στο αρχικό tableau θα πρέπει όλες οι μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους να είναι μη θετικές. Όπως θα δούμε παρακάτω αυτό επιτυγχάνεται με την προσθήκη ενός επιπλέον περιορισμού.

Έστω ότι οι m πρώτες μεταβλητές είναι βασικές. Εισάγουμε το νέο περιορισμό

$$\sum_{i=m+1}^{n} x_i \le M \text{ , ή σε κανονική μορφή } \sum_{i=m+1}^{n+1} x_i = M$$

όπου $M >> 0$. Ο νέος περιορισμός φράσσει τις μη βασικές μεταβλητές και συνεπώς έμμεσα φράσσει όλο το πρόβλημα. Για να έχουμε μια βασική εφικτή λύση του δυϊκού προβλήματος στο επόμενο tableau επιλέγουμε να εισάγουμε στη βάση τη μεταβλητή x_k για την οποία ισχύει ότι

$$\bar{c}_k = \max_i(\bar{c}_i).$$

ενώ φεύγει από την βάση η μεταβλητή x_{n+1}. Εφόσον η στήλη k είναι η στήλη του πιλότου, η γραμμή του πιλότου είναι η γραμμή του νέου περιορισμού και το στοιχείο πιλότος είναι ίσο με τη μονάδα θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την γραμμή του πιλότου με το $\bar{c}_k$ και να την αφαιρέσουμε από την μηδενική γραμμή έτσι ώστε να μηδενιστεί το αντίστοιχο στοιχείο της k-στης στήλης. Επειδή $\bar{c}_k = \max_i(\bar{c}_i)$ θα πρέπει να έχουμε ότι στο επόμενο tableau $\bar{c}_i \le 0$, για όλα τα i, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την δυϊκή Simplex. Στο τέλος θα καταλήξουμε σε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Το δυϊκό πρόβλημα δεν είναι φραγμένο.
2. Καταλήγουμε στη βέλτιστη λύση και η περιθώρια μεταβλητή του νέου περιορισμού είναι $x_{n+1}' > 0$.
3. Καταλήγουμε στη βέλτιστη λύση και η περιθώρια μεταβλητή του νέου περιορισμού είναι $x_{n+1}' = 0$.

Στην πρώτη περίπτωση το πρωτεύων πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις. Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε βέλτιστη λύση στο αρχικό πρόβλημα που ταυτίζεται με την λύση του νέου προβλήματος πλην της τιμής της x_{n+1}. Τέλος στην τρίτη περίπτωση ο νέος περιορισμός είναι ενεργός στη βέλτιστη λύση. Αν $\bar{c}_{n+1} < 0$ τότε η x_{n+1} δεν είναι βασική μεταβλητή και ο νέος περιορισμός περιορίζει τη λύση του προβλήματος. Όσο αυξάνει το M αυξάνει και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, άρα το πρόβλημα μας δεν είναι φραγμένο. Αντίθετα αν $\bar{c}_{n+1} = 0$, τότε η λύση του νέου προβλήματος (πλην της x_{n+1}) είναι βέλτιστη και για το αρχικό.

Παράδειγμα 4.5

Έχουμε το αρχικό tableau ενός ΠΓΠ

			0	1	5	-1	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A_1}$	$\underline{A_2}$	$\underline{A_3}$	$\underline{A_4}$	$\underline{A_5}$	θ
$\underline{A_1}$	0	4	1	2	-1	1	0	
$\underline{A_5}$	0	3	0	3	4	-1	1	
		0	0	1	5	-1	0	

Βρείτε το αρχικό tableau της δυϊκής Simplex.

Λύση

Βλέπουμε ότι η οι x_1 και x_5 είναι οι βασικές μεταβλητές οπότε εισάγουμε τον περιορισμό $x_3 + x_3 + x_5 \le M$ ή σε κανονική μορφή $x_3 + x_3 + x_5 + x_6 = M$ κι έχουμε το ακόλουθο tableau:

			0	1	5	−1	0	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	θ
$\underline{A}_1$	0	4	1	2	−1	1	0	0	
$\underline{A}_5$	0	3	0	3	4	−1	1	0	
$\underline{A}_6$	0	M	0	1	1	0	0	1	
		0	0	1	5	−1	0	0	

Εδώ έχουμε ότι $\overline{c}_3 = \max_i(\overline{c}_i)$, που σημαίνει ότι στο επόμενο tableau θα είναι βασική μεταβλητή η x_3 αντί της x_6. Για να μεταπηδήσουμε στο επόμενο tableau πολλαπλασιάζουμε την γραμμή του πιλότου επί $\overline{c}_3 = 5$ και την αφαιρούμε από τη μηδενική γραμμή.

			0	1	5	−1	0	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	θ
$\underline{A}_1$	0	$M + 4$	1	3	0	2	0	1	
$\underline{A}_5$	0	$-4M + 3$	0	−1	0	−5	1	−4	
$\underline{A}_3$	5	M	0	1	1	1	0	1	
		$-5M$	0	−4	0	−6	0	−5	

Βλέπουμε ότι τώρα όλα τα $\overline{c}_i$ είναι μη θετικά άρα μπορούμε από εδώ και πέρα να εφαρμόσουμε τη δυϊκή Simplex.

4.4.3 Μια εναλλακτική τεχνική αναζήτησης αρχικής βασικής εφικτής λύσης του δυϊκού προβλήματος

Μια άλλη τεχνική αναζήτησης αρχικής βασικής εφικτής λύση για την δυϊκή Simplex περιγράφεται από τον ακόλουθο αλγόριθμο:

1. Διαλέγουμε μια στήλη $\underline{A}_r$ τέτοια ώστε $\overline{c}_r > 0$ και να υπάρχει κάποιο στοιχείο της $w_i > 0$. Επιλέγουμε οποιαδήποτε γραμμή i για την οποία έχουμε ότι $w_i > 0$ κι αφαιρούμε από τις βασικές μεταβλητές τη μεταβλητή $x_{B(i)}$, που αντιστοιχεί στην i-στη γραμμή του tableau, δηλαδή η στήλη $\underline{A}_{B(i)}$ φεύγει από την βάση. Αν $\underline{A}_r \le \underline{0}$ τότε το πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση ή δεν είναι φραγμένο.
2. Η στήλη $\underline{A}_j$ που γίνεται βασική επιλέγεται με βάση το ακόλουθο κριτήριο:

$$\underline{A}_j:\ \frac{\bar{c}_j}{v_j} = \min\left\{\min_k\left\{\frac{\bar{c}_k}{v_k} : \bar{c}_k < 0,\, v_k < 0\right\},\, \max_k\left\{\frac{\bar{c}_k}{v_k} : \bar{c}_k > 0,\, v_k > 0\right\}\right\} \tag{4.3}$$

όπου v_k είναι το k-στο στοιχείο της i-στης γραμμής.

3. Πηγαίνουμε στο επόμενο tableau. Αν όλα τα $\bar{c}_i \le 0$ ξεκινάμε την δυϊκή Simplex αλλιώς πηγαίνουμε στο Βήμα 1.

Το κριτήριο (4.3) εξασφαλίζει καταρχήν ότι όλα τα μη θετικά $\bar{c}_k$ θα παραμείνουν μη θετικά κι ότι τα κάποια από τα θετικά θα μειωθούν. Το κριτήριο εγγυάται ότι

$$\frac{\bar{c}_j}{v_j} \le \frac{\bar{c}_k}{v_k},\ \forall k : \bar{c}_k < 0,\, v_k < 0$$

και συνεπώς θα έχουμε ότι

$$\bar{c}_k - v_k \frac{\bar{c}_j}{v_j} \le 0,\ \forall k : \bar{c}_k < 0,\, v_k < 0\,.$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$-v_k \frac{\bar{c}_j}{v_j} \le 0,\ \forall k : v_k > 0$$

δηλαδή στο νέο tableau οι μη θετικές μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους παραμένουν μη θετικές στο νέο tableau κι ακόμη προκύπτει ότι τα θετικά $\bar{c}_k$ με $v_k > 0$ θα μειωθούν. Αν δε έχουμε ότι

$$\frac{\bar{c}_j}{v_j} = \max_k\left\{\frac{\bar{c}_k}{v_k} : \bar{c}_k > 0,\, v_k > 0\right\}$$

τότε όλα τα θετικά $\bar{c}_k$ με $v_k > 0$ θα γίνουν μη θετικά στο νέο tableau αφού

$$\bar{c}_k - v_k \frac{\bar{c}_j}{v_j} \le 0,\ \forall k : \bar{c}_k > 0,\, v_k > 0\,.$$

Συνεπώς το κριτήριο 4.3 εξασφαλίζει ότι τα μη θετικά $\bar{c}_k$ θα παραμείνουν τέτοια ενώ κάποιες από τις θετικές μοναδιαίες αυξήσεις θα μειωθούν κι ενδεχομένως να γίνουν αρνητικές. Με αυτό τον τρόπο σταδιακά όλα τα $\bar{c}_k$ γίνονται μη θετικά και οδηγούμαστε σε μια βασική εφικτή λύση του δυϊκού προβλήματος.

Παράδειγμα 4.6

Να λυθεί με τη δυϊκή Simplex το Π.Γ.Π.

$$z = \max(5x_1 - 4x_2)$$

$$\begin{aligned} x_1 - \ x_2 + x_3 \qquad\quad &= \ 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + \qquad x_4 \quad &= \ 24 \\ -2x_1 + 3x_2 + \qquad\quad x_5 &= -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq \ 0 \end{aligned}$$

Λύση

Το πρόβλημα είναι σε κανονική μορφή και οι τρεις τελευταίες στήλες του πίνακα A σχηματίζουν το μοναδιαίο πίνακα, οπότε έχουμε το επόμενο αρχικό tableau:

			5	– 4	0	0	0	0
	c_B	x_B	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	θ
$\underline{A}_3$	0	6	1	– 1	1	0	0	
$\underline{A}_4$	0	24	**3**	– 2	0	1	0	
$\underline{A}_5$	0	– 4	– 2	3	0	0	1	
		0	5	– 4	0	0	0	

Βλέπουμε ότι $\overline{c}_1 = 5 > 0$ ενώ τα δύο πρώτα στοιχεία της $\underline{A}_1$ είναι θετικά. Επιλέγω το δεύτερο κι έτσι η $\underline{A}_4$ φεύγει από την βάση. Επιλέγω τη στήλη $\underline{A}_1$ για να γίνει βασική αφού $\overline{c}_1/v_1 = \min\{5/3, -4/-2\}$. Έτσι το επόμενο tableau θα είναι το ακόλουθο:

			5	– 4	0	0	0	0
	c_B	x_B	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	θ
$\underline{A}_3$	0	– 2	0	**– 1/3**	1	– 1/3	0	
$\underline{A}_1$	5	8	1	– 2/3	0	1/3	0	
$\underline{A}_5$	0	12	0	5/3	0	2/3	1	
		– 40	0	– 2/3	0	– 5/3	0	

Τώρα όλα τα $\overline{c}_i \leq 0$, που σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την δυϊκή Simplex μιας και υπάρχουν $x_{B(i)} < 0$. Πιο συγκεκριμένα $x_3 = x_{B(1)} = -2 < 0$, οπότε η στήλη $\underline{A}_3$ φεύγει από την βάση. Ακόμη βλέπουμε ότι $\overline{c}_2/v_2 = \min\{\overline{c}_2/v_2, \overline{c}_4/v_4\}$ $= \min\{2, 5\}$ άρα η στήλη $\underline{A}_3$ γίνεται βασική στο επόμενο tableau κι έχουμε:

			5	– 4	0	0	0	0
	c_B	x_B	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	θ
$\underline{A}_2$	– 4	6	0	1	– 3	1	0	
$\underline{A}_1$	5	12	1	0	– 2	1	0	
$\underline{A}_5$	0	2	0	0	5	– 1	1	
		– 36	0	0	– 2	– 1	0	

Βλέπουμε ότι τώρα όλα τα $x_{B(i)} > 0$ επομένως η αντίστοιχη λύση $\underline{x}^T = [12, 6, 0, 0, 2]$ είναι η βέλτιστη λύση και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $z = 36$.

Κεφάλαιο 5

Ανάλυση ευαισθησίας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την εξάρτηση της βέλτιστης λύσης από τις διάφορες παραμέτρους ενός ΠΓΠ, όπως ο πίνακας A των συντελεστών των περιορισμών, το διάνυσμα $\underline{b}$ των σταθερών όρων των περιορισμών και το διάνυσμα $\underline{c}$ των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης. Δηλαδή θα εξετάσουμε αν και κατά πόσο μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση ενός ΠΓΠ σε ενδεχόμενη μεταβολή της τιμής κάποιας ή κάποιων από τις παραπάνω παραμέτρους. Η ανάλυση ευαισθησίας έχει μεγάλη πρακτική αξία γιατί συχνά δεν έχουμε πλήρη γνώση των δεδομένων του προβλήματος και θέλουμε να εκτιμήσουμε τις συνέπειες από την ενδεχόμενη αλλαγή στις τιμές κάποιων παραμέτρων.

Στην ανάλυση ευαισθησίας έχουμε ένα ΠΓΠ του οποίου γνωρίζουμε την βέλτιστη λύση $\underline{x}'$ και τον αντίστοιχο βασικό πίνακα B. Κατόπιν θεωρούμε ότι έχουμε κάποια αλλαγή στις τιμές των A, $\underline{b}$ και $\underline{c}$, ή προσθήκη (αφαίρεση) μεταβλητών ή περιορισμών. Αρχικά μελετάμε τις συνθήκες υπό τις οποίες ο τρέχων βασικός πίνακας B εξακολουθεί να είναι βέλτιστος. Αν αυτές οι συνθήκες παραβιάζονται αναζητούμε αλγορίθμους εκτίμησης της νέας βέλτιστης λύσης, χρησιμοποιώντας την υπάρχουσα γνώση, χωρίς να απαιτείται η επίλυση του προβλήματος από την αρχή.

Αν υποθέσουμε ότι ο B είναι ο βασικός πίνακας της βέλτιστης λύσης ενός ΠΓΠ, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

$$B^{-1}\underline{b} \geq \underline{0}, \tag{5.1}$$

$$\underline{c}^T - \underline{c}_B{}^T B^{-1} A \leq \underline{0}^T. \tag{5.2}$$

Η πρώτη συνθήκη εξασφαλίζει ότι η λύση που έχουμε είναι εφικτή, ενώ η δεύτερη ότι δεν επιδέχεται βελτίωσης. Όταν αλλάζει το πρόβλημα που μελετάμε, θα πρέπει να εξετάσουμε αν αυτές οι συνθήκες επηρεάζονται. Αν και οι δύο παραπάνω συνθήκες συνεχίσουν να ικανοποιούνται στο νέο πρόβλημα τότε ο πίνακας B παραμένει βασικός πίνακας της βέλτιστης λύσης. Στη συνέχεια θα δούμε πως η παραπάνω βασική αρχή εφαρμόζεται στις διάφορες ειδικές περιπτώσεις.

5.1 Προσθήκη νέας μεταβλητής

Αν έχουμε ένα ΠΓΠ σε κανονική μορφή και προσθέσουμε μια νέα μεταβλητή x_{n+1} θα προκύψει το νέο πρόβλημα

$$z = \max(\underline{c}^T\underline{x} + c_{n+1}x_{n+1})$$

$$A\underline{x} + \underline{A}_{n+1}x_{n+1} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0},\ x_{n+1} \geq 0.$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν ο βασικός πίνακας B, της βέλτιστης λύσης του αρχικού προβλήματος, παραμένει βέλτιστος.

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $[\underline{x}, x_{n+1}]^T = [\underline{x}', 0]^T$, όπου $\underline{x}'$ είναι η βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος, είναι η βασική εφικτή λύση του νέου ΠΓΠ που σχετίζεται με τον βασικό πίνακα B. Για να συνεχίσει ο B να είναι βέλτιστος θα πρέπει η μοναδιαία αύξηση του κέρδους της μεταβλητής x_{n+1} να είναι αρνητική, δηλαδή

$$\bar{c}_{n+1} = c_{n+1} - \underline{c}_B{}^T B^{-1}\underline{A}_{n+1} \leq 0.$$

Αν η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται τότε το διάνυσμα $[\underline{x}', 0]^T$ είναι βέλτιστη λύση του νέου προβλήματος. Στην αντίθετη περίπτωση προσθέτουμε μια νέα στήλη στο tableau της βέλτιστης λύσης του αρχικού προβλήματος, η οποία αντιστοιχεί στη νέα μεταβλητή και εφαρμόζουμε τη μέθοδο Simplex ξεκινώντας από τον βασικό πίνακα B. Η στήλη του tableau της βέλτιστης λύσης του αρχικού ΠΓΠ, που αντιστοιχεί στην x_{n+1}, είναι ίση με $B^{-1}\underline{A}_{n+1}$. Με αυτό τον τρόπο η βέλτιστη λύση επιτυγχάνεται πολύ πιο γρήγορα απ' ότι αν εφαρμόζαμε την Simplex στο νέο πρόβλημα από την αρχή. Αν προστίθενται περισσότερες από μια νέες μεταβλητές στο πρόβλημα ακολουθείται η ίδια διαδικασία, δηλαδή αρχικά εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι συνθήκες βελτιστότητας για όλες τις νέες μεταβλητές από την βασική λύση του αρχικού προβλήματος. Αν δεν ικανοποιούνται εισάγουμε τόσες νέες στήλες στο tableau της βέλτσιστης λύσης του αρχικού προβλήματος, όσες είναι οι νέες μεταβλητές και συνεχίζουμε με τη μέθοδο Simplex.

Παράδειγμα 5.1

Έστω το ακόλουθο ΠΓΠ

$$
\begin{aligned}
z = \max(-x_1 - x_2 + x_3)& \\
2x_1 + 2x_2 - x_3 &\le 2 \\
-x_1 - 7x_2 + 2x_3 &\le 2 \\
7x_1 + 2x_2 - x_3 &\le 10 \\
4x_1 + 6x_2 - 2x_3 &\le 6 \\
x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Το tableau της βέλτιστης λύσης είναι

			– 1	– 1	1	0	0	0	0	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	θ
$\underline{A}_4$	0	3	3/2	11/2	0	1	1/2	0	0	
$\underline{A}_3$	1	1	– 1/2	7/2	1	0	1/2	0	0	
$\underline{A}_6$	0	11	13/2	9/2	0	0	1/2	1	0	
$\underline{A}_7$	0	8	3	13	0	0	1	0	1	
		1	– 1/2	– 9/2	0	0	– 1/2	0	0	

Να βρεθεί η βέλτιστη λύση του παραπάνω προβλήματος αν προστεθούν δύο νέες μεταβλητές x_8 και x_9 με συντελεστές κόστους $c_8 = 2$ και $c_9 = -2$ και αντίστοιχες στήλες $\underline{A}_8 = [4, -2, 0, -3]^T$ και $\underline{A}_9 = [0, 5, 3, 0]^T$.

Λύση

Προσθέτουμε στο τελικό tableau του αρχικού προβλήματος δύο στήλες που αντιστοιχούν στις νέες μεταβλητές, αυτές είναι

$$
B^{-1}\underline{A}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}
$$

$$
B^{-1}\underline{A}_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 11/2 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

Προσέξτε ότι ο B^{-1} προκύπτει από τις τέσσερις τελευταίες στήλες του tableau της βέλτιστης λύσης του αρχικού προβλήματος αφού στο αρχικό tableau του προβλήματος εκεί εμφανίζεται ο μοναδιαίος πίνακας. Έχουμε επίσης ότι

$$\bar{c}_8 = c_8 - \underline{c}_B{}^T B^{-1} \underline{A}_8 = 2 - [0, 1, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = 3$$

$$\bar{c}_9 = c_9 - \underline{c}_B{}^T B^{-1} \underline{A}_9 = -3 - [0, 1, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -11/2$$

Οδηγούμαστε στο tableau του νέου προβλήματος

			-1	-1	1	0	0	0	0	2	-3	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	$\underline{A}_8$	$\underline{A}_9$	θ
$\underline{A}_4$	0	3	3/2	11/2	0	1	1/2	0	0	**3**	5/2	$\underline{1}$
$\underline{A}_3$	1	1	$-1/2$	7/2	1	0	1/2	0	0	-1	5/2	–
$\underline{A}_6$	0	11	13/2	9/2	0	0	1/2	1	0	-1	11/2	–
$\underline{A}_7$	0	8	3	13	0	0	1	0	1	-5	5	–
		1	$-1/2$	$-9/2$	0	0	$-1/2$	0	0	$\underline{3}$	$-11/2$	

Βλέπουμε ότι $\bar{c}_8 = 3 > 0$ άρα παραβιάζεται η δεύτερη συνθήκη (5.2) που σημαίνει ότι πρέπει να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Simplex ξεκινώντας από το παραπάνω tableau.

			-1	-1	1	0	0	0	0	2	-3	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	$\underline{A}_8$	$\underline{A}_9$	θ
$\underline{A}_8$	2	1	1/2	11/6	0	1/3	1/6	0	0	1	5/6	
$\underline{A}_3$	1	2	0	16/3	1	1/3	2/3	0	0	0	10/3	
$\underline{A}_6$	0	12	7	19/3	0	1/3	2/3	1	0	0	19/3	
$\underline{A}_7$	0	13	7/2	89/6	0	1/3	7/6	0	1	-4	35/6	
		4	-2	-10	0	-1	-1	0	0	0	-8	

Βλέπουμε ότι τώρα ικανοποιούνται οι συνθήκες βελτιστότητας και συνεπώς η βέλτιστη λύση του νέου προβλήματος είναι η $\underline{x}' = [0, 0, 2, 0, 0, 12, 13, 1, 0]^T$.

5.2 Προσθήκη νέου περιορισμού

Σε αυτή την παράγραφο μελετάμε τις επιπτώσεις σε ένα ΠΓΠ από την προσθήκη ενός νέου περιορισμού. Εδώ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με τη μορφή του περιορισμού.

5.2.1 Προσθήκη νέου ανισοτικού περιορισμού

Ας υποθέσουμε ότι προσθέτουμε σε ένα ΠΓΠ έναν νέο ανισοτικό περιορισμό $\underline{a}^T_{m+1}\underline{x} \geq b_{m+1}$ με γνωστά $\underline{a}_{m+1}$ και b_{m+1}. Αν η βέλτιστη λύση $\underline{x}'$ του αρχικού προβλήματος ικανοποιεί το νέο περιορισμό, τότε είναι βέλτιστη λύση και του νέου προβλήματος. Αν ο νέος περιορισμός παραβιάζεται από την $\underline{x}'$ εισάγουμε μια νέα περιθώρια μεταβλητή x_{n+1} και ο νέος περιορισμός γίνεται $\underline{a}^T{}_{m+1}\underline{x} - x_{n+1} = b_{m+1}$. Αν το αρχικό μας πρόβλημα είναι σε κανονική μορφή το νέο πρόβλημα είναι κι αυτό σε κανονική μορφή και ο πίνακας των συντελεστών των περιορισμών του είναι

$$\begin{bmatrix} A & \underline{0} \\ \underline{a}^T_{m+1} & -1 \end{bmatrix}.$$

Έστω B ο βασικός πίνακας της βέλτιστης λύσης του αρχικού προβλήματος. Σχηματίζουμε μια βάση του νέου προβλήματος επιλέγοντας τις βασικές μεταβλητές του αρχικού προβλήματος συν την νέα μεταβλητή x_{n+1}. Ο νέος βασικός πίνακας $\overline{B}$ είναι της μορφής

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} B & \underline{0} \\ a^T_{B,m+1} & -1 \end{bmatrix},$$

όπου το διάνυσμα γραμμή $\underline{a}^T_{B,m+1}$ περιέχει τα στοιχεία του $\underline{a}^T{}_{m+1}$ που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές του αρχικού προβλήματος. Η ορίζουσα του πίνακα $\overline{B}$ είναι ίση με την ορίζουσα του B πολλαπλασιασμένη με -1, δηλαδή είναι διάφορη του μηδενός (αφού ο πίνακας B είναι βασικός) πράγμα που σημαίνει ότι και ο πίνακας $\overline{B}$ είναι βασικός πίνακας του νέου προβλήματος. Η βασική λύση που σχετίζεται με τον πίνακα $\overline{B}$ είναι το διάνυσμα $[\underline{x}', \underline{a}^T{}_{m+1}\underline{x}' - b_{m+1}]^T$ κι είναι μη εφικτή, αφού υποθέσαμε ότι η $\underline{x}'$ παραβιάζει το νέο περιορισμό. Ο αντίστροφος του νέου βασικού πίνακα είναι

$$\overline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & \underline{0} \\ a^T_{B,m+1}B^{-1} & -1 \end{bmatrix}.$$

Έστω $\underline{c}_B \in R^m$ το διάνυσμα συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης των βασικών μεταβλητών της βέλτιστης λύσης του αρχικού προβλήματος. Τότε το διάνυσμα των μοναδιαίων αυξήσεων κέρδους του νέου προβλήματος θα είναι

$$\underline{\overline{c}} = [\underline{c}^T, 0] - [\underline{c}_B{}^T, 0]\begin{bmatrix} B^{-1} & \underline{0} \\ a^T_{B,m+1}B^{-1} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \underline{0} \\ \underline{a}^T_{m+1} & -1 \end{bmatrix} = [\underline{c}^T - \underline{c}_B{}^T B^{-1}A, 0],$$

που είναι μη αρνητικό λόγω της βελτιστότητας του B στο το αρχικό πρόβλημα. Αυτό σημαίνει ότι ο $\overline{B}$ είναι βασικός πίνακας του δυϊκού προβλήματος και η αντίστοιχη βασική λύση του δυϊκού είναι και εφικτή. Δηλαδή μπορούμε να εφαρμόσουμε την δυϊκή Simplex στο νέο πρόβλημα ξεκινώντας από το tableau που αντιστοιχεί στον πίνακα $\overline{B}$. Το κυρίως τμήμα του tableau εκκίνησης της δυϊκής Simplex είναι

$$\overline{B}^{-1}\begin{bmatrix} A & \underline{0} \\ \underline{a}_{m+1}^T & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & \underline{0} \\ \underline{a}_{B,m+1}^T B^{-1} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \underline{0} \\ \underline{a}_{m+1}^T & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}A & \underline{0} \\ \underline{a}_{B,m+1}^T B^{-1}A - \underline{a}_{m+1}^T & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $B^{-1}A$ είναι το κυρίως τμήμα του τελικού tableau του αρχικού προβλήματος.

Παράδειγμα 5.2

Έστω το πρόβλημα του Παραδείγματος 5.1. Να βρεθεί η βέλτιστη λύση αν προσθέσουμε τον περιορισμό $-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 4$.

Λύση

Ο νέος περιορισμός παραβιάζεται από την βέλτιστη του αρχικού προβλήματος $\underline{x}' = [0, 0, 1, 3, 0, 11, 8]^T$. Με την προσθήκη της περιθώριας μεταβλητής x_8 ο νέος περιορισμός γίνεται $-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_8 = 4$ ή ισοδύναμα $2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_8 = -4$. Έτσι έχουμε ότι $\underline{a}_8^T = [2, -3, -5, 0, 0, 0, 0]$, $b_8 = -4$ κι άρα $\underline{a}_8^T\underline{x}' - b_8 = -1$. Η τελευταία γραμμή του κυρίως tableau στο νέο πρόβλημα είναι

$$\underline{a}_{B,8}^T B^{-1}A - \underline{a}_8^T = [0, -5, 0, 0]\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/2 & 11/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 7/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 13/2 & 9/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 3 & 13 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-[2, -3, -5, 0, 0, 0, 0] = [1/2, -29/2, 0, 0, -5/2, 0, 0]$$

Συνεπώς το αρχικό tableau του νέου προβλήματος είναι

			-1	-1	1	0	0	0	0	-3	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	$\underline{A}_8$	θ
$\underline{A}_4$	0	3	3/2	11/2	0	1	1/2	0	0	0	
$\underline{A}_3$	1	1	– 1/2	7/2	1	0	1/2	0	0	0	
$\underline{A}_6$	0	11	13/2	9/2	0	0	1/2	1	0	0	
$\underline{A}_7$	0	8	3	13	0	0	1	0	1	0	
$\underline{A}_8$	0	– 1	1/2	– 29/2	0	0	**– 5/2**	0	0	1	
		1	– 1/2	– 9/2	0	0	– 1/2	0	0	0	

Συνεχίζουμε με τον αλγόριθμο της δυϊκής Simplex και προχωράμε στο επόμενο tableau που είναι και το τελικό αφού οδηγούμαστε σε εφικτή λύση.

			-1	-1	1	0	0	0	0	-3	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	$\underline{A}_8$	θ
$\underline{A}_4$	0	14/5	8/5	13/5	0	1	0	0	0	1/5	
$\underline{A}_3$	1	4/5	– 2/5	3/5	1	0	0	0	0	1/5	
$\underline{A}_6$	0	54/5	33/5	8/5	0	0	0	1	0	1/5	
$\underline{A}_7$	0	38/5	16/5	36/5	0	0	0	0	1	2/5	
$\underline{A}_5$	0	2/5	– 1/5	29/5	0	0	1	0	0	– 2/5	
		3/5	– 1/4	– 8/5	0	0	0	0	0	– 1/5	

Η βέλτιστη λύση του νέου ΠΓΠ είναι η $\underline{x}' = [0, 0, 4/5, 14/5, 2/5, 54/5, 38/5, 0]^T$.

5.2.2 Προσθήκη νέου ισοτικού περιορισμού

Εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση που ο νέος περιορισμός είναι ισοτικός και παραβιάζεται από την βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος. Ο νέος περιορισμός είναι της μορφής $\underline{a}^T_{m+1}\underline{x} = b_{m+1}$ κι επειδή είναι ισοτικός δε μπορούμε να εισάγουμε περιθώρια μεταβλητή για να φέρουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή, άρα η ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου δεν έχει εφαρμογή εδώ. Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος $\underline{x}'$ παραβιάζει το νέο περιορισμό ως εξής: $\underline{a}^T_{m+1}\underline{x}' > b_{m+1}$. Εισάγουμε την τεχνητή μεταβλητή x_{n+1} κι έχουμε το ακόλουθο βοηθητικό πρόβλημα

$$\max(\underline{c}^T\underline{x} + Mx_{n+1})$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{a}^T_{m+1}\underline{x} - x_{n+1} = b_{m+1}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0},\ x_{n+1} \geq 0,$$

όπου το $M << 0$. Μια πρώτη βασική εφικτή λύση του παραπάνω προβλήματος επιτυγχάνεται επιλέγοντας ως βασικές μεταβλητές τις βασικές μεταβλητές του αρχικού προβλήματος συν την τεχνητή μεταβλητή x_{n+1}. Η αντίστοιχη βασική εφικτή λύση θα είναι $[\underline{x}', \underline{a}^T_{m+1}\underline{x}' - b_{m+1}]^T$. Ο βασικός πίνακας είναι ο ίδιος με τον πίνακα $\overline{B}$ της προηγούμενης παραγράφου. Η διαφορά είναι ότι στην προηγούμενη περίπτωση είχαμε μια βασική εφικτή λύση του δυϊκού προβλήματος ενώ εδώ έχουμε μια βασική εφικτή λύση του πρωτεύοντος προβλήματος. Συνεπώς εδώ εφαρμόζουμε τον κλασσικό αλγόριθμο Simplex. Αν στη βέλτιστη λύση του βοηθητικού προβλήματος έχουμε ότι $x_{n+1} = 0$, τότε αυτή είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος μας με την προσθήκη του νέου περιορισμού, διαφορετικά το νέο πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις.

5.3 Μεταβολή των συντελεστών b_i

Υποθέτουμε ότι κάποιο από τα στοιχεία b_i του διανύσματος των σταθερών όρων των περιορισμών $\underline{b}$ μεταβάλλεται σε $b_i + \delta$. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι το διάνυσμα $\underline{b}$ γίνεται $\underline{b} + \delta\underline{e}_i$, όπου $\underline{e}_i$ είναι το i-στο μοναδιαίο διάνυσμα. Στόχος μας είναι να καθορίσουμε το εύρος τιμών του δ, για τις οποίες ο βασικός πίνακας της βέλτιστης λύσης του αρχικού προβλήματος παραμένει βέλτιστος στο νέο πρόβλημα. Παρατηρούμε αρχικά ότι η συνθήκη βελτιστότητας (5.2) δεν επηρεάζεται από την μεταβολή του $\underline{b}$ αφού δεν εξαρτάται από αυτό. Συνεπώς θα μας απασχολήσει μόνο η συνθήκη εφικτότητας (5.1)

$$B^{-1}(\underline{b} + \delta\underline{e}_i) \geq \underline{0}. \tag{5.3}$$

Έστω $\underline{\beta}^T = [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \ldots, \beta_{mi}]$ η i-στη στήλη του B^{-1} και η ανίσωση (5.1) γίνεται

$$\underline{x}_B + \delta\underline{\beta} \geq \underline{0},$$

ή αλλιώς,

$$\underline{x}_{B(j)} + \delta\beta_{ji} \geq 0, j = 1, \ldots, m,$$

που ισοδυναμεί με την συνθήκη

$$\max_{\{j|\beta_{ji}>0\}}\left(-\frac{x_{B(j)}}{\beta_{ji}}\right) \leq \delta \leq \min_{\{j|\beta_{ji}<0\}}\left(-\frac{x_{B(j)}}{\beta_{ji}}\right). \tag{5.4}$$

Αν το δ ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη, το βέλτιστο κέρδος ως συνάρτηση του δ δίδεται από την εξίσωση $\underline{c}_B{}^T B^{-1}(\underline{b} + \delta\underline{e}_i) = \underline{\upsilon}^T\underline{b} + \delta\upsilon_i$, όπου $\underline{\upsilon}^T = \underline{c}_B{}^T B^{-1}$ είναι η λύση του δυϊκού προβλήματος που αντιστοιχεί στον βασικό πίνακα B.

Αν το δ βρίσκεται εκτός των ορίων που καθορίζει η συνθήκη (5.4), η λύση που αντιστοιχεί στον B είναι βασική αλλά όχι εφικτή. Σε αυτή την περίπτωση, αφού ικανοποιούνται οι συνθήκες βελτιστότητας, η $\underline{\upsilon}$ είναι βασική εφικτή λύση του δυϊκού και μπορούμε να εφαρμόσουμε την δυϊκή Simplex ξεκινώντας από την τρέχουσα βάση B.

Μια πιο απλή προσέγγιση στο πρόβλημα της μεταβολής του $\underline{b}$, η οποία εφαρμόζεται και σε προβλήματα που μεταβάλλονται περισσότερα του ενός b_i, είναι η παρακάτω. Όπως είδαμε μόνο το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$ επηρεάζεται άμεσα από τις μεταβολές του $\underline{b}$, άρα αν το $\underline{x}_{B,N} = B^{-1}(\underline{b} + \delta\underline{e}_i) \geq \underline{0}$ τότε ο βασικός πίνακας B παραμένει βέλτιστος και αλλάζουν μόνο οι τιμές των βασικών μεταβλητών. Διαφορετικά, όπως είδαμε παραπάνω, εφαρμόζουμε την δυϊκή Simplex ξεκινώντας από το τελικό tableau του αρχικού προβλήματος, αφού πρώτα αντικαταστήσουμε το $\underline{x_B}$ με το $\underline{x_{B,N}}$.

Παράδειγμα 5.3

Έστω το ακόλουθο ΠΓΠ

$$
\begin{aligned}
z = -\max(5x_1 + \ \ x_2 - 12x_3)& \\
3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \qquad &= 10 \\
5x_1 + 3x_2 \qquad + \ \ x_4 &= 16 \\
x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 &\geq \ 0
\end{aligned}
$$

Το tableau της βέλτιστης λύσης είναι

			5	1	− 12	0	
	$\underline{c_B}$	$\underline{x_B}$	$\underline{A_1}$	$\underline{A_2}$	$\underline{A_3}$	$\underline{A_4}$	θ
$\underline{A_1}$	5	2	1	0	− 3	2	
$\underline{A_2}$	1	2	0	1	5	− 3	
		− 12	0	0	− 2	− 7	

Έστω ότι μεταβάλλεται το b_1 κατά δ. Να βρεθούν οι τιμές της μεταβολής δ για τις οποίες δεν αλλάζει η βέλτιστη λύση του παραπάνω προβλήματος.

Λύση

Ο αντίστροφος του πίνακα B της βέλτιστης λύσης αποτελείται από τις δύο τελευταίες στήλες του τελικού tableau αφού εκεί συναντάται ο μοναδιαίος πίνακας στο αρχικό tableau. Μιας και μεταβάλλεται το b_1 το διάνυσμα $\underline{\beta}$ θα είναι ίσο με την πρώτη στήλη του B^{-1} δηλαδή θα είναι $\underline{\beta}^T = [-3, 5]$. Οπότε το νέο διάνυσμα των βασικών μεταβλητών θα είναι $x_{B\delta} = x_B + \delta\underline{\beta} = [2 - 3\delta, 2 + 5\delta]$. Όπως είδαμε για να συνεχίσει να είναι η τρέχουσα λύση βέλτιστη θα πρέπει να ισχύει ότι $x_B + \delta\underline{\beta} \geq \underline{0}$ δηλαδή $2 - 3\delta \geq 0$ και $2 + 5\delta \geq 0$ ή ισοδύναμα $-2/5 \leq \delta \leq 2/3$. Αν το $\delta > 2/3$ (ή $\delta < -2/5$) τότε η x_1 γίνεται αρνητική (η x_2 γίνεται αρνητική), οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την δυϊκή Simplex για να βρούμε τη νέα βέλτιστη λύση.

Παράδειγμα 5.4

Έστω το πρόβλημα του Παραδείγματος 5.1. Να βρεθεί η βέλτιστη λύση αν μεταβάλλουμε το διάνυσμα των σταθερών όρων των περιορισμών γίνει $\underline{b}^T = [3, -3, 1, 10]$.

Λύση

Εδώ βλέπουμε ότι αλλάζουν περισσότερα από ένα στοιχεία του $\underline{b}$, οπότε προχωράμε κατευθείαν στην ενημέρωση του $\underline{x}_B$.

$$\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ -1/2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε ότι πλέον δεν ικανοποιείται η συνθήκη εφικτότητας (5.1) οπότε προχωράμε στην εφαρμογή της δυϊκής Simplex και το αρχικό tableau του νέου προβλήματος προκύπτει από το τελικό tableau του αρχικού προβλήματος, αφού αντικαταστήσουμε το $\underline{x}_B$.

			– 1	– 1	1	0	0	0	0	– 3	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	$\underline{A}_8$	θ
$\underline{A}_4$	0	3/2	3/2	11/2	0	1	1/2	0	0	0	
$\underline{A}_3$	1	– 3/2	– 1/2	7/2	1	0	1/2	0	0	0	
$\underline{A}_6$	0	– 1/2	13/2	9/2	0	0	1/2	1	0	0	
$\underline{A}_7$	0	7	3	13	0	0	1	0	1	0	
		– 3/2	– 1/2	– 9/2	0	0	– 1/2	0	0	0	

Παρατηρούμε ότι $\underline{x}_{B(3)} = -1/2 < 0$ κι όλα τα άλλα στοιχεία της τρίτης γραμμής είναι μη αρνητικά. Άρα το νέο ΠΓΠ δεν έχει εφικτές λύσεις.

5.4 Μεταβολή των συντελεστών κέρδους c_i

Σε αυτή την παράγραφο μελετάμε την περίπτωση μεταβολής των στοιχείων του $\underline{c}$. Υποθέτουμε ότι κάποιο από τα στοιχεία c_j του διανύσματος των συντελεστών κέρδους γίνεται $c_j + \delta$. Η συνθήκη εφικτότητας (5.1) δεν επηρεάζεται μιας και το διάνυσμα $\underline{x}_B$ είναι ανεξάρτητο του $\underline{c}$. Επικεντρώνουμε λοιπόν την προσοχή μας στην συνθήκη βελτιστότητας

$$\underline{c}^T - \underline{c}_B{}^T B^{-1} A \leq \underline{0}^T.$$

Αν μεταβληθεί η c_j και η x_j δεν είναι βασική μεταβλητή τότε το διάνυσμα των συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών $\underline{c}_B$ δεν μεταβάλλεται. Σε αυτή την περίπτωση επηρεάζονται μόνο οι μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους των μεταβλητών x_j, των οποίων οι συντελεστές c_j μεταβάλλονται. Για να παραμείνει βέλτιστη η λύση του αρχικού προβλήματος θα πρέπει να ισχύει ότι

$$c_j + \delta - \underline{c}_B{}^T B^{-1} \underline{A}_j \leq 0,$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\delta \leq -\,\overline{c}_j.$$

Αν ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη παραμένει βέλτιστη η λύση του αρχικού προβλήματος. Στην αντίθετη περίπτωση εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Simplex ξεκινώντας από την τρέχουσα βασική εφικτή λύση.

Αν μεταβληθεί ο συντελεστής κέρδους c_j της l-στης βασικής μεταβλητής δηλαδή $j = B(l)$, τότε μεταβάλλεται το διάνυσμα $\underline{c}_B$, το οποίο γίνεται $\underline{c}_B + \delta\, \underline{e}_l$ και μεταβάλλονται οι μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους όλων των μεταβλητών. Σε αυτή την περίπτωση η συνθήκη βελτιστότητας είναι της μορφής

$$(\underline{c}_B + \delta\, \underline{e}_l)^T B^{-1} \underline{A}_i \geq c_i,\ \forall\ i \neq j,$$

ή ισοδύναμα

$$\delta\, q_{li} \geq \overline{c}_i,\ \forall\ i \neq j,$$

όπου q_{li} είναι το l-στο στοιχείο του διανύσματος $B^{-1}\underline{A}_i$, δηλαδή είναι το l-στο στοιχείο της i-στης γραμμής του τελικού tableau του αρχικού προβλήματος. Αν οι παραπάνω ανισότητες ικανοποιούνται τότε η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι οι μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους αλλάζουν για όλα τα x_i που δεν είναι βασικά, διαφορετικά παραμένουν ίσες με το μηδέν.

Πιο απλά μπορούμε να κάνουμε το εξής. Επανεκτιμούμε την μηδενική γραμμή του τελικού tableau χρησιμοποιώντας τους νέους συντελεστές κέρδους. Αν αυτή παραμένει μη θετική τότε η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει. Διαφορετικά συνεχίζουμε με τον αλγόριθμο Simplex από το τελικό tableau του αρχικού προβλήματος.

Παράδειγμα 5.5

Να βρεθεί η βέλτιστη λύση του ΠΓΠ του Παραδείγματος 5.1 αν το διάνυσμα των συντελεστών κέρδους γίνει $\underline{c}^T = [-\,3, 8, 2, 0, 0, 0, 0]$.

Λύση

Εδώ αλλάζουν τα c_1, c_2 και c_3. Η x_3 είναι βασική μεταβλητή άρα αλλάζουν όλα τα στοιχεία του $\underline{\bar{c}}$ που αντιστοιχούν σε μη βασικές μεταβλητές. Προχωράμε κατευθείαν στην ενημέρωση του $\underline{\bar{c}}$.

$$\underline{\bar{c}} = \underline{c}^T - \underline{c}_B{}^T B^{-1} A = \left[-3, 8, 2, 0, 0, 0\right]$$

$$-\left[0, 2, 0, 0\right] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 11/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 7/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 13/2 & 9/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 3 & 13 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[-2, 1, 0, 0, -1, 0, 0\right]$$

Βλέπουμε ότι πλέον δεν ικανοποιείται η συνθήκη βελτιστότητας αφού $\bar{c}_2 > 0$, οπότε προχωράμε στην εφαρμογή της Simplex και το αρχικό tableau του νέου προβλήματος προκύπτει από το τελικό tableau του αρχικού προβλήματος, αφού αντικαταστήσουμε το $\underline{\bar{c}}$.

			-3	8	2	0	0	0	0	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	θ
$\underline{A}_4$	0	3	3/2	11/2	0	1	1/2	0	0	6/11
$\underline{A}_3$	2	1	− 1/2	**7/2**	1	0	1/2	0	0	<u>2/7</u>
$\underline{A}_6$	0	11	13/2	9/2	0	0	1/2	1	0	22/9
$\underline{A}_7$	0	8	3	13	0	0	1	0	1	8/13
		2	− 2	<u>1</u>	0	0	− 1	0	0	

Εισάγουμε στην βάση την x_2 κι εξάγουμε την x_3. Έτσι έχουμε το επόμενο Tableau που είναι και το τελικό.

			-3	8	2	0	0	0	0	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	θ
$\underline{A}_4$	0	10/7	3/2	11/2	0	1	1/2	0	0	
$\underline{A}_2$	8	2/7	− 1/7	7/2	1	0	1/2	0	0	
$\underline{A}_6$	0	68/7	13/2	9/2	0	0	1/2	1	0	
$\underline{A}_7$	0	30/7	3	13	0	0	1	0	1	
		16/7	− 13/7	0	2/7	0	− 8/7	0	0	

Η νέα βέλτιστη λύση είναι $\underline{x}'^T = [10/7, 2/7, 68/7, 30/7]$.

5.5 Μεταβολή των συντελεστών a_{ij}

Σε αυτή την παράγραφο μελετάμε την περίπτωση μεταβολής των στοιχείων του πίνακα A. Όπως θα δούμε υπάρχουν δυο περιπτώσεις ανάλογα με το αν τα στοιχεία a_{ij} του A που αλλάζουν ανήκουν σε βασικές ή μη βασικές στήλες $\underline{A}_j$.

5.5.1 Οι μεταβολές δεν αφορούν στοιχεία βασικών στηλών

Υποθέτουμε ότι το στοιχείο a_{ij}, της μη βασικής στήλης $\underline{A}_j$ του A μεταβάλλεται κατά μια ποσότητα δ, δηλαδή γίνεται $a_{ij} + \delta$. Αφού η στήλη $\underline{A}_j$ δεν είναι βασική ο βασικός πίνακας B δεν αλλάζει και κατά συνέπεια η συνθήκη εφικτότητας δεν επηρεάζεται. Επιπλέον αλλάζει μόνο η μοναδιαία αύξηση κέρδους της μεταβλητής x_j κι άρα για να μην αλλάζει η βέλτιστη λύση θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη

$$c_j - \underline{\upsilon}^T(\underline{A}_j + \delta\, \underline{e}_i) \leq 0,$$

ή,

$$\overline{c}_j - \delta\, \upsilon_i \leq 0,$$

όπου $\underline{\upsilon}^T = \underline{c}_B^T B^{-1}$. Αν η παραπάνω συνθήκη δεν ικανοποιείται τότε η μη βασική στήλη $\underline{A}_j$ εισάγεται στην βάση και συνεχίζουμε με τον αλγόριθμο της Simplex από το τελικό tableau του αρχικού προβλήματος, αφού αντικαταστήσουμε την j-στη στήλη του tableau με την στήλη $B^{-1}(\underline{A}_j + \delta\, \underline{e}_i)$.

5.5.2 Οι μεταβολές αφορούν στοιχεία βασικών στηλών

Υποθέτουμε ότι η βασική στήλη $\underline{A}_j$ μεταβάλλεται και γίνεται $\underline{A}_j'$. Τώρα υπάρχει το ενδεχόμενο οι βασικές στήλες του αρχικού προβλήματος να μην αποτελούν βάση του νέου προβλήματος. Ακόμη κι αν αυτό δεν συμβαίνει η αλλαγή μιας βασικής στήλης $\underline{A}_j$ μεταβάλλει τον πίνακα B^{-1} και κατά συνέπεια αλλάζει όλο το tableau.

Η αλλαγή αυτή αντιμετωπίζεται με δύο απλά βήματα:

α) Εισάγουμε μια νέα μεταβλητή x_j' και την στήλη $\underline{A}_j'$ στον πίνακα A, ενώ ο συντελεστής κέρδους της x_j' είναι ίσος με c_j. Η αντίστοιχη στήλη που εισάγεται στο tableau της Simplex είναι $B^{-1}\underline{A}_j'$, όπου B είναι ο «παλιός» βασικός πίνακας πριν τις αλλαγές. Η μοναδιαία αύξηση κέρδους της x_j' είναι $\overline{c}_j' = c_j - \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{A}_j'$.

β) Εξάγουμε την «παλιά» μεταβλητή x_j από την βάση, εισάγουμε την «νέα» μεταβλητή x_j' και συνεχίζουμε από εκεί και πέρα με τον αλγόριθμο Simplex.

Για να είναι εφικτό το βήμα (β), θα πρέπει το l-στο στοιχείο της j-στης στήλης του αρχικού tableau του νέου προβλήματος (μετά την εισαγωγή της x_j' και την ολοκλήρωση του πρώτου βήματος), όπου $B(l) = j$, (δηλαδή η γραμμή l είναι αυτή που αντιστοιχεί στη μεταβλητή x_j) να είναι διαφορετικό του μηδενός. Αν είναι ίσο με το μηδέν τότε ο πίνακας B' δεν είναι πλέον βασικός. Σε αυτήν την περίπτωση ένας τρόπος να απαλλαχθούμε από την «ενοχλητική» μεταβλητή x_j είναι να την χειριστούμε ως τεχνητή μεταβλητή και να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του μεγάλου M ή των δύο φάσεων.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι το πρόβλημα της προσθήκης ή ακόμη και της αφαίρεσης μεταβλητών μπορεί να ειδωθεί σαν ειδική περίπτωση του προβλήματος αλλαγής των στοιχείων του A. Πράγματι η εισαγωγή μιας νέας μεταβλητής μπορεί να ειδωθεί σαν την περίπτωση μεταβολής μιας μη βασικής στήλης του A, της οποίας όλα τα στοιχεία στο αρχικό πρόβλημα ήταν ίσα με το μηδέν. Αντίστοιχα στην περίπτωση αφαίρεσης μεταβλητής μπορούμε να θεωρήσουμε, ότι η στήλη $\underline{A}_j$ της μεταβλητής που αφαιρείται, αντικαθίσταται από τη μηδενική στήλη.

Παράδειγμα 5.6

Να βρεθεί η βέλτιστη λύση του ΠΓΠ του Παραδείγματος 5.1 αν αντί των δύο πρώτων περιορισμών έχουμε αντίστοιχα τους περιορισμούς $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 2$, $-x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 2$.

Λύση

Εδώ βλέπουμε ότι αλλάζουν οι στήλες $\underline{A}_2$ και $\underline{A}_3$ από τις οποίες η $\underline{A}_3$ είναι βασική. Συνεπώς μεταβάλουμε την δεύτερη στήλη του tableau και εισάγουμε μια νέα μεταβλητή την x_3'. Οι νέες στήλες του A είναι $\underline{A}_2^T = [3, 4, 1, 6]$, $\underline{A}_3'^T = [-2, 1, -1, -2]$ και οι αντίστοιχες στήλες του νέου tableau δίδονται από:

$$B^{-1}\underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\underline{A}_3{}' = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστούμε στο τελικό tablau του αρχικού προβλήματος την δεύτερη στήλη με την $B^{-1}\underline{A}_2$ και προσθέτουμε μια ακόμη στήλη την $B^{-1}\underline{A}_3{}'$. Κατόπιν εισάγουμε την $x_3{}'$ στη βάση στη θέση της x_3, που διαγράφουμε.

			−3	8	2	0	0	0	0	1	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	$\underline{A}_3{}'$	θ
$\underline{A}_4$	0	3	3/2	5	0	1	1/2	0	0	− 3/2	
$\underline{A}_3$	2	1	− 1/2	2	1	0	1/2	0	0	**1/2**	
$\underline{A}_6$	0	11	13/2	3	0	0	1/2	1	0	− 1/2	
$\underline{A}_7$	0	8	3	10	0	0	1	0	1	− 1	
		2	− 1/2	− 3	0	0	− 1/2	0	0	1/2	

			−3	8	0	0	0	0	1	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_6$	$\underline{A}_7$	$\underline{A}_3{}'$	θ
$\underline{A}_4$	0	6	0	11	1	2	0	0	0	
$\underline{A}_3{}'$	1	2	− 1	4	0	1	0	0	1	
$\underline{A}_6$	0	12	6	5	0	1	1	0	0	
$\underline{A}_7$	0	10	2	14	0	2	0	1	0	
		2	0	− 5	0	− 1	0	0	0	

Αφού η μηδενική γραμμή είναι μη θετική έχουμε βρει τη νέα βέλτιστη λύση που είναι $\underline{x}'^T = [0, 0, 2, 6, 0, 12, 10]$. Επειδή το $\bar{c}_1 = 0$ χωρίς η x_1 να είναι βασική μεταβλητή εισάγοντας την $\underline{A}_1$ στην βάση έχουμε μιαν άλλη βέλτιστη λύση. Άρα το νέο ΠΓΠ έχει άπειρες βέλτιστες λύσεις.

Παράδειγμα 5.7

Έστω το ακόλουθο ΠΓΠ

$$z = \max(2x_1 - x_2 + x_3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Το tableau της βέλτιστης λύσης είναι

			2	−1	1	0	0	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	θ
$\underline{A}_1$	2	6	1	1	1	1	0	
$\underline{A}_5$	0	10	0	3	1	1	1	
		12	0	− 3	− 1	− 2	0	

α) Υποθέστε ότι αλλάζει η στήλη $\underline{A}_2$ γίνεται [2, 5]. Ελέγξτε αν αλλάζει η βέλτιστη λύση.

β) Έστω ότι η πρώτη στήλη του A γίνεται $\underline{A}_1^T = [0, -1]$. Να βρεθεί η νέα βέλτιστη λύση.

Λύση

α) Η στήλη $\underline{A}_2$ δεν είναι βασική άρα αρχικά ελέγχουμε αν το $\overline{c}_2$ γίνεται θετικό.

$$\overline{c}_2 = c_2 - \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{A}_2 = -1 - [2, 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = -5$$

Άρα η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει. Το μόνο που αλλάζει είναι η δεύτερη στήλη του τελικού tableau που γίνεται

$$B^{-1}\underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

β) Η στήλη $\underline{A}_1$ είναι βασική οπότε εισάγουμε μια νέα μεταβλητή x_1' για την οποία έχουμε

$$B^{-1}\underline{A}_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

και

$$\overline{c}_1 = c_1 - \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{A}_1' = 2 - [2, 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2$$

Βλέπουμε ότι το πρώτο στοιχείο της στήλης $B^{-1}\underline{A}_1'$ της νέας μεταβλητής x_1' είναι μηδέν άρα οι στήλες του B δεν αποτελούν βάση του νέου προβλήματος. Μετατρέπουμε την μεταβλητή x_1 σε τεχνητή και χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του μεγάλου M, για να βρούμε μια νέα βέλτιστη βασική εφικτή λύση. Έτσι οδηγούμαστε στο επόμενο tableau

			M	-1	1	0	0	2	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_1$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_1'$	θ
$\underline{A}_1$	M	6	1	1	**1**	1	0	0	$\underline{6}$
$\underline{A}_5$	0	10	0	3	1	1	1	-1	10
		$6M$	0	$-1-M$	$\underline{1-M}$	$-M$	0	2	

			-1	1	0	0	2	
	$\underline{c}_B$	$\underline{x}_B$	$\underline{A}_2$	$\underline{A}_3$	$\underline{A}_4$	$\underline{A}_5$	$\underline{A}_1'$	θ
$\underline{A}_3$	1	6	1	1	1	0	0	
$\underline{A}_5$	0	4	2	0	0	1	-1	
		6	-2	0	-1	0	2	

Σε αυτό το tableau πρέπει να εισάγουμε στην βάση τη μεταβλητή x_1' αφού $\bar{c}_1' = 2 > 0$. Παρατηρούμε όμως ότι $B^{-1}\underline{A}_1' \leq \underline{0}$ πράγμα που σημαίνει ότι το πρόβλημα μας δεν είναι φραγμένο και η αντικειμενική συνάρτηση απειρίζεται.

Κεφάλαιο 6

Ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός

Στα διακριτά προβλήματα βελτιστοποίησης αναζητούμε σε ένα σύνολο διακριτών στοιχείων F το στοιχείο $\underline{x}'$, που βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση $c(\underline{x})$ μεταξύ όλων των στοιχείων $\underline{x} \in F$. Διακριτά προβλήματα βελτιστοποίησης εμφανίζονται πολύ συχνά σε ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών πεδίων. Ένας ευρύτατα διαδεδομένος τρόπος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων είναι η περιγραφή και αντιμετώπιση τους ως προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού.

Το πρόβλημα του ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού είναι παρόμοιο με το ΠΓΠ εκτός από το γεγονός ότι κάποιες ή όλες οι μεταβλητές παίρνουν ακέραιες τιμές. Γενικά για δοσμένους πίνακες A, B και διανύσματα $\underline{b}$, $\underline{c}$ και $\underline{d}$, το πρόβλημα

$$z = \max(\underline{c}^T\underline{x} + \underline{d}^T\underline{w})$$

$$A\underline{x} + B\underline{w} = \underline{b}$$

$$\underline{x}, \underline{w} \geq \underline{0},$$

$$\underline{x} \in Z^n$$

καλείται πρόβλημα μεικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (ΠΜΑΓΠ). Αν δεν υπάρχουν συνεχείς μεταβλητές $\underline{w}$ το πρόβλημα καλείται πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (ΠΑΓΠ). Αν όχι μόνο δεν υπάρχουν συνεχείς μεταβλητές, αλλά επιπλέον τα στοιχεία του $\underline{x}$ είναι δυαδικά και παίρνουν τιμές 0 ή 1, δηλαδή $x_i \in \{0, 1\}$, το πρόβλημα καλείται πρόβλημα μηδέν-ένα ακέραιου προγραμματισμού (ΠΜΕΑΠ).

Ο ακέραιος προγραμματισμός είναι ένα ιδιαίτερα ισχυρό εργαλείο περιγραφής κι επίλυσης διακριτών προβλημάτων βελτιστοποίησης. Δυστυχώς όμως τα ΠΑΓΠ εμφανίζουν σαφέστατα μεγαλύτερη δυσκολία επίλυσης από τα ΠΓΠ.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε διάφορα διακριτά προβλήματα βελτιστοποίησης και πως αυτά μπορούν να περιγραφούν ως ΠΑΓΠ. Ακόμη θα δούμε και κάποιες μεθοδολογίες επίλυσης των ΠΑΓΠ.

6.1 Τεχνικές περιγραφής ΠΑΓΠ

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε μερικές τεχνικές περιγραφής διακριτών προβλημάτων βελτιστοποίησης ως προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού. Δυστυχώς δεν υπάρχει συστηματικός τρόπος περιγραφής διακριτών προβλημάτων κι έτσι θα επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε αυτό το θέμα με την χρήση διαφόρων παραδειγμάτων.

6.1.1 Δυαδική περιγραφή

Συνήθως χρησιμοποιούμε δυαδικές μεταβλητές όταν έχουμε να περιγράψουμε την επιλογή μεταξύ δύο εναλλακτικών. Σε αυτή την περίπτωση η μεταβλητή x παίρνει την τιμή ένα ή μηδέν ανάλογα με την επιλογή που κάνουμε.

Παράδειγμα 6.1 (Το πρόβλημα του σακιδίου)

Μας δίδονται n αντικείμενα και ένα σακίδιο με το οποίο πρέπει να μεταφέρουμε τα αντικείμενα. Κάθε αντικείμενο j έχει βάρος w_j και αξία c_j. Θέλουμε να αποφασίσουμε ποια αντικείμενα θα τοποθετήσουμε στο σακίδιο έτσι ώστε να μεγιστοποιήσουμε την συνολική αξία των μεταφερόμενων αντικειμένων και το συνολικό βάρος του σακιδίου να μην υπερβεί το όριο K.

Λύση

Για να περιγράψουμε το πρόβλημα αυτό σαν ΠΑΓΠ ορίζουμε για κάθε αντικείμενο μια μεταβλητή απόφασης x_j, η οποία παίρνει την τιμή 1 αν επιλεγεί το αντικείμενο j διαφορετικά παίρνει την τιμή 0. Το ΠΑΓΠ που περιγράφει το παραπάνω πρόβλημα είναι το ακόλουθο

$$z = \max\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le K$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n.$$

6.1.2 Περιορισμοί εξαναγκασμού

Ένα φαινόμενο που συναντάμε πολύ συχνά σε διακριτά προβλήματα είναι η εξάρτηση μεταξύ διαφόρων αποφάσεων. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι η απόφαση Α μπορεί να υλοποιηθεί μόνο αφού έχει ήδη παρθεί η απόφαση Β. Για την μαθηματική περιγραφή τέτοιων φαινομένων μπορούμε να εισάγουμε δυαδικές μεταβλητές. Έστω x η μεταβλητή που εκφράζει την λήψη της απόφασης Α, οπότε παίρνει την τιμή 1 (0 αν δεν υλοποιηθεί η Α) και y η μεταβλητή που εκφράζει την λήψη της απόφασης Β (1 αν ληφθεί και 0 διαφορετικά. Η εξάρτηση μεταξύ των δύο αποφάσεων μπορεί να περιγραφεί με την χρήση του περιορισμού $x \leq y$. Έτσι αν για παράδειγμα $y = 0$ (δεν λαμβάνεται η απόφαση Β), τότε θα είναι και $x = 0$ (δε μπορούμε να λάβουμε την απόφαση Α).

Παράδειγμα 6.2 (Το πρόβλημα της επιλογής χώρων εγκατάστασης)

Έχουμε n τοποθεσίες υποψήφιες για την δημιουργία εγκαταστάσεων και m πελάτες που θα πρέπει να εξυπηρετηθούν από αυτές τις εγκαταστάσεις. Το κόστος δημιουργίας μιας εγκατάστασης στον χώρο j είναι c_j, ενώ το κόστος εξυπηρέτησης ενός πελάτη τύπου i από μια εγκατάσταση στην τοποθεσία j είναι d_{ij}. Στόχος μας είναι η επιλογή των χώρων εγκατάστασης και η ανάθεση εξυπηρέτησης κάθε πελάτη σε μια από αυτές έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος.

Λύση

Για να περιγράψουμε το πρόβλημα αυτό σαν ΠΑΓΠ ορίζουμε για κάθε τοποθεσία j μια μεταβλητή απόφασης y_j, η οποία είναι ίση με τη μονάδα αν επιλέξουμε την τοποθεσία j για την δημιουργία εγκατάστασης και ίση με το μηδέν διαφορετικά. Επιπλέον ορίζουμε τη δυαδική μεταβλητή x_{ij}, που είναι ίση με τη μονάδα αν ο πελάτης τύπου i εξυπηρετηθεί στην εγκατάσταση j και ίση με το μηδέν αλλιώς. Το ΠΑΓΠ που περιγράφει το παραπάνω πρόβλημα είναι το ακόλουθο

$$z = \min\left(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \forall i,$$

$$x_{ij} \leq y_j,\ \forall i,j,$$

$$x_j, y_j \in \{0, 1\}, \forall i,j.$$

Εδώ οι περιορισμοί $x_{ij} \le y_j$, εκφράζουν το γεγονός ότι αν δεν υπάρχει εγκατάσταση στην τοποθεσία j, ($y_j = 0$) δε μπορεί να εξυπηρετηθεί ο πελάτης i, σε αυτή και άρα θα πρέπει $x_{ij} = 0$.

6.1.3 Περιορισμοί μοναδικότητας

Ένας περιορισμός της μορφής

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le 1,$$

όπου όλες οι μεταβλητές είναι δυαδικές, σημαίνει ότι το πολύ μια από τις μεταβλητές x_j μπορεί να είναι ίση με τη μονάδα. Όμοια, αν ο παραπάνω περιορισμός είναι ισοτικός, δηλαδή έχουμε $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$, ακριβώς μια από τις μεταβλητές x_j είναι ίση με τη μονάδα. Ακριβώς αυτή είναι η περίπτωση των πρώτων i περιορισμών στο Παράδειγμα 6.2, που εκφράζουν ότι κάθε πελάτης i, πρέπει να εξυπηρετείται από μία και μόνο εγκατάσταση.

6.1.4 Διαζευκτικοί περιορισμοί

Έστω $\underline{x}$ ένα μη αρνητικό διάνυσμα μεταβλητών απόφασης. Υποθέτουμε ότι έχουμε τους περιορισμούς $\underline{a}^T\underline{x} \ge \underline{b}$ και $\underline{c}^T\underline{x} \ge \underline{d}$, όπου $\underline{a}, \underline{c} \ge \underline{0}$. Θέλουμε να περιγράψουμε την απαίτηση να ικανοποιείται ένας τουλάχιστον από τους προηγούμενους περιορισμούς. Για το λόγο αυτό εισάγουμε μια δυαδική μεταβλητή y και αναδιαμορφώνουμε τους προηγούμενους περιορισμούς ως εξής

$$\underline{a}^T\underline{x} \ge y\underline{b},$$

$$\underline{c}^T\underline{x} \ge (1 - y)\,\underline{d},$$

$$y \in \{0, 1\}, \forall i,j.$$

Στην πιο γενική περίπτωση, έχουμε m περιορισμούς $\underline{a_i}^T\underline{x} \ge \underline{b_i}$, $i = 1, \dots, m$, με $\underline{a_i} \ge \underline{0}$, $\forall i$, και θέλουμε τουλάχιστον k από αυτούς τους περιορισμούς να ικανοποιούνται. Σε αυτή την περίπτωση εισάγουμε m δυαδικές μεταβλητές y_i, $i = 1, \dots, m$, και διαμορφώνουμε τους περιορισμούς ως ακολούθως

$$\underline{a_i}^T\underline{x} \ge y_i\underline{b_i}, \; i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \geq k ,$$

$$y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, m.$$

6.1.5 Περιορισμοί εύρους τιμών

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να περιορίσουμε το σύνολο των εφικτών τιμών της μεταβλητή x στο σύνολο $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή m δυαδικών μεταβλητών y_j, $j = 1, \ldots, m$, και την χρήση των περιορισμών

$$x = \sum_{j=1}^{m} a_j y_j ,$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_i = 1 ,$$

$$y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, m.$$

6.1.6 Κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση κέρδους

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε πως μπορούμε να περιγράψουμε ως πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού το πρόβλημα βελτιστοποίησης μιας κατά τμήματα γραμμικής συνάρτησης. Υποθέτουμε ότι $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, και ότι έχουμε μια κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση κέρδους $f(x)$ που καθορίζεται από τα σημεία $(a_i, f(a_i))$ για $i = 1, \ldots, k$, και ορίζεται στο διάστημα $[a_1, a_k]$. Έτσι κάθε σημείο $x \in [a_1, a_k]$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των a_i

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i ,$$

όπου $\lambda_1, ..., \lambda_k$ είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Παρατηρούμε ότι η επιλογή των συντελεστών $\lambda_1, ..., \lambda_k$ που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ενός συγκεκριμένου σημείου x δεν είναι μοναδικός. Αυτό το πρόβλημα αντιμετωπίζεται αν απαιτήσουμε το πολύ δύο συνεχόμενοι συντελεστές λ_i να είναι μη μηδενικοί κι όλοι οι άλλοι ίσοι με το μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση κάθε $x \in [a_i, a_{i+1}]$ αναπαρίσταται μοναδικά ως $x = \lambda_i a_i + \lambda_{i+1} a_{i+1}$, όπου $\lambda_i + \lambda_{i+1} = 1$ και

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(a_i) .$$

Για να περιγράψουμε την απαίτηση ύπαρξης δύο συνεχόμενων μη μηδενικών συντελεστών λ_i και λ_{i+1} χρησιμοποιούμε μια δυαδική μεταβλητή y_i, $i = 1, \ldots, k - 1$, που είναι μονάδα όταν $a_i \leq x \leq a_{i+1}$ και μηδέν αλλιώς. Το πρόβλημα τότε περιγράφεται από το ακόλουθο ΠΜΑΓΠ

$$z = \max\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(a_i)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$

$$\lambda_1 \leq y_1,$$

$$\lambda_i \leq y_{i-1} + y_i,\ i = 2, \ldots, k - 1,$$

$$\lambda_k \leq y_{k-1},$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} y_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0,$$

$$y_i \in \{0, 1\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $y_j = 1$, τότε $\lambda_i = 0$ για κάθε i διαφορετικό από j ή $j + 1$.

Οι προηγούμενες τεχνικές μοντελοποίησης σε καμία περίπτωση δεν συνιστούν μια εξαντλητική λίστα τέτοιων τεχνικών. Απλά προσφέρουν μια γεύση των δυνατοτήτων που έχουμε για την περιγραφή διακριτών προβλημάτων ως ΠΑΓΠ. Ακολουθούν μερικά ακόμη παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.4

Έστω $M = \{1, ..., m\}$ και $N = \{1, ..., n\}$. Έστω $M_1, M_2, ..., M_n$ είναι μια δοσμένη συλλογή υποσυνόλων του M. Για κάθε υποσύνολο M_j δίδεται ένας συντελεστής βαρύτητας c_j. Ένα υποσύνολο F του N καλείται κάλυμμα του M αν $\bigcup_{j \in F} M_j = M$. Ακόμη λέμε ότι το F είναι μια τοποθέτηση του M αν $M_j \cap M_k = \emptyset$ για κάθε $j, k \in F$, $j \neq k$. Τέλος το F καλείται διαμέριση του M αν είναι συγχρόνως κάλυμμα και τοποθέτηση του M. Η βαρύτητα ενός υποσυνόλου F του N ορίζεται ως $\sum_{j \in F} c_j$. Έχουμε τα ακόλουθα προβλήματα. Στο πρόβλημα της κάλυψης θέλουμε να βρούμε το κάλυμμα F με την ελάχιστη βαρύτητα, στο πρόβλημα της τοποθέτησης θέλουμε να βρούμε την τοποθέτηση με τη μέγιστη βαρύτητα, ενώ στο πρόβλημα της διαμέρισης είτε αναζητούμε την διαμέριση με τη μέγιστη βαρύτητα, είτε αυτή με την ελάχιστη βαρύτητα.

Λύση

Για να περιγράψουμε το πρόβλημα αυτό σαν ΠΑΓΠ εισάγουμε έναν $m \times n$ πίνακα ύπαρξης A για κάθε υποσύνολο $\{M_j | j \in N\}$, του οποίου τα στοιχεία δίδονται από τη σχέση

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, i \in M_j, \\ 0, \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

Επίσης ορίζουμε μια μεταβλητή απόφασης x_j, $j = 1, \ldots, n$, που είναι ίση με τη μονάδα αν $j \in F$ και ίση με το μηδέν διαφορετικά. Έστω $\underline{x}^T = [x_1, \ldots, x_n]$. Τότε το F είναι κάλυμμα, τοποθέτηση, ή διαμέριση αν και μόνο αν

$$A\underline{x} \geq \underline{e}, \quad A\underline{x} \leq \underline{e}, \quad A\underline{x} = \underline{e},$$

αντίστοιχα, όπου $\underline{e} \in R^m$ είναι ένα διάνυσμα του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με τη μονάδα.

Παράδειγμα 6.5 (Ένα πρόβλημα ελέγχου ακολουθίας)

Μια ευέλικτη μηχανή μπορεί να εκτελέσει m κατεργασίες. Κάθε κατεργασία j απαιτεί ένα συγκεκριμένο εργαλείο j. Η μηχανή μπορεί να διαθέτει στην εργαλειοθήκη της το πολύ B εργαλεία, όπου $B < m$. Η αντικατάσταση ή τοποθέτηση ενός εργαλείου j απαιτεί χρόνο προετοιμασίας s_j. Η μηχανή δεν έχει δυνατότητες πολλαπλής τοποθέτησης ή αντικατάστασης εργαλείων, δηλαδή μόνο ένα εργαλείο μπορεί να τοποθετείται ή να αντικαθίσταται κάθε φορά. Κάθε ημέρα πρέπει να εκτελεσθούν n εργασίες από τη μηχανή. Κάθε εργασία i απαιτεί πολλές κατεργασίες για την ολοκλήρωση της. Έστω J_i το σύνολο των κατεργασιών που απαιτούνται για την ολοκλήρωση της εργασίας i. Υποθέτουμε ότι για όλες τις εργασίες το πλήθος των απαιτούμενων κατεργασιών είναι μικρότερο από την χωρητικότητα της εργαλειοθήκης της μηχανής δηλαδή $|J_i| \leq B$. Πριν ξεκινήσει η μηχανή την επεξεργασία μιας εργασίας θα πρέπει όλα τα εργαλεία που απαιτούνται για την εκτέλεση των κατεργασιών του συνόλου J_i να υπάρχουν στην εργαλειοθήκη. Αν ένα εργαλείο $j \in J_i$ υπάρχει ήδη στην εργαλειοθήκη της μηχανής εξοικονομούμε τον χρόνο τοποθέτησης του σε αυτήν. Διαφορετικά θα πρέπει να φορτωθεί στην εργαλειοθήκη κι αν αυτή είναι γεμάτη θα πρέπει να αντικαταστήσουμε κάποια εργαλεία που δεν χρειάζονται για την ολοκλήρωση της τρέχουσας εργασίας. Επειδή κάποιες κατεργασίες είναι κοινές σε διαφορετικές εργασίες και λόγω της περιορισμένης χωρητικότητας της εργαλειοθήκης ο χρόνος προετοιμασίας για την εκκίνηση των εργασιών εξαρτάται από την σειρά με την οποία εκτελούνται. Το ζητούμενο εδώ είναι ο καθορισμός της ακολουθίας εκτέλεσης των εργασιών που ελαχιστοποιεί τον συνολικό χρόνο προετοιμασίας όλων των εργασιών. Υποθέτουμε ότι στην αρχή η εργαλειοθήκη είναι άδεια. Θέλουμε να περιγράψουμε το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού.

Λύση

Εισάγουμε μεταβλητές απόφασης που εκφράζουν την ακολουθία των εργασιών

$$x_{ir} = \begin{cases} 1, & \text{αν η εργασία } i \text{ είναι η } r-\text{στη που εκτελείται,} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Επιπλέον εισάγουμε μεταβλητές απόφασης που περιγράφουν την προετοιμασία της εργαλειοθήκης

$$y_{ir} = \begin{cases} 1, & \text{αν το εργαλείο } j \text{ είναι στην εργαλειοθήκη ενώ εκτελείται η } r-\text{στη εργασία,} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Επίσης θέτουμε $y_{j0} = 0 \ \forall j$, που εκφράζει το ότι στην αρχή η εργαλειοθήκη είναι άδεια. Αφού πρέπει να εκτελέσουμε όλες τις εργασίες θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\sum_{r=1}^{n} x_{ir} = 1, \ \forall i.$$

Ακόμη αφού κάθε φορά εκτελείται ακριβώς μια εργασία έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ir} = 1, \ \forall r.$$

Προκειμένου να εκτελεστεί η εργασία i θα πρέπει όλα τα εργαλεία του συνόλου J_i να είναι τοποθετημένα στην εργαλειοθήκη. Συνεπώς θα πρέπει να ισχύει

$$x_{ir} \le y_{jr}, \ \ \forall j \in J_i, \forall r, i.$$

Ένας ακόμη περιορισμός που πρέπει να λάβουμε υπόψη είναι η χωρητικότητα B της εργαλειοθήκης, που σημαίνει ότι θα πρέπει

$$\sum_{j=1}^{m} y_{jr} \leq B \text{ , } \forall\, r.$$

Όπως είδαμε χρόνος προετοιμασίας υπάρχει όταν απαιτείται η τοποθέτηση ή η αντικατάσταση ενός εργαλείου, που συμβαίνει αν $y_{jr} \neq y_{j,r-1}$, για κάποια j. Συνεπώς η αντικειμενική συνάρτηση θα είναι

$$\min \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} s_j \left| y_{jr} - y_{j,r-1} \right|.$$

Μετατρέπουμε το πρόβλημα σε ΠΑΓΠ εισάγοντας μια ακόμη κατηγορία μεταβλητών απόφασης z_{jr}, οπότε η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται

$$\min \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} s_j z_{jr} \text{ ,}$$

ενώ προστίθενται και οι περιορισμοί

$$z_{jr} \geq y_{jr} - y_{j,r-1},\ \forall\, r, j,$$

$$z_{jr} \geq y_{j,r-1} - y_{jr},\ \forall\, r, j.$$

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι το ΠΑΓΠ που περιγράφει το αρχικό πρόβλημα είναι το ακόλουθο

$$\min \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} s_j z_{jr} \text{ ,}$$

$$z_{jr} \geq y_{jr} - y_{j,r-1},\ \forall\, r, j,$$

$$z_{jr} \geq y_{j,r-1} - y_{jr},\ \forall\, r, j,$$

$$\sum_{r=1}^{n} x_{ir} = 1 \text{ , } \forall\, i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ir} = 1 \text{ , } \forall\, r,$$

$$x_{ir} \leq y_{jr},\ \ \forall\, j \in J_i,\ \forall\, r,\ i,$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_{jr} \leq B \text{ , } \forall\, r,$$

$$x_{ir}, y_{jr}, z_{jr} \in \{0, 1\}.$$

6.2 Μεθοδολογίες επίλυσης προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού

Αντίθετα με τα συνεχή ΠΓΠ τα ΠΑΓΠ εμφανίζουν μεγάλη δυσκολία στην επίλυση τους. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει επαρκής γενικός αλγόριθμος για την επίλυση τους. Το βασικό πρόβλημα είναι οι πολύ μεγάλες υπολογιστικές απαιτήσεις των υπαρχόντων αλγορίθμων, που περιορίζουν το πλήθος των πρακτικά επιλύσιμων προβλημάτων στα προβλήματα μικρών διαστάσεων. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε μερικές από τις τεχνικές επίλυσης ΠΑΓΠ.

6.2.1 Μέθοδος διακλάδωσης - φράγματος

Η μέθοδος διακλάδωσης - φράγματος βασίζεται στην αρχή «διαίρει και βασίλευε» για την διερεύνηση του συνόλου εφικτών λύσεων. Αντί να αναζητά την βέλτιστη λύση σε όλο το σύνολο των εφικτών λύσεων χρησιμοποιεί φράγματα ως εκτιμήσεις του βέλτιστου κέρδους κι έτσι αποφεύγει την διερεύνηση ορισμένων τμημάτων του συνόλου εφικτών λύσεων.

Έστω F το σύνολο των εφικτών λύσεων του προβλήματος

$$\max(\underline{c}^T\underline{x})$$

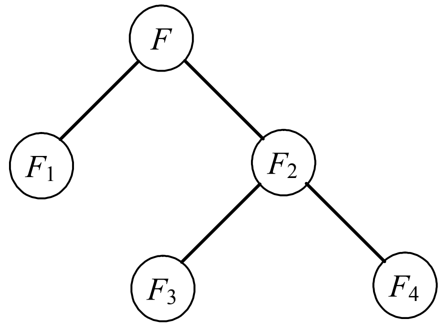
$$\underline{x} \in F.$$

Διαμερίζουμε το σύνολο F σε μια πεπερασμένη συλλογή υποσύνόλων $F_1, \ldots, F_k$, κι επιλύουμε χωριστά κάθε ένα από τα υποπροβλήματα

$$\max(\underline{c}^T\underline{x})$$

$$\underline{x} \in F_i,\ i=1, \ldots, k.$$

Στη συνέχεια συγκρίνουμε τις βέλτιστες λύσεις των υποπροβλημάτων κι επιλέγουμε την καλύτερη από αυτές. Κάθε υποπρόβλημα μπορεί να είναι εξίσου δύσκολο με το αρχικό, οπότε διασπάμε το υποπρόβλημα σε μικρότερα υποπροβλήματα και συνεχίζουμε κατ' αυτόν τον τρόπο μέχρι να οδηγηθούμε σε επιλύσιμα υποπροβλήματα. Αυτό το τμήμα της μεθόδου είναι το τμήμα της διακλάδωσης αφού έτσι σχηματίζεται ένα δέντρο υποπροβλημάτων όπως για παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 6.1, όπου βλέπουμε ότι το σύνολο εφικτών λύσεων F διαμερίζεται στα F_1 και F_2 και στη συνέχεια το F_2 διαμερίζεται στα F_3 και F_4.



Σχήμα 6.1. Ένα δέντρο υποπροβλημάτων.

Υποθέτουμε ακόμη ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος, που για κάθε υποπρόβλημα F_i, υπολογίζει ένα άνω φράγμα $b(F_i)$ του βέλτιστου κέρδους του αντίστοιχου υποπροβλήματος, δηλαδή

$$b(F_i) \geq \max_{\underline{x} \in F_i}(\underline{c}^T \underline{x})$$

Η βασική ιδέα είναι ότι το βέλτιστο κέρδος ενός υποπροβλήματος συνήθως υπολογίζεται πολύ δύσκολα, ενώ είναι σχετικά εύκολο να έχει κανείς μια εκτίμηση ενός άνω φράγματος. Στην περίπτωση των ΠΑΓΠ συνήθως χρησιμοποιείται ως άνω φράγμα η βέλτιστη λύση της χαλάρωσης του υποπροβλήματος.

Ως χαλάρωση ενός ΠΑΓΠ (ή και ενός ΠΜΑΓΠ) καλείται το αρχικό πρόβλημα χωρίς του περιορισμούς ακεραιότητας.

Ορισμός 6.1: Έστω ένα ΠΜΑΓΠ

$$z = \max(\underline{c}^T\underline{x} + \underline{d}^T\underline{w})$$

$$A\underline{x} + B\underline{w} = \underline{b}$$

$$\underline{x}, \underline{w} \geq \underline{0},$$

$$\underline{x} \in Z^n$$

ως **χαλάρωση** του παραπάνω προβλήματος καλείται το πρόβλημα

$$z = \max(\underline{c}^T\underline{x} + \underline{d}^T\underline{w})$$

$$A\underline{x} + B\underline{w} = \underline{b}$$

$$\underline{x}, \underline{w} \geq \underline{0}.$$

Αν οι ακέραιες μεταβλητές x_i απόφασης παίρνουν τιμές μηδέν ή ένα, τότε στο πρόβλημα χαλάρωσης οι αντίστοιχες μεταβλητές x_i παίρνουν τιμές στο διάστημα [0, 1].

Κατά τη εξέλιξη του αλγορίθμου σε κάποιες περιπτώσεις είναι εφικτή ή επίλυση κάποιων υποπροβλημάτων. Αυτό μας επιτρέπει να διατηρούμε κι ένα κάτω φράγμα του βέλτιστου κέρδους L, που είναι το κέρδος της βέλτιστης εφικτής λύσης μέχρι το σημείο του αλγορίθμου που βρισκόμαστε.

Η μεθόδος στηρίζεται στην ακόλουθη παρατήρηση. Αν το άνω φράγμα $b(F_i)$ ενός υποπροβλήματος είναι μικρότερο ή ίσο από το τρέχων κάτω φράγμα L της μεθόδου, τότε δεν χρειάζεται να ξαναδούμε το συγκεκριμένο υποπρόβλημα, αφού η βέλτιστη λύση του υποπροβλήματος δε μπορεί να είναι καλύτερη από την τρέχουσα καλύτερη λύση. Με αυτό τον τρόπο εξοικονομούμε υπολογιστικό έργο αφού δεν απαιτείται η επίλυση όλων των υποπροβλημάτων.

Ακολουθεί μια γενική περιγραφή του αλγορίθμου. Σε κάθε σημείο ο αλγόριθμος διακλάδωσης - φράγματος διατηρεί στη μνήμη του ένα σύνολο ενεργών υποπροβλημάτων και το τρέχων κάτω φράγμα του κέρδους L. Αρχικά το L τίθεται ίσο με το $-\infty$.

Αλγόριθμος διακλάδωσης - φράγματος:

1. Επιλέγουμε ένα ενεργό υποπρόβλημα F_i (Στην αρχή έχουμε μόνο το F).
2. Αν το υποπρόβλημα δεν έχει λύσεις, το διαγράφουμε, διαφορετικά εκτιμούμε το άνω φράγμα $b(F_i)$ του υποπροβλήματος.
3. Αν $b(F_i) \leq L$, διαγράφουμε το υποπρόβλημα.
4. Διαφορετικά αν $b(F_i) > L$, είτε έχουμε μια βέλτιστη λύση του υποπροβλήματος, είτε διασπάμε το εν λόγω υποπρόβλημα σε νέα υποπροβλήματα, που προστίθενται στην λίστα των ενεργών υποπροβλημάτων.
5. Αν η λίστα ενεργών προβλημάτων είναι κενή τερματίζουμε και η βέλτιστη λύση είναι αυτή που αντιστοιχεί στο τρέχων κάτω φράγμα L.
6. Αν η λίστα ενεργών προβλημάτων δεν είναι κενή επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

Υπάρχουν αρκετές παράμετροι στον παραπάνω γενικό αλγόριθμο για τις οποίες έχουμε ελευθερία επιλογής. Συνήθως αυτές οι επιλογές καθορίζονται με εμπειρικό τρόπο.

α) Η επιλογή των ενεργών υποπροβλημάτων μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Συνήθως χρησιμοποιούνται οι βασικές αρχές της «αναζήτησης κατά πλάτος» και της «αναζήτησης κατά βάθος».

β) Υπάρχουν διάφοροι τρόποι εκτίμησης του άνω φράγματος $b(F_i)$ του βέλτιστου κέρδους ενός υποπροβλήματος. Μια δυνατότητα στην οποία αναφερθήκαμε ήδη είναι η επίλυση της χαλάρωσης του υποπροβλήματος

γ) Υπάρχουν συνήθως αρκετοί τρόποι διάσπασης ενός προβλήματος σε υποπροβλήματα.

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε ως άνω φράγμα το βέλτιστο κέρδος της χαλάρωσης ενός υποπροβλήματος. Αν η βέλτιστη λύση της χαλάρωσης είναι ακέραιη, τότε αυτή είναι η βέλτιστη λύση του υποπροβλήματος και δεν χρειάζεται η περαιτέρω διάσπαση του υποπροβλήματος. Απλά ενημερώνουμε το κάτω φράγμα L (αν το κέρδος της βέλτιστης λύσης του τρέχοντος υποπροβλήματος είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα τιμή του L) και στη συνέχεια διαγράφουμε το τρέχων υποπρόβλημα. Αν η βέλτιστη λύση $\underline{x}'$ του προβλήματος χαλάρωσης δεν είναι ακέραιη επιλέγουμε μια μεταβλητή x_i της οποίας η τιμή x_i' δεν είναι ακέραιη και δημιουργούμε δυο νέα υποπροβλήματα προσθέτοντας έναν από τους παρακάτω περιορισμούς

$$x_i \le \lfloor x_i' \rfloor \text{ ή } x_i \ge \lfloor x_i' \rfloor + 1.$$

Σημειώστε ότι και οι δύο περιορισμοί παραβιάζονται από το $\underline{x}'$. Αν $\underline{x}'$ είναι η μοναδική βέλτιστη λύση του προβλήματος χαλάρωσης, τότε το βέλτιστο κέρδος των δύο νέων υποπροβλημάτων θα είναι αυστηρά μικρότερο. Αφού ένα υποπρόβλημα διαφέρει από τον «γεννήτορα» του κατά έναν περιορισμό, μπορούμε να εκτιμήσουμε την βέλτιστη λύση της χαλάρωσης του νέου υποπροβλήματος χρησιμοποιώντας την δυϊκή Simplex η οποία ξεκινάει από την $\underline{x}'$. Με αυτό τον τρόπο η βέλτιστη λύση της χαλάρωσης του νέου υποπροβλήματος επιτυγχάνεται σε μικρό αριθμό επαναλήψεων.

Παράδειγμα 6.6

Έστω το ακόλουθο ΠΑΓΠ

$$\begin{aligned} z = \min(x_1 - 2x_2)& \\ -4x_1 + 6x_2 &\le 9 \\ x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1, \quad x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$x_1, \quad x_2 \in Z$$

Να βρεθεί η βέλτιστη λύση του παραπάνω ΠΑΓΠ με τη χρήση της μεθόδου διακλάδωσης - φράγματος.

Λύση

Θέτουμε το κάτω όριο $L = -\infty$. Μετασχηματίζουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή

$$\begin{aligned} z = -\max(-x_1 + 2x_2) \\ -4x_1 + 6x_2 + x_3 \quad &= 9 \\ x_1 + x_2 + \quad x_4 &= 4 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 &\geq 0 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 &\in Z \end{aligned}$$

Λύνουμε την χαλάρωση του προηγούμενου προβλήματος και η βέλτιστη λύση είναι $(\underline{x}^1)^T = [x_1, x_2] = [1.5, 2.5]$. Τότε το άνω φράγμα $b(F)$ είναι ίσο με το βέλτιστο κέρδος της χαλάρωσης του αρχικού προβλήματος, δηλαδή $b(F) = -3.5$. Διασπάμε το αρχικό πρόβλημα F σε δύο υποπροβλήματα F_1 και F_2. Το F_1 προκύπτει από την εισαγωγή στο αρχικό πρόβλημα του περιορισμού $x_2 \geq 3$, ενώ το F_2 προκύπτει από την εισαγωγή του περιορισμού $x_2 \leq 2$. Η λίστα των ενεργών προβλημάτων είναι η $\{F_1, F_2\}$. Η χαλάρωση του υποπροβλήματος F_1 δεν έχει εφικτές λύσεις και κατά συνέπεια διαγράφουμε το F_1 από την λίστα των ενεργών υποπροβλημάτων. Η βέλτιστη λύση του προβλήματος F_2 είναι $(\underline{x}^2)^T = [0.75, 2]$ και συνεπώς $b(F_2) = -3.25$. Το υποπρόβλημα F_2 διασπάται σε δύο νέα. Το υποπρόβλημα F_3 δημιουργείται με την προσθήκη στο F_2 του περιορισμού $x_1 \geq 1$, ενώ το F_4 προκύπτει από την προσθήκη του περιορισμού $x_1 \leq 0$. Η λίστα των ενεργών προβλημάτων τώρα είναι η $\{F_3, F_4\}$. Η βέλτιστη λύση της χαλάρωσης του F_3 είναι η $(\underline{x}^3)^T = [1, 2]$ που είναι ακέραιη και συνεπώς το κάτω φράγμα διαμορφώνεται σε $L = -3$. Διαγράφουμε το F_3 από την λίστα ενεργών προβλημάτων. Η βέλτιστη λύση της χαλάρωσης του F_4 είναι $(\underline{x}^4)^T = [0, 0.75]$ με κέρδος $b(F_4) = -3$. Αφού $b(F_4) \leq L$ δεν χρειάζεται να διερευνήσουμε περαιτέρω το υποπρόβλημα F_4 και το διαγράφουμε από την λίστα ενεργών προβλημάτων. Τώρα η λίστα ενεργών προβλημάτων είναι κενή οπότε ο αλγόριθμος τερματίζεται. Η βέλτιστη λύση είναι η $(\underline{x}^3)^T = [1, 2]$.

Παράδειγμα 6.7 (Το πρόβλημα του περιπλανώμενου πωλητή)

Έχουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (N, A)$ με n κόμβους που ανήκουν στο σύνολο N και A είναι το σύνολο των ακμών. Το κόστος c_{ij} για την μετακίνηση από τον κόμβο i στον κόμβο j είναι c_{ij}. Στόχος μας είναι να βρούμε τη διαδρομή ελάχιστου κόστους, που επισκέπτεται όλους τους κόμβους ακριβώς μια φορά. Περιγράψτε το πρόβλημα ως ΠΑΓΠ και αναπτύξτε έναν αλγόριθμο αναζήτησης της βέλτιστης διαδρομής.

Λύση

Εισάγουμε μεταβλητές απόφασης που εκφράζουν τη συμμετοχή ενός τόξου στη βέλτιστη διαδρομή

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν το τόξο } ij \text{ ανήκει στη βέλτιστη διαδρομή,} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το ΠΑΓΠ που ακολουθεί εκφράζει ένα παρόμοιο πρόβλημα και η βέλτιστη τιμή του κέρδους του είναι ένα άνω φράγμα του κέρδους του αρχικού προβλήματος

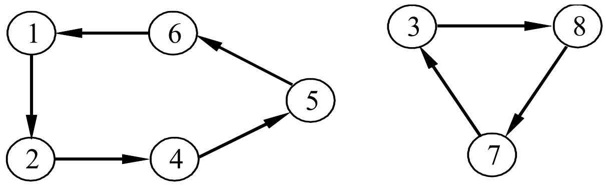
$$z = -\max\left(-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Οι περιορισμοί εκφράζουν ότι κάθε κόμβος του γραφήματος εμφανίζεται ακριβώς μια φορά σε κάθε διαδρομή, άρα κάθε διαδρομή πρέπει να τους ικανοποιεί. Το πρόβλημα είναι ότι μπορεί οι περιορισμοί να ικανοποιούνται και από λύσεις που δεν περιγράφουν μια διαδρομή αλλά περισσότερες από μια υποδιαδρομές όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.2. Γι’ αυτό τον λόγο τα κέρδη των δύο προβλημάτων δεν ταυτίζονται. Το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του άνω φράγματος του βέλτιστου κέρδους του προβλήματος του περιπλανώμενου πωλητή. Αν η βέλτιστη λύση του προηγούμενου προβλήματος αντιστοιχεί σε διαδρομή τότε αυτή είναι η βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος. Αν όχι διασπάμε το πρόβλημα σε νέα υποπροβλήματα προσθέτοντας σε κάθε περίπτωση έναν περιορισμό της μορφής $x_{ij} = 0$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να απαγορεύουμε τη διέλευση από το τόξο (ij). Το ερώτημα βέβαια είναι πως επιλέγουμε τους περιορισμούς $x_{ij} = 0$ που θα προσθέσουμε. Μια φυσική επιλογή είναι να διαλέξουμε μια από τις υποδιαδρομές και σε κάθε υποπρόβλημα απαγορεύουμε την διέλευση από κάποιο τόξο που ανήκει σε αυτήν. Για παράδειγμα στο παράδειγμα του Σχήματος 6.2 μπορούμε να προσθέσουμε έναν από τους περιορισμούς $x_{12} = 0$, $x_{24} = 0$, $x_{45} = 0$, $x_{56} = 0$, $x_{61} = 0$, $x_{38} = 0$, $x_{87} = 0$ και $x_{73} = 0$ για να δημιουργήσουμε ένα νέο υποπρόβλημα.



Σχήμα 6.2.

Αν το τρέχων υποπρόβλημα έχει μια μοναδική βέλτιστη λύση, αυτή γίνεται ανέφικτη με την προσθήκη του νέου περιορισμού. Γι’ αυτό τον λόγο το βέλτιστο κέρδος στα νέα υποπροβλήματα που προκύπτουν από την διακλάδωση είναι αυστηρά μικρότερο και μας δίνουν βελτιωμένα άνω φράγματα.

Απόδειξη Θεωρήματος 2.1

α) Έστω S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, κυρτά σύνολα, ακόμη έστω ότι τα $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ ανήκουν στην τομή των S_i, $\bigcap_{i=1}^{k} S_i$. Έστω λ ∈ [0, 1]. Αφού κάθε σύνολο S_i, είναι κυρτό και περιέχει τα $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ προκύπτει ότι $\lambda\underline{x}_1 + (1-\lambda)\,\underline{x}_2 \in S_i\ \forall\, S_i$, πράγμα που αποδεικνύει ότι το $\lambda\underline{x}_1 + (1-\lambda)\,\underline{x}_2$ ανήκει στην τομή των S_i. Συνεπώς το σύνολο $\bigcap_{i=1}^{k} S_i$ είναι κυρτό.

β) Έστω $\underline{a}$ διάνυσμα και b πραγματική σταθερά. Έστω ακόμη $\underline{x}_1$, και $\underline{x}_2$ δύο οποιαδήποτε διανύσματα που ικανοποιούν τις $\underline{a}^T\underline{x}_1 \geq b$ και $\underline{a}^T\underline{x}_2 \geq b$ αντίστοιχα, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο ημίχωρο. Αν $\lambda \in [0, 1]$, ισχύει ότι $\underline{a}^T[\lambda\underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_1] \geq \lambda b + (1-\lambda)b = b$, που αποδεικνύει ότι το $\lambda\underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_1$ ανήκει στον ίδιο ημίχωρο, συνεπώς ένας ημίχωρος είναι κυρτό σύνολο. Αφού ένα πολύεδρο είναι η τομή ενός πεπερασμένου αριθμού ημιχώρων, από το μέρος (α) του Θεωρήματος, προκύπτει ότι ένα πολύεδρο είναι κυρτό σύνολο.

γ) Αυτό το τμήμα του θεωρήματος θα αποδειχθεί με τη χρήση επαγωγής. Από τον ορισμό της κυρτότητας έχουμε ότι ο κυρτός συνδυασμός δύο οποιονδήποτε στοιχείων ενός κυρτού συνόλου ανήκει σε αυτό. Ας υποθέσουμε ότι ο κυρτός συνδυασμός μέχρι k στοιχείων ενός κυρτού συνόλου ανήκει σε αυτό το σύνολο. Έστω $k + 1$ στοιχεία $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{k+1}$ ενός κυρτού συνόλου S και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, που αθροίζουν στη μονάδα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\lambda_{k+1} \neq 1$. Τότε έχουμε

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_{k+1}\underline{x}_{k+1} + (1-\lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} \underline{x}_i \tag{2.1}$$

Οι συντελεστές $\lambda_i/(1-\lambda_{k+1})$, $i = 1, \ldots, k$, είναι μη αρνητικοί κι αθροίζουν στη μονάδα. Από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι το στοιχείο $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i / (1-\lambda_{k+1})$ ανήκει στο S. Από την εξίσωση (2.1) και την κυρτότητα του S συνεπάγεται ότι $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \underline{x}_i \in S$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται.

δ) Έστω S η κυρτή θήκη των διανυσμάτων $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ κι ακόμη έστω $\underline{w} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \underline{x}_i$ και $\underline{z} = \sum_{i=1}^{k} \theta_i \underline{x}_i$ δύο στοιχεία του S, όπου $\mu_i, \theta_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$. Αν $\lambda \in [0, 1]$ τότε ισχύει ότι

$$\lambda\underline{w} + (1-\lambda)\,\underline{z} = \lambda \sum_{i=1}^{k} \mu_i \underline{x}_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{k} \theta_i \underline{x}_i = \sum_{i=1}^{k} [\lambda\mu_i + (1-\lambda)\theta_i]\underline{x}_i$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές $\lambda \mu_i + (1 - \lambda)\theta_i$ είναι μη αρνητικοί πραγματικοί και αθροίζουν στη μονάδα. Από τα παραπάνω αποδεικνύεται ότι το στοιχείο $\lambda \underline{w} + (1 - \lambda)\, \underline{z}$ είναι κυρτός συνδυασμός των $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ..., $\underline{x}_k$ και κατά συνέπεια ανήκει στο S. Αυτό αποδεικνύει την κυρτότητα του S.

Επιστροφή στο Θεώρημα 2.1

Απόδειξη Θεωρήματος 2.3

Αν ένα σύνολο διανυσμάτων παράγει τον R^n τότε n γραμμικά ανεξάρτητα από αυτά αποτελούν βάση του R^n. Είναι γνωστό ότι αν n διανύσματα αποτελούν βάση του R^n αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αντίστροφα αν n διανύσματα $\underline{\alpha}_i$, $i \in I$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από αυτά τα διανύσματα είναι διάστασης n και είναι ο R^n. Συνεπώς κάθε στοιχείο του R^n είναι γραμμικός συνδυασμός των $\underline{\alpha}_i$, $i \in I$, οπότε ισχύει η ισοδυναμία των (α) και (β).

Έστω ότι το σύστημα των εξισώσεων $\underline{\alpha}_i^T\underline{x} = b_i$, $i \in I$, έχει περισσότερες από μία λύσεις. Έστω ότι οι $\underline{x}_1$ και $\underline{x}_2$ είναι δύο από τις λύσεις του γραμμικού αυτού συστήματος. Τότε θα έχουμε:

$$\underline{\alpha}_i^T\underline{x}_1 = b_i = \underline{\alpha}_i^T\underline{x}_2,\ i \in I,$$

και συνεπώς $\underline{\alpha}_i^T(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) = \underline{\alpha}_i^T\underline{w} = 0\ \ \forall\, i \in I$. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\underline{w}$ είναι κάθετο στα διανύσματα $\underline{\alpha}_i$, $i \in I$ και δεν είναι γραμμικός συνδυασμός τους, που συνεπάγεται ότι δεν αποτελούν βάση του R^n. Αντίστροφα έστω ότι τα διανύσματα $\underline{\alpha}_i$, $i \in I$ δεν αποτελούν βάση του R^n. Επιλέγουμε ένα διάνυσμα $\underline{w}$ που είναι κάθετο στα διανύσματα $\underline{\alpha}_i$, $i \in I$ άρα $\underline{\alpha}_i^T\underline{w} = 0$, $\forall\, i \in I$. Αν το $\underline{x}$ είναι λύση του συστήματος $\underline{\alpha}_i^T\underline{x} = b_i$, $\forall\, i \in I$, ισχύει ότι $\underline{\alpha}_i^T(\underline{x} + \underline{w}) = b_i$, $\forall\, i \in I$, που σημαίνει ότι υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις του συστήματος. Έτσι αποδεικνύεται η ισοδυναμία των (β) και (γ) του θεωρήματος.

Επιστροφή στο Θεώρημα 2.3

Απόδειξη Θεωρήματος 2.4

Για λόγους απλότητας και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το πολύεδρο P περιγράφεται από περιορισμούς της μορφής $\underline{\alpha}_i^T\underline{x} \geq b_i$, και $\underline{\alpha}_i^T\underline{x} = b_i$.

Κορυφή ⇒ Ακρότατο

Έστω ότι το $\underline{x}' \in P$ είναι κορυφή. Τότε από τον Ορισμό 2.7 πρέπει να υπάρχει κάποιο $\underline{c} \in R^n$ τέτοιο ώστε $\underline{c}^T\underline{x}' < \underline{c}^T\underline{z}$, $\forall\, \underline{z} \in P$ και $\underline{z} \neq \underline{x}'$. Αν $\underline{z} \in P$, $\underline{w} \in P$, $\underline{z} \neq \underline{x}'$, $\underline{w} \neq \underline{x}'$ και $0 \leq \lambda \leq 1$, τότε ισχύει ότι $\underline{c}^T\underline{x}' < \underline{c}^T\underline{z}$ και $\underline{c}^T\underline{x}' < \underline{c}^T\underline{w}$, που συνεπάγεται ότι $\underline{c}^T\underline{x}' < \underline{c}^T[\lambda\underline{z} + (1-\lambda)\underline{w}]$ και τελικώς έχουμε ότι $\underline{x}' \neq \lambda\underline{z} + (1-\lambda)\underline{w}$. Αυτό σημαίνει ότι το $\underline{x}'$ δε μπορεί να εκφρασθεί σαν κυρτός συνδυασμός δύο διαφορετικών σημείων του πολυέδρου P και κατά συνέπεια είναι ακρότατο.

Ακρότατο ⇒ Βασική εφικτή λύση

Υποθέτουμε ότι το $\underline{x}' \in P$ δεν είναι βασική εφικτή λύση. Θα δείξουμε ότι το $\underline{x}'$ δεν είναι ακρότατο του P. Έστω $I = \{i \mid \underline{\alpha}_i^T\underline{x}' = b_i\}$. Αφού $\underline{x}'$ δεν είναι βασική εφικτή λύση δεν υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα μεταξύ των $\underline{\alpha}_i$, $i \in I$. Συνεπώς τα $\underline{\alpha}_i$, $i \in I$, ανήκουν σε έναν υπόχωρο του R^n και υπάρχει κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα $\underline{d} \in R^n$, τέτοιο ώστε $\underline{\alpha}_i^T\underline{d} = 0$, $\forall\, i \in I$. Έστω ε ένας μικρός θετικός αριθμός και τα διανύσματα $\underline{z} = \underline{x}' + \varepsilon\underline{d}$ και $\underline{w} = \underline{x}' - \varepsilon\underline{d}$. Παρατηρούμε ότι $\underline{\alpha}_i^T\underline{x}' = \underline{\alpha}_i^T\underline{z} = \underline{\alpha}_i^T\underline{w} = b_i$, $\forall\, i \in I$. Επιπλέον $\forall\, i \notin I$. ισχύει ότι $\underline{\alpha}_i^T\underline{x}' > b_i$ και δεδομένου ότι το ε είναι πολύ μικρός θετικός έχουμε επίσης ότι $\underline{\alpha}_i^T\underline{z} > b_i$, καθώς αρκεί να διαλέξουμε το ε έτσι ώστε $\varepsilon|\underline{\alpha}_i^T\underline{d}| < \underline{\alpha}_i^T\underline{x}' - b_i$, $\forall\, i \notin I$. Συνεπώς όταν το ε είναι αρκετά μικρό το $\underline{z} \in P$, ενώ με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και το $\underline{w} \in P$. Αν προσθέσουμε τα $\underline{z}$ και $\underline{w}$ έχουμε ότι $\underline{x}' = (\underline{z} + \underline{w})/2$, κι αφού το $\underline{x}'$ εκφράζεται ως κυρτός συνδυασμός των $\underline{z}$ και $\underline{w}$, που ανήκουν στο P, δεν είναι ακρότατο του πολυέδρου.

Βασική εφικτή λύση ⇒ Κορυφή

Έστω ότι το $\underline{x}' \in P$ είναι βασική εφικτή λύση κι ακόμη έστω $I = \{i \mid \underline{\alpha}_i^T\underline{x}' = b_i\}$. Αν $\underline{c} = \sum_{i\in I}\underline{a}_i$, προκύπτει ότι

$$\underline{c}^T\underline{x}' = \sum_{i\in I}\underline{a}_i^T\underline{x}' = \sum_{i\in I}b_i$$

Ακόμη για κάθε $\underline{x} \in P$ και για κάθε i, έχουμε ότι $\underline{\alpha}_i^T\underline{x} \geq b_i$ και

$$\underline{c}^T\underline{x} = \sum_{i\in I}\underline{a}_i^T x \geq \sum_{i\in I}b_i$$

Η παραπάνω σχέση μας λεει ότι το $\underline{x}'$ είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης της $\underline{c}^T\underline{x}$ στο πολύεδρο P. Η ισότητα στην παραπάνω ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\underline{\alpha_i}^T\underline{x} = b_i$, $\forall\, i \in I$. Αφού το $\underline{x}'$ είναι βασική εφικτή λύση, υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητοι περιορισμοί που είναι ενεργοί στο σημείο $\underline{x}'$ και κατά συνέπεια το $\underline{x}'$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος εξισώσεων $\underline{\alpha_i}^T\underline{x} = b_i$, $\forall\, i \in I$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το $\underline{x}'$ είναι το μοναδικό σημείο που ελαχιστοποιεί την $\underline{c}^T\underline{x}$ στο P και κατά συνέπεια είναι κορυφή του P.

Επιστροφή στο Θεώρημα 2.4

Απόδειξη Θεωρήματος 2.5

Όπως έχουμε δει ένα πολύεδρο ορίζεται από ένα σύνολο ανισοτικών (ή/και ισοτικών περιορισμών), έστω m στο πλήθος πάνω στο R^n. Για κάθε βασική λύση υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητοι ενεργοί περιορισμοί. Αφού οποιοιδήποτε n γραμμικά ανεξάρτητοι ενεργοί περιορισμοί ορίζουν ένα μοναδικό σημείο, προκύπτει ότι διαφορετικές βασικές εφικτές λύσεις αντιστοιχούν σε διαφορετικά σύνολα n γραμμικά ανεξάρτητων ενεργών περιορισμών. Συνεπώς το πλήθος των βασικών λύσεων φράσσεται από το πλήθος των δυνατών συνδυασμών n περιορισμών από τους συνολικά m περιορισμούς. Η ποσότητα αυτή είναι πεπερασμένη και δίδεται από:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Δύο διαφορετικές βασικές λύσεις ενός πολυέδρου στον R^n καλούνται γειτονικές ή διαδοχικές αν υπάρχουν $n-1$ γραμμικά ανεξάρτητοι περιορισμοί ενεργοί και στις δύο. Αν δύο γειτονικές βασικές λύσεις είναι και εφικτές τότε το ευθύγραμμο τμήμα που τις ενώνει καλείται ακμή του πολυέδρου.

Επιστροφή στο Θεώρημα 2.5

Απόδειξη Θεωρήματος 2.6

Για πρακτικούς λόγους υποθέτουμε ότι $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$, δηλαδή οι k, πρώτες γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Στην γενική περίπτωση, που αυτό δεν ισχύει απλά αναδιατάσσουμε τις γραμμές του πίνακα, έτσι ώστε οι k πρώτες να είναι οι γραμμικά ανεξάρτητες.

Είναι προφανές ότι $P \subset Q$ αφού κάθε στοιχείο του P ικανοποιεί τους περιορισμούς που ορίζουν το Q. Αρκεί να δείξουμε ότι $Q \subset P$. Αφού $r(A) = k$ τα διανύσματα $\underline{\alpha}_1^T, \ldots, \underline{\alpha}_k^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς κάθε διάνυσμα γραμμή του A μπορεί να γραφεί στη μορφή $\underline{\alpha}_i^T = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} a_j^T$, όπου λ_{ij} πραγματικές σταθερές. Για οποιοδήποτε $\underline{x} \in P$, παρατηρούμε ότι έχουμε

$$b_i = \underline{\alpha}_i^T \underline{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} a_j^T \underline{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} b_j ,\ i = 1, \ldots, m$$

Έστω ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\underline{z} \in Q$. Για κάθε i ισχύει

$$\underline{\alpha}_i^T \underline{z} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} a_j^T \underline{z} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} b_j = b_i,$$

που αποδεικνύει ότι $\underline{z} \in P$ και συνεπώς $Q \subset P$.

Επιστροφή στο Θεώρημα 2.6

Απόδειξη Θεωρήματος 2.7

Έστω διάνυσμα $\underline{x} \in R^n$ και έστω m στήλες $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(m)}$ του A, που ικανοποιούν την (α) συνθήκη του θεωρήματος. Υποθέτουμε ακόμη ότι οι μεταβλητές που αντιστοιχούν σε στήλες διαφορετικές από τις παραπάνω είναι μηδενικές, δηλαδή $x_i = 0$, αν $i \neq B(1), \ldots, B(m)$. Για να ικανοποιούνται οι περιορισμοί $A\underline{x} = \underline{b}$ πρέπει να έχουμε

$$\sum_{i=1}^{m} \underline{A}_{B(i)} x_{B(i)} = \sum_{i=1}^{n} \underline{A}_i x_i = A\underline{x} = \underline{b}$$

Επειδή οι στήλες $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(m)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες οι τιμές των μεταβλητών $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ που ικανοποιούν του περιορισμούς είναι μοναδικές. Από το Θεώρημα 2.2 έχουμε ότι υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητοι ενεργοί περιορισμοί και συνεπώς το $\underline{x}$ είναι βασική λύση.

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι το διάνυσμα $\underline{x}$ είναι βασική λύση και θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (α) και (β) του θεωρήματος. Έστω $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(k)}$ οι μεταβλητές του $\underline{x}$ που είναι μη μηδενικές. Αφού το $\underline{x}$ είναι βασική λύση, το σύστημα των εξισώσεων $\sum_{i=1}^{n} \underline{A}_i x_i = \underline{b}$ και $x_i = 0$, $i \neq B(1), \ldots, B(k)$ έχει μια μοναδική λύση (βλ. Θεώρημα 2.2), ή ισοδύναμα το σύστημα εξισώσεων $\sum_{i=1}^{k} \underline{A}_{B(i)} x_{B(i)} = \underline{b}$ έχει μοναδική λύση. Προκύπτει ότι οι στήλες $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(k)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Εάν δεν ήταν, θα υπήρχαν πραγματικοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, όχι όλοι ίσοι με το μηδέν, τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^{k} \underline{A}_{B(i)} \lambda_i = 0$. Σε αυτή την περίπτωση θα είχαμε $\sum_{i=1}^{k} \underline{A}_{B(i)} (x_{B(i)} + \lambda_i) = \underline{b}$, που σημαίνει ότι η λύση του συστήματος δεν είναι μοναδική και μας οδηγεί σε άτοπο. Αφού οι στήλες $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(k)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, συνεπάγεται από την υπόθεση πλήρους βαθμού του A, ότι $k \leq m$. Το γεγονός ότι $r(A) = m$ σημαίνει πως ο πίνακας A έχει m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Προφανώς μπορούμε να βρούμε $m - k$ πρόσθετες στήλες $\underline{A}_{B(k+1)}, \ldots, \underline{A}_{B(m)}$ έτσι ώστε οι στήλες $\underline{A}_{B(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επιπρόσθετα $x_i = 0$ για $i \neq B(1), \ldots, B(m)$, αφού $k \leq m$ και $x_i = 0$ για $i \neq B(1), \ldots, B(k)$. Βλέπουμε ότι και οι δύο συνθήκες του θεωρήματος ικανοποιούνται και συνεπώς η απόδειξη του ολοκληρώνεται.

Επιστροφή στο Θεώρημα 2.7

Απόδειξη Θεωρήματος 2.8

(β) $\Rightarrow$ (α)

Θα δείξουμε πρώτα ότι αν το P δεν περιέχει ευθείες γραμμές τότε έχε τουλάχιστον μια βασική εφικτή λύση, δηλαδή έχει τουλάχιστον ένα ακρότατο.

Έστω $\underline{x} \in P$ και $I = \{i \mid \underline{a}_i^T\underline{x} = b_i\}$. Αν n από τα διανύσματα $\underline{a}_i$, $i \in I$, που αντιστοιχούν στους ενεργούς περιορισμούς είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε το $\underline{x}$ είναι εξ' ορισμού βασική εφικτή λύση. Αν δεν υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα μεταξύ των $\underline{a}_i$, $i \in I$, τότε αυτά ανήκουν σε έναν υπόχωρο του R^n και συνεπώς υπάρχει διάνυσμα $\underline{d} \in R^n$ τέτοιο ώστε $\underline{a}_i^T\underline{d} = 0$, $\forall\, i \in I$. εξετάζουμε την ευθεία γραμμή, που αποτελείται από τα σημεία, που ορίζονται από την εξίσωση $\underline{z} = \underline{x} + \lambda\underline{d}$, όπου $\lambda \in R$. Για όλα τα $i \in I$, έχουμε $\underline{a}_i^T\underline{z} = \underline{a}_i^T\underline{x} + \lambda\underline{a}_i^T\underline{d} = \underline{a}_i^T\underline{x} = b_i$. Συνεπώς οι περιορισμοί που είναι ενεργοί στο $\underline{x}$ παραμένουν ενεργοί για όλα τα σημεία της ευθείας γραμμής που εξετάζουμε. Αφού έχουμε υποθέσει ότι το πολύεδρο P δεν περιέχει καμία ευθεία γραμμή, έπεται ότι καθώς μεταβάλλεται το λ κάποιος περιορισμός θα πρέπει να παραβιασθεί. Προφανώς πριν παραβιασθεί αυτός ο περιορισμός θα γίνεται ενεργός άρα υπάρχει κάποιο λ' και κάποιο $j \notin I$ τέτοια ώστε $\underline{a}_j^T(\underline{x} + \lambda'\underline{d}) = b_j$. Το διάνυσμα $\underline{a}_j$ δεν προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των $\underline{a}_i$, $i \in I$. Επειδή $j \notin I$ ισχύει ότι $\underline{a}_j^T\underline{x} \neq b_j$, ενώ $\underline{a}_j^T(\underline{x} + \lambda'\underline{d}) = b_j$ άρα $\underline{a}_j^T\underline{d} \neq 0$. Όμως γνωρίζουμε ότι $\underline{a}_i^T\underline{d} = 0$, $\forall\, i \in I$. Αφού το $\underline{d}$ δεν είναι κάθετο στο $\underline{a}_j$, συμπεραίνουμε ότι αυτό δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\underline{a}_i$, $i \in I$. Με αυτό τον τρόπο μετακινούμενοι από το $\underline{x}$ στο $\underline{x} + \lambda'\underline{d}$ αυξήθηκε κατά ένα το πλήθος των ενεργών περιορισμών. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία αυτή, όσες φορές χρειαστεί, καταλήγουμε σε ένα σημείο όπου έχουμε n γραμμικά ανεξάρτητους ενεργούς περιορισμούς. Αυτό το σημείο είναι εξ' ορισμού βασική λύση του P. Είναι επίσης εφικτή αφού κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας δεν βγήκαμε εκτός ορίων του P.

(α) $\Rightarrow$ (γ)

Αν το P έχει τουλάχιστον ένα ακρότατο, δηλαδή τουλάχιστον μία βασική εφικτή λύση, τότε εξ' ορισμού υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητοι ενεργοί περιορισμοί στο σημείο αυτό και συνεπώς τα αντίστοιχα διανύσματα $\underline{a}_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(γ) $\Rightarrow$ (β)

Υποθέτουμε ότι n από τα διανύσματα $\underline{a}_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και μάλιστα χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε, ότι είναι τα πρώτα, δηλαδή τα $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$. Έστω ότι το P περιέχει μια ευθεία γραμμή $\underline{x} + \lambda\underline{d}$, όπου $\underline{d}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του R^n. Ισχύει τότε ότι $\underline{a_i}^T(\underline{x} + \lambda\underline{d}) \geq b_i$, $\forall\, i$ και $\forall\, \lambda$. Έχουμε όμως ότι $\underline{a_i}^T\underline{d} = 0$, $\forall\, i$, διότι αν $\underline{a_i}^T\underline{d} < 0$ μπορούμε να επιλέξουμε μια τιμή για το λ αρκετά μεγάλη ώστε να παραβιάζεται ο περιορισμός, με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι δεν μπορεί να είναι $\underline{a_i}^T\underline{d} > 0$. Αφού τα διανύσματα $\underline{a_i}$, $i = 1, \ldots, n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα θα πρέπει $\underline{d} = 0$ πράγμα που είναι άτοπο. Έτσι αποδεικνύεται ότι το P δεν περιέχει ευθεία γραμμή.

Επιστροφή στο Θεώρημα 2.8

Απόδειξη Θεωρήματος 2.9

Έστω Q το σύνολο όλων των βέλτιστων λύσεων, το οποίο υποθέσαμε ότι δεν ταυτίζεται με το κενό σύνολο. Έστω ακόμη ότι το P είναι της μορφής $P = \{\underline{x} \in R^n \,|\, A\underline{x} \geq \underline{b}\}$ και υ είναι η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $\underline{c}^T\underline{x}$. Τότε το σύνολο των βέλτιστων λύσεων είναι της μορφής $Q = \{\underline{x} \in R^n \,|\, A\underline{x} \geq \underline{b}, \underline{c}^T\underline{x} = \upsilon\}$ δηλαδή είναι κι αυτό πολύεδρο. Αφού $Q \subset P$ και το P δεν περιέχει καμία ευθεία γραμμή (βλ. Θεώρημα 2.7), το υποσύνολο του Q δεν περιέχει επίσης ευθεία γραμμή κι άρα έχει τουλάχιστον ένα ακρότατο. Έστω $\underline{x}'$ ένα ακρότατο του Q, θα δείξουμε ότι είναι επίσης ακρότατο του P. Υποθέτουμε ότι το $\underline{x}'$ δεν είναι ακρότατο του P. Τότε υπάρχουν $\underline{z}, \underline{w}, \in P$, $\underline{z} \neq \underline{w} \neq \underline{x}'$ και $\lambda \in [0, 1]$ τέτοια ώστε $\underline{x}' = \lambda \underline{z} + (1 - \lambda)\underline{w}$. Προφανώς έχουμε ότι $\upsilon = \underline{c}^T\underline{x}' = \lambda\underline{c}^T\underline{z} + (1 - \lambda)\underline{c}^T\underline{w}$. Επιπλέον αφού υ είναι η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης πρέπει να είναι $\underline{c}^T\underline{z} \leq \upsilon$ και $\underline{c}^T\underline{w} \leq \upsilon$. Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\underline{c}^T\underline{z} = \underline{c}^T\underline{w} = \upsilon$ που σημαίνει ότι $\underline{z}, \underline{w}, \in Q$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι το $\underline{x}'$είναι ακρότατο του Q. Έτσι αποδεικνύεται ότι το $\underline{x}'$ είναι ακρότατο του P και βέλτιστη λύση.

Επιστροφή στο Θεώρημα 2.9

Απόδειξη Θεωρήματος 2.10

Το πολύεδρο της περιοχής εφικτών λύσεων είναι της μορφής $P = \{\underline{x} \in R^n \,|\, A\underline{x} \geq \underline{b}\}$. Θεωρούμε ένα σημείο $\underline{x} \in P$ στο οποίο υπάρχουν k το πολύ γραμμικά ανεξάρτητοι ενεργοί περιορισμοί, όπου $k < n$. Θα λέμε ότι ένα σημείο έχει τάξη k όταν υπάρχουν το πολύ k γραμμικά ανεξάρτητοι ενεργοί περιορισμοί σε αυτό. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\underline{w} \in P$ μεγαλύτερης τάξης, το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\underline{c}^T\underline{x} \leq \underline{c}^T\underline{z}$. Έστω $I = \{i \,|\, \underline{a_i}^T\underline{x} = b_i\}$, όπου $\underline{a_i}$ είναι η i-οστή γραμμή του πίνακα A. Αφού $k < n$ τα διανύσματα $\underline{a_i}$, $i \in I$, ανήκουν σε έναν υπόχωρο του R^n και μπορούμε να βρούμε μη μηδενικό διάνυσμα $\underline{d}$ του R^n τέτοιο ώστε $\underline{a_i}\underline{d} = 0$, $\forall\, i \in I$. Υποθέτουμε ότι το βέλτιστο κέρδος είναι φραγμένο. Ακόμη μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\underline{c}^T\underline{d} \geq 0$ (στην ανάγκη αλλάζουμε το πρόσημο του $\underline{d}$).

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Στην πρώτη περίπτωση υποθέτουμε ότι $\underline{c}^T\underline{d} > 0$. Παίρνουμε την ημιευθεία που ορίζεται από την εξίσωση $\underline{z} = \underline{x} + \lambda\underline{d}$, όπου $\lambda \in R^+$. Για όλα τα $i \in I$, έχουμε $\underline{a_i}^T\underline{z} = \underline{a_i}^T\underline{x} + \lambda\underline{a_i}^T\underline{d} = \underline{a_i}^T\underline{x} = b_i$. Συνεπώς οι περιορισμοί που είναι ενεργοί στο $\underline{x}$ παραμένουν ενεργοί για όλα τα σημεία της ημιευθείας που εξετάζουμε. Αν ολόκληρη η ημιευθεία περιέχεται στο P, τότε η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα πρέπει να είναι $+\infty$, αφού $\underline{c}^T\underline{z} = \underline{c}^T(\underline{x} + \lambda\underline{d}) = \underline{c}^T\underline{x} + \lambda\underline{c}^T\underline{d}$. Μιας κι έχουμε υποθέσει ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι φραγμένη θα πρέπει η ημιευθεία να μην περιέχεται εξολοκλήρου στο P. Στο σημείο, που η ημιευθεία τέμνει κάποιον από τους μη ήδη ενεργούς περιορισμούς, αυτός γίνεται ενεργός. Έστω j, με $j \notin I$ ο δείκτης του περιορισμού αυτού και λ' η τιμή του λ για την οποία συμβαίνει αυτό. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε $\underline{a_j}^T(\underline{x} + \lambda'\underline{d}) = b_j$. Ονομάζουμε το σημείο τομής της ημιευθείας με τον περιορισμό αυτό $\underline{w}$, για το οποίο ισχύει ότι $\underline{w} = \underline{x} + \lambda'\underline{d}$. Σημειώστε ότι $\underline{c}^T\underline{w} > \underline{c}^T\underline{x}$. Το διάνυσμα $\underline{a_j}$ δεν προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των $\underline{a_i}$, $i \in I$, επειδή ισχύει ότι $\underline{a_j}^T\underline{x} \neq b_j$, αφού $j \notin I$ ενώ $\underline{a_j}^T(\underline{x} + \lambda'\underline{d}) = b_j$ άρα $\underline{a_j}^T\underline{d} \neq 0$. Όμως γνωρίζουμε ότι $\underline{a_i}^T\underline{d} = 0$, $\forall\, i \in I$. Αφού το $\underline{d}$ δεν είναι κάθετο στο $\underline{a_j}$, συμπεραίνουμε ότι αυτό δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\underline{a_i}$, $i \in I$, και άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητο των $\underline{a_i}$, $i \in I$. Αυτό σημαίνει ότι ο βαθμός $\underline{w}$ του είναι τουλάχιστον ίσος με $k + 1$.

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $\underline{c}^T\underline{d} = 0$. Θεωρούμε την ευθεία γραμμή $\underline{z} = \underline{x} + \lambda\underline{d}$, όπου $\lambda \in R$. Αφού το P δεν περιέχει καμία ευθεία γραμμή, αυτή σε κάποιο σημείο θα πρέπει να τέμνει το υπερεπίπεδο $\underline{a_j}^T\underline{x} = b_j$ κάποιου περιορισμού όπου $j \notin I$.

Στο σημείο τομής $\underline{w}$ ενεργοποιείται κι ο περιορισμός με δείκτη j. Επιπλέον αφού $\underline{c}^T\underline{d} = 0$ ισχύει ότι $\underline{c}^T\underline{w} = \underline{c}^T\underline{x}$.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε ανακαλύψει ένα νέο σημείο $\underline{w}$ για το οποίο ισχύει ότι $\underline{c}^T\underline{w} \geq \underline{c}^T\underline{x}$ και του οποίου η τάξη είναι μεγαλύτερη από αυτήν του αρχικού σημείου $\underline{x}$. Επαναλαμβάνοντας αυτή την διαδικασία για όσες φορές χρειαστεί καταλήγουμε σε ένα διάνυσμα $\underline{v}$ τάξης n, άρα είναι βασική εφικτή λύση, τέτοιο ώστε $\underline{c}^T\underline{v} \geq \underline{c}^T\underline{x}$.

Έστω $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r$ οι βασικές εφικτές λύσεις του P και $\underline{v}'$ μια από αυτές τέτοια ώστε $\underline{c}^T\underline{v}' \geq \underline{c}^T\underline{v}_i$ για κάθε i, $i = 1, ..., r$. Έχουμε ήδη δείξει ότι για κάθε $\underline{x} \in P$ υπάρχει κάποια βασική εφικτή λύση $\underline{v}_i$ για την οποία ισχύει ότι $\underline{c}^T\underline{v}_i \geq \underline{c}^T\underline{x}$. Συνεπώς έχουμε ότι $\underline{c}^T\underline{v}' \geq \underline{c}^T\underline{x}$ για κάθε $\underline{x} \in P$ που σημαίνει πως η βασική εφικτή λύση $\underline{v}'$ είναι και βέλτιστη.

Επιστροφή στο Θεώρημα 2.10

Απόδειξη Θεωρήματος 3.1

α) Υποθέτουμε ότι $\underline{\bar{c}} \leq 0$. Έστω $\underline{z}$ μια τυχαία εφικτή λύση και $\underline{d}$ το διάνυσμα που ορίζεται από $\underline{d} = \underline{z} - \underline{x}$. Αφού τα διανύσματα $\underline{z}$ και $\underline{x}$ είναι εφικτές λύσεις τότε θα πρέπει να ικανοποιούνται οι ισοτικοί περιορισμοί, δηλαδή $A\underline{x} = A\underline{z} = \underline{b}$ και συνεπώς ισχύει ότι $A\underline{d} = \underline{0}$. Η τελευταία ισότητα μπορεί να εκφρασθεί και στη μορφή

$$B\underline{d}_B + \sum_{i \in N} \underline{A}_i d_i = \underline{0}$$

όπου N είναι το σύνολο των δεικτών των μη βασικών μεταβλητών στη συγκεκριμένη βασική εφικτή λύση $\underline{x}$. Αφού ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος έχουμε

$$\underline{d}_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} \underline{A}_i d_i = \underline{0}$$

και

$$\underline{c}^T \underline{d} = \underline{c}_B{}^T \underline{d}_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{A}_i) d_i = \sum_{i \in N} \bar{c}_i d_i$$

Για κάθε μη βασική μεταβλητή x_i, $i \in N$, έχουμε $x_i = 0$ και αφού η $\underline{z}$ είναι εφικτή λύση θα πρέπει $z_i \geq 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι $d_i \geq 0$ και $\bar{c}_i d_i \leq 0 \ \forall \ i \in N$. Από αυτά συμπεραίνουμε ότι $\underline{c}^T(\underline{z} - \underline{x}) = \underline{c}^T \underline{d} \leq \underline{0}$ και αφού $\underline{z}$ είναι μια τυχαία εφικτή λύση, το $\underline{x}$ είναι βέλτιστη λύση.

β) Υποθέτουμε ότι $\underline{x}$ είναι μια μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση κι ότι $\bar{c}_j > 0$ για κάποια μη βασική μεταβλητή x_j. Αφού το $\underline{x}$ είναι μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση η j-στη κατεύθυνση είναι μια εφικτή κατεύθυνση όπου το κέρδος αυξάνεται. Μετακινούμενοι σε αυτή την κατεύθυνση, οδηγούμαστε σε εφικτές λύσεις με υψηλότερο κέρδος από την $\underline{x}$ άρα η $\underline{x}$ δεν είναι βέλτιστη.

Επιστροφή στο Θεώρημα 3.1

Απόδειξη Θεωρήματος 3.2

α) Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $\underline{A}_{B(i)}$, $i \neq l$ και $\underline{A}_j$, είναι γραμμικά εξαρτημένα και συνεπώς υπάρχουν συντελεστές λ_j και $\lambda_{B(i)}$, $i \neq l$ όχι όλοι μηδενικοί, τέτοιοι ώστε

$$\sum_{i=1, i\neq l}^{m} \lambda_{B(i)} \underline{A}_{B(i)} + \lambda_j \underline{A}_j = \underline{0}$$

που συνεπάγεται ότι

$$\sum_{i=1, i\neq l}^{m} \lambda_{B(i)} B^{-1} \underline{A}_{B(i)} + \lambda_j B^{-1} \underline{A}_j = \underline{0}$$

δηλαδή και τα διανύσματα $B^{-1}\underline{A}_j$, $B^{-1}\underline{A}_{B(i)}$, $i \neq l$ είναι επίσης γραμμικά εξαρτημένα. Προφανώς ισχύει ότι $B^{-1}B = I$. Αφού $\underline{A}_{B(i)}$, είναι η i-οστή στήλη του πίνακα B έπεται ότι τα διανύσματα $B^{-1}\underline{A}_{B(i)}$, $i \neq l$ είναι οι στήλες του μοναδιαίου πίνακα, δηλαδή είναι τα μοναδιαία διανύσματα εκτός του l-οστού. Αυτό σημαίνει ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα και σε όλα οι l-οστές μεταβλητές τους είναι μηδέν. Όμως γνωρίζουμε ότι $B^{-1}\underline{A}_j = -\,\underline{d}_B$. Η l-οστή μεταβλητή είναι $-\,d_{B(l)}$ και είναι εξ' ορισμού διαφορετική του μηδενός. Άρα το διάνυσμα $B^{-1}\underline{A}_j$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο από τα μοναδιαία διανύσματα $B^{-1}\underline{A}_{B(i)}$, $i \neq l$. Αυτό όμως είναι άτοπο και συνεπώς τα διανύσματα $\underline{A}_{B(i)}$, $i \neq l$ και $\underline{A}_j$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

β) Έχουμε ότι $\underline{z} \geq \underline{0}$, $A\underline{z} = \underline{b}$ και $z_k = 0$ για $k \neq j$ και $k \neq B(i)$, $i \neq l$. Επιπλέον μόλις αποδείξαμε ότι οι στήλες $\underline{A}_{B(i)}$, $i \neq l$ και $\underline{A}_j$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Συνεπάγεται ότι το $\underline{z}$ είναι βασική εφικτή λύση και ο πίνακας B' ο αντίστοιχος βασικός πίνακας.

Επιστροφή στο Θεώρημα 3.2

Απόδειξη Θεωρήματος 3.3

Αν ο αλγόριθμος τερματίσει λόγω του κριτηρίου τερματισμού του βήματος 2, τότε ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας του Θεωρήματος 3.1 και η αντίστοιχη βασική εφικτή λύση είναι βέλτιστη. Αν ο αλγόριθμος τερματίσει λόγω του κριτηρίου του βήματος 3, τότε βρισκόμαστε σε μια βασική εφικτή λύση $\underline{x}$ κι έχουμε μια μη βασική μεταβλητή x_j τέτοια ώστε $\overline{c}_j > 0$ και το αντίστοιχο διάνυσμα κατεύθυνσης $\underline{d}$ ικανοποιεί τις $A\underline{d} = \underline{0}$ και $\underline{d} \geq \underline{0}$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα $\underline{z}$ που ανήκει στην ημιευθεία $\underline{z} = \underline{x} + \theta\underline{d}$, $\theta > 0$ ανήκει στον χώρο εφικτών λύσεων. Αφού $\underline{c}^T\underline{d} = \overline{c}_j > 0$, όσο μεγαλύτερο είναι το θ τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και συνεπώς το βέλτιστο κέρδος απειρίζεται.

Σε κάθε επανάληψη της μεθόδου μετακινούμαστε από μια βασική εφικτή λύση σε μία άλλη έτσι ώστε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης να είναι αυστηρά μεγαλύτερη. Με αυτό τον τρόπο δεν είναι εφικτή η επιστροφή στην ίδια βασική εφικτή λύση. Αφού το πλήθος των βασικών εφικτών λύσεων είναι πεπερασμένο, το πλήθος των επαναλήψεων της μεθόδου Simplex είναι κι αυτό πεπερασμένο.

Επιστροφή στο Θεώρημα 3.3

Απόδειξη Θεωρήματος 3.4

α) Υποθέτουμε ότι όλες οι γραμμές του tableau εκτός της μηδενικής είναι λεξικογραφικά θετικές στην αρχή μιας επανάληψης του αλγορίθμου της Simplex. Υποθέτουμε ακόμη ότι η μεταβλητή x_j, γίνεται βασική κι ότι η γραμμή του πιλότου είναι η l-οστή. Σύμφωνα με τον λεξικογραφικό κανόνα οδήγησης, έχουμε ότι $u_l > 0$ και ότι

$$\frac{(l\text{ - στη γραμμή})}{u_l} \overset{L}{<} \frac{(i\text{ - στη γραμμή})}{u_i}, \text{ αν } i \neq l \text{ και } u_i > 0 \tag{3.4}$$

Για να πάρουμε το νέο tableau η l-οστη γραμμή διαιρείται με το στοιχείο u_l με αποτέλεσμα να παραμένει λεξικογραφικά θετική. Θεωρούμε την i-οστη γραμμή κι έστω ότι $u_i < 0$. Για να μηδενίσουμε το στοιχείο u_i της γραμμής του πιλότου πρέπει να προσθέσουμε ένα θετικό πολλαπλάσιο της γραμμής του πιλότου στην i-οστη γραμμή. Επειδή και οι δύο γραμμές είναι λεξικογραφικά θετικές η i-οστη γραμμή θα παραμείνει λεξικογραφικά θετική μετά από αυτή την πρόσθεση. Τέλος στην περίπτωση που το $u_i > 0$ και $i \neq l$ έχουμε ότι

$$(\text{νέα } i\text{-οστη γραμμή}) = (\text{παλαιά } i\text{-οστη γραμμή}) - \frac{u_i}{u_l}(\text{παλαιά } l\text{ -οστη γραμμή}).$$

Λόγω της λεξικογραφικής ανισότητας (3.4), η οποία ικανοποιείται από τις παλαιές γραμμές (τις γραμμές του αρχικού tableau), η νέα i-οστη γραμμή είναι επίσης λεξικογραφικά θετική.

β) Στην αρχή μιας επανάληψης του αλγορίθμου το $\bar{c}_j > 0$. Στο επόμενο Tableau θα πρέπει να είναι μηδέν και για να γίνει αυτό θα πρέπει να αφαιρεθεί ένα πολλαπλάσιο της γραμμής του πιλότου. Αφού η γραμμή του πιλότου είναι λεξικογραφικά θετική, η μηδενική γραμμή μειώνεται λεξικογραφικά.

γ) Αφού η μηδενική γραμμή μειώνεται λεξικογραφικά σε κάθε επανάληψη της Simplex δεν επιστρέφει ποτέ σε προηγούμενες τιμές. Αφού η μηδενική γραμμή καθορίζεται αποκλειστικά από την τρέχουσα βάση, καμία βάση δε μπορεί να επαναληφθεί και η Simplex πρέπει να τερματίζει μετά από πεπερασμένο πλήθος επαναλήψεων.

Επιστροφή στο Θεώρημα 3.4

Απόδειξη Θεωρήματος 4.1

Έστω το ακόλουθο πρωτεύων ΠΓΠ:

$$z = \max(\underline{c}^T \underline{x})$$
$$A\underline{x} \leq \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Μπορούμε να φέρουμε όλα τα ΠΓΠ σε αυτή τη μορφή. Αν για παράδειγμα έχουμε περιορισμό της μορφής $\underline{a}_i^T \underline{x} \geq b_i$ τον πολλαπλασιάζουμε με -1 για να αλλάξει φορά. Αν έχουμε τον ισοτικό περιορισμό $\underline{a}_i^T \underline{x} = b_i$ τον αντικαθιστούμε με τους δυο περιορισμούς $\underline{a}_i^T \underline{x} \geq b_i$ και $\underline{a}_i^T \underline{x} \leq b_i$, οπότε πολλάπλασιάζοντας τον πρώτο με -1 έχουμε $-\underline{a}_i^T \underline{x} \leq -b_i$ και $\underline{a}_i^T \underline{x} \leq b_i$. Όπως έχουμε δει το δυϊκό αυτού του προβλήματος είναι

$$\begin{array}{ccc} \min(\underline{\upsilon}^T \underline{b}) & & -\max(-\underline{b}^T \underline{\upsilon}) \\ \underline{\upsilon}^T A \geq \underline{c}^T & \text{ή ισοδύναμα} & -A^T \underline{\upsilon} \leq -\underline{c} \\ \underline{\upsilon}^T \geq \underline{0}^T & & \underline{\upsilon} \geq \underline{0} \end{array}$$

Το δυϊκό του τελευταίου είναι

$$\begin{array}{ccc} -\min(-\underline{x}^T \underline{c}) & & \max(\underline{c}^T \underline{x}) \\ -\underline{x}^T A^T \geq -\underline{b}^T & \text{ή ισοδύναμα} & A\underline{x} \leq \underline{b} \\ \underline{x}^T \geq \underline{0}^T & & \underline{x} \geq \underline{0} \end{array}$$

που βλέπουμε ότι είναι το πρωτεύων.

Επιστροφή στο Θεώρημα 4.1

Απόδειξη Θεωρήματος 4.2

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\underline{x}$ και $\underline{\upsilon}$ ορίζουμε

$$u_i = \upsilon_i(b_i - \underline{a}_i^T \underline{x}_i),$$

$$v_i = (\underline{\upsilon}^T \underline{A}_j - c_j)x_j.$$

Υποθέτουμε ότι τα $\underline{x}$ και $\underline{\upsilon}$ είναι εφικτές λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού αντίστοιχα. Από τον ορισμό του δυϊκού προβλήματος απαιτείται το πρόσημο της δυϊκής μεταβλητής να είναι ίδιο με το πρόσημο του περιορισμού $b_i - \underline{a}_i^T \underline{x}$ και το πρόσημο του δυϊκού περιορισμού $\underline{\upsilon}^T \underline{A}_j - c_j$ να είναι ίδιο με το πρόσημο της μεταβλητής x_j. Συνεπώς θα έχουμε $u_i \geq 0$, $\forall\ i$, και $v_j \geq 0$, $\forall\ j$. Σημειώστε ότι

$$\sum_i u_i = \underline{\upsilon}^T \underline{b} - \underline{\upsilon}^T A \underline{x}, \text{ και } \sum_i v_i = \underline{\upsilon}^T A \underline{x} - \underline{c}^T \underline{x}$$

Προσθέτουμε τις δύο παραπάνω ισότητες και χρησιμοποιώντας τη μη αρνητικότητα των u_i και v_j έχουμε

$$0 \leq \sum_i u_i + \sum_j v_j = \underline{\upsilon}^T \underline{b} - \underline{c}^T \underline{x}$$

Που αποδεικνύει το θεώρημα 4.2.

Επιστροφή στο Θεώρημα 4.2

Απόδειξη Πορίσματος 4.1

Υποθέτουμε ότι η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος είναι $+\infty$ και ότι το δυϊκό έχει τουλάχιστον μια εφικτή λύση $\underline{\upsilon}$. Από το θεώρημα 4.2 έχουμε ότι $\underline{\upsilon}^T\underline{b} \geq \underline{c}^T\underline{x}$ για κάθε εφικτή λύση $\underline{x}$ του πρωτεύοντος. Δηλαδή θα πρέπει να έχουμε $\underline{\upsilon}^T\underline{b} \geq \max(\underline{c}^T\underline{x}) = +\infty$. Αυτό είναι άτοπο κι έτσι αποδεικνύουμε το (α) μέρος του θεωρήματος. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και το (β).

Επιστροφή στο Πόρισμα 4.1

Απόδειξη Πορίσματος 4.2

Έστω $\underline{x}$ και $\underline{\upsilon}$ εφικτές λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει ότι $\underline{\upsilon}^T \underline{b} = \underline{c}^T \underline{x}$. Από το Θεώρημα 4.2 έχουμε ότι για κάθε εφικτή λύση του πρωτεύοντος $\underline{z}$ ισχύει η σχέση $\underline{c}^T \underline{x} = \underline{\upsilon}^T \underline{b} \geq \underline{c}^T \underline{z}$, που αποδεικνύει ότι η $\underline{x}$ είναι βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος. Όμοια αποδεικνύεται ότι η $\underline{\upsilon}$ είναι βέλτιστη λύση του δυϊκού.

Επιστροφή στο Πόρισμα 4.2

Απόδειξη Θεωρήματος 4.3

Θεωρούμε το ένα ΠΓΠ σε κανονική μορφή

$$z = \max(\underline{c}^T\underline{x})$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}.$$

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι πλήρους βαθμού δηλαδή οι γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητες κι ότι το πρόβλημα έχει βέλτιστη λύση. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Simplex στο παραπάνω πρόβλημα κι έστω ότι η βέλτιστη λύση που καταλήγουμε είναι η $\underline{x}$ και ο αντίστοιχος βασικός πίνακας ο B. Τότε το διάνυσμα τιμών των βασικών μεταβλητών είναι $\underline{x_B} = B^{-1}\underline{b}$. Στο τελικό tableau της Simplex οι μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους είναι μη θετικές και συνεπώς έχουμε $\underline{c}^T - \underline{c_B}^T B^{-1} A \leq \underline{0}^T$, όπου $\underline{c_B}$ είναι το διάνυσμα συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης των βασικών μεταβλητών. Ορίζουμε το διάνυσμα $\underline{\upsilon}$ ως εξής $\underline{\upsilon}^T = \underline{c_B}^T B^{-1}$. Τότε έχουμε ότι $\underline{\upsilon}^T A \geq \underline{c}^T$, που σημαίνει ότι το $\underline{\upsilon}$ είναι εφικτή λύση του δυϊκού προβλήματος

$$z = \min(\underline{\upsilon}^T\underline{b})$$
$$\underline{\upsilon}^T A \geq \underline{c}.$$

Ακόμη από τον ορισμό των $\underline{\upsilon}$ και $\underline{x_B}$ έχουμε ότι $\underline{\upsilon}^T\underline{b} = \underline{c_B}^T B^{-1}\underline{b} = \underline{c_B}^T\underline{x_B} = \underline{c}^T\underline{x}$. Από το Πόρισμα 4.2 προκύπτει ότι το $\underline{\upsilon}$ είναι βέλτιστη λύση του δυϊκού κι ακόμη βλέπουμε ότι το βέλτιστο κέρδος του δυϊκού είναι ίσο με το βέλτιστο κέρδος του πρωτεύοντος.

Επιστροφή στο Θεώρημα 4.3

Απόδειξη Θεωρήματος 4.4

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2 ορίσαμε τις ποσότητες $u_i = \upsilon_i(b_i - \underline{a}_i^T\underline{x})$ και $v_i = (\underline{\upsilon}^T\underline{A}_j - c_j)x_j$. Ακόμη δείξαμε ότι για κάθε $\underline{x}$ και $\underline{\upsilon}$, που είναι εφικτές λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού αντίστοιχα ισχύει ότι $u_i \geq 0$, $\forall\ i$, και $v_j \geq 0$, $\forall\ j$. Επιπλέον προέκυψε ότι

$$\underline{\upsilon}^T \underline{b} - \underline{c}^T \underline{x} = \sum_i u_i + \sum_j v_j \geq 0$$

Από το Θεώρημα 4.3 γνωρίζουμε ότι αν $\underline{x}$ και $\underline{\upsilon}$ είναι βέλτιστες λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού αντίστοιχα, τότε $\underline{c}^T\underline{x} = \underline{\upsilon}^T\underline{b}$, που σημαίνει ότι $u_i = v_j = 0$, $\forall\ i, j$. Αντίστροφα αν $u_i = v_j = 0$, $\forall\ i, j$, έχουμε ότι $\underline{c}^T\underline{x} = \underline{\upsilon}^T\underline{b}$, κι από το Πόρισμα 4.2 συνεπάγεται ότι τα $\underline{x}$ και $\underline{\upsilon}$ είναι βέλτιστες λύσεις.

Επιστροφή στο Θεώρημα 4.4