

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

url: <http://www.aegean.gr>

Γραμμική Άλγεβρα

Απόστολος Μπεληγιάννης
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
832 00 Καρλόβασι
Σάμος

© Copyright Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών
All rights reserved



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 1 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος





• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

➤ Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

➤ Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

➤ Η έννοια του σώματος

- Διανυσματικός Χώρος
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 2 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

1.1. Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

Από την Αναλυτική Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι αν \mathcal{V}_3 είναι το σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων του χώρου τριών διαστάσεων που μας περιβάλλει, τότε μπορούμε με φυσικό τρόπο να προσθέσουμε δύο ελεύθερα διανύσματα καθώς και να “πολλαπλασιάσουμε” ένα ελεύθερο διάνυσμα με έναν πραγματικό αριθμό.

Έστω \mathcal{E} ο συνήθης χώρος τριών διαστάσεων που μας περιβάλλει, και θεωρούμε στον \mathcal{E} το σύνολο \mathcal{D} όλων των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων. Υπενθυμίζουμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι προσανατολισμένο αν έχουμε καθορίσει μια διάταξη για τα άκρα του, δηλαδή έχουμε καθορίσει την αρχή και το τέλος του. Ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα θα συμβολίζεται με \overline{AB} και με αυτό το συμβολισμό το \overline{A} συμφωνούμε να είναι η αρχή και B το τέλος του. Έτσι το \overline{AB} είναι διαφορετικό από το \overline{BA} , η αρχή του



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

▶ Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

▶ Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

▶ Η έννοια του σώματος

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 3 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

οποίου είναι το σημείο B και τέλος το σημείο A .

Κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα \overline{AB} του συνόλου \mathcal{D} , βρίσκεται πάνω σε μια μοναδική ευθεία $(\)$, στην οποία έχει καθοριστεί μια φορά κίνησης ή προσανατολισμός: από το σημείο A στο σημείο B . Θα λέμε ότι δύο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα \overline{AB} και \overline{CD} έχουν την ίδια διεύθυνση αν-ν κείνται σε παράλληλες ευθείες. Τέλος το μήκος του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος \overline{AB} ορίζεται να είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει το σημείο A με το σημείο B . Στο σύνολο \mathcal{D} των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων ορίζουμε μια σχέση \mathcal{R} , δηλαδή ένα υποσύνολο $\sim \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ του καρτεσιανού γινομένου $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, ως εξής (ως συνήθως γράφουμε $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ για να υποδηλώσουμε ότι το ζεύγος $(\overline{AB}, \overline{CD})$ ανήκει στο υποσύνολο \sim):

Αν $\overline{AB}, \overline{CD} \in \mathcal{D}$ είναι δύο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα, τότε:

$$\overline{AB} \sim \overline{CD}$$

αν και μόνον αν:

1. Τα $\overline{AB}, \overline{CD}$ έχουν την ίδια διεύθυνση (κείνται σε παράλληλες ευθείες).
2. Τα $\overline{AB}, \overline{CD}$ έχουν την ίδια φορά.
3. Τα $\overline{AB}, \overline{CD}$ έχουν το ίδιο μήκος.

Ως γνωστόν η παραπάνω σχέση έχει κάποιες σημαντικές ιδιότητες. Συγκεκριμένα για τυχόντα στοιχεία $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EZ} \in \mathcal{D}$, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Ανακλαστική Ιδιότητα: $\overline{AB} \sim \overline{AB}$.
2. Συμμετρική Ιδιότητα: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ αν και μόνον αν $\overline{CD} \sim \overline{AB}$
3. Μεταβατική Ιδιότητα: Αν $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ και $\overline{CD} \mathcal{R} \overline{EZ}$, τότε $\overline{AB} \sim \overline{EZ}$.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

➤ Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

➤ Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

➤ Η έννοια του σώματος

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 4 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Μια σχέση επί ενός συνόλου \mathcal{D} η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες καλείται *σχέση ισοδυναμίας* επί του συνόλου \mathcal{D} . Η σχέση \sim είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο \mathcal{D} των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων, και επομένως το διαμερίζει σε κλάσεις ισοδυναμίας. Υπενθυμίζουμε ότι μια διαμέριση ενός συνόλου \mathcal{D} είναι μια συλλογή υποσυνόλων Φ του \mathcal{D} η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

- $\emptyset \in \Phi$.
- $\cup_{A \in \Phi} A = \mathcal{D}$.
- Αν $A, B \in \Phi$ και $A \neq B$, τότε: $A \cap B = \emptyset$.

Η σχέση ισοδυναμίας ορίζει την ακόλουθη διαμέριση επί του συνόλου \mathcal{D} :

$$\Phi := \{C_{\overline{AB}} \mid \overline{AB} \in \mathcal{D}\}, \quad C_{\overline{AB}} := \{\overline{CD} \in \mathcal{D} \mid \overline{CD} \sim \overline{AB}\}$$

Έτσι το σύνολο $C_{\overline{AB}}$ αποτελείται από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι «ισοδύναμα», μέσω της σχέσης \sim , με το ευθύγραμμο τμήμα \overline{AB} . Το σύνολο $C_{\overline{AB}}$ καλείται η κλάση ισοδυναμίας του ευθυγράμμου τμήματος \overline{AB} , και η συλλογή συνόλων - διαμέριση Φ του \mathcal{D} , καλείται το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των ευθυγράμμων τμημάτων του χώρου. Συνήθως τα στοιχεία του συνόλου $C_{\overline{AB}}$ καλούνται *αντιπρόσωποι* της κλάσης ισοδυναμίας του ευθυγράμμου τμήματος \overline{AB} .

Μια κλάση ισοδυναμίας καλείται **(ελεύθερο) διάνυσμα**. Η κλάση του προσανατολισμένου ευθυγράμμου τμήματος \overline{AB} θα συμβολίζεται με \overrightarrow{AB} , δηλαδή:

$$\overrightarrow{AB} = \{\overline{CD} \in \mathcal{D} \mid \overline{CD} \sim \overline{AB}\}$$

Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας συμβολίζεται με

$$\mathcal{V}_3 := \mathcal{D} / \sim = \{\overrightarrow{AB} \mid \overline{AB} \in \mathcal{D}\}$$



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

▶ Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

▶ Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

▶ Η έννοια του σώματος

- Διανυσματικό Χώρο
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 5 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

και καλείται ο *χώρος των (ελευθέρων) διανυσμάτων*. Όπως είναι άμεσο από τον ορισμό, τα στοιχεία: διεύθυνση, φορά, μήκος, τέλος, αρχή, επεκτείνονται από τα ευθύγραμμα τμήματα και στα διανύσματα, αν ορίσουμε διεύθυνση, φορά, μήκος, τέλος, αρχή του διανύσματος \vec{AB} την διεύθυνση, φορά, μήκος, τέλος, αρχή του ευθυγράμμου τμήματος \overline{AB} . Ιδιαίτερα το μήκος του \vec{AB} ορίζεται να είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος \overline{AB} , και συμβολίζεται ως: $|\vec{AB}|$.

Όπως γνωρίζουμε από την στοιχειώδη Αναλυτική Γεωμετρία, το σύνολο \mathcal{V}_3 έχει επιπρόσθετη δομή. Συγκεκριμένα μπορούμε να προσθέσουμε δύο διανύσματα και να πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα με έναν πραγματικό αριθμό.

Έτσι αν μας δοθούν δύο διανύσματα $\vec{AB}, \vec{CD} \in \mathcal{V}_3$, τότε ορίζεται μοναδικά ένα νέο διάνυσμα $\vec{EZ} := \vec{AB} + \vec{CD}$, το οποίο καλείται το *άθροισμα* των \vec{AB} και \vec{CD} , με τον ακόλουθο τρόπο. Αν (ε) είναι η ευθεία στην οποία κείται το διάνυσμα \vec{AB} και (ε') είναι η ευθεία στην οποία κείται το διάνυσμα \vec{CD} , τότε μεταφέρουμε παράλληλα την ευθεία (ε') έτσι ώστε αυτή να συναντήσει την ευθεία (ε) με τέτοιο τρόπο ώστε η αρχή του διανύσματος \vec{CD} να συμπέσει με την τέλος του διανύσματος \vec{AB} . Η παράλληλη μεταφορά του ευθυγράμμου τμήματος \overline{CD} δημιουργεί τότε ένα νέο διάνυσμα, η αρχή του οποίου είναι το σημείο $B := E$ και το τέλος του οποίου έστω ότι είναι το σημείο Z . Τότε το διάνυσμα \vec{EZ} , δηλαδή το άθροισμα των \vec{AB} και \vec{CD} ορίζεται να είναι το διάνυσμα (ή καλύτερα ο κλάση του ευθυγράμμου τμήματος) το οποίο έχει αρχή το A και τέλος το τέλος του ευθυγράμμου τμήματος \overline{EZ} . Μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι η παραπάνω κατασκευή του αθροίσματος των \vec{AB} και \vec{CD} είναι καλά ορισμένη, δηλαδή δεν εξαρτάται από την επιλογή αντιπροσώπων των κλάσεων ισοδυναμίας των ευθυγράμμων τμημάτων \overline{AB} και \overline{CD} .

Επίσης αν $k \in \mathbb{R}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, και $\vec{AB} \in \mathcal{V}_3$ είναι ένα διάνυσμα, τότε ορίζεται μοναδικά ένα νέο διάνυσμα $k \cdot \vec{AB}$, το οποίο καλείται ο *βαθμωτός πολλαπλασιασμός* του k με το \vec{AB} , ως εξής. Αν $k = 0$, ή αν $\vec{AB} = \vec{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε θέτουμε $k \cdot \vec{AB} = \vec{0}$. Αν $k \neq 0$ και $\vec{AB} \neq \vec{0}$, τότε η διεύθυνση του $k \cdot \vec{AB}$ είναι η διεύθυνση



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

➤ Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

➤ Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

➤ Η έννοια του σώματος

- Διανυσματικό Χώρο
- Διανυσματικό Υπόχωρο και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 6 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

του \vec{AB} . Η φορά του $k \cdot \vec{AB}$ είναι η φορά του \vec{AB} αν $k > 0$ και την φορά του αντιθέτου διανύσματος $-\vec{AB} = \vec{BA}$ αν $k < 0$. Τέλος το μήκος του $k \cdot \vec{AB}$ ορίζεται να είναι ο αριθμός: $|k||\vec{AB}|$

Έτσι στο σύνολο \mathcal{V}_3 έχουμε ορίσει δύο απεικονίσεις:

1. Πρόσθεση:

$$+ : \mathcal{V}_3 \times \mathcal{V}_3 \rightarrow \mathcal{V}_3, (\vec{AB}, \vec{CD}) \mapsto \vec{AB} + \vec{CD}$$

2. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V}_3 \rightarrow \mathcal{V}_3, (k, \vec{AB}) \mapsto k \cdot \vec{AB}$$

Από την Ευκλείδεια η την στοιχειώδη Αναλυτική Γεωμετρία, γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο \mathcal{V}_3 των ελευθέρων διανυσμάτων του χώρου, εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, ικανοποιεί τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες:

(ΔΧ1) Προσεταιριστική Ιδιότητα της Πρόσθεσης. Δηλαδή:

$$\forall \vec{AB}, \vec{CD}, \vec{EZ} \in \mathcal{V}_3 : (\vec{AB} + \vec{CD}) + \vec{EZ} = \vec{AB} + (\vec{CD} + \vec{EZ})$$

(ΔΧ2) Αντιμεταθετική Ιδιότητα Πρόσθεσης. Δηλαδή:

$$\forall \vec{AB}, \vec{CD} \in \mathcal{V}_3 : \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{CD} + \vec{AB}$$

(ΔΧ3) Υπαρξη Μηδενικού Διανύσματος. Δηλαδή υπάρχει ένα διακεκριμένο στοιχείο $\vec{0}$ του \mathcal{V}_3 , το οποίο καλείται **μηδενικό διάνυσμα**, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\forall \vec{AB} \in \mathcal{V}_3 : \vec{AB} + \vec{0} = \vec{AB} = \vec{0} + \vec{AB}$$



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

▶ Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

▶ Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

▶ Η έννοια του σώματος

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 7 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Το διάνυσμα $\vec{0}$ με την παραπάνω ιδιότητα είναι η κλάση ισοδυναμίας του ευθυγράμμου τμήματος του οποίου τα άκρα συμπίπτουν, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα το μήκους του οποίου είναι ίσο με μηδέν.

(ΔX4) Υπαρξη Αντιθέτου Διανύσματος. Δηλαδή για κάθε διάνυσμα \vec{AB} του \mathcal{V}_3 υπάρχει ένα νέο διάνυσμα $-\vec{AB}$ του \mathcal{V}_3 , το οποίο καλείται **αντίθετο διάνυσμα** του \vec{AB} , έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\forall \vec{AB} \in \mathcal{V}_3, \exists (-\vec{AB}) \in \mathcal{V}_3 : \vec{AB} + (-\vec{AB}) = \vec{0} = (-\vec{AB}) + \vec{AB}$$

Το αντίθετο διάνυσμα του \vec{AB} είναι το διάνυσμα \vec{BA} , το οποίο έχει την ίδια διεύθυνση και το ίδιο μήκος με το \vec{AB} , αλλά έχει αντίθετη φορά.

(ΔX5) Επιμεριστική Ιδιότητα του Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση στοιχείων του \mathbb{R} . Δηλαδή:

$$\forall \vec{AB} \in \mathcal{V}_3, \forall \kappa, \beta \in \mathbb{R} : (\kappa + \beta) \cdot \vec{AB} = \kappa \cdot \vec{AB} + \beta \cdot \vec{AB}$$

(ΔX6) Επιμεριστική Ιδιότητα του Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων του \mathcal{V}_3 . Δηλαδή:

$$\forall \vec{AB}, \vec{CD} \in \mathcal{V}_3, \forall \kappa \in \mathbb{R} : \kappa \cdot (\vec{AB} + \vec{CD}) = \kappa \cdot \vec{AB} + \kappa \cdot \vec{CD}$$

(ΔX7) Μικτή Προσεταιριστική Ιδιότητα. Δηλαδή:

$$\forall \vec{AB} \in \mathcal{V}_3, \forall \kappa, \beta \in \mathbb{R} : \kappa \cdot (\beta \cdot \vec{AB}) = (\kappa\beta) \cdot \vec{AB}$$

(ΔX8) Μοναδιαία Ιδιότητα. Δηλαδή:

$$\forall \vec{AB} \in \mathcal{V}_3 : 1 \cdot \vec{AB} = \vec{AB}$$



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

▶ Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

▶ Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

▶ Η έννοια του σώματος

- Διανυσματικό Χώρο
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 8 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Σκοπός μας είναι να γενικεύσουμε τα βασικά δομικά στοιχεία και τις βασικές ιδιότητες οι οποίες υπάρχουν στο παράδειγμα των ελευθέρων διανυσμάτων του επιπέδου, και οποίες περιγράφονται παραπάνω σε δύο κύριες κατευθύνσεις:

1. Το σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων να αντικατασταθεί με ένα πιο γενικό σύνολο, π.χ. με σύνολα πινάκων, πολυωνύμων, συναρτήσεων, ακολουθιών, κτλ. Φυσικά απαιτούμε τα σύνολα αυτά των “γενικευμένων διανυσμάτων” να ικανοποιούν τις τυπικές ιδιότητες που ικανοποιεί το σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων όπως περιγράψαμε παραπάνω.

Η γενίκευση αυτή μας απελευθερώνει κατά κάποιον τρόπο και από τον περιορισμό των τριών διαστάσεων.

2. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών με το οποίο πολλαπλασιάζουμε βαθμωτά να αντικατασταθεί με ένα πιο γενικό σύνολο, π.χ. με το σύνολο των ρητών ή των μιγαδικών αριθμών. Παρόμοια απαιτούμε τα σύνολα αυτά των “γενικευμένων αριθμών” να ικανοποιούν τις τυπικές ιδιότητες που ικανοποιεί το σύνολο των πραγματικών αριθμών όπως περιγράψαμε παραπάνω.

Η βασική ιδέα είναι να ξεκινήσουμε με ένα σύνολο αφηρημένων στοιχείων \mathcal{V} επί του οποίου υποθέτουμε ότι έχουν ορισθεί δύο πράξεις, με την έννοια του επόμενου εδαφίου: μια πράξη πρόσθεσης και μια πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού «γενικευμένων» αριθμών με στοιχεία του \mathcal{V} , και να δεχθούμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες **(ΔX1)**-**(ΔX8)** παραπάνω, τις οποίες πλέον δεχόμαστε ως αξιώματα. Έτσι το παράδειγμα του χώρου των (ελευθέρων διανυσμάτων του χώρου θα αποτελέσει το βασικό μοντέλο για τον ορισμό της αφηρημένης έννοιας του διανυσματικού χώρου η οποία θα μελετηθεί στο επόμενο Κεφάλαιο.

Στην παρόν Κεφάλαιο θα δούμε με ποιόν τρόπο μπορούμε να γενικεύσουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Στο επόμενο Κεφάλαιο θα μελετήσουμε διεξοδικά με ποιόν τρόπο μπορούμε να γενικεύσουμε το σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

➤ Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

➤ Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

➤ Η έννοια του σώματος

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 9 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

1.2. Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

Εστω \mathcal{S} ένα σύνολο.

Μια **εσωτερική πράξη** επί του \mathcal{S} , είναι μια απεικόνιση

$$* : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad (s_1, s_2) \mapsto *(s_1, s_2).$$

Αν $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$, τότε συνήθως την τιμή $*(s_1, s_2)$ θα την συμβολίζουμε με $s_1 * s_2$:

$$\forall s_1, s_2 \in \mathcal{S} : *(s_1, s_2) := s_1 * s_2.$$

Εστω τώρα \mathbb{K} και \mathcal{S} δύο σύνολα.

Μια **εξωτερική πράξη** του συνόλου \mathbb{K} επί του \mathcal{S} , είναι μια απεικόνιση

$$\odot : \mathbb{K} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad (k, s) \mapsto \odot(k, s).$$

Αν $k \in \mathbb{K}$ και $s \in \mathcal{S}$, τότε συνήθως την τιμή $\odot(k, s)$ θα την συμβολίζουμε με $k \odot s$:

$$\forall k \in \mathbb{K}, \forall s \in \mathcal{S} : \odot(k, s) := k \odot s$$

Παράδειγμα 1.2.1 Στο σύνολο \mathbb{Z} των ακεραίων αριθμών, ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης, η οποία είναι μια απεικόνιση $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (k, l) \mapsto k + l$. Επίσης ορίζεται και η πράξη του πολλαπλασιασμού, η οποία είναι μια απεικόνιση $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (k, l) \mapsto kl$. Άλλα παραδείγματα αποτελούν τα οικεία μας σύνολα: \mathbb{Q} των ρητών αριθμών, \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών, και \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών, εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

1.3. Η έννοια του σώματος

Σε ένα γενικό πλαίσιο η Άλγεβρα μελετά τις βασικές ιδιότητες και την δομή συνόλων τα οποία είναι εφοδιασμένα με μία ή περισσότερες (εσωτερικές ή εξωτερικές) πράξεις. Αυτά



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

➤ Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

➤ Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

➤ Η έννοια του σώματος

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 10 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

τα σύνολα, μαζί με αυτές τις πράξεις, αποτελούν γενικεύσεις των οικείων μας συνόλων αριθμών \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις. Στα πλαίσια της Γραμμικής Άλγεβρας η έννοια του σώματος διαδραματίζει σημαντικό ρόλο.

Ορισμός 1.3.1 Ένας **σώμα** είναι ένα σύνολο \mathbb{K} το οποίο είναι εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις:

(a) $+$: $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, η οποία στέλνει το ζεύγος στοιχείων $(k_1, k_2) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ σε ένα νέο στοιχείο $k_1 + k_2 \in \mathbb{K}$, την οποία καλούμε **Πρόσθεση** (στοιχείων του \mathbb{K}).

(b) \cdot : $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, η οποία στέλνει το ζεύγος $(k_1, k_2) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ σε ένα νέο στοιχείο $k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{K}$, την οποία καλούμε **Πολλαπλασιασμό** (στοιχείων του \mathbb{K}).

Το σύνολο \mathbb{K} μαζί με την πράξη της πρόσθεσης $+$ και του πολλαπλασιασμού \cdot , απαιτούμε να ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα:

(ΔX1) Προσεταιριστική Ιδιότητα της Πρόσθεσης. Δηλαδή:

$$\forall k_1, k_2, \in \mathbb{K} : (k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + (k_2 + k_3)$$

(ΔX2) Αντιμεταθετική Ιδιότητα Πρόσθεσης. Δηλαδή:

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{K} : k_1 + k_2 = k_2 + k_1$$

(ΔX3) Υπαρξη Μηδενικού Στοιχείου. Δηλαδή υπάρχει ένα διακεκριμένο στοιχείο 0 του \mathbb{K} , το οποίο καλείται **μηδενικό στοιχείο**, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\forall k \in \mathbb{K} : k + 0 = k = 0 + k$$

(ΔX4) Υπαρξη Αντιθέτου Στοιχείου. Δηλαδή για κάθε στοιχείου k του \mathbb{K} υπάρχει ένα νέο στοιχείο $-k$ του \mathbb{K} , το οποίο καλείται **αντίθετο στοιχείο** του k , έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\forall k \in \mathbb{K}, \exists (-k) \in \mathbb{K} : k + (-k) = 0 = (-k) + k$$



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

➤ Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

➤ Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

➤ Η έννοια του σώματος

- Διανυσματικό Χώρο
- Διανυσματικό Υπόχωρο και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 11 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

(ΔX5) Προσεταιριστική Ιδιότητα του Πολλαπλασιασμού του \mathbb{K} . Δηλαδή:

$$\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K} : k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3) = (k_1 \cdot k_2) \cdot k_3$$

(ΔX6) Επιμεριστική Ιδιότητα του Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση του \mathbb{K} .

Δηλαδή:

$$\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K} : k_1 \cdot (k_2 + k_3) = k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3$$

$$\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K} : (k_1 + k_2) \cdot k_3 = k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_3$$

(ΔX7) Αντιμεταθετική Ιδιότητα του Πολλαπλασιασμού του \mathbb{K} . Δηλαδή:

$$\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K} : k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1$$

(ΔX8) Υπαρξη Πολλαπλασιαστικής Μονάδας. Δηλαδή:

$$\exists 1 \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{K} : 1 \cdot k = k = k \cdot 1$$

(ΔX9) Υπαρξη Πολλαπλασιαστικού Αντιστρόφου. Δηλαδή για κάθε μη μηδενικό στοιχείο k του \mathbb{K} υπάρχει ένα νέο στοιχείο k^{-1} του \mathbb{K} , το οποίο καλείται **αντίστροφο στοιχείο** του k , έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\forall k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \exists k^{-1} \in \mathbb{K} : k \cdot k^{-1} = 1 = k^{-1} \cdot k$$

Τα βασικά παραδείγματα σωμάτων με τα οποία θα ασχοληθούμε στις παρούσες σημειώσεις είναι υποσύνολα του συνόλου \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών, το οποίο με την σειρά του είναι ένα σώμα.

Παράδειγμα 1.3.2 Εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, τα ακόλουθα σύνολα αριθμών είναι σώματα:



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

➤ Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

➤ Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

➤ Η έννοια του σώματος

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 12 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

1. Το σύνολο \mathbb{Q} των ρητών αριθμών.
2. Το σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών.
3. Το σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών.

Αντίθετα το σύνολο των ακεραίων \mathbb{Z} δεν είναι σώμα (γιατί;).

Άσκηση 1.3.3 Θεωρούμε το ακόλουθα σύνολα:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{\kappa + \eta\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid \kappa, \eta \in \mathbb{Q}\}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) := \{\kappa + \eta\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \mid \kappa, \eta \in \mathbb{Q}\}$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ και $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πραγματικών και μιγαδικών αριθμών αντιστοίχα, είναι σώματα.

Σύμβαση 1.3.4 Χάρη ευκολίας στις παρούσες σημειώσεις από τώρα και στο εξής με τον όρο **σώμα** θα εννοούμε ένα υποσύνολο $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών το οποίο περιέχει το 0 και το 1 και είναι κλειστό στην πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, και την ύπαρξη αντιστρόφου (δηλαδή αν $k \in \mathbb{K}$ και $k \neq 0$, τότε $k^{-1} \in \mathbb{K}$).

Είναι εύκολο να δειχθεί τότε ότι ένα τέτοιο υποσύνολο \mathbb{K} εφοδιασμένο με τους περιορισμούς των γνωστών πράξεων πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών είναι σώμα με την έννοια του ορισμού **1.3.1**.

Παρατήρηση 1.3.5 Τα παραπάνω σώματα έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων. Υπάρχουν όμως και σώματα με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Για παράδειγμα έστω \mathbb{F} ένα σύνολο με δύο στοιχεία, τα οποία συμβολίζουμε με 0, 1: $\mathbb{F} = \{0, 1\}$. Στο σύνολο \mathbb{F} ορίζουμε δύο εσωτερικές πράξεις

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, (x, y) \mapsto x + y$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, (x, y) \mapsto x \cdot y$$

ως ακολούθως:

1. $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, \text{ και } 1 + 1 = 0.$

2. $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0, \text{ και } 1 \cdot 1 = 1.$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο \mathbb{F} είναι ένα σώμα.

Γενικά το μεγαλύτερο τμήμα της θεωρίας που θα αναπτυχθεί στα επόμενα Κεφάλαια είναι ανεξάρτητο του πλήθους των στοιχείων ενός σώματος, και άρα ισχύει για τα σώματα με την έννοια του ορισμού **1.3.1**. Η σύμβαση που κάναμε παραπάνω έγινε μόνο χάριν απλότητας και οικειότητας με τα σώματα αριθμών $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ και τα υποσύνολα τους.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

➤ Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

➤ Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

➤ Η έννοια του σώματος

- Διανυσματικό Χώρο
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 13 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

▷ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

▷ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

▷ Διανυσματικοί Χώροι Πολυνώμων και Πινάκων

▷ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 14 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Κεφάλαιο 2

Διανυσματικοί Χώροι

Στο παρόν Κεφάλαιο θα ορίσουμε την πολύ βασική έννοια του διανυσματικού χώρου πάνω από ένα σώμα. Θα μελετήσουμε τις κυριότερες ιδιότητες διανυσματικών χώρων και θα διαπραγματευθούμε μια πληθώρα βασικών παραδειγμάτων επί των οποίων θα εφαρμοσθεί η θεωρία η οποία θα αναπτυχθεί στα επόμενα Κεφάλαια. Τέλος θα αναπτύξουμε μια σειρά θεμελιωδών κατασκευών επί διανυσματικών χώρων οι οποίες θα μας είναι πολύ χρήσιμες στα επόμενα Κεφάλαια.

2.1. Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

Από τώρα και στο εξής σταθεροποιούμε ένα σώμα \mathbb{K} . Υπενθυμίζουμε από το Κεφάλαιο 1 ότι με το όρο σώμα θα εννοούμε ένα υποσύνολο $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών το οποίο περιέχει το 0 και το 1 και είναι κλειστό στην πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, και την ύπαρξη



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 15 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

αντιστρόφου (δηλαδή αν $k \in \mathbb{K}$ και $k \neq 0$, τότε $k^{-1} \in \mathbb{K}$).

Διαισθητικά ένας διανυσματικός χώρος είναι ένα σύνολο “διανυσμάτων” στο οποίο μπορούμε να ορίσουμε πρόσθεση καθώς και πολλαπλασιασμό με αριθμούς από ένα σώμα, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι γνωστοί αλγεβρικοί νόμοι που ισχύουν στο σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων του επιπέδου ή του χώρου. Περισσότερο αυστηρά και με βάση τα όσα ισχύουν στην Αναλυτική ή Ευκλείδεια γεωμετρία οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1.1 Ένας διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} είναι ένα μη-κενό σύνολο \mathcal{V} , του οποίου τα στοιχεία θα καλούμε **διανύσματα** και θα τα συμβολίζουμε με $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$, το οποίο είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις:

- Μία εσωτερική πράξη $+$: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, η οποία στέλνει το ζεύγος διανυσμάτων $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ σε ένα νέο διάνυσμα $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{V}$, την οποία καλούμε **Πρόσθεση** (διανυσμάτων του \mathcal{V}).
- Μία εξωτερική πράξη \cdot : $\mathbb{K} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, η οποία στέλνει το ζεύγος $(k, \vec{x}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{V}$ σε ένα νέο διάνυσμα $k \cdot \vec{x} \in \mathcal{V}$, την οποία καλούμε **Βαθμωτό Πολλαπλασιασμό** (στοιχείων του σώματος \mathbb{K} με διανύσματα του \mathcal{V}).

Το σύνολο \mathcal{V} μαζί με την πράξη της πρόσθεσης $+$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού \cdot , απαιτούμε να ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα:

(ΔΧ1) Προσεταιριστική Ιδιότητα της Πρόσθεσης. Δηλαδή:

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{V} : (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$$

(ΔΧ2) Αντιμεταθετική Ιδιότητα Πρόσθεσης. Δηλαδή:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V} : \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτων Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυώνυμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 16 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

(ΔΧ3) Υπαρξη Μηδενικού Διανύσματος. Δηλαδή υπάρχει ένα διακεκριμένο στοιχείο $\vec{0}$ του \mathcal{V} , το οποίο καλείται **μηδενικό διάνυσμα**, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{V} : \vec{x} + \vec{0} = \vec{x} = \vec{0} + \vec{x}$$

(ΔΧ4) Υπαρξη Αντιθέτου Διανύσματος. Δηλαδή για κάθε διάνυσμα \vec{x} του \mathcal{V} υπάρχει ένα νέο διάνυσμα $-\vec{x}$ του \mathcal{V} , το οποίο καλείται **αντίθετο διάνυσμα** του \vec{x} , έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{V}, \exists (-\vec{x}) \in \mathcal{V} : \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} = (-\vec{x}) + \vec{x}$$

(ΔΧ5) Επιμεριστική Ιδιότητα του Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση στοιχείων του \mathbb{K} . Δηλαδή:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{V}, \forall \kappa, \eta \in \mathbb{K} : (\kappa + \eta) \cdot \vec{x} = \kappa \cdot \vec{x} + \eta \cdot \vec{x}$$

(ΔΧ6) Επιμεριστική Ιδιότητα του Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων του \mathcal{V} . Δηλαδή:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}, \forall \kappa \in \mathbb{K} : \kappa \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \kappa \cdot \vec{x} + \kappa \cdot \vec{y}$$

(ΔΧ7) Μικτή Προσεταιριστική Ιδιότητα. Δηλαδή:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{V}, \forall \kappa, \eta \in \mathbb{K} : \kappa \cdot (\eta \cdot \vec{x}) = (\kappa\eta) \cdot \vec{x}$$

(ΔΧ8) Μοναδιαία Ιδιότητα. Δηλαδή:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{V} : 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

► Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

► Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

► Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

► Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 17 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Σχόλιο 2.1.2 1. Σημειώνουμε ότι ένας διανυσματικός χώρος είναι μια τριάδα $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ που ικανοποιεί τα παραπάνω αξιώματα και όχι απλά ένα σύνολο \mathcal{V} . Χάρην απλότητας όμως θα παραλείπουμε τα σύμβολα των πράξεων $+$, \cdot , όταν οι πράξεις είναι ευκόλως εννοούμενες ή έχουν αναφερθεί/ορισθεί προηγούμενα, και θα φέμε ότι το σύνολο \mathcal{V} είναι ένας διανυσματικός χώρος.

2. Στον ορισμό 2.1.1 δεν θα πρέπει να συγχέουμε την πρόσθεση αριθμών από το σώμα \mathbb{K} με την πρόσθεση διανυσμάτων του \mathcal{V} , αν και οι δύο πράξεις εμφανίζονται στα αξιώματα με το ίδιο σύμβολο. Έτσι π.χ. στο Αξίωμα (ΔX5), το σύμβολο $+$ στην αριστερή πλευρά συμβολίζει πρόσθεση αριθμών στο σώμα \mathbb{K} και το $+$ στην δεξιά πλευρά συμβολίζει πρόσθεση διανυσμάτων στον \mathcal{V} .

3. Αν \bar{x} είναι ένα διάνυσμα του \mathcal{V} , τότε το διάνυσμα $-\bar{x}$, την ύπαρξη του οποίου μας εξασφαλίζει το Αξίωμα (ΔX4), συμβολίζει ένα νέο διάνυσμα. Θα δούμε άργότερα ότι το $-\bar{x}$ είναι ίσο με το διάνυσμα $(-1) \cdot \bar{x}$.

4. Το Αξίωμα (ΔX1) μας επιτρέπει να “απαλείφουμε” παρενθέσεις. Έτσι από τώρα και στο εξής η σχέση $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ θα γράφεται $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$ καθώς ο άληθος δυνατός τρόπος για να προσθέσουμε τα διανύσματα \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} , δηλαδή ο $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$ δίνει σύμφωνα με το Αξίωμα (ΔX1) το ίδιο αποτέλεσμα. Γενικότερα αν έχουμε να προσθέσουμε μια πεπερασμένη συλλογή διανυσμάτων $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, τότε όλοι οι δυνατοί τρόποι για να τα προσθέσουμε δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα (να το δείξετε σαν Άσκηση χρησιμοποιώντας επαγωγή), το οποίο από τώρα και στο εξής θα γράφουμε ως: $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n$.

5. Το Αξίωμα (ΔX2) μας επιτρέπει να αλληλάζουμε την σειρά με την οποία προσθέτουμε διανύσματα. Έτσι για παράδειγμα έχουμε $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = \bar{x}_3 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_1$, κ.ο.κ.

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα διανυσματικών χώρων Θα δούμε δούμε κάποιες ιδιότητες που απορρέουν σχετικά άμεσα από τον ορισμό 2.1.1 και οι οποίες θα μας επι-



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 18 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

τρέψουν να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό και να αποφεύγουμε περιττές επαναλήψεις επιχειρημάτων.

Από τώρα σταθεροποιούμε έναν διανυσματικό χώρο \mathcal{V} πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} .

Συμβολισμός 2.1.3 Αν $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{V}$, τότε θα γράφουμε:

$$\bar{x} + (-\bar{y}) := \bar{x} - \bar{y}$$

όπου $-\bar{y}$ είναι το αντίθετο του διανύσματος \bar{y} . Σημειώνουμε ότι η παραπάνω γραφή είναι απλά ένας συμβολισμός, καθώς τυπικά δεν έχουμε ορίσει αφαίρεση διανυσμάτων. Μπορεί όμως κανείς να θεωρήσει τον παραπάνω συμβολισμό ως ορισμό **αφαίρεσης διανυσμάτων** στον \mathcal{V} .

Λήμμα 2.1.4 Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

1. $\forall \kappa, \eta \in \mathbb{K}, \forall \bar{x} \in \mathcal{V}: (\kappa - \eta) \cdot \bar{x} = \kappa \cdot \bar{x} - \eta \cdot \bar{x}$.
2. $\forall \kappa \in \mathbb{K}, \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{V}: \kappa \cdot (\bar{x} - \bar{y}) = \kappa \cdot \bar{x} - \kappa \cdot \bar{y}$.
3. $\forall \bar{x} \in \mathcal{V}: 0 \cdot \bar{x} = \bar{0}$.
4. $\forall \bar{x} \in \mathcal{V}: (-1) \cdot \bar{x} = -\bar{x}$.
5. $\forall \bar{x} \in \mathcal{V}: -(-\bar{x}) = \bar{x}$.
6. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{V}: -(\bar{x} + \bar{y}) = -\bar{x} - \bar{y}$.
7. $\forall \kappa \in \mathbb{K}: \kappa \cdot \bar{0} = \bar{0}$.
8. Αν $\eta \in \mathbb{K}$ και $\bar{x} \in \mathcal{V}$ και ισχύει $\eta \cdot \bar{x} = \bar{0}$, τότε: είτε $\eta = 0$ ή $\bar{x} = \bar{0}$.

Απόδειξη



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

▷ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

▷ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

▷ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

▷ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 19 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε αν το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ και το αντίθετο ενός δοθέντος διανύσματος \vec{x} του \mathcal{V} , την ύπαρξη των οποίων μας εξασφαλίζουν τα Αξιώματα **(ΔΧ3)** και **(ΔΧ4)**, είναι μοναδικά. Αυτό πράγματι ισχύει όπως θα δείξουμε στο επόμενο Λήμμα το οποίο περιέχει και δύο ιδιότητες οι οποίες μας επιτρέπουν να απλοποιήσουμε περαιτέρω τις πράξεις με διανύσματα.

Λήμμα 2.1.5 1. Αν $\vec{0}_1$ και $\vec{0}_2$ είναι δύο διανύσματα του \mathcal{V} τα οποία ικανοποιούν το Αξίωμα **(ΔΧ3)**, δηλαδή $\vec{x} + \vec{0}_1 = \vec{x}$ και $\vec{x} + \vec{0}_2 = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$, τότε: $\vec{0}_1 = \vec{0}_2$.

2. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο διανύσματα \vec{x}_1 και \vec{x}_2 τα οποία ικανοποιούν το Αξίωμα **(ΔΧ4)**, δηλαδή $\vec{x} + \vec{x}_1 = \vec{0}$ και $\vec{x} + \vec{x}_2 = \vec{0}$. Τότε $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$.

3. Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$, με $\lambda \neq 0$, και $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$. Αν $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{y}$, τότε $\vec{x} = \vec{y}$.

4. Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ και $\vec{x} \in \mathcal{V}$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$. Αν $\lambda_1 \cdot \vec{x} = \lambda_2 \cdot \vec{x}$, τότε $\lambda_1 = \lambda_2$.

Απόδειξη

Άσκηση 2.1.6

1. Να δείξετε ότι το Αξίωμα **(ΔΧ2)** προκύπτει από τα τα υπόλοιπα αξιώματα.

Υπόδειξη: εωρείστε δύο τυχόντα διανύσματα \vec{x}, \vec{y} του \mathcal{V} και εκφράστε το διάνυσμα $(1 + 1) \cdot (\vec{x} + \vec{y})$ με δύο διαφορετικούς τρόπους, χρησιμοποιώντας τα Αξιώματα **(ΔΧ5)**, **(ΔΧ6)**. \square

2. Στο σύνολο $\mathbb{R}^2 = \{(\kappa, \lambda) \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\}$, ορίζουμε “πρόσθεση” $+$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ως εξής: $(\kappa_1, \kappa_2) + (\lambda_1, \lambda_2) = (\kappa_1 + \lambda_1, \kappa_2 + \lambda_2)$. Επίσης ορίζουμε “βαθμωτό πολλαπλασιασμό” \otimes : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ως εξής: $\lambda \otimes (\kappa_1, \kappa_2) = (\lambda \kappa_1, 0)$. Να δείξετε ότι η τριάδα $(\mathbb{R}^2, +, \otimes)$ ικανοποιεί όλα τα Αξιώματα του ορισμού **2.1.1**, εκτός από το Αξίωμα **(ΔΧ8)**.

Υπόδειξη: α το **(ΔΧ8)** θεωρείστε τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό $1 \otimes (1, 1)$. \square



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 20 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

3. Στο σύνολο \mathbb{R}^2 ορίζουμε “πρόσθεση” $\dot{+} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ως εξής: $(\kappa_1, \kappa_2) + (\lambda_1, \lambda_2) = (\kappa_1 + \lambda_1 + 1, \kappa_2 + \lambda_2 + 1)$. Επίσης ορίζουμε “βαθμωτό πολλαπλασιασμό” $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ως εξής: $\lambda \cdot (\kappa_1, \kappa_2) = (\lambda\kappa_1, \lambda\kappa_2)$. Να εξετασθεί αν η τριάδα $(\mathbb{R}^2, \dot{+}, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{R} . Ποια Αξιώματα ισχύουν και ποιά όχι;

4. Έστω \mathbb{R}_+ το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε “πρόσθεση” $\otimes : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ως εξής: $\kappa \otimes \lambda := \kappa\lambda$. Επίσης ορίζουμε “βαθμωτό πολλαπλασιασμό” $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ως εξής: $r * \kappa := \kappa^r$. Να δείξετε ότι η τριάδα $(\mathbb{R}_+, \otimes, *)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{R} .

- ΑΠΟ ΤΩΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟ ΕΞΗΣ ΘΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΥ ΑΠΟΔΕΙΞΑΜΕ ΣΤΟ ΛΗΜΜΑ 2.1.4 ΧΩΡΙΣ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΑΝΑΦΟΡΑ.

2.2. Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

Στην παρούσα ενότητα θα αναπτύξουμε μια σειρά παραδειγμάτων διανυσματικών χώρων. Αυτά τα παραδείγματα, καθώς και πολλά άλλα τα οποία θα αναφέρουμε στην συνέχεια, θα τα χρησιμοποιούμε καθ' όλη την διάρκεια των σημειώσεων σαν πρότυπα εφαρμογής της θεωρίας την οποία θα αναπτύξουμε.

Παράδειγμα 2.2.1 Έστω \mathbb{K} ένα σώμα. Για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε το σώμα \mathbb{Q} των ρητών αριθμών ή το σώμα \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών ή το σώμα \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών.

Τότε η πρόσθεση $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $(\kappa, \lambda) \mapsto \kappa + \lambda$ του \mathbb{K} , και ο πολλαπλασιασμός $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $(\kappa, \lambda) \mapsto \kappa\lambda$ του \mathbb{K} (τον οποίον για την περίπτωση θεωρούμε ως εξωτερική πράξη), ικανοποιούν τα Αξιώματα του ορισμού 2.1.1 (ΝΑ ΤΟ ΔΕΙΞΕΤΕ ΣΑΝ ΑΣΚΗΣΗ). Επομένως κάθε σώμα \mathbb{K} μπορεί να θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{K} . Όπως μπορεί να



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυώνυμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 21 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

διαπιστωθεί εύκολα το μηδενικό διάνυσμα είναι ο αριθμός 0 και το αντίθετο διάνυσμα του $\kappa \in \mathbb{K}$ είναι το $-\kappa$.

Το επόμενο αποτελεί κατά κάποιο τρόπο γενίκευση του παραπάνω παραδείγματος.

Παράδειγμα 2.2.2 Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και n ένας φυσικός αριθμός ($n \geq 1$). Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο:

$$\mathbb{K}^n := \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} = \{(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \mid \kappa_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Χρησιμοποιώντας την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αριθμών στο \mathbb{K} , μπορούμε να ορίσουμε μια πράξη πρόσθεσης $+$: $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ και μια πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού \cdot : $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ στο σύνολο \mathbb{K}^n , ως εξής. Αν $\vec{a} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$, $\vec{\beta} = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{K}^n$, και $r \in \mathbb{K}$, τότε ορίζουμε:

$$\vec{a} + \vec{\beta} = (\kappa_1 + l_1, \kappa_2 + l_2, \dots, \kappa_n + l_n) \quad \text{και} \quad r \cdot \vec{\kappa} = (r\kappa_1, r\kappa_2, \dots, r\kappa_n).$$

Τότε η τριάδα $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα \mathbb{K} . Όπως μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα το μηδενικό διάνυσμα είναι $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ και επιπρόσθετα το αντίθετο του διανύσματος $\vec{a} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$ είναι το διάνυσμα $-\vec{a} = (-\kappa_1, -\kappa_2, \dots, -\kappa_n)$. Για παράδειγμα ας αποδείξουμε ότι ισχύει το Αξίωμα **(ΔX5)**. Έστω $r, s \in \mathbb{K}$ και $\vec{a} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{K}^n$. Τότε:

$$\begin{aligned} (r+s) \cdot \vec{a} &= (r+s) \cdot (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) = \\ &((r+s)\kappa_1, (r+s)\kappa_2, \dots, (r+s)\kappa_n) = (r\kappa_1 + s\kappa_1, r\kappa_2 + s\kappa_2, \dots, r\kappa_n + s\kappa_n) = \\ &(r\kappa_1, r\kappa_2, \dots, r\kappa_n) + (s\kappa_1, s\kappa_2, \dots, s\kappa_n) = \\ &r \cdot (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) + s \cdot (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 22 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Άσκηση 2.2.3

Επαληθεύστε τα υπόλοιπα αξιώματα στο Παράδειγμα 2.2.2.

Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι ένα σύνολο μπορεί να είναι διανυσματικός χώρος πάνω από δύο διαφορετικά σώματα.

Παράδειγμα 2.2.4 Στο Παράδειγμα 2.2.1 είδαμε ότι κάθε σώμα είναι διανυσματικός χώρος πάνω από τον εαυτό του. Έτσι το σώμα \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{C} με πράξεις αυτές που ορίστηκαν στο Παράδειγμα 2.2.1. Διατηρώντας την πράξη της πρόσθεσης $+$, ορίζουμε έναν βαθμωτό πολλαπλασιασμό $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ως εξής. Αν $r \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C}$, τότε $r \cdot z = rz$. Δηλαδή αν $z = a + bi$, τότε $r \cdot z = ra + rbi$. Τότε είναι εύκολο να δείχθει ότι η τριάδα $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{R} (ΔΕΙΞΤΕ ΤΟ ΣΑΝ ΑΣΚΗΣΗ).

Σχόλιο 2.2.5 Ταυτίζοντας το σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών με το σύνολο \mathbb{R}^2 , μέσω της 1-1 και επί απεικόνισης $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία στέλνει τον μιγαδικό αριθμό $z = a + bi$ στο ζεύγος πραγματικών αριθμών (a, b) , είναι φανερό ότι η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός στα σύνολα \mathbb{C} και \mathbb{R}^2 αντιστοιχούν με κανονικό τρόπο, και επομένως μπορούμε να “ταυτίσουμε” το \mathbb{C} με το \mathbb{R}^2 σαν διανυσματικούς χώρους. Θα δούμε αργότερα μια πιο αυστηρή διατύπωση αυτού του ισχυρισμού.

Θα δούμε τώρα μια γενίκευση του Παραδείγματος 2.2.2.

Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ είναι n το πλήθος διανυσματικοί χώροι πάνω από το ίδιο σώμα \mathbb{K} . Συμβολίζουμε με τα ίδια σύμβολα τις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού στους διανυσματικούς χώρους \mathcal{V}_i . Αυτή η σύμβαση δεν θα μας δημιουργήσει σύγχυση, καθώς θα είναι φανερό από τα συμφραζόμενα σε ποιόν διανυσματικό χώρο θα αναφερόμαστε.

Θεωρούμε τώρα το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$:

$$\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_n := \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \mid \bar{x}_i \in \mathcal{V}_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

στο οποίο ορίζουμε νέα πράξη πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως εξής:



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 23 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

1. Πρόσθεση: Αν $a = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ και $\beta = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$ είναι δύο στοιχεία του $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_n$, τότε:

$$a + \beta := (\bar{x}_1 + \bar{y}_1, \bar{x}_2 + \bar{y}_2, \dots, \bar{x}_n + \bar{y}_n) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_n.$$

2. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: Αν $a = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_n$ και $k \in \mathbb{K}$, τότε:

$$k \cdot a := (k \cdot \bar{x}_1, k \cdot \bar{x}_2, \dots, k \cdot \bar{x}_n) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_n.$$

Αν και χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για τις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού στα σύνολα $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ και $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_n$ δεν θα δημιουργείται σύγχυση καθώς θα είναι φανερό κάθε φορά σε ποιά σύνολα αναφέρονται οι πράξεις.

Θεώρημα 2.2.6 Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ είναι n το πλήθος διανυσματικοί χώροι πάνω από το ίδιο σώμα \mathbb{K} . Τότε εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, το καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_n$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{K} . **Απόδειξη**

Παράδειγμα 2.2.7 1. Διαλέγοντας $\mathcal{V}_i = \mathbb{K}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ στο Θεώρημα 2.2.6, έχουμε το παράδειγμα 2.2.2.

2. Αν \mathcal{V} είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα \mathbb{K} , τότε διαλέγοντας $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ στο Θεώρημα 2.2.6, θα έχουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}$ του \mathcal{V} με τον εαυτό του n φορές, είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathcal{V} .

3. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους \mathbb{R} και \mathbb{C} πάνω από το \mathbb{R} όπως στα Παραδείγματα 2.2.1 και 2.2.4. Τότε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{R} .



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 24 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Άσκηση 2.2.8 Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και έστω $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ ένα υποσύνολο του. Υποθέτουμε ότι το \mathbb{L} περιέχει τα $0, 1$, είναι κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού του \mathbb{K} , και ισχύει ότι $l^{-1} \in \mathbb{L}$, αν $l \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$. Να δείξετε ότι περιορίζοντας τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού του \mathbb{K} στο \mathbb{L} , το σύνολο \mathbb{L} είναι ένα σώμα και το \mathbb{K} είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{L} .

Για παράδειγμα μπορούμε να διαλέξουμε σαν \mathbb{L} το σύνολο \mathbb{Q} των ρητών αριθμών και σαν \mathbb{K} είτε το σώμα \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών ή το σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών.

Δοθέντος ενός διανυσματικού χώρου \mathcal{V} πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} , υπάρχουν δύο γενικές μέθοδοι κατασκευής νέων διανυσματικών χώρων. Η μία μέθοδος μας εφοδιάζει με νέους διανυσματικούς χώρους “επεκτείνοντας” με κάποιον τρόπο τον \mathcal{V} , και η άλλη μέθοδος μας εφοδιάζει με νέους διανυσματικούς χώρους οι οποίοι είναι υποσύνολα του \mathcal{V} . Έτσι μπορούμε να πούμε ότι το Παράδειγμα 2.2.2 ανήκει στην πρώτη μέθοδο και η παραπάνω Πρόχειρη Δοκιμασία στην δεύτερη μέθοδο. Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε κυρίως με την πρώτη μέθοδο. Η δεύτερη θα αναπτυχθεί στην επόμενη ενότητα.

2.2.1. Διανυσματικοί Χώροι Συναρτήσεων

Στην παρούσα υπο-ενότητα θα δούμε κάποια παραδείγματα διανυσματικών χώρων τα στοιχεία των οποίων (δηλαδή τα διανύσματα τους) είναι συναρτήσεις. Υπενθυμίζουμε ότι αν $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ είναι δύο συναρτήσεις μεταξύ δύο συνόλων \mathcal{S}, \mathcal{T} , τότε ισχύει εξ' ορισμού: $f = g$ αν και μόνον αν $f(s) = g(s)$, $\forall s \in \mathcal{S}$. Ξεκινάμε με ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.2.9 Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο συναρτήσεων.

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \eta f \text{ είναι συνάρτηση}\}$$

Χρησιμοποιώντας την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αριθμών στο \mathbb{R} , ορίζουμε στο σύνολο $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ πράξη πρόσθεσης και βαθμοτού πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x).$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 25 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

$$\forall r \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad r \cdot f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (r \cdot f)(x) := rf(x).$$

Τότε η τριάδα $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{R} . Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ είναι η μηδενική συνάρτηση $\bar{0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως εξής: $\bar{0}(x) = 0$. Το αντίθετο διάνυσμα του διανύσματος $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ είναι η συνάρτηση $-f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως εξής: $(-f)(x) = -f(x)$.

Το Παράδειγμα 2.2.9 είναι ειδική περίπτωση ενός γενικότερου αποτελέσματος το οποίο θα συζητήσουμε τώρα.

Έστω S ένα τυχαίο σύνολο και $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} . Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων από το σύνολο S στον διανυσματικό χώρο \mathcal{V} :

$$\mathcal{F}(S, \mathcal{V}) := \{f : S \rightarrow \mathcal{V} \mid \eta \ f \ \text{είναι \textit{συνάρτηση}}\}$$

Στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ ορίζουμε μια πράξη πρόσθεσης ως εξής:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(S, \mathcal{V}), \quad f + g : S \rightarrow \mathcal{V}, \quad s \mapsto (f + g)(s) := f(s) + g(s) \quad (2.1)$$

Επίσης ορίζουμε μια πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού του σώματος \mathbb{K} στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ ως εξής:

$$\forall k \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{F}(S, \mathcal{V}), \quad k \cdot f : S \rightarrow \mathcal{V}, \quad s \mapsto (k \cdot f)(s) := k \cdot f(s). \quad (2.2)$$

Εδώ θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Στην σχέση $(f + g)(s) = f(s) + g(s)$ το σύμβολο $+$ στην αριστερή πλευρά συμβολίζει την νέα πράξη πρόσθεσης στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$, και το σύμβολο $+$ στην δεξιά πλευρά συμβολίζει την πράξη πρόσθεσης στον διανυσματικό χώρο \mathcal{V} . Παρόμοια στην σχέση $(k \cdot f)(s) = k \cdot f(s)$ το σύμβολο \cdot στην αριστερή πλευρά συμβολίζει την νέα πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$, και το σύμβολο \cdot στην δεξιά πλευρά συμβολίζει την πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού στον διανυσματικό χώρο \mathcal{V} . Δεν εισάγουμε νέα σύμβολα για τις νέες πράξεις (a) για να μην βαρύνουμε τον συμβολισμό μας, και (β) θα είναι πάντοτε φανερό από τα συμφραζόμενα για ποια πράξη πρόκειται.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε τώρα το ακόλουθο γενικό αποτέλεσμα.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

► Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

► Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

► Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

► Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 26 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Θεώρημα 2.2.10 Έστω S ένα τυχαίο σύνολο και $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} . Τότε με τις παραπάνω πράξεις 2.1 και 2.2 το σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ όλων των συναρτήσεων από το S στον \mathcal{V} είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα \mathbb{K} . Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ είναι η συνάρτηση $\bar{0} : S \rightarrow \mathcal{V}$, $s \mapsto \bar{0}(s) = \bar{0}$ και το αντίθετο διάνυσμα του $f \in \mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ είναι η συνάρτηση $-f : S \rightarrow \mathcal{V}$, $s \mapsto (-f)(s) = -f(s)$. **Απόδειξη**

Έτσι θέτοντας στο Θεώρημα 2.2.10, $S = [0, 2\pi]$ ή $S = [0, 1]$ και $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, αντίστοιχα $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, έπεται ότι τα σύνολα $\mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$, αντίστοιχα $\mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ και $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{C})$, είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το \mathbb{R} , αντίστοιχα πάνω από το \mathbb{C} .

2.2.2. Ο Χώρος των Ακολουθιών

Μια σημαντική ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 2.2.10 αποτελεί ο διανυσματικός χώρος των ακολουθιών με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} , που θα συζητήσουμε τώρα.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$ των φυσικών αριθμών μαζί με το 0, και έστω \mathbb{K} ένα σώμα.

Ορισμός 2.2.11 Μια **ακολουθία** με στοιχεία στο σώμα \mathbb{K} είναι μια συνάρτηση

$$a : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{K}$$

Έστω $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ το σύνολο των ακολουθιών με στοιχεία στο σώμα \mathbb{K} . Αν $a \in \mathbb{A}(\mathbb{K})$, τότε συμβολίζουμε την τιμή $a(n)$ της συνάρτησης $a : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{K}$ στον φυσικό αριθμό n με $a(n) := a_n$. Επειδή η συνάρτηση a καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της, έπεται ότι η a καθορίζεται πλήρως από τα στοιχεία $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$. Έτσι θα συμβολίζουμε μια ακολουθία με στοιχεία στο σώμα \mathbb{K} και ως εξής: $(a_n)_{n \geq 0}$. Τα στοιχεία a_n , $n \geq 0$, καλούνται **όροι της ακολουθίας**.

Πόρισμα 2.2.12 Το σύνολο $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ των ακολουθιών με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από το \mathbb{K} με τις ακόλουθες πράξεις:



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 27 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

1. Πρόσθεση: Αν $(a_n)_{n \geq 0}, (\beta_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{K})$, τότε:

$$(a_n)_{n \geq 0} + (\beta_n)_{n \geq 0} := (\gamma_n)_{n \geq 0}, \text{ όπου } \gamma_n := a_n + \beta_n, \forall n \geq 0.$$

2. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: Αν $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{K})$ και $k \in \mathbb{K}$, τότε:

$$k \cdot (a_n)_{n \geq 0} := (\delta_n)_{n \geq 0} \text{ όπου } \delta_n := ka_n, \forall n \geq 0.$$

Απόδειξη

2.3. Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

Θα δούμε τώρα δύο πολύ σπουδαίες ειδικές περιπτώσεις του Θεώρηματος 2.2.10 ή εναλλακτικά του Πορίσματος 2.2.12.

2.3.1. Ο Χώρος των Πινάκων

Από τώρα και στο εξής συμβολίζουμε με $\mathbb{N}_n := \{1, 2, 3, \dots, n\}$ το σύνολο των n πρώτων φυσικών αριθμών. Έστω \mathbb{K} ένα σώμα.

Ορισμός 2.3.1 Ένας $m \times n$ -πίνακας με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} είναι μια συνάρτηση

$$A : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{K}, \quad A(i, j) := a_{ij}.$$

Έτσι σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό ένας πίνακας A , δηλαδή μία συνάρτηση $A : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{K}$, καθορίζεται από τις τιμές της οι οποίες είναι οι mn το πλήθος αριθμοί $\{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}\}$ από το σώμα \mathbb{K} . Χάριν



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 28 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

ευκολίας και για καλύτερη εποπτεία, συνήθως τις τιμές αυτές τις τοποθετούμε σε μια ορθογώνια διάταξη όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ένας $m \times n$ -πίνακας πάνω από το σώμα \mathbb{K} είναι μια διάταξη mn αριθμών από το σώμα \mathbb{K} τους οποίους έχουμε διατάξει και παραστήσει όπως παραπάνω. Δηλαδή ταυτίζουμε το στοιχείο a_{ij} της διάταξης με την τιμή της απεικόνισης A στο στοιχείο $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$. Η τιμή a_{ij} καλείται **το στοιχείο του πίνακα A στην (i, j) -θέση**. Χάριν συντομίας συνήθως έναν $m \times n$ -πίνακα A τον συμβολίζουμε ως εξής: $A = (a_{ij})$, όπου $i = 1, 2, \dots, m$ και $j = 1, 2, \dots, n$.

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από τό σώμα \mathbb{K} .

Στήλες Για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$, η j -**στήλη** του πίνακα A είναι η ακόλουθη διάταξη m αριθμών:

$$A^j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A αποτελείται από n στήλες A^1, A^2, \dots, A^n κάθε μία από τις οποίες αποτελείται από m αριθμούς.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 29 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Γραμμές Για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$, η j -**γραμμή** του πίνακα A είναι η ακόλουθη διάταξη m αριθμών:

$$A_i := \left(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ij} \quad \cdots \quad a_{im} \right)$$

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A αποτελείται από m γραμμές A_1, A_2, \dots, A_m κάθε μία από τις οποίες αποτελείται από n αριθμούς.

Παρατηρούμε ότι το στοιχείο a_{ij} του πίνακα A βρίσκεται στην “τομή” της i -γραμμής με την j -στήλη.

Συμβολίζουμε με $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ το σύνολο των $m \times n$ -πινάκων με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} :

$$M_{m \times n}(\mathbb{K}) = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{K}, \forall i = 1, 2, \dots, m, \forall j = 1, 2, \dots, n\}$$

Για παράδειγμα έστω οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (-1 \quad 0 \quad 2),$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} i & \sqrt{2} \\ -1 & 1 + 2i \end{pmatrix}$$

Τότε $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $B \in M_{4 \times 2}(\mathbb{R})$, $C \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$, $D \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$, και $E \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$.

Στο σύνολο $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$ -πινάκων με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} ορίζουμε πράξη πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως εξής:



1. Πρόσθεση: Αν $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, τότε $A + B$ είναι ο $m \times n$ -πίνακας $(a_{ij} + b_{ij})$. Σχηματικά:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{2j} + b_{2j} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{ij} + b_{ij} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mj} + b_{mj} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: Αν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, και $k \in \mathbb{K}$, τότε $k \cdot A$ είναι ο $m \times n$ -πίνακας (ka_{ij}) . Σχηματικά:

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{ij} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mj} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 30 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυώνυμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 31 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Όπως και στην περίπτωση των χώρων συναρτήσεων, παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τους $m \times n$ -πίνακες ως συναρτήσεις : $\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{K}$, τότε η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός που ορίσαμε παραπάνω συμπίπτει με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό συναρτήσεων. Με βάση αυτή την παρατήρηση το ακόλουθο πόρισμα είναι άμεση απόρροια του θεωρήματος 2.2.10.

Πόρισμα 2.3.2 Το σύνολο $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$ -πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{K} . Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ είναι ο $m \times n$ -πίνακας $\mathbf{0}$ όλα τα στοιχεία του οποίου είναι ίσα με 0:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Το αντίθετο διάνυσμα του $m \times n$ -πίνακα $A = (a_{ij})$ είναι ο $m \times n$ -πίνακας $-A = (-a_{ij})$:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1j} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2j} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{ij} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mj} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Απόδειξη



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

► Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

► Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

► Διανυσματικοί Χώροι Πολυώνυμων και Πινάκων

► Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 32 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Ο πίνακας **0** καλείται ο **μηδενικός** $m \times n$ πίνακας, και αν $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, τότε ο πίνακας $-A = (-a_{ij})$ καλείται ο **αντίθετος** πίνακας του A .

Ένας $m \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **τετραγωνικός** αν $m = n$. Σπουδαίες κλάσεις τετραγωνικών πινάκων αποτελούν οι διαγώνιοι και οι βαθμωτοί πίνακες.

Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **διαγώνιος** αν $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$. Δηλαδή αν ο A είναι της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Για παράδειγμα ο **μοναδιαίος** $n \times n$ πίνακας

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 33 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

είναι διαγώνιος. Γενικά ένας διαγώνιος πίνακας A καλείται **βαθμωτός** αν είναι βαθμωτό πολλαπλασίο του μοναδιαίου: $A = kI_n$, δηλαδή αν είναι της μορφής:

$$A = kI_n = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}.$$

Θα μελετήσουμε διεξοδικότερα τον χώρο των πινάκων και τον ρόλο που διαδραματίζουν στην Γραμμική Άλγεβρα σε επόμενο Κεφάλαιο.

2.3.2. Ο Χώρος των Πολυωνύμων

Έστω $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ ο διανυσματικός χώρος των ακολουθιών με στοιχεία αριθμούς από ένα σώμα \mathbb{K} όπως αυτός ορίστηκε στην υποενότητα 2.2.2. Θεωρούμε το υποσύνολο του $\mathbb{S}(\mathbb{K})$ το οποίο αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{K})$ οι οποίες έχουν πεπερασμένο πλήθος από μη-μηδενικούς όρους. Δηλαδή:

$$\mathbb{K}[t] := \{(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{K}) \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : a_n = 0, \forall n > k\}. \quad (2.3)$$

Ορισμός 2.3.3 Μία ακολουθία $(a_n)_{n \geq 0}$ στοιχείων του σώματος \mathbb{K} η οποία έχει πεπερασμένο πλήθος από μη-μηδενικούς όρους, δηλαδή ανήκει στο υποσύνολο $\mathbb{K}[t]$ του $\mathbb{A}(\mathbb{K})$, καλείται **πολυώνυμο** πάνω από το σώμα \mathbb{K} . Τα μη-μηδενικά στοιχεία της ακολουθίας καλούνται **συντελεστές** του πολυωνύμου.

Οι ακολουθίες-πολυώνυμα που θα ορίσουμε τώρα διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο στην θεωρία πολυωνύμων.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 34 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Ορισμός 2.3.4 1. Η ακολουθία $(a_n)_{n \geq 0}$ με $a_0 = 1$ και $a_n = 0, \forall n \neq 0$, η οποία προφανώς ανήκει στο $\mathbb{K}[t]$, συμβολίζεται με t^0 και καλείται **μοναδιαίο πολυώνυμο**. Δηλαδή το t^0 είναι το πολυώνυμο:

$$t^0 := (1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots) \in \mathbb{K}[t]$$

2. Η ακολουθία $(a_n)_{n \geq 0}$ με $a_1 = 1$ και $a_n = 0, \forall n \neq 1$, η οποία προφανώς ανήκει στο $\mathbb{K}[t]$, θα συμβολίζεται με t και καλείται **μεταβλητή ή απροσδιόριστη**. Δηλαδή η t είναι το πολυώνυμο:

$$t := (0, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots) \in \mathbb{K}[t]$$

3. Αν $m \geq 1$, η **m -οστή δύναμη** t^m της μεταβλητής t ορίζεται να είναι το πολυώνυμο $(a_n)_{n \geq 0}$ με $a_m = 1$ και $a_n = 0, \forall n \neq m$. Δηλαδή:

$$t^m := (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \mathbb{K}[t]$$

όπου το 1 εμφανίζεται σαν ο όρος της ακολουθίας στην $m + 1$ θέση.

Είναι φανερό ότι αν δύο ακολουθίες $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ ανήκουν στο υποσύνολο $\mathbb{K}[t]$, δηλαδή είναι πολυώνυμα, τότε και το άθροισμα τους $(a_n)_{n \geq 0} + (b_n)_{n \geq 0}$ ανήκει στο $\mathbb{K}[t]$, και άρα είναι πολυώνυμο. Πραγματικά αν $a_n = 0, \forall n > k$ και $b_n = 0, \forall n > l$, τότε $a_n + b_n = 0, \forall n > \max\{k, l\}$. Παρόμοια αν η ακολουθία $(a_n)_{n \geq 0}$ ανήκει στο υποσύνολο $\mathbb{K}[t]$ και $k \in \mathbb{K}$ είναι ένα στοιχείο του \mathbb{K} , τότε και η ακολουθία $k \cdot (a_n)_{n \geq 0} = (ka_n)_{n \geq 0}$ ανήκει στο $\mathbb{K}[t]$. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο υποσύνολο $\mathbb{K}[t]$, περιορίζοντας τις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού του διανυσματικού χώρου $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ στο υποσύνολο του $\mathbb{K}[t]$:

$$\forall (a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}[t] : (a_n)_{n \geq 0} + (b_n)_{n \geq 0} := (a_n + b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}[t] \quad (2.4)$$

$$\forall (a_n)_{n \geq 0}, \forall k \in \mathbb{K} : k \cdot (a_n)_{n \geq 0} := (ka_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}[t]. \quad (2.5)$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυώνυμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 35 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Χρησιμοποιώντας ότι το σύνολο $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος, είναι εύκολο να δούμε ότι το σύνολο $\mathbb{K}[t]$ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις 2.4, 2.5 είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα \mathbb{K} . 'Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}[t]$ καλείται **ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με συντελεστές από το σώμα \mathbb{K}** . Προφανώς το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{K}[t]$ είναι το πολυώνυμο $(a_n)_{n \geq 0}$ με $a_n = 0, \forall n \geq 0$ το οποίο καλείται **μηδενικό πολυώνυμο**. Το αντίθετο διάνυσμα του πολυωνύμου $(a_n)_{n \geq 0}$ είναι το πολυώνυμο $(-a_n)_{n \geq 0}$.

Συμβολισμός 2.3.5 Από τώρα και στο εξής το μοναδιαίο πολυώνυμο, δηλαδή το πολυώνυμο $t^0 := (1, 0, 0, \dots)$, θα το συμβολίζουμε απλά με 1. Το μηδενικό πολυώνυμο θα το συμβολίζουμε απλά με 0.

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $(k, 0, 0, \dots)$ είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του μοναδιαίου πολυωνυμου: $(k, 0, 0, \dots) = k \cdot (1, 0, 0, \dots) = k \cdot 1$. Ένα πολυώνυμο καλείται **σταθερό** αν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του μοναδιαίου, δηλαδή είναι της μορφής $(k, 0, 0, \dots)$, όπου $k \in \mathbb{K}$.

Το γεγονός ότι για ένα πολυώνυμο $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}[t]$ υπάρχει ένας αριθμός $m \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $a_n = 0, \forall n > m$, μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια του βαθμού ενός πολυωνύμου.

Ορισμός 2.3.6 Έστω $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}[t]$ ένα μη-μηδενικό πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα \mathbb{K} . Ο **βαθμός** του $(a_n)_{n \geq 0}$ ορίζεται να είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός n για τον οποίο ισχύει $a_n \neq 0$ και συμβολίζεται με $\deg(a_n)_{n \geq 0}$. Δηλαδή:

$$\deg(a_n)_{n \geq 0} = \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

Στο μηδενικό πολυώνυμο δεν επισυνάπτουμε βαθμό.

Παράδειγμα 2.3.7 1. Το πολυώνυμο t^n έχει βαθμό n : $\deg t^n = n$.

2. Το πολυώνυμο $(k, 0, 0, \dots)$, όπου $k \in \mathbb{K}$, έχει βαθμό 0.



3. Αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, το πολυώνυμο $(1, 0, 4, \sqrt{2}, 3, 0, 0, \dots)$, έχει βαθμό 4.

Σχόλιο 2.3.8 Μπορούμε να ορίσουμε και μια άλλη εσωτερική πράξη στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}[t]$ η οποία είναι γνωστή ως **πολλαπλασιασμός ή γινόμενο πολυωνύμων**. Πραγματικά έστω $(a_n)_{n \geq 0}$ και $(b_n)_{n \geq 0}$ δύο πολυώνυμα με συντελεστές από το σώμα \mathbb{K} . Το γινόμενο τους $(a_n)_{n \geq 0} \cdot (b_n)_{n \geq 0}$ ορίζεται να είναι η ακολουθία

$$(c_n)_{n \geq 0} \quad \text{όπου} \quad c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Περισσότερο αναλυτικά:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ &\vdots \\ c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Η ακολουθία $(c_n)_{n \geq 0} = (a_n)_{n \geq 0} \cdot (b_n)_{n \geq 0}$ είναι πολυώνυμο. Πραγματικά αν $a_n = 0, \forall n > k$ και $b_n = 0, \forall n > l$, τότε όπως είναι φανερό από την τελευταία σχέση όλοι οι όροι της ακολουθίας $(c_n)_{n \geq 0}$ μηδενίζονται μετά τον όρο που βρίσκεται στην $k + l$ θέση.

Επίσης είναι εύκολο να δείξει ότι η m -οστή δύναμη t^m της μεταβλητής t δεν είναι παρά το γινόμενο της $t \cdot t \cdot t \cdot \dots \cdot t$ m φορές. (ΝΑ ΤΟ ΔΕΙΞΕΤΕ ΣΑΝ ΑΣΚΗΣΗ).

Ο συνηθισμένος συμβολισμός πολυωνύμων

Θα δούμε τώρα πως ο παραπάνω ορισμός πολυωνύμων οδηγεί στον συνηθισμένο (διαιθητικό) ορισμό και συμβολισμό πολυωνύμων.

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 36 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 37 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Έστω $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}[t]$ ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα \mathbb{K} . Τότε σύμφωνα με τον ορισμό 2.3.3, υπάρχει $m \geq 0$ έτσι ώστε $a_n = 0, \forall n > m$. Επομένως το πολυώνυμο $(a_n)_{n \geq 0}$ έχει την μορφή:

$$(a_n)_{n \geq 0} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m, 0, 0, \dots),$$

Χρησιμοποιώντας την μεταβλητή t , και τον ορισμό της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}[t]$ μπορούμε να γράψουμε το πολυώνυμο $(a_n)_{n \geq 0}$ διαδοχικά ως εξής:

$$\begin{aligned} (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m, 0, 0, \dots) &= (a_0, 0, 0, \dots) \\ &+ (0, a_1, 0, \dots) \\ &+ (0, 0, a_2, 0, \dots) \\ &\dots \dots \dots \\ &+ (0, 0, \dots, 0, a_{m-1}, 0, \dots) \\ &+ (0, 0, \dots, 0, 0, a_m, 0, \dots) \\ &= a_0 \cdot (1, 0, 0, \dots) \\ &+ a_1 \cdot (0, 1, 0, \dots) \\ &+ a_2 \cdot (0, 0, 1, 0, \dots) \\ &\dots \dots \dots \\ &+ a_{m-1} \cdot (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\ &+ a_m \cdot (0, 0, \dots, 0, 0, 1, 0, \dots). \end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε

$$(a_n)_{n \geq 0} = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_{m-1} \cdot t^{m-1} + a_m \cdot t^m \quad (2.6)$$

Η σχέση 2.6 δείχνει ότι ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα \mathbb{K} είναι μια τυπική έκφραση της μορφής $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_{m-1} \cdot t^{m-1} + a_m \cdot t^m$ όπου τα a_i



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυώνυμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 38 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

είναι αριθμοί από το σώμα \mathbb{K} και m είναι κάποιος φυσικός αριθμός. Δηλαδή έχουμε την γνωστό μας διαισθητικό ορισμό και τρόπο γραφής πολυωνύμου. Η παραπάνω ανάλυση όμως είναι αναγκαία για τον μαθηματικά ακριβή ορισμό τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια. Χάριν απλότητας και ακολουθώντας το οικείο συμβολισμό, από τώρα και στο εξής ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα \mathbb{K} θα συμβολίζεται ως εξής:

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{m-1} t^{m-1} + a_m t^m \quad (2.7)$$

Δηλαδή θα παραλείπουμε το σύμβολο \cdot του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Επιπρόσθετα το γινόμενο δύο πολυωνύμων $P(t)$ και $Q(t)$ θα συμβολίζεται με $P(t)Q(t)$.

Άσκηση 2.3.9 Να δείξετε ότι αν $P(t), Q(t) \in \mathbb{K}[t]$, τότε:

1. $\deg(P(t) + Q(t)) \leq \min\{\deg P(t), \deg Q(t)\}$.
2. $\deg P(t) = \deg(-P(t))$.
3. $\deg P(t) = 0$ αν-ν το $P(t)$ είναι ένα σταθερό μη-μηδενικό πολυώνυμο.
4. $\deg(P(t)Q(t)) = \deg P(t) + \deg Q(t)$.

2.4. Ασκήσεις

Άσκηση 2.4.1 Έστω $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε νέες πράξεις ως εξής:

- Πρόσθεση: $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ : x \oplus y := xy$ (ο συνηθισμένος πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών).



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 39 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

- **Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός:** $\forall r \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+ : r \oplus x := x^r$.

Να δείξετε ότι με τις παραπάνω πράξεις, το σύνολο \mathbb{R}_+ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{R} .

Άσκηση 2.4.2 Εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού όπως αυτές ορίστηκαν στους διανυσματικούς χώρους \mathbb{R}^2 και \mathbb{R}^3 , είναι τα παρακάτω σύνολα διανυσματικοί χώροι; Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

1. $\mathcal{V}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.

(α) Σωστό

(β) Λάθος

2. $\mathcal{V}_2 = \{(x, 2x + 1) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(α) Σωστό

(β) Λάθος

3. $\mathcal{V}_3 = \{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(α) Σωστό

(β) Λάθος

4. $\mathcal{V}_4 = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(α) Σωστό

(β) Λάθος

5. $\mathcal{V}_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}, z = 1\}$.

(α) Σωστό

(β) Λάθος

6. $\mathcal{V}_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.

(α) Σωστό

(β) Λάθος

7. $\mathcal{V}_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\}$.

(α) Σωστό

(β) Λάθος

8. $\mathcal{V}_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$.

(α) Σωστό

(β) Λάθος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

- ▶ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες
- ▶ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων
- ▶ Διανυσματικοί Χώροι Πολυνύμων και Πινάκων

▶ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 40 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Άσκηση 2.4.3 Να δείξετε ότι με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού πινάκων, το σύνολο \mathcal{V} όλων των 3×3 πινάκων πραγματικών αριθμών της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$, είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{R} .



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 41 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Κεφάλαιο 3

Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

Το παρόν Κεφάλαιο θα αφιερωθεί στην μελέτη των ιδιοτήτων διανυσματικών χώρων οι οποίες κληρονομούνται από υποσύνολά τους. Τα υποσύνολα αυτά, τα οποία καλούνται υπόχωροι, είναι επίσης διανυσματικοί χώροι με πράξεις τους περιορισμούς των πράξεων του διανυσματικού χώρου. Επίσης θα μελετήσουμε σημαντικές κατασκευές οι οποίες θα μας επιτρέψουν να παράγουμε νέους διανυσματικούς χώρους από ήδη γνωστούς.

3.1. Διανυσματικοί Υπόχωροι

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε κληρονομικές ιδιότητες διανυσματικών χώρων καθώς και μια άλλη μέθοδο με την οποία μπορούμε να παράγουμε νέους διανυσματικούς χώρους.

Συμβολισμός 3.1.1 Καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της ενότητας σταθεροποιούμε έναν δια-



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωματά Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων
- Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 42 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

νυσματικό χώρο \mathcal{V} πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} . Οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του \mathcal{V} , θα συμβολίζονται πάντα με $+$ και \cdot . Τέλος το μηδενικό διάνυσμα του \mathcal{V} θα συμβολίζεται με $\vec{0}$.

Χάρην ευκολίας όμως από τώρα και στο εξής θα παραλείπουμε το σύμβολο \cdot του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Έτσι ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός του αριθμού $k \in \mathbb{K}$ με το διάνυσμα \vec{x} θα συμβολίζεται με $k\vec{x}$. Δηλαδή: $k \cdot \vec{x} := k\vec{x}$.

Θα χρησιμοποιούμε τα αξιώματα και τις βασικές ιδιότητες διανυσματικών χώρων που αποδείξαμε στις προηγούμενες ενότητες χωρίς περαιτέρω αναφορά.

Έστω $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ ένα μη-κενό υποσύνολο του \mathcal{V} , και έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{W}$ και $k \in \mathbb{K}$. Τότε δεν είναι απαραίτητο να ισχύει ότι το διάνυσμα $\vec{x} + \vec{y}$ ή το διάνυσμα $k\vec{x}$ ανήκει στο \mathcal{W} . Δηλαδή δεν είναι απαραίτητο το υποσύνολο \mathcal{W} να είναι κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του \mathcal{V} .

Παράδειγμα 3.1.2 Έστω \mathbb{R}^2 ο διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{R} των 2-άδων πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε το ακόλουθα υποσύνολα του \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{W}_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}, \quad \mathcal{W}_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0\}$$

Τότε είναι φανερό ότι τα διανύσματα $\vec{x} = (1, 0)$ και $\vec{y} = (0, 1)$ ανήκουν στον \mathcal{W}_1 , αλλά το διάνυσμα $\vec{x} + \vec{y} = (1, 1)$ δεν ανήκει στο \mathcal{W}_1 . Επίσης το διάνυσμα $\vec{z} = (1, 1)$ ανήκει στο \mathcal{W}_2 , αλλά το διάνυσμα $-\vec{x} = (-1, -1)$ δεν ανήκει στο \mathcal{W}_2 .

Μη-κενά υποσύνολα ενός διανυσματικού χώρου τα οποία είναι κλειστά στην πρόσθεση και στον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, όπως θα δούμε, διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο στην θεωρία των διανυσματικών χώρων. Έτσι προκύπτει φυσιολογικά ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 3.1.3 Έστω \mathcal{W} ένα υποσύνολο του \mathcal{V} . Το \mathcal{W} καλείται **υπόχωρος** του \mathcal{V} αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.

1. $\mathcal{W} \neq \emptyset$.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

► Διανυσματικοί Υπόχωροι

- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων
- Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 43 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

2. Το \mathcal{W} είναι κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης του \mathcal{V} . Δηλαδή:

$$\boxed{\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{W} : \bar{x} + \bar{y} \in \mathcal{W}}$$

3. Το \mathcal{W} είναι κλειστό στην πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του \mathcal{V} . Δηλαδή:

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{K}, \forall \bar{x} \in \mathcal{W} : k \cdot \bar{x} \in \mathcal{W}}$$

Πρίν περάσουμε να δούμε παραδείγματα υπόχωρων, θα αποδείξουμε κάποιες βασικές ιδιότητες που κληρονομούν από τους υπερκειμένους διανυσματικούς χώρους, και οι οποίες είναι σχετικά άμεσες συνέπειες του ορισμού **3.1.3**.

Λήμμα 3.1.4 Έστω \mathcal{W} ένας υπόχωρος του \mathcal{V} .

1. $\vec{0} \in \mathcal{W}$. Δηλαδή το μηδενικό διάνυσμα του \mathcal{V} ανήκει στον \mathcal{W} .

2. Αν $\bar{x} \in \mathcal{W}$, τότε $-\bar{x} \in \mathcal{W}$. Δηλαδή ο \mathcal{W} περιέχει το αντίθετο κάθε διανύσματος του.

Απόδειξη

Άσκηση 3.1.5 1. Να δείξετε ότι ένα μη κενό υποσύνολο \mathcal{W} του \mathcal{V} είναι υπόχωρος του \mathcal{V} αν-ν $k\bar{x} + l\bar{y} \in \mathcal{W}$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{W}$ και $\forall k, l \in \mathbb{K}$.

2. Τι μορφή έχουν οι υπόχωροι ενός σώματος \mathbb{K} όταν το \mathbb{K} θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος πάνω από τον εαυτό του ;

Οι συνθήκες 2. και 3. του ορισμού **3.1.3** μας επιτρέπουν να περιορίσουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του \mathcal{V} σε κάθε υπόχωρο $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Έτσι ο \mathcal{W} είναι εφοδιασμένος με μια πράξη πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς αν με αυτές τις πράξεις ο \mathcal{W} είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{K} . Αυτό πράγματι συμβαίνει :



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

► Διανυσματικοί Υπόχωροι

- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων
- Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 44 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Λήμμα 3.1.6 Έστω \mathcal{W} ένας υπόχωρος του \mathcal{V} . Τότε με τις πράξεις του \mathcal{V} ο υπόχωρος \mathcal{W} είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα \mathbb{K} . Το μηδενικό διάνυσμα του \mathcal{W} είναι το μηδενικό διάνυσμα του \mathcal{V} και το αντίθετο ενός διανύσματος \vec{x} του \mathcal{W} είναι το αντίθετο του \vec{x} όταν αυτό θεωρηθεί σαν διάνυσμα του \mathcal{V} . **Απόδειξη**

Δοθέντος του διανυσματικού χώρου \mathcal{V} , τίθεται το ερώτημα αν υπάρχουν πάντοτε υπόχωροι του \mathcal{V} , και αν η απάντηση είναι ναι πως μπορούμε να βρούμε υπόχωρους του \mathcal{V} ; Μια πρώτη απάντηση δίνεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1.7 1. Όλος ο χώρος \mathcal{V} είναι υπόχωρος του \mathcal{V} .

2. Το σύνολο $\{\vec{0}\}$ είναι υπόχωρος του \mathcal{V} .

3. Για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{V}$, το υποσύνολο $\langle \vec{x} \rangle := \{k\vec{x} \in \mathcal{V} \mid k \in \mathbb{K}\}$ είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{V} .

Απόδειξη

Σχόλιο 3.1.8 Ο υπόχωρος $\{\vec{0}\}$ καλείται ο **μηδενικός υπόχωρος** του \mathcal{V} . Ο υπόχωρος $\{\vec{0}\}$ καλείται και **τετριμμένος υπόχωρος** του \mathcal{V} . Ένας υπόχωρος \mathcal{W} του \mathcal{V} καλείται **γνήσιος υπόχωρος**, αν δεν συμπίπτει με τον \mathcal{V} : $\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{V}$.

Παράδειγμα 3.1.9 Στο παράδειγμα αυτό θα περιγράψουμε όλους τους υπόχωρους του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^2 πάνω από το \mathbb{R} .

Έστω \mathcal{W} ένας υπόχωρος του \mathbb{R}^2 με $\mathcal{W} \neq \{\vec{0}\}$. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathcal{W}$ με $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.3, $r\vec{x} \in \mathcal{W}$, $\forall r \in \mathbb{R}$. Τότε θέτοντας, όπως και στην Πρόταση 3.1.7, $\langle \vec{x} \rangle := \{r\vec{x} \mid r \in \mathbb{R}\}$, έπεται ότι $\langle \vec{x} \rangle \subseteq \mathcal{W}$. Γεωμετρικά το σύνολο $\langle \vec{x} \rangle$ είναι μία ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο \mathbb{R}^2 η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων $\vec{0} = (0, 0)$. Υποθέτουμε ότι $\langle \vec{x} \rangle \neq \mathcal{W}$. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathcal{W}$ με $\vec{y} \notin \langle \vec{x} \rangle$. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει:

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0 \quad (*)$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων
- Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 45 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Πραγματικά υποθέτουμε ότι $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ και θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Επειδή το διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$, έπεται ότι είτε $x_1 \neq 0$ ή $x_2 \neq 0$. Αν ισχύει $x_1 \neq 0$, τότε επειδή δεχθήκαμε ότι $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$, θα έχουμε $y_2 = \frac{y_1}{x_1} x_2$ και επομένως $\vec{y} = (y_1, y_2) = \frac{y_1}{x_1} (x_1, x_2) \in \langle \vec{x} \rangle$ το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση μας. Αν ισχύει $x_2 \neq 0$, τότε εργαζόμενοι παρόμοια θα έχουμε $\vec{y} = (y_1, y_2) = \frac{y_2}{x_2} (x_1, x_2) \in \langle \vec{x} \rangle$ το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση. Επομένως η σχέση (*) ισχύει. Θα δείξουμε τώρα ότι η σχέση (*) έχει σαν συνέπεια ότι $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$. Πραγματικά: έστω $\vec{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ ένα τυχόν διάνυσμα. Τότε εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ισχύει η σχέση (ΝΑ ΤΟ ΔΕΙΞΕΤΕ ΣΑΝ ΑΣΚΗΣΗ):

$$\vec{z} = (z_1, z_2) = k\vec{x} + l\vec{y} = k(x_1, x_2) + l(y_1, y_2), \quad (**)$$

$$\text{όπου: } k = \frac{z_1 y_2 - z_2 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \quad \text{και} \quad l = \frac{x_1 z_2 - x_2 z_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

Επειδή $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{W}$ και ο \mathcal{W} είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^2 , από τον Ορισμό 3.1.3 έπεται ότι (δες και την Πρόχειρη Δοκιμασία 3.1.5): $\vec{z} = k\vec{x} + l\vec{y} \in \mathcal{W}$. Επομένως το τυχόν διάνυσμα \vec{z} του \mathbb{R}^2 ανήκει στο υποσύνολο \mathcal{W} και άρα $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$. Σ' αυτό το συμπέρασμα καταλήξαμε υποθέτοντας ότι $\langle \vec{x} \rangle \neq \mathcal{W}$. Επομένως είτε $\mathcal{W} = \{\vec{0}\}$, ή $\mathcal{W} = \langle \vec{x} \rangle$ ή $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$. Αντίστροφα από την Πρόταση 3.1.7 έχουμε ότι τα σύνολα $\{\vec{0}\}, \mathbb{R}^2$ και τα σύνολα της μορφής $\langle \vec{x} \rangle$ είναι υπόχωροι του \mathbb{R}^2 . Συνοψίζοντας:

$$\mathcal{W} \text{ είναι υπόχωρος του } \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \mathcal{W} = \{\vec{0}\} \text{ ή } \mathcal{W} = \mathbb{R}^2 \text{ ή } \mathcal{W} = \langle \vec{x} \rangle, \text{ όπου } \vec{0} \neq \vec{x} \in \mathcal{W}$$

Παράδειγμα 3.1.10 Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ καλείται **άρτια** αν $f(-x) = f(x)$ και **περιττή** αν $f(-x) = -f(x)$.

Τότε το σύνολο $\mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των άρτιων και το σύνολο $\mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των περιττών συναρτήσεων είναι υπόχωροι του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Θα δούμε τώρα μια μέθοδο κατασκευής υπόχωρων ο οποίος καλύπτει πολλά ενδιαφέροντα παραδείγματα.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων
- Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 46 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Παράδειγμα 3.1.11 Έστω \mathcal{V} ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα \mathbb{K} και έστω k_1, k_2, \dots, k_n σταθεροί αριθμοί από το σώμα \mathbb{K} . Τότε το σύνολο:

$$\mathcal{W} := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0\}$$

είναι ένας υπόχωρος του \mathbb{K}^n . Πραγματικά:

Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ προφανώς ανήκει στο \mathcal{W} . Αν $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ είναι δύο στοιχεία του \mathcal{W} , τότε $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0$ και $k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n = 0$. Προσθέτοντας κατά μέλη θα έχουμε $0 = (k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n) + (k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n) = k_1(a_1 + b_1) + k_2(a_2 + b_2) + \dots + k_n(a_n + b_n)$. Άρα το διάνυσμα $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ ανήκει στο \mathcal{W} . Τέλος αν $r \in \mathbb{K}$, και $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{W}$, τότε για το διάνυσμα $r\vec{a} = (ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$ του \mathbb{K}^n , θα έχουμε: $k_1(ra_1) + k_2(ra_2) + \dots + k_n(ra_n) = (k_1 r)a_1 + (k_2 r)a_2 + \dots + (k_n r)a_n = r(k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n) = r \cdot 0 = 0$. Άρα $r\vec{a} \in \mathcal{W}$. Επομένως το \mathcal{W} είναι υπόχωρος του \mathbb{K}^n .

Σχόλιο 3.1.12 Ο υπόχωρος του Παραδείγματος 3.1.11 περιγράφει το σύνολο λύσεων της εξίσωσης:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n = 0 \quad (*)$$

Δηλαδή το σύνολο των n -αδων αριθμών (a_1, a_2, \dots, a_n) από το σώμα \mathbb{K} οι οποίες ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. Μια εξίσωση της μορφής (*) καλείται **ομογενής γραμμική εξίσωση** n αγνώστων x_1, x_2, \dots, x_n με (σταθερούς) συντελεστές k_1, k_2, \dots, k_n από το σώμα \mathbb{K} .

Έτσι για παράδειγμα το σύνολο

$$\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2a_1 - 3a_2 + 8a_3 + a_4 = 0\}$$

είναι ένας υπόχωρος του \mathbb{R}^4 ο οποίος μας περιγράφει το σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης $2x_1 - 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 0$.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων
- Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 47 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Παράδειγμα 3.1.13 Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}[t]$ των πολυωνύμων πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} , και έστω $n \geq 0$. Τότε το υποσύνολο $\mathbb{K}_n[t]$ των πολυωνύμων με βαθμό $\leq n$, είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}[t]$.

Θα κλείσουμε την παρούσα ενότητα με κάποια παραδείγματα υπόχωρων του διανυσματικού χώρου $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} .

Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας.

1. Ο πίνακας A καλείται **συμμετρικός** αν-ν $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j, \leq n$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{S}_{n \times n}(\mathbb{K})$ το υποσύνολο όλων των συμμετρικών πινάκων:

$$\mathbb{S}_{n \times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i, j, \leq n\}$$

2. Ο πίνακας A καλείται **αντισυμμετρικός** αν-ν $a_{ji} = -a_{ij}$, $1 \leq i, j, \leq n$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{A}_{n \times n}(\mathbb{K})$ το υποσύνολο όλων των αντισυμμετρικών πινάκων:

$$\mathbb{A}_{n \times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ji} = -a_{ij}, 1 \leq i, j, \leq n\}$$

3. Ο πίνακας A καλείται **άνω τριγωνικός** αν-ν $a_{ij} = 0$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ με $i > j$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{AT}_{n \times n}(\mathbb{K})$ το υποσύνολο όλων των άνω τριγωνικών πινάκων:

$$\mathbb{AT}_{n \times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0, \forall i, j = 1, \dots, n : i > j\}$$

4. Ο πίνακας A καλείται **κάτω τριγωνικός** αν-ν $a_{ij} = 0$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ με $i < j$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{KT}_{n \times n}(\mathbb{K})$ το υποσύνολο όλων των κάτω τριγωνικών πινάκων:

$$\mathbb{KT}_{n \times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0, \forall i, j = 1, \dots, n : i < j\}$$

5. Συμβολίζουμε με $\mathbb{D}_{n \times n}(\mathbb{K})$ τα υποσύνολο των διαγωνίων πινάκων και με $\mathbb{B}_{n \times n}(\mathbb{K})$ τα υποσύνολο των βαθμωτών πινάκων:

$$\mathbb{D}_{n \times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0 \forall i, j = 1, \dots, n : i \neq j\}$$

$$\mathbb{B}_{n \times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{D}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ii} = a_{ij} \forall i, j = 1, \dots, n\}$$

όπως αυτοί ορίστηκαν στην ενότητα 2.3

Για παράδειγμα για τους πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 4 & 2 & 8 \\ -5 & 8 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

έχουμε: $A \in \mathbb{S}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{A}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{AT}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, $D \in \mathbb{KT}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Άσκηση 3.1.14 Να δείξετε ότι τα υποσύνολα

$$\mathbb{D}_{n \times n}(\mathbb{K}), \mathbb{B}_{n \times n}(\mathbb{K}), \mathbb{S}_{n \times n}(\mathbb{K}), \mathbb{A}_{n \times n}(\mathbb{K}), \mathbb{AT}_{n \times n}(\mathbb{K}), \mathbb{KT}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

είναι υπόχωροι του $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

3.2. Γραμμικοί Συνδυασμοί

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε έναν σημαντικό τρόπο κατασκευής υπόχωρων του \mathcal{V} . Όπως και πριν από τώρα σταθεροποιούμε έναν διανυσματικό χώρο \mathcal{V} πάνω από το σώμα \mathbb{K} ,

Πρώτα όμως χρειαζόμαστε έναν ορισμό.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 48 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 49 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Ορισμός 3.2.1 Έστω $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο διανυσμάτων του χώρου \mathcal{V} . **Γραμμικός συνδυασμός** του συνόλου S ή των διανυσμάτων $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, καλείται κάθε διάνυσμα του \mathcal{V} το οποίο είναι της μορφής:

$$k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_n \bar{x}_n, \quad \text{όπου } k_i \in \mathbb{K}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Τα στοιχεία k_i καλούνται **συντελεστές** του γραμμικού συνδυασμού. Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών του συνόλου S ή των διανυσμάτων $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, συμβολίζεται ως εξής: $\langle S \rangle$ ή $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \rangle$. Δηλαδή:

$$\langle S \rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \rangle := \{k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_n \bar{x}_n \mid k_i \in \mathbb{K}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

Παράδειγμα 3.2.2 Στον διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^3 πάνω από το \mathbb{R} , το διάνυσμα

$$3(1, 0, 0) + \sqrt{2}(4, 3, 1) - 7(6, 1, 0) + (7, 8, 9)$$

είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\bar{x}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{x}_2 = (4, 3, 1)$, $\bar{x}_3 = (6, 1, 0)$, $\bar{x}_4 = (7, 8, 9)$ με αντίστοιχους συντελεστές $k_1 = 3$, $k_2 = \sqrt{2}$, $k_3 = -7$, $k_4 = 1$. Παρόμοια στον διανυσματικό χώρο \mathbb{C}^2 πάνω από το \mathbb{C} , το διάνυσμα $i(2, 2) - 8(3 + 5i, -4) + \sqrt{7}(1, -1 + i)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\bar{x}_1 = (2, 2)$, $\bar{x}_2 = (3 + 5i, -4)$, $\bar{x}_3 = (1, -1 + i)$, με αντίστοιχους συντελεστές $k_1 = i$, $k_2 = -8$ και $k_3 = \sqrt{7}$.

Σχόλιο 3.2.3 Μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του γραμμικού συνδυασμού άπειρου πλήθους διανυσμάτων ως εξής. Έστω $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}, \dots, \}$ ένα άπειρο σύνολο διανυσμάτων του \mathcal{V} . Ένας **γραμμικός συνδυασμός** του συνόλου S ή των διανυσμάτων $\{\bar{x}_i\}$ είναι κάθε διάνυσμα του \mathcal{V} της μορφής:

$$k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_n \bar{x}_n + k_{n+1} \bar{x}_{n+1} + \dots$$

στο οποίο υποθέτουμε ότι το πλήθος των μη-μηδενικών συντελεστών $k_i \in \mathbb{K}$ είναι πεπερασμένο.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 50 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Παράδειγμα 3.2.4 Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}[t]$ των πολυωνύμων με συντελεστές από ένα σώμα \mathbb{K} . Τότε κάθε διάνυσμα, δηλαδή πολυώνυμο, $P(t)$ του $\mathbb{K}[t]$ γράφεται ως εξής: $P(t) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \cdots + k_n t^n$, όπου $n \in \mathbb{N}_0$ και $k_i \in \mathbb{K}$, $\forall n \geq 0$. Θέτουμε $k_m = 0$, $\forall m > n$, βλέπουμε ότι το $P(t)$ είναι γραμμικός συνδυασμός του απείρου συνόλου διανυσμάτων $\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$.

Επομένως το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών του συνόλου διανυσμάτων $\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$ συμπίπτει με το σύνολο όλων των πολυωνύμων:

$$\mathbb{K}[t] = \langle 1, t, t^2, \dots, t^n, \dots \rangle.$$

Παράδειγμα 3.2.5 Έστω ο διανυσματικός χώρος \mathbb{K}^n πάνω από το σώμα \mathbb{K} . Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του \mathbb{K}^n :

$$\vec{e}_1 := (1, 0, 0, \dots, 0, 0), \quad \vec{e}_2 := (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \quad \dots, \quad \vec{e}_n := (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

Τότε ισχυριζόμαστε ότι: $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle = \mathbb{K}^n$. Πραγματικά αρκεί να δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ του \mathbb{K}^n είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$. Αυτό συμβαίνει διότι:

$$\begin{aligned} \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1(1, 0, 0, \dots, 0, 0) + \\ & x_2(0, 1, 0, \dots, 0, 0) + \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & x_n(0, 0, 0, \dots, 0, 1) = \\ & = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n. \end{aligned}$$

Τα Παραδείγματα 3.2.4 και 3.2.5 δείχνουν ιδιαίτερα ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί $\langle 1, t, t^2, \dots, t^n, \dots \rangle$ και $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ είναι διανυσματικοί χώροι καθώς συμπίπτουν με τους $\mathbb{K}[t]$ και \mathbb{K}^n αντίστοιχα. Αυτό δεν είναι τυχαίο όπως δείχνει η ακόλουθη πρόταση.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 51 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδο

Πρόταση 3.2.6 Έστω $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων στον \mathcal{V} . Τότε το σύνολο $\langle S \rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \rangle$ όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων του S είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{V} ο οποίος περιέχει το S και έχει την ιδιότητα να είναι ο μικρότερος υπόχωρος του \mathcal{V} ο οποίος περιέχει το S .

Δηλαδή αν \mathcal{W} είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{V} ο οποίος περιέχει το S , τότε $\langle S \rangle \subseteq \mathcal{W}$. **Απόδειξη**

Ορισμός 3.2.7 Αν $S \subseteq \mathcal{V}$ είναι ένα (πεπερασμένο) υποσύνολο διανυσμάτων του \mathcal{V} , τότε ο υπόχωρος $\langle S \rangle$ καλείται **ο υπόχωρος του \mathcal{V} που παράγεται από το S** .

Η επόμενη πρόταση, η οποία μας δείχνει κάποιες σημαντικές πράξεις οι οποίες δεν μεταβάλουν τον υπόχωρο που παράγεται από κάποια διανύσματα, θα μας είναι πολύ χρήσιμη σε υπολογισμούς.

Πρόταση 3.2.8 Έστω $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων σε έναν διανυσματικό χώρο \mathcal{V} πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} . Τότε ισχύουν τα εξής:

1. **(ΣΠ1)** Ο υπόχωρος που παράγεται από το S , δεν αλληλάζει αν αλληλάξουμε την σειρά των διανυσμάτων \bar{x}_i . Δηλαδή, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$:

$$\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_n \rangle = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle$$

2. **(ΣΠ2)** Ο υπόχωρος που παράγεται από το S , δεν αλληλάζει αν πολλαπλασιάσουμε βαθμωτά ένα από τα \bar{x}_i με ένα μη-μηδενικό στοιχείο του \mathbb{K} . Δηλαδή, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $\forall k \in \mathbb{K}, k \neq 0$:

$$\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle = \langle \bar{x}_1, \dots, k\bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle$$

3. **(ΣΠ3)** Ο υπόχωρος που παράγεται από το S , δεν αλληλάζει αν αντικαταστήσουμε ένα από τα διανύσματα \bar{x}_i με ένα διάνυσμα της μορφής $\bar{x}_i + k\bar{x}_j$, όπου $k \neq 0$ και $i \neq j$. Δηλαδή, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$, $\forall k \in \mathbb{K}$, με $k \neq 0$ και $i \neq j$:

$$\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + k\bar{x}_j, \dots, \bar{x}_n \rangle$$



Απόδειξη

Οι τρεις πράξεις (ΣΠ1), (ΣΠ2), (ΣΠ3) της Πρότασης 3.2.8 καλούνται **στοιχειώδεις πράξεις** μεταξύ των διανυσμάτων $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$.

Ας δούμε με ένα παράδειγμα πως εφαρμόζουμε τις στοιχειώδεις πράξεις.

Παράδειγμα 3.2.9 Έστω $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ τρία διανύσματα στον \mathcal{V} για τα οποία γνωρίζουμε ότι ικανοποιούν την σχέση (*): $2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 - 4\bar{x}_3 = \bar{0}$. Θα δείξουμε ότι: $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle = \langle \bar{x}_2, \bar{x}_3 \rangle$. Πραγματικά εκτελώντας διαδοχικά τις στοιχειώδεις πράξεις (ΣΠ2), (ΣΠ3), (ΣΠ2), (ΣΠ1), και λαμβάνοντας υπ' όψιν μας την σχέση (*), θα έχουμε:

$$\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle = \langle 2\bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle = \langle 2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2, \bar{x}_2 \rangle = \langle 4\bar{x}_3, \bar{x}_2 \rangle = \langle \bar{x}_3, \bar{x}_2 \rangle = \langle \bar{x}_2, \bar{x}_3 \rangle$$

Παράδειγμα 3.2.10 Θα προσδιορίσουμε τον υπόχωρο του \mathbb{R}^3 ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\bar{x} = (1, 0, 1)$ και $\bar{y} = (0, 2, 0)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό υπόχωρου έχουμε:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle (1, 0, 1), (0, 2, 0) \rangle = \{k(1, 0, 1) + l(0, 2, 0) \mid k, l \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{(k, 0, k) + (0, 2l, 0) \mid k, l \in \mathbb{R}\} = \{(k, 2l, k) \mid k, l \in \mathbb{R}\}$$

Έτσι για παράδειγμα το διάνυσμα $(2, 2, 2)$ ανήκει στον υπόχωρο $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ (διαλέγουμε $k = 2, l = 1$).

Παράδειγμα 3.2.11 Στον διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^3 πάνω από το \mathbb{R} , θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\bar{\varepsilon}_1 = (1, 0, 1), \quad \bar{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0), \quad \bar{\varepsilon}_3 = (0, 1, 1)$$

Θα δείξουμε ότι: $\mathbb{R}^3 = \langle \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3, \rangle$.

Ας προσδιορίσουμε πρώτα τον υπόχωρο $\langle \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3 \rangle$. Θα έχουμε:

$$\langle \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3 \rangle = \{k\varepsilon_1 + l\varepsilon_2 + m\varepsilon_3 \in \mathbb{R}^3 \mid k, l, m \in \mathbb{R}\} =$$

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 52 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 53 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

$$\{k(1, 0, 1) + l(0, 1, 0) + m(0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid k, l, m \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{(k, l + m, k + m) \in \mathbb{R}^3 \mid k, l, m \in \mathbb{R}\}$$

Επειδή πάντα ισχύει $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα $\bar{x} = (x, y, z)$ του \mathbb{R}^3 μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσματων $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, δηλαδή είναι της μορφής $(k, l + m, k + m)$, για κατάλληλα $k, l, m \in \mathbb{R}$.

Όμως $\bar{x} = (x, y, z) \in \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle$ αν-ν υπάρχουν $k, l, m \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε: $\bar{x} = (x, y, z) = (k, l + m, k + m)$. Ισοδύναμα: $\bar{x} = (x, y, z) \in \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle$ αν-ν το σύστημα

$$k = x, \quad y = l + m, \quad z = k + m$$

με αγνώστους τα k, l, m έχει λύση ως προς x, y, z . Αφαιρώντας την τρίτη από την δεύτερη εξίσωση, έχουμε $y - z = l - k$. Αν στην τελευταία προσθέσουμε την πρώτη έχουμε $x + y - z = l$. Άρα $m = y - l = y - (x + y - z) = z - x$. Επομένως: $k = x, l = x + y - z, m = z - x$, δηλαδή το παραπάνω σύστημα έχει λύση. Συνοψίζοντας το τυχόν διάνυσμα $\bar{x} = (x, y, z)$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ως εξής:

$$\bar{x} = (x, y, z) = x\bar{e}_1 + (x + y - z)\bar{e}_2 + (z - x)\bar{e}_3$$

Επομένως: $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$.

Άσκηση 3.2.12 Στον \mathbb{R}^3 θεωρούμε τα διανύσματα :

$$\bar{x} = (1, 1, 0), \quad \bar{y} = (0, 0, 1), \quad \bar{z} = (1, 1, 1), \quad \bar{w} = (-1, -1, 1).$$

Να δείξετε ότι: $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{z}, \bar{w} \rangle$.

Παράδειγμα 3.2.13 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}[t]$ των πολυωνύμων πάνω από το \mathbb{K} . Έστω $n \in \mathbb{N}_0$ ένας σταθερός φυσικός αριθμός και θεωρούμε τα διανύσματα $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ του $\mathbb{K}[t]$.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 54 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Τότε ο υπόχωρος του $\mathbb{K}[t]$ που παράγεται από τα διανύσματα $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ συμπίπτει με το σύνολο όλων των πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο ή ίσο με n μαζί με το μηδενικό πολυώνυμο 0 (το οποίο υπενθυμίζουμε δεν έχει βαθμό):

$$\langle 1, t, t^2, \dots, t^n \rangle = \{P(t) \in \mathbb{K}[t] \mid \deg P(t) \leq n\} \cup \{0\}$$

Τον υπόχωρο αυτόν τον συμβολίζουμε με $\mathbb{K}_n[t]$. Έτσι από τώρα και στο εξής $\mathbb{K}_n[t]$ θα συμβολίζει τον **υπόχωρο του $\mathbb{K}[t]$ όλων των πολυωνύμων με βαθμό $\leq n$** .

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση, την οποία θα αναλύσουμε διεξοδικά στο επόμενο Κεφάλαιο, είναι αυτή κατά την οποία ο υπόχωρος που παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων συμπίπτει με όλον το χώρο \mathcal{V} . Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 3.2.14 Ένας διανυσματικός χώρος \mathcal{V} πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} καλείται **πεπερασμένα παραγόμενος**, αν υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο διανυσμάτων $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ του \mathcal{V} , έτσι ώστε $\mathcal{V} = \langle S \rangle$. Σ' αυτή την περίπτωση τα διανύσματα $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ καλούνται **γεννητόρες** του \mathcal{V} και το σύνολο S καλείται **σύνολο γεννητόρων** του \mathcal{V} .

Άμεση συνέπεια του ορισμού 3.2.14 είναι το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.2.15 Έστω \mathcal{V} ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα \mathbb{K} με σύνολο γεννητόρων $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$. Τότε κάθε διάνυσμα \bar{x} του \mathcal{V} είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του S .

Δηλαδή υπάρχουν στοιχεία k_1, k_2, \dots, k_n από το σώμα \mathbb{K} , έτσι ώστε: $\bar{x} = k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2 + \dots + k_n\bar{x}_n$.

Παράδειγμα 3.2.16 1. Από το Παράδειγμα 3.2.5 έπεται ότι διανυσματικός χώρος \mathbb{K}^n είναι πεπερασμένα παραγόμενος με σύνολο γεννητόρων το σύνολο $S = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$, δηλαδή:

$$\mathbb{K}^n = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \rangle$$

όπου $\bar{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ είναι το διάνυσμα που έχει 1 στην i -συντεταγμένη και παντού αλλού 0.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 55 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

2. Από το Παράδειγμα 3.2.13 έπεται ότι διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}_n[t]$ των πολυωνύμων με βαθμό $\leq n$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος με σύνολο γεννητόρων το σύνολο $S = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$, δηλαδή $\mathbb{K}_n[t] = \langle 1, t, t^2, \dots, t^n \rangle$.
3. Το σύνολο $\{1, i\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου \mathbb{C} πάνω από το \mathbb{R} , και επομένως το \mathbb{C} είναι πεπερασμένα παραγόμενος πάνω από το \mathbb{R} .

Σχόλιο 3.2.17 1. Η έννοια του πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου εξαρτάται από το σώμα \mathbb{K} επί του οποίου είναι ορισμένος ο χώρος. Πραγματικά έχουμε ήδη δει ότι το σώμα των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{R} αλλιώς και πάνω από το το σώμα \mathbb{Q} των ρητών. Τότε ο \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος \mathbb{R} είναι πεπερασμένα παραγόμενος πάνω από το \mathbb{R} με σύνολο γεννητόρων $S = \{1\}$ (αυτό ισχύει διότι $\forall r \in \mathbb{R} : r = r \cdot 1$). Μπορεί όμως να δειχθεί ότι το \mathbb{R} θεωρούμενος σαν διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{Q} δεν έχει πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων.

2. Ένας διανυσματικός χώρος έχει γενικά άπειρα το πλήθος σύνολα γεννητόρων. Για παράδειγμα το $\{\bar{e}_1 = (1, 0), \bar{e}_2 = (0, 1)\}$ είναι σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^2 πάνω από το \mathbb{R} , όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.2.5. Αν $k \in \mathbb{R}$ και $k \neq 0$, τότε και το σύνολο $\{\bar{e}_1 = (1, 0), \bar{e} = (0, k)\}$ είναι σύνολο γεννητόρων του \mathbb{R}^2 (ΝΑ ΤΟ ΔΕΙΞΕΤΕ ΣΑΝ ΑΣΚΗΣΗ).

Εφαρμογή 3.2.18 Θα προσδιορίσουμε ένα σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου \mathcal{W} των λύσεων της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n = 0 \quad (*)$$

ο οποίος ορίσθηκε στο Παράδειγμα 3.1.11.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- (α) $k_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Τότε κάθε διάνυσμα $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ ικανοποιεί την (*) και άρα $\mathcal{W} = \mathbb{K}^n$ για τον οποίο βρήκαμε ένα σύνολο γεννητόρων στο Παράδειγμα 3.2.5.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 56 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

(β) Έστω ότι κάποιον (τουλάχιστον ένα) $k_i \neq 0$. Τότε εργαζόμαστε ως εξής:

Πολλαπλασιάζοντας την (*) με το k_i^{-1} θα έχουμε την εξίσωση

$$\frac{k_1}{k_i}x_1 + \frac{k_2}{k_i}x_2 + \cdots + \frac{k_{i-1}}{k_i}x_{i-1} + x_i + \frac{k_{i+1}}{k_i}x_{i+1} + \cdots + \frac{k_n}{k_i}x_n = 0 \quad (**)$$

η οποία προφανώς είναι ισοδύναμη (δηλαδή έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με την (*)). Από την εξίσωση (**) βλέπουμε ότι, εάν θέσουμε

$$l_1 := -\frac{k_1}{k_i}, \quad l_2 := -\frac{k_2}{k_i}, \quad \dots, \quad l_{i-1} := -\frac{k_{i-1}}{k_i}, \quad l_{i+1} := -\frac{k_{i+1}}{k_i}, \quad \dots, \quad l_n := -\frac{k_n}{k_i}$$

τότε θα έχουμε την εξίσωση:

$$x_i = l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots + l_{i-1}x_{i-1} + l_{i+1}x_{i+1} + \cdots + l_nx_n \quad (\dagger)$$

η οποία είναι προφανώς ισοδύναμη με την (**), άρα και με την (*). Έστω τώρα \vec{a} μια λύση της (*), δηλαδή μια n -άδα $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ έτσι ώστε: $k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n = 0$. Χρησιμοποιώντας ότι το διάνυσμα \vec{a} ικανοποιεί και τις ισοδύναμες εξισώσεις (**), (\dagger), θα έχουμε:

$$a_i = l_1a_1 + l_2a_2 + \cdots + l_{i-1}a_{i-1} + l_{i+1}a_{i+1} + \cdots + l_na_n \quad (\dagger\dagger)$$

και επομένως:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = \\ &= (a_1, \dots, a_{i-1}, l_1a_1 + l_2a_2 + \cdots + l_{i-1}a_{i-1} + l_{i+1}a_{i+1} + \cdots + l_na_n, a_{i+1}, \dots, a_n) = \\ &= a_1(1, 0, \dots, 0, l_1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, \dots, 0, l_2, 0, \dots, 0) + \\ &\cdots + a_{i-1}(0, 0, \dots, 1, l_{i-1}, 0, \dots, 0) + a_{i+1}(0, 0, \dots, 0, l_{i+1}, 1, \dots, 0) + \\ &\quad a_n(0, 0, \dots, 0, l_n, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

- Διανυσματικοί Υπόχωροι
- Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 57 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Δηλαδή η τυχούσα λύση \vec{a} του συστήματος (*), είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων:

$$\vec{l}_1 := (1, 0, \dots, 0, l_1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{l}_{i-1} := (0, 0, \dots, 1, l_{i-1}, 0, \dots, 0), \dots$$

$$\vec{l}_{i+1} := (0, 0, \dots, 0, l_{i+1}, 1, \dots, 0), \dots, \vec{l}_n := (0, 0, \dots, 0, l_n, 0, \dots, 1)$$

όπου οι αριθμοί $l_j, \forall j \neq i$, εμφανίζονται στην i -συντεταγμένη. Άρα θα έχουμε $\vec{a} \in \langle \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n \rangle$ και επομένως $\mathcal{W} \subseteq \langle \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n \rangle$. Αντίστροφα από τις σχέσεις $l_j = -\frac{k_j}{k_i}, \forall j \neq i$, βλέπουμε εύκολα ότι τα διανύσματα $\vec{l}_j, \forall j \neq i$, είναι λύσεις του (*) και επομένως ανήκουν στο \mathcal{W} . Επειδή, σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.1.11, το \mathcal{W} είναι υπόχωρος του \mathbb{K}^n , έπεται ότι $\langle \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n \rangle \subseteq \mathcal{W}$. Συνοψίζοντας τη παραπάνω ανάλυση, θα έχουμε:

$$\boxed{\mathcal{W} = \langle \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{i-1}, \vec{l}_{i+1}, \dots, \vec{l}_n \rangle}$$

3.3. Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

Στην παρούσα ενότητα θα ορίσουμε και μελετήσουμε δύο ενδιαφέροντες μεθόδους κατασκευής υπόχωρων. Αυτές οι μέθοδοι σχετίζονται με γνωστές μας συνολοθεωρητικές κατασκευές και ανακύπτουν από το γενικό ερώτημα αν η έννοια του υπόχωρου παραμένει αναλλοίωτη κάτω από διάφορες συνολοθεωρητικές κατασκευές όπως η τομή ή η ένωση.

3.3.1. Τομή Υπόχωρων

Είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς αν η τομή δύο υπόχωρων είναι υπόχωρος. Η απάντηση είναι θετική όπως μας δείχνει η ακόλουθη γενική πρόταση.



Πρόταση 3.3.1 Έστω $\{W_i \mid i \in I\}$ μια συλλογή υπόχωρων του διανυσματικού χώρου \mathcal{V} , όπου I είναι ένα (πεπερασμένο ή άπειρο) σύνολο δεικτών. Τότε η τομή των υπόχωρων

$$\bigcap_{i \in I} W_i := \{\bar{x} \in \mathcal{V} \mid \bar{x} \in W_i, \forall i \in I\}$$

είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{V} .

Απόδειξη

Είδαμε στην Πρόταση 3.2.6 ότι, αν $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του \mathcal{V} , τότε το σύνολο $\langle S \rangle$ όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων του S είναι ο μικρότερος υπόχωρος του \mathcal{V} ο οποίος περιέχει το S . Η επόμενη Πρόταση δείχνει την σχέση μεταξύ των Προτάσεων 3.2.6 και 3.3.1.

Πρόταση 3.3.2 Έστω $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ ένα υποσύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου \mathcal{V} . Τότε ο υπόχωρος $\langle S \rangle$ που παράγεται από το S συμπίπτει με την τομή όλων των υπόχωρων του \mathcal{V} που περιέχουν το S :

$$\langle S \rangle = \bigcap \{W \subseteq \mathcal{V} \mid \text{ο } W \text{ είναι υπόχωρος του } \mathcal{V} \text{ με } S \subseteq W\}$$

Απόδειξη

Θα δούμε τώρα μια εφαρμογή της θεωρίας η οποία θα μας είναι χρήσιμη στην θεωρία των γραμμικών συστημάτων που θα αναπτύξουμε αργότερα.

Εφαρμογή 3.3.3 Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και έστω οι m το πλήθος ομογενείς γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους x_1, x_2, \dots, x_n και συντελεστές a_{ij} , $1 \leq m$, $1 \leq j \leq n$, από το σώμα \mathbb{K} :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \quad (\Sigma_1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \quad (\Sigma_2)$$

... ..

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Διανυσματικοί Υπόχωροι
- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων
- Ασκήσεις
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 58 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \quad (\Sigma_m)$$

Ένα τέτοιο σύνολο γραμμικών εξισώσεων καλείται **ομογενές γραμμικό σύστημα** m -εξισώσεων με n -αγνώστους και θα το συμβολίζουμε με (Σ) . Ένα διάνυσμα $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ καλείται **λύση** του (Σ) , αν το \vec{a} είναι λύση ταυτόχρονα όλων των εξισώσεων $(\Sigma_1), (\Sigma_2), \dots, (\Sigma_m)$ του (Σ) .

Ισχυρισμός: Το σύνολο λύσεων, έστω Λ , του (Σ) είναι ένας υπόχωρος του \mathbb{K}^n . Πραγματικά, έστω Λ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, το σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης (Σ_i) . Από το Παράδειγμα 3.1.11 έπεται ότι το Λ_i είναι ένας υπόχωρος του \mathbb{K}^n . Επειδή προφανώς ισχύει $\Lambda = \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap \dots \cap \Lambda_n$, από την Πρόταση 3.3.1 θα έχουμε ότι το Λ είναι υπόχωρος του \mathbb{K}^n .

3.3.2. Άθροισμα και Ευθύ Άθροισμα Υπόχωρων

Στην παρούσα υποενότητα θα δούμε μια διαφορετική μέθοδο κατασκευής υπόχωρων η οποία θα μας είναι χρήσιμη αργότερα στην “ανάλυση” ενός διανυσματικού χώρου σε απλούστερους διανυσματικούς (υπό)χώρους.

Όπως πριν σταθεροποιούμε έναν διανυσματικό χώρο \mathcal{V} πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} .

Έχουμε ήδη δει στην Πρόταση 3.3.1 ότι η τομή (πεπερασμένου ή άπειρου) πλήθους υπόχωρων του \mathcal{V} είναι υπόχωρος του \mathcal{V} . Επιπρόσθετα η τομή είναι ο μικρότερος υπόχωρος του \mathcal{V} ο οποίος περιέχεται σε όλους του υπόχωρους. Κάτι αντίστοιχο δεν ισχύει για την ένωση υπόχωρων όπως δείχνει η ακολουθητή πρόταση.

Πρόταση 3.3.4 Έστω \mathcal{V} ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα \mathbb{K} , και έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ δύο υπόχωροι του \mathcal{V} . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η ένωση $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ είναι υπόχωρος του \mathcal{V} .
2. Είτε $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$ ή $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$.

Απόδειξη

• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 59 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



Άσκηση 3.3.5 Να βρεθεί συγκεκριμένο παράδειγμα δύο υπόχωρων $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ ενός διανυσματικού χώρου \mathcal{V} έτσι ώστε η ένωση $\mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_1$ να μην είναι υπόχωρος. **Υπόδειξη**

Η Πρόταση 3.3.4 μας οδηγεί στο να αναζητήσουμε τον μικρότερο υπόχωρο του \mathcal{V} ο οποίος περιέχει κάποιους δεδομένους υπόχωρους του. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.3.6 Έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \dots, \mathcal{W}_n$ ένα πεπερασμένο σύνολο υπόχωρων του \mathcal{V} . Το **άθροισμα** των υπόχωρων $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \dots, \mathcal{W}_n$ ορίζεται να είναι το ακόλουθο υποσύνολο του \mathcal{V} :

$$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n := \{ \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n \mid \bar{x}_i \in \mathcal{W}_i, \forall i = 1, 2, \dots, n \}$$

Σημειώνουμε ότι το πρώτο μέλος της παραπάνω σχέσης είναι απλά ένας συμβολισμός καθώς η πράξη πρόσθεσης $+$ του \mathcal{V} έχει ορισθεί σε στοιχεία του \mathcal{V} και όχι σε υποσύνολα του.

Η επόμενη πρόταση δικαιολογεί την εισαγωγή της έννοιας του αθροίσματος υπόχωρων.

Πρόταση 3.3.7 Το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$ πεπερασμένου πλήθους υπόχωρων $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \dots, \mathcal{W}_n$ του \mathcal{V} , είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{V} ο οποίος περιέχει όλους τους υπόχωρους \mathcal{W}_i . Επιπρόσθετα το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος του \mathcal{V} ο οποίος περιέχει τους υπόχωρους $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \dots, \mathcal{W}_n$.

Δηλαδή αν \mathcal{W} είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{V} έτσι ώστε $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{W}, \forall i = 1, 2, \dots, n$, τότε $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n \subseteq \mathcal{W}$. **Απόδειξη**

Σχόλιο 3.3.8 1. Μπορούμε να ορίσουμε και το άθροισμα άπειρου πλήθους υπόχωρων του \mathcal{V} ως εξής: Έστω $\{ \mathcal{W}_i \mid i \in I \}$ μία συλλογή υπόχωρων του \mathcal{V} , όπου I είναι ένα άπειρο σύνολο δεικτών. Τότε το άθροισμα του άπειρου πλήθους υπόχωρων \mathcal{W}_i ορίζεται να είναι το υποσύνολο του \mathcal{V} :

$$\sum_{i \in I} \mathcal{W}_i := \left\{ \sum_{i \in I} \bar{x}_i \in \mathcal{V} \mid \bar{x}_i \in \mathcal{W}_i \text{ και } \bar{x}_i = \bar{0}, \right.$$

• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 60 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 61 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

$\forall i \in I$ εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο δεικτών}

Όπως και στην Πρόταση 3.3.7 μπορεί κανείς να δείξει ότι το υποσύνολο $\sum_{i \in I} \mathcal{W}_i$ είναι υπόχωρος του \mathcal{V} ο οποίος περιέχει τους \mathcal{W}_i και είναι ο μικρότερος υπόχωρος του \mathcal{V} με αυτή την ιδιότητα.

2. Από την Πρόταση 3.3.7 προκύπτει άμεσα ότι $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n = \langle \cup_{i=1}^n \mathcal{W}_i \rangle$, δηλαδή το άθροισμα των υπόχωρων συμπίπτει με τον υπόχωρο που παράγεται από την ένωση των υπόχωρων $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \dots, \mathcal{W}_n$.

Όπως θα δούμε αργότερα η πλέον ενδιαφέρουσα περίπτωση, όταν έχουμε να μελετήσουμε ένα άθροισμα υπόχωρων, είναι το άθροισμα αυτό να είναι ευθύ με την έννοια του ακόλουθου ορισμού.

Ορισμός 3.3.9 Έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \dots, \mathcal{W}_n$ ένα πεπερασμένο σύνολο υπόχωρων του \mathcal{V} . Το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$ των υπόχωρων \mathcal{W}_i καλείται **ευθύ άθροισμα**, αν ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathcal{W}_i \cap (\mathcal{W}_1 + \dots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_{i+1} + \dots + \mathcal{W}_n) = \{\vec{0}\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Δηλαδή αν η τομή καθενός από τους υπόχωρους \mathcal{W}_i με το άθροισμα των υπολοίπων είναι ο μηδενικός υπόχωρος.

Αν το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$ είναι ευθύ, θα το συμβολίζουμε με:

$$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_n$$

Παρατήρηση 3.3.10 Αν έχουμε δύο υπόχωρους $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$, τότε από τον ορισμό 3.3.9 προκύπτει άμεσα ότι το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ είναι ευθύ, δηλαδή έχουμε $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \{\vec{0}\}$.

Θα δούμε τώρα δύο παραδείγματα στα οποία το άθροισμα δυο υπόχωρων είναι ευθύ και συμπίπτει με όλον τον διανυσματικό χώρο. Αν και διαφορετικής φύσης και τα δύο βασίζονται πάνω στην ίδια ιδέα.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 62 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Παράδειγμα 3.3.11 Στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των συναρτήσεων από το \mathbb{R} στο \mathbb{R} , θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των άρτιων συναρτήσεων και τον υπόχωρο $\mathcal{F}_{\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των περιττών συναρτήσεων. Θα δείξουμε ότι

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{F}_{\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχούσα συνάρτηση. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$\forall x \in \mathbb{R} : g(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{και} \quad h(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Τότε $g(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = g(x)$ και $h(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -h(x)$. Άρα η g είναι άρτια και η h είναι περιττή. Από την άλλη πλευρά $g(x) + h(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = f(x)$. Δηλαδή η τυχούσα συνάρτηση f είναι άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) + \mathcal{F}_{\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ είναι όλος ο χώρος: $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) + \mathcal{F}_{\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Επομένως για να δείξουμε την ζητούμενη σχέση, αρκεί, σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.3.10, να δείξουμε ότι $\mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{F}_{\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\bar{0}\}$ όπου $\bar{0}$ είναι η μηδενική συνάρτηση $\bar{0}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Έστω $f \in \mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{F}_{\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, δηλαδή η f είναι ταυτόχρονα άρτια και περιττή. Τότε, $\forall x \in \mathbb{R}$, θα έχουμε: $f(-x) = f(x) = -f(x)$. Δηλαδή $2f(x) = 0$ και επομένως $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι $f = \bar{0}$. Επομένως $\mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{F}_{\Pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\bar{0}\}$.

Παράδειγμα 3.3.12 Στον διανυσματικό χώρο $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ των τετραγωνικών $n \times n$ -πινάκων πάνω από ένα σώμα \mathbb{K} , θεωρούμε τον υπόχωρο $S_{n \times n}(\mathbb{K})$ των συμμετρικών πινάκων και τον υπόχωρο $A_{n \times n}(\mathbb{K})$ των αντισυμμετρικών πινάκων, βλέπε την Πρόχειρη δοκιμασία στο τέλος της ενότητας 3.1.

Άσκηση 3.3.13 Ακολουθώντας την ιδέα του Παραδείγματος 3.3.11 να δείξετε ότι:

$$M_{n \times n}(\mathbb{K}) = S_{n \times n}(\mathbb{K}) \oplus A_{n \times n}(\mathbb{K})$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Αθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 63 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Θα δούμε τώρα έναν σημαντικό χαρακτηρισμό του ευθέως αθροίσματος υπόχωρων. Πρώτα όμως χρειαζόμαστε έναν ορισμό:

Ορισμός 3.3.14 1. Έστω $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου \mathcal{V} . Ένα διάνυσμα \bar{x} του \mathcal{V} (το οποίο υποθέτουμε ότι ανήκει στον υπόχωρο $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \rangle$), θα λέμε ότι **γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, αυ:**

$$\bar{x} = k_1 \bar{x}_1 + \dots + k_n \bar{x}_n = l_1 \bar{x}_1 + \dots + l_n \bar{x}_n \implies k_i = l_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι το διάνυσμα \bar{x} έχει **μοναδικότητα γραφής ως προς τα διανύσματα $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$.**

2. Έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \dots, \mathcal{W}_n$ n το πλήθος υπόχωροι του διανυσματικού χώρου \mathcal{V} . Ένα διάνυσμα \bar{x} το οποίο ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$, θα λέμε ότι **γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν άθροισμα διανυσμάτων των υπόχωρων \mathcal{W}_i , αυ:**

$$\text{Αν } \bar{x} = \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n \text{ και } \bar{x} = \bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_n, \text{ όπου } \bar{x}_i, \bar{y}_i \in \mathcal{W}_i, \forall i = 1, \dots, n$$

$$\text{τότε ισχύει: } \bar{x}_i = \bar{y}_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι το διάνυσμα \bar{x} έχει **μοναδικότητα γραφής ως προς τους υπόχωρους $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \dots, \mathcal{W}_n$.**

Πρόταση 3.3.15 Έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \dots, \mathcal{W}_n$ n το πλήθος υπόχωροι του διανυσματικού χώρου \mathcal{V} . Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$ είναι ευθύ: $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_n$
2. Κάθε διάνυσμα \bar{x} του υπόχωρου $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα διανυσμάτων των υπόχωρων \mathcal{W}_i .
3. Αν $\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n = \bar{0}$, όπου $\bar{x}_i \in \mathcal{W}_i, \forall i = 1, \dots, n$, τότε ισχύει ότι: $\bar{x}_i = \bar{0}, \forall i = 1, \dots, n$.



Απόδειξη

Το ακόλουθο σημαντικό πόρισμα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.3.15 και του Πορίσματος 3.2.15.

Πόρισμα 3.3.16 Έστω W_1, W_2, \dots, W_n n το πλήθος υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$.
2. Κάθε διάνυσμα \bar{x} του V γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $\bar{x} = \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n$ διανυσμάτων \bar{x}_i των υπόχωρων W_i .

Απόδειξη

Θα δούμε τώρα δύο παραδείγματα διανυσματικών χώρων οι οποίοι είναι ευθέα αθροίσματα υπόχωρων τους.

Παράδειγμα 3.3.17 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο \mathbb{K}^n των n -άδων με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Τότε ισχύει:

$$\mathbb{K}^n = \langle \bar{e}_1 \rangle \oplus \langle \bar{e}_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \bar{e}_n \rangle$$

όπου $\bar{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0)$ είναι το διάνυσμα του \mathbb{K}^n που έχει 1 στην i -οστή συντεταγμένη και παντού αλλού 0.

Από το Παράδειγμα 3.2.16 έπεται ότι κάθε διάνυσμα $\bar{x} = (k_1, \dots, k_n)$ του \mathbb{K}^n είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων \bar{e}_i , δηλαδή $\bar{x} = k_1 \bar{e}_1 + \dots + k_n \bar{e}_n$. Επειδή $k_i \bar{e}_i \in \langle \bar{e}_i \rangle$, θα έχουμε $\bar{x} \in \langle \bar{e}_1 \rangle + \langle \bar{e}_2 \rangle + \dots + \langle \bar{e}_n \rangle$, και επομένως $\mathbb{K}^n = \langle \bar{e}_1 \rangle + \langle \bar{e}_2 \rangle + \dots + \langle \bar{e}_n \rangle$. Έστω $\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n = \bar{0}$, όπου $\bar{x}_i \in \langle \bar{e}_i \rangle$, $\forall i = 1, \dots, n$. Τότε υπάρχουν $k_i \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε $\bar{x}_i = k_i \bar{e}_i$, $\forall i = 1, \dots, n$. Επομένως $\bar{0} = \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n = k_1 \bar{e}_1 + \dots + k_n \bar{e}_n$. Επειδή $k_1 \bar{e}_1 + \dots + k_n \bar{e}_n = k_1(1, 0, \dots, 0, 0) + \dots + k_n(0, 0, \dots, 0, 1) = (k_1, \dots, k_n)$, θα έχουμε προφανώς $k_i = 0$, δηλαδή $\bar{x}_i = \bar{0}$, $\forall i = 1, \dots, n$. Τότε όμως από το Πρόταση 3.3.15, συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα $\langle \bar{e}_1 \rangle + \langle \bar{e}_2 \rangle + \dots + \langle \bar{e}_n \rangle$ είναι ευθύ. Επομένως $\mathbb{K}^n = \langle \bar{e}_1 \rangle \oplus \langle \bar{e}_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \bar{e}_n \rangle$.

• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 64 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωματά Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 65 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Παράδειγμα 3.3.18 Έστω τα ακόλουθα υποσύνολα του \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{W}_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}, \quad \mathcal{W}_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$$

Θα δείξουμε ότι: $\mathbb{R}^3 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ είναι υπόχωροι του \mathbb{R}^3 . Επιπρόσθετα από την μορφή έπεται άμεσα ότι $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{(0, 0, 0)\} = \{\vec{0}\}$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, μπορεί να γραφεί ως εξής: $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, όπου $\vec{x}_1 \in \mathcal{W}_1$, και $\vec{x}_2 \in \mathcal{W}_2$. Πραγματικά θα έχουμε: $\vec{x} = (x, y, z) = (x, x, x) + (0, y - x, z - x)$ και προφανώς $\vec{x}_1 := (x, x, x) \in \mathcal{W}_1$ και $\vec{x}_2 := (0, y - x, z - x) \in \mathcal{W}_2$.

Όπως είδαμε η έννοια του ευθέως αθροίσματος υπόχωρων αφορά την μοναδικότητα γραφής διανυσμάτων από τους υπόχωρους. Είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς αν αφορά και την μοναδικότητα των υπόχωρων. Δηλαδή αν $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ και \mathcal{W}_3 είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου \mathcal{V} και ισχύει $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$, μπορούμε τότε να συμπεράνουμε ότι $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3$; Αν και, όπως θα δούμε αργότερα, ισχύει κάτι ασθενέστερο από την ισότητα, η απάντηση είναι αρνητική όπως δείχνει και η ακόλουθη:

Άσκηση 3.3.19 Έστω ο υπόχωρος $\mathcal{W} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^2 . Να βρεθούν άπειροι το πλήθος υπόχωροι $\mathcal{Z}_n, n \geq 1$, του \mathbb{R}^2 έτσι ώστε: $\mathbb{R}^2 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}_n$, $\forall n \geq 1$, και επιπλέον $\mathcal{Z}_1 \neq \mathcal{Z}_n$, αν $n \geq 1$. **Υπόδειξη**

3.4. Ασκήσεις

Άσκηση 3.4.1 Να βρεθεί ο υπόχωρος του \mathbb{R}^3 ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:

$$\vec{x}_1 = (2, 1, -3), \quad \vec{x}_2 = (3, 2, -5), \quad \vec{x}_3 = (1, -1, 1)$$

Ακολουθώς να εξετασθεί αν το διάνυσμα $\vec{x} = (6, 2, -7)$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

- Διανυσματικοί Υπόχωροι
- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 66 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Άσκηση 3.4.2 Ποιοί από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί;

1. Το σύνολο $\mathcal{E} := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid ab \geq 0\}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{R} , με τις συνηθισμένες πράξεις προσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού.
(α) Σωστό (β) Λάθος
2. Το σύνολο $\{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^n \mid k_1 + \dots + k_n = 0\}$ είναι υπόχωρος του \mathbb{K}^n .
(α) Σωστό (β) Λάθος
3. Το σύνολο $\mathcal{W} = \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^n \mid k_1 + \dots + k_n = 1\}$ είναι υπόχωρος του \mathbb{K}^n .
(α) Σωστό (β) Λάθος
4. Το σύνολο $\{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^n \mid k_1 = k_n\}$ είναι υπόχωρος του \mathbb{K}^n .
(α) Σωστό (β) Λάθος
5. Το σύνολο \mathcal{W} των πολυωνύμων με βαθμό ακριβώς n , ($n \geq 1$), είναι υποχώρος του $\mathbb{R}[t]$.
(α) Σωστό (β) Λάθος
6. Το σύνολο $\mathcal{W}(\rho)$ των πολυωνύμων $P(t)$ πάνω από το \mathbb{R} τα οποία δέχονται τον πραγματικό αριθμό ρ σαν ρίζα, δηλαδή $P(\rho) = 0$, είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}[t]$.
(α) Σωστό (β) Λάθος
7. Το σύνολο \mathcal{W} των ακολουθιών $(x_n)_{n \geq 0}$ πραγματικών αριθμών, για τις οποίες ισχύει: $x_n^2 = x_{n-2}$, $\forall n \geq 2$, είναι υπόχωρος του χώρου των ακολουθιών $\mathbb{A}(\mathbb{R})$.
(α) Σωστό (β) Λάθος
8. Το σύνολο \mathcal{W} των n -άδων (k_1, k_2, \dots, k_n) πραγματικών αριθμών για τις οποίες ισχύει $k_1 k_2 \dots k_n = 0$, είναι υπόχωρος του \mathbb{K}^n .
(α) Σωστό (β) Λάθος

Άσκηση 3.4.3 Έστω $p, q \in \mathbb{R}$, σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να δείχθει ότι το σύνολο



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 67 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

των «αναδρομικών» ακολουθιών

$$\mathcal{V} := \{(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{R}) \mid x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n\}$$

είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ των ακολουθιών πάνω από το \mathbb{R} .

Άσκηση 3.4.4 Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός η έτσι ώστε το διάνυσμα $\bar{x} = (1, -2, \eta)$ να είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\bar{x}_1 = (3, 0, -2)$, $\bar{x}_2 = (2, -1, -5) \in \mathbb{R}^3$.

Άσκηση 3.4.5 Να προσδιορισθούν όλοι οι υπόχωροι του \mathbb{R}^3 .

Υπόδειξη

Άσκηση 3.4.6 Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_2[t]$ των πολυωνύμων πάνω από το \mathbb{R} , θεωρούμε τους υπόχωρους:

$$\mathcal{W}_1 = \langle t^2 + t, t + 1 \rangle, \quad \mathcal{W}_2 = \langle -t^2 + t + 2, t + 3 \rangle$$

Να προσδιορισθεί ο υπόχωρος $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$.

Άσκηση 3.4.7 Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του \mathbb{R}^3 :

$$\bar{x} = (2, 3, -1), \quad \bar{y} = (1, -2, 2), \quad \bar{z} = (3, 7, 0), \quad \bar{w} = (5, 0, -7)$$

Να δείξετε ότι: $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{z}, \bar{w} \rangle$.

Άσκηση 3.4.8 Έστω $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ τρία διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου \mathcal{V} για τα οποία ισχύει: $k_1 \bar{x} + k_2 \bar{y} + k_3 \bar{z} = \bar{0}$. Αν $k_1 k_3 \neq 0$, τότε να δείξετε ότι ισχύει: $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$.

Άσκηση 3.4.9 Να εξετασθεί αν τα ακόλουθα υποσύνολα

1. $\mathcal{W}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.

2. $\mathcal{W}_2 = \{(x, 2x + 1) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 68 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

$$3. \mathcal{W}_3 = \{(2x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

$$4. \mathcal{W}_4 = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

είναι υπόχωροι του \mathbb{R}^2 . Είναι τα υποσύνολα $\mathcal{W}_3 \cap \mathcal{W}_4$ και $\mathcal{W}_3 + \mathcal{W}_4$ υπόχωροι του \mathbb{R}^2 ; Είναι το υποσύνολο $\mathcal{W}_3 \cup \mathcal{W}_4$ υπόχωρος του \mathbb{R}^2 ;

Άσκηση 3.4.10 Να δείξετε ότι: $\mathbb{K}^3 = \langle \bar{x}_1 \rangle \oplus \langle \bar{x}_2 \rangle \oplus \langle \bar{x}_3 \rangle$, όπου:

$$\bar{x}_1 = (1, 0, 0), \quad \bar{x}_2 = (1, 1, 0), \quad \bar{x}_3 = (1, 1, 1)$$

Άσκηση 3.4.11 Έστω $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ τρεις υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , έτσι ώστε $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Να δείξετε ότι:

$$\mathcal{U} + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap (\mathcal{U} + \mathcal{W})$$

Άσκηση 3.4.12 Να δείξετε ότι τα ακόλουθα υποσύνολα του \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{W}_1 = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{W}_2 = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{W}_3 = \{(d, 0, d) \mid d \in \mathbb{R}\},$$

είναι υπόχωροι και ακολούθως να δείξετε ότι $\mathbb{R}^3 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$.

Άσκηση 3.4.13 Να δείξετε ότι:

$$\mathbb{R}_2[t] = \langle 1, t - 1, (t - 2)(t - 1) \rangle$$

Άσκηση 3.4.14 Έστω τα ακόλουθα υποσύνολα του διανυσματικού χώρου $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ των 2×2 πινάκων πάνω από το \mathbb{R} :

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathcal{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα \mathcal{W}, \mathcal{Z} είναι υπόχωροι του $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ και ακολούθως να προσδιορισθούν οι υπόχωροι $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}$ και $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

- Διανυσματικοί Υπόχωροι
- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 69 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Άσκηση 3.4.15 Να βρεθεί το σύνολο λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος

$$x + 2y + z = 0, \quad x + y + 2z = 0, \quad 2x + y + z = 0$$

Άσκηση 3.4.16 Θεωρούμε τους 2×2 πίνακες πραγματικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} a & b \\ -37 & -3 \end{pmatrix}$ να είναι γραμμικός συνδυασμός των A, B .

Άσκηση 3.4.17 Έστω \mathcal{V} ο υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, ο οποίος παράγεται από τους πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

και έστω \mathcal{W} ο υπόχωρος του $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, ο οποίος παράγεται από τους πίνακες:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι υπόχωροι: $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ και $\mathcal{V} + \mathcal{W}$.

Άσκηση 3.4.18 Έστω $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ ο διανυσματικός χώρος των $m \times n$ πινάκων πάνω από το σώμα \mathbb{K} . Να βρεθεί ένα σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. **Υπόδειξη**

Άσκηση 3.4.19 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ των ακολουθιών με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, και έστω $p, q \in \mathbb{R}$ με $q \neq 0$. Έστω

$$\mathcal{V} = \{(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{R}) \mid x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}\}$$

το υποσύνολο των αναγωγικών ακολουθιών. Να δείξετε ότι το \mathcal{V} είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ και ακολουθίως να προσδιορίσετε ένα σύνολο γεννητόρων του.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

► Γραμμική Ανεξαρτησία

- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 70 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Κεφάλαιο 4

Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

Στο παρόν Κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τις θεμελιώδεις έννοιες της γραμμικής ανεξαρτησίας και της βάσης οι οποίες μας επιτρέπουν να κάνουμε με αναλλοίωτο τρόπο αποτελεσματικούς υπολογισμούς σε διανυσματικούς χώρους. Οι έννοιες αυτές θα μας οδηγήσουν στην βασική έννοια της διάστασης, δηλαδή στην αντιστοίχιση ενός αριθμού σε κάθε διανυσματικό χώρο, η οποία σε συνδυασμό με την έννοια της γραμμικής απεικόνισης θα μας επιτρέψει να ταξινομούμε διανυσματικούς χώρους.

Από τώρα και στο εξής σταθεροποιούμε ένα σώμα \mathbb{K} και έναν διανυσματικό χώρο \mathcal{V} υπεράνω του \mathbb{K} . Συνήθως αυτό το υποδηλώνουμε γράφοντας $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ εννοώντας ότι ο \mathcal{V} είναι ένας διανυσματικός χώρος ορισμένος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} .



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

➤ Γραμμική Ανεξαρτησία

- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 71 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

4.1. Γραμμική Ανεξαρτησία

Έστω $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του \mathcal{V} . Υπενθυμίζουμε ότι ένας γραμμικός συνδυασμός $k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2 + \dots + k_n\bar{x}_n$ των διανυσμάτων $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ καλείται **μη-τετριμμένος** αν $(k_1, k_2, \dots, k_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, δηλαδή τουλάχιστον ένα από τα k_i είναι διάφορο του μηδενός.

Ορισμός 4.1.1 Έστω $\mathcal{X} := \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του \mathcal{V} . Το σύνολο \mathcal{X} καλείται **γραμμικά εξαρτημένο** αν υπάρχει μη-τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ ο οποίος να είναι το μηδενικό διάνυσμα του \mathcal{V} . Δηλαδή: υπάρχουν αριθμοί k_1, k_2, \dots, k_n από το σώμα \mathbb{K} οι οποίοι δεν είναι ταυτόχρονα όλοι ίσοι με 0, έτσι ώστε:

$$k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2 + \dots + k_n\bar{x}_n = \bar{0}$$

Ένα άπειρο σύνολο διανυσμάτων \mathcal{A} του \mathcal{V} καλείται **γραμμικά εξαρτημένο** αν το \mathcal{A} περιέχει ένα πεπερασμένο γραμμικά εξαρτημένο υποσύνολο.

Στην συνέχεια σημαντικό ρόλο στην θεωρία θα διαδραματίσει η λογικά αντίθετη έννοια της γραμμικής εξάρτησης:

Ορισμός 4.1.2 Ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων \mathcal{X} του \mathcal{V} καλείται **γραμμικά ανεξάρτητο** αν το \mathcal{X} δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο. Δηλαδή αν $\mathcal{X} := \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$, τότε το \mathcal{X} είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$\boxed{\forall k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K} : k_1\bar{x}_1 + \dots + k_n\bar{x}_n = \bar{0} \implies k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0}$$

Ένα άπειρο σύνολο διανυσμάτων \mathcal{A} του \mathcal{V} καλείται **γραμμικά ανεξάρτητο** αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του \mathcal{A} είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Σχόλιο 4.1.3 Είναι φανερό από το ορισμό ότι η έννοια της γραμμικής εξάρτησης ή ανεξαρτησίας διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου \mathcal{V} εξαρτάται από το σώμα υπέράνω του οποίου έχει ορισθεί ο \mathcal{V} . Το ακόλουθο παράδειγμα είναι ενδεικτικό.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωματά Αριθμών
- Διανυσματικό Χώρο
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

► Γραμμική Ανεξαρτησία

- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 72 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Θεωρούμε το σώμα \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών το οποίο, όπως έχουμε δει μπορεί να θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του εαυτού του, και τότε γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$, αλλά μπορεί να θεωρηθεί και σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{R} και τότε γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε το σύνολο διανυσμάτων $\{1, i\} \subseteq \mathbb{C}$. Τότε το σύνολο $\{1, i\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο υποσύνολο του $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$, όπως δείχνει η σχέση: $(-i)1 + 1i = 0$ η οποία είναι μια τετριμμένη σχέση εξάρτησης των $1, i$ με μη-μηδενικούς συντελεστές από το \mathbb{C} . Αντίθετα το σύνολο $\{1, i\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Πραγματικά, όπως μπορεί κανείς να δει πολύ εύκολα, δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί k, l έτσι ώστε $k1 + li = 0$ και $(k, l) \neq (0, 0)$.

Σχόλιο 4.1.4 Σύμφωνα με τον ορισμό για να δείξουμε ότι ένα σύνολο διανυσμάτων $X := \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο εργαζόμαστε ως εξής: Υποθέτουμε ότι υπάρχουν αριθμοί k_1, \dots, k_n από το σώμα \mathbb{K} , έτσι ώστε $k_1\bar{x}_1 + \dots + k_n\bar{x}_n = \bar{0}$. Αν από αυτή τη σχέση γραμμικής εξάρτησης καταφέρουμε να δείξουμε ότι αναγκαστικά έχουμε ότι $k_1 = \dots = k_n = 0$, τότε το σύνολο X είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Διαφορετικά το X είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Το παρακάτω παράδειγμα είναι ενδεικτικό.

Παράδειγμα 4.1.5 Στο διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^3 υπεράνω του \mathbb{R} , θεωρούμε τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων:

$$\mathcal{B} = \{\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

$$\mathcal{X} = \{\bar{x}_1 = (0, 1, 1), \bar{x}_2 = (1, 0, 1), \bar{x}_3 = (1, 1, 0)\}$$

$$\mathcal{Y} = \{\bar{y}_1 = (1, -1, 0), \bar{y}_2 = (-1, 0, -1), \bar{y}_3 = (1, 2, 3)\}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό θα εξετάσουμε αν τα παραπάνω σύνολα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή γραμμικά εξαρτημένα.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Συστήματα Αριθμών
- Διανυσματικό Χώρο
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

► Γραμμική Ανεξαρτησία

- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 73 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

1. Έστω ότι υπάρχουν αριθμοί $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε: $(*) : k_1 \bar{e}_1 + k_2 \bar{e}_2 + k_3 \bar{e}_3 = \bar{0}$. Τότε $k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$, δηλαδή ισχύει $(k_1, 0, 0) + (0, k_2, 0) + (0, 0, k_3) = (0, 0, 0)$. Ισοδύναμα έχουμε $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$, και επομένως $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Δηλαδή δείξαμε ότι το σύνολο \mathcal{B} είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Έστω ότι υπάρχουν αριθμοί $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε: $(*) : k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + k_3 \bar{x}_3 = \bar{0}$. Τότε $k_1(0, 1, 1) + k_2(1, 0, 1) + k_3(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$, δηλαδή ισχύει $(0, k_1, k_1) + (k_2, 0, k_2) + (k_3, k_3, 0) = (0, 0, 0)$. Ισοδύναμα θα έχουμε $(k_2 + k_3, k_1 + k_3, k_1 + k_2) = (0, 0, 0)$. Δηλαδή θα πρέπει οι αριθμοί k_1, k_2, k_3 να ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα:

$$k_2 + k_3 = 0, \quad k_1 + k_3 = 0, \quad k_1 + k_2 = 0$$

Αφαιρώντας την δεύτερη εξίσωση από την πρώτη έχουμε την εξίσωση $k_2 - k_1 = 0$, την οποία αν προσθέσουμε στην τρίτη, θα έχουμε $2k_1 = 0$, δηλαδή $k_1 = 0$. Τότε προφανώς θα έχουμε και $k_2 = k_3 = 0$ και επομένως δείξαμε ότι η σχέση $(*)$ την οποία υποθέσαμε ότι ισχύει μας οδηγεί στο ότι αναγκαστικά ισχύει $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Άρα το σύνολο \mathcal{X} είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

3. Έστω ότι υπάρχουν αριθμοί $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε: $(*) : k_1 \bar{y}_1 + k_2 \bar{y}_2 + k_3 \bar{y}_3 = \bar{0}$. Τότε $k_1(1, -1, 0) + k_2(-1, 0, -1) + k_3(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$, δηλαδή ισχύει $(k_1, -k_1, 0) + (-k_2, 0, -k_2) + (k_3, 2k_3, 3k_3) = (0, 0, 0)$. Ισοδύναμα θα έχουμε $(k_1 - k_2 + k_3, -k_1 + 2k_3, -k_2 + 3k_3) = (0, 0, 0)$. Δηλαδή θα πρέπει οι αριθμοί k_1, k_2, k_3 να ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα:

$$k_1 - k_2 + k_3 = 0, \quad -k_1 + 2k_3 = 0, \quad -k_2 + 3k_3 = 0$$

Από την δεύτερη εξίσωση έχουμε $k_1 = 2k_3$, από την τρίτη εξίσωση έχουμε $k_2 = 3k_3$, και αυτές οι τιμές ικανοποιούν την πρώτη εξίσωση. Επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και το σύνολο λύσεων είναι $\{(2t, 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Επιλέγοντας $t \neq 0$, π.χ. $t = 1$, έχουμε μια μη-μηδενική λύση $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 1$ η οποία εκ' κατασκευής



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτων Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

► Γραμμική Ανεξαρτησία

- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 74 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

ικανοποιεί την σχέση $2\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2 + \bar{y}_3 = \bar{0}$. Σύμφωνα με τον ορισμό το σύνολο \mathcal{Y} είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Άσκηση 4.1.6 Εργαζόμενοι όπως στο Παράδειγμα 4.1.5 να δείξετε ότι στον διανυσματικό χώρο \mathbb{K}^n υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , το σύνολο

$$\{\bar{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \bar{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Λήμμα 4.1.7 1. Έστω $\bar{x} \in \mathcal{V}$. Τότε το σύνολο $\{\bar{x}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν-ν $\bar{x} \neq \bar{0}$. Ιδιαίτερα το μηδενικό διάνυσμα $\bar{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

2. Έστω $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathcal{V}$. Τότε το σύνολο $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο αν-ν ένα εκ των \bar{x}_1, \bar{x}_2 είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου. Δηλαδή είτε $\bar{x}_1 = k\bar{x}_2$ ή $\bar{x}_2 = l\bar{x}_1$, για κατάλληλα $k, l \in \mathbb{K}$.

Απόδειξη

Παράδειγμα 4.1.8 Στον διανυσματικό χώρο \mathbb{C}^3 υπεράνω του \mathbb{C} , θεωρούμε τα διανύσματα $\bar{x} = (1, 0, i)$ και $\bar{y} = (1 + i, 1, -1)$. Αν τα διανύσματα \bar{x}, \bar{y} ήσαν γραμμικά εξαρτημένα, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.7 θα υπήρχε μιγαδικός αριθμός k έτσι ώστε $\bar{x} = k\bar{y}$ ή $\bar{y} = k\bar{x}$. Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε $(1, 0, i) = k(1 + i, 1, -1) = (k + ki, k, -k)$, δηλαδή $k + ki = 1, k = 0, -k = i$ το οποίο είναι αδύνατον. Παρόμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $\bar{y} = k\bar{x}$. Επομένως το σύνολο $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Παράδειγμα 4.1.9 Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}_n[t]$ των πολυωνύμων υπεράνω του \mathbb{K} με βαθμό το πολύ n , θεωρούμε $n + 1$ πολυώνυμα $P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)$, έτσι ώστε $\deg P_i(t) = i, i = 0, 1, \dots, n$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

► Γραμμική Ανεξαρτησία

- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 75 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Επειδή ο βαθμός του $P_i(t)$ είναι i , έπεται ότι:

$$P_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + \cdots + a_{i,i-1}t^{i-1} + a_{ii}t^i, \quad a_{ii} \neq 0, \quad 0 \leq i \leq n$$

Έστω $P(t) := k_0P_0(t) + k_1P_1(t) + \cdots + k_nP_n(t) = 0$, όπου $k_i \in \mathbb{K}$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$. Θέτοντας $P(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_nt^n$, από τον ορισμό της πρόσθεσης πολυωνύμων θα έχουμε τότε ότι:

$$(0) \quad b_0 = k_0a_{00} + k_1a_{10} + k_2a_{20} + \cdots + k_na_{n0}.$$

$$(1) \quad b_1 = k_1a_{11} + k_2a_{21} + k_3a_{31} + \cdots + k_na_{n1}.$$

⋮

$$(n-1) \quad b_{n-1} = k_{n-1}a_{n-1,n-1} + k_na_{nn-1}.$$

$$(n) \quad b_n = k_na_{nn}.$$

Επειδή το πολυώνυμο $P(t)$ από την υπόθεση μας είναι το μηδενικό, θα έχουμε $b_i = 0$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$. Επειδή $a_{nn} \neq 0$, από τη σχέση (n) έπεται ότι $k_n = 0$. Τότε όμως από τη σχέση (n-1), επειδή $a_{n-1,n-1} \neq 0$, έπεται ότι $k_{n-1} = 0$. Συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο θα έχουμε τελικά $k_n = k_{n-1} = \cdots = k_1 = k_0 = 0$, και επομένως τα πολυώνυμα $P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 4.1.10 Στον διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^2 υπεράνω του \mathbb{R} θεωρούμε τα διανύσματα $\bar{x} = (x_1, x_2)$ και $\bar{y} = (y_1, y_2)$. Να δείξετε ότι το σύνολο $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν-ν $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

➤ Γραμμική Ανεξαρτησία

- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 76 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Άσκηση 4.1.11 Θεωρούμε στο \mathbb{R}^2 δύο διανύσματα τα οποία είναι μοναδιαία και κάθετα. Να δείξετε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 4.1.12 Έστω $\mathbb{K}[t]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Στο Παράδειγμα 3.2.4 είδαμε ότι $\mathbb{K}[t] = \langle 1, t, t^2, \dots, t^n, \dots \rangle$, δηλαδή ο $\mathbb{K}[t]$ παράγεται υπεράνω του \mathbb{K} από τα άπειρα το πλήθος πολυώνυμα $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$. Θα δείξουμε ότι αυτά τα πολυώνυμα είναι και γραμμικά ανεξάρτητα. Σύμφωνα με τον ορισμό αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο S του συνόλου $\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Προφανώς κάθε τέτοιο υποσύνολο είναι της μορφής $\{t^{n_1}, t^{n_2}, \dots, t^{n_k}\}$, όπου $n_1, n_2, \dots, n_k \geq 0$ είναι διακεκριμένοι μη-αρνητικοί ακέραιοι. Αν $l_1 t^{n_1} + l_2 t^{n_2} + \dots + l_k t^{n_k} = 0$, τότε το πολυώνυμο $P(t) = l_1 t^{n_1} + l_2 t^{n_2} + \dots + l_k t^{n_k}$ είναι το μηδενικό, και επομένως από τον ορισμό θα έχουμε $l_1 = l_2 = \dots = l_k = 0$. Άρα το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως το σύνολο γεννητόρων $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ του $\mathbb{K}[t]$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Θα αποδείξουμε τώρα κάποιες βασικές προτάσεις που δείχνουν ότι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο ικανοποιεί σημαντικές ιδιότητες. Αν και αυτές οι ιδιότητες ισχύουν (με ανάλογη απόδειξη) και για άπειρα σύνολα διανυσμάτων, χάριν ευκολίας θα περιορισθούμε σε πεπερασμένα σύνολα.

Η παρακατω Πρόταση αποτελεί γενίκευση του Λήμματος 4.1.7.

Πρόταση 4.1.13 Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} .

1. Κάθε υποσύνολο ενός γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου του \mathcal{V} είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
2. Κάθε υπερσύνολο ενός γραμμικά εξαρτημένου συνόλου του \mathcal{V} είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Απόδειξη

Πρόταση 4.1.14 1. Το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{X} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ του \mathcal{V} είναι γραμμικά εξαρτημένο αν-ν τουλάχιστον ένα από τα \bar{x}_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωματά Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

► Γραμμική Ανεξαρτησία

- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 77 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

2. Υποθέτουμε ότι το σύνολο διανυσμάτων $X = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ του V είναι γραμμικά ανεξάρτητο και έστω $\bar{x} \in V$. Τότε το σύνολο διανυσμάτων $X \cup \{\bar{x}\} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο αν-ν το \bar{x} είναι γραμμικός συνδυασμός των $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. **Απόδειξη**

Πρόταση 4.1.15 Έστω $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
2. Κάθε διάνυσμα του $\langle S \rangle$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του S (με άλληλα λόγια αν $k_1\bar{x}_1 + \dots + k_n\bar{x}_n = l_1\bar{x}_1 + \dots + l_n\bar{x}_n$, τότε $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_n = l_n$).

Απόδειξη

Συνδυάζοντας την παραπάνω Πρόταση 4.1.15 με την Πρόταση 3.3.15, έχουμε το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 4.1.16 Έστω $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
2. Το άθροισμα υπόχωρων $\langle \bar{x}_1 \rangle + \langle \bar{x}_2 \rangle + \dots + \langle \bar{x}_n \rangle$ είναι ευθύ.
3. $\langle S \rangle = \langle \bar{x}_1 \rangle \oplus \langle \bar{x}_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \bar{x}_n \rangle$.

Απόδειξη

Άσκηση 4.1.17 1. Να δείχθει ότι τα διανύσματα $\bar{x} = (3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, $\bar{y} = (7, 1 + 2\sqrt{2})$ του \mathbb{R}^2 είναι γραμμικά εξαρτημένα όταν το \mathbb{R}^2 θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικό Χώρο
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

➤ Γραμμική Ανεξαρτησία

➤ Η Έννοια της Βάσης

➤ Η Έννοια της Διάστασης

➤ Διάσταση Υπόχωρων

➤ Βαθμίδα Διανυσμάτων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 78 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

του \mathbb{R} , αλλιώς τα \bar{x}, \bar{y} είναι γραμμικά ανεξάρτητα όταν το \mathbb{R}^2 θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{Q} .

2. Ναδειχθεί ότι τα διανύσματα $\bar{x} = (1 - i, i)$, $\bar{y} = (2, -1 + i)$ του \mathbb{C}^2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα όταν το \mathbb{C}^2 θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{R} .

3. Αν a είναι ένας άρρητος αριθμός, ναδειχθεί ότι τα διανύσματα $\{1, a\}$ του \mathbb{R} είναι γραμμικά ανεξάρτητα όταν το \mathbb{R} θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{Q} .

Άσκηση 4.1.18 Για ποιές τιμές του $r \in \mathbb{R}$, το ακόλουθα διανύσματα

$$\bar{x} = (r, 1, 1), \quad \bar{y} = (1, r, 1), \quad \bar{z} = (1, 1, r)$$

του \mathbb{R}^3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

Άσκηση 4.1.19 Στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των συναρτήσεων από το \mathbb{R} στο \mathbb{R} , να δείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$f_1(t) = e^t, \quad f_2(t) = e^{2t}, \quad f_3(t) = e^{3t}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Να γενικευθεί το αποτέλεσμα για n το πλήθος συναρτήσεων.

Άσκηση 4.1.20 Να βρεθούν αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τα $a, b, c \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε τα διανύσματα

$$\bar{x} = (1, 1, 1, a), \quad \bar{y} = (1, 0, 1, b), \quad \bar{z} = (-2, 2, -2, c)$$

του \mathbb{R}^4 να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 4.1.21 Έστω $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$, και έστω \bar{x} ένα διάνυσμα του \mathcal{V} το οποίο δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, δηλαδή $\bar{x} \notin \langle S \rangle$. Να δείξετε ότι το σύνολο $\{\bar{x}_1 + \bar{x}, \bar{x}_2 + \bar{x}, \dots, \bar{x}_n + \bar{x}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικός Χώρος
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

➤ Γραμμική Ανεξαρτησία

➤ Η Έννοια της Βάσης

➤ Η Έννοια της Διάστασης

➤ Διάσταση Υπόχωρων

➤ Βαθμίδα Διανυσμάτων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 79 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

4.2. Η Έννοια της Βάσης

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Συνδυάζοντας την έννοια των γεννητόρων ενός διανυσματικού χώρου και την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας, αποκτούμε την έννοια της βάσης η οποία είναι θεμελιώδους σημασίας στην θεωρία των διανυσματικών χώρων.

Ορισμός 4.2.1 Ένα υποσύνολο B του διανυσματικού χώρου $V_{\mathbb{K}}$ καλείται **βάση** του V (υπεράνω του \mathbb{K}) αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. Το σύνολο B είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
2. Το σύνολο B παράγει τον χώρο V , δηλαδή $V = \langle S \rangle$.

Μια από τις σημαντικότερες ιδιότητες της βάσης περιγράφεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2.2 Έστω $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ ένα υποσύνολο του V . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το σύνολο B είναι μια βάση του V .
2. Κάθε διάνυσμα του V γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου B .
3. $V = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle$.

Απόδειξη

Ο κύριος σκοπός της παρούσης παραγράφου είναι να δείξουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος έχει τουλάχιστον μια βάση. Στην επόμενη παράγραφο θα δείξουμε επιπρόσθετα ότι δύο τυχούσες βάσεις περιέχουν τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων.

Όμως πριν περάσουμε στην απόδειξη του σημαντικού αυτού αποτελέσματος, η οποία θα απαιτήσει αρκετά βήματα, θα δώσουμε κάποια παραδείγματα βάσεων.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

➤ Γραμμική Ανεξαρτησία

➤ Η Έννοια της Βάσης

➤ Η Έννοια της Διάστασης

➤ Διάσταση Υπόχωρων

➤ Βαθμίδα Διανυσμάτων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 80 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Παράδειγμα 4.2.3 Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και $n \geq 1$.

1. Για κάθε $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, το μονοσύνολο $\{k\}$ αποτελεί μια βάση του διανυσματικού χώρου \mathbb{K} υπεράνω του \mathbb{K} .

Πράγματικά: Κάθε μη-μηδενικό στοιχείο $k \in \mathbb{K}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και επιπλέον παράγει τον διανυσματικό χώρο \mathbb{K} υπεράνω του εαυτού του διότι $\forall l \in \mathbb{K}$: $l = (lk^{-1})k$. Άρα το μονοσύνολο $\{k\}$ είναι βάση του \mathbb{K} .

2. Το σύνολο $\mathcal{B} := \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ αποτελεί μια βάση, η οποία καλείται **κανονική**, του \mathbb{K}^n , όπου (το 1 εμφανίζεται στην i συνιστώσα):

$$\bar{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad 1 \leq i \leq n$$

Πράγματι, έχουμε ήδη δείξει προηγούμενα ότι το σύνολο \mathcal{B} είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο γεννητόρων του \mathbb{K}^n . Επομένως το σύνολο \mathcal{B} είναι μια βάση του \mathbb{K}^n .

3. Το σύνολο $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n[t]$ των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ n , υπεράνω του \mathbb{K} .

Πράγματι: Είναι προφανές ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ παράγει τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}_n[t]$ (δες και το Παράδειγμα 3.2.16). Επιπλέον από το Παράδειγμα 4.1.9 έπεται ότι το σύνολο \mathcal{B} είναι και γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως το \mathcal{B} είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[t]$.

Το ακόλουθο σπουδαίο αποτέλεσμα δείχνει ότι ανάμεσα σε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων το οποίο περιέχεται σε ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων μπορούμε να παρεμβάλλουμε μια βάση.

Θεώρημα 4.2.4 [Παρεμβολή Βάσης] Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} και έστω $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ δύο υποσύνολα του \mathcal{V} για τα οποία ισχύουν τα εξής:



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

➤ Γραμμική Ανεξαρτησία

➤ Η Έννοια της Βάσης

➤ Η Έννοια της Διάστασης

➤ Διάσταση Υπόχωρων

➤ Βαθμίδα Διανυσμάτων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 81 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

1. Το σύνολο \mathcal{F} είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Το σύνολο \mathcal{G} είναι ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του \mathcal{V} .

Τότε υπάρχει μια βάση \mathcal{B} του \mathcal{V} έτσι ώστε: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$.

Απόδειξη

Το παραπάνω θεώρημα έχει δύο σημαντικά πορίσματα τα οποία δείχνουν ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος έχει τουλάχιστον μια βάση και επιπρόσθετα σε έναν τέτοιον χώρο κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση.

Πόρισμα 4.2.5 [Υπαρξη Βάσης] Έστω ότι $\mathcal{G} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου \mathcal{V} . Τότε υπάρχει ένα υποσύνολο \mathcal{B} του \mathcal{G} το οποίο είναι μια βάση του \mathcal{V} , δηλαδή υπάρχουν δείκτες $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{B} = \{\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_k}\}$ να είναι βάση του \mathcal{V} .

Ιδιαίτερα κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος έχει τουλάχιστον μια βάση.

Απόδειξη

Πόρισμα 4.2.6 [Επέκταση Γραμμικά Ανεξάρτητου Υποσυνόλου σε μια Βάση] Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} , και έστω $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του \mathcal{V} . Τότε υπάρχουν διανύσματα $\bar{x}_{k+1}, \bar{x}_{k+2}, \dots, \bar{x}_n$, όπου $n \geq 1$, έτσι ώστε το σύνολο $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \bar{x}_{k+2}, \dots, \bar{x}_n\}$ να είναι μια βάση του \mathcal{V} .

Απόδειξη

Παράδειγμα 4.2.7 Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\bar{x} = (2, 1, 4, 3), \quad \bar{y} = (2, 1, 2, 0)$$

του \mathbb{R}^4 . Θα δείξουμε ότι τα \bar{x}, \bar{y} είναι γραμμικά ανεξάρτητα και θα προσδιορίσουμε δύο διανύσματα \bar{z}, \bar{w} έτσι ώστε το σύνολο $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}\}$ να αποτελεί βάση του \mathbb{R}^4 .



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωματά Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

➤ Γραμμική Ανεξαρτησία

➤ Η Έννοια της Βάσης

➤ Η Έννοια της Διάστασης

➤ Διάσταση Υπόχωρων

➤ Βαθμίδα Διανυσμάτων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 82 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

1. Έστω $k\bar{x} + l\bar{y} = \bar{0}$. Τότε $k(2, 1, 4, 3) + l(2, 1, 2, 0) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow (2k + 2l, k + l, 4k + 2l, 3k) = (0, 0, 0, 0)$. Προφανώς η τελευταία σχέση δίνει ότι $k = l = 0$ και επομένως τα \bar{x}, \bar{y} είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2. Θεωρούμε την κανονική βάση $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ του \mathbb{R}^4 . Αν το \bar{e}_1 ήταν γραμμικός συνδυασμός των \bar{x} και \bar{y} , τότε θα είχαμε μια σχέση της μορφής:

$$\bar{e}_1 = a\bar{x} + b\bar{y}, \text{ δηλαδή: } (1, 0, 0, 0) = a(2, 1, 4, 3) + b(2, 1, 2, 0)$$

Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την $(1, 0, 0, 0) = (2a + 2b, 1 + b, 4a + 2b, 3a)$ η οποία εύκολα βλέπουμε ότι είναι αδύνατη. Επομένως, από την Πρόταση 4.1.14, έπεται ότι το σύνολο $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{e}_1\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Εργαζόμενοι παρόμοια βλέπουμε ότι το διάνυσμα \bar{e}_2 δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{e}_1\}$, και επομένως το σύνολο $B' := \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θα δείξουμε ότι το σύνολο B' είναι μια βάση του \mathbb{R}^4 (Αν είχαμε αποδείξει σ' αυτό το σημείο το Θεώρημα 4.3.13, το ζητούμενο θα ήταν άμεσο). Αρκεί να δείξουμε ότι το B' παράγει τον \mathbb{R}^4 . Θα έχουμε:

$$\bar{x} - \bar{y} = (0, 0, 2, 3) = 2\bar{e}_3 + 3\bar{e}_4$$

$$\bar{x} - 2\bar{y} = (-2, -1, 0, 3) = -2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 3\bar{e}_4$$

Άρα αφαιρώντας θα έχουμε $\bar{y} = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$. Επομένως:

$$\bar{e}_3 = \frac{1}{2}\bar{y} - \bar{e}_1 - \frac{1}{2}\bar{e}_2$$

Τότε από την πρώτη σχέση θα έχουμε:

$$\bar{e}_4 = \frac{1}{3}[\bar{x} - \bar{y} - 2\bar{e}_3] = \frac{1}{3}[\bar{x} - 2\bar{y} + 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2]$$

Τώρα επειδή κάθε διάνυσμα $\bar{r} = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$: $\bar{r} = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3 + d\bar{e}_4$, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω σχέσεις, θα έχουμε:

$$\bar{r} = (a - c + \frac{2d}{3})\bar{e}_1 + (b - \frac{c}{2} + \frac{d}{3})\bar{e}_2 + (\frac{d}{3} - c)\bar{x} + (\frac{c}{2} - \frac{2d}{3})\bar{y}$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

➤ Γραμμική Ανεξαρτησία

➤ Η Έννοια της Βάσης

➤ Η Έννοια της Διάστασης

➤ Διάσταση Υπόχωρων

➤ Βαθμίδα Διανυσμάτων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 83 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

και επομένως το σύνολο διανυσμάτων \mathcal{B}' παράγει τον \mathbb{R}^4 . Έτσι θέτοντας $\bar{z} = \bar{e}_1$ και $\bar{w} = \bar{e}_2$ έχουμε το ζητούμενο.

4.3. Η Έννοια της Διάστασης

Έχοντας δείξει ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} έχει τουλάχιστον μια βάση, προκύπτει εύλογα το ερώτημα αν δύο τυχούσες βάσεις του \mathcal{V} έχουν κάποιες κοινές ιδιότητες. Το Παράδειγμα 4.1.5 δείχνει ότι τα διανύσματα δύο βάσεων μπορεί να είναι διαφορετικά, επομένως δεν μπορούμε να περιμένουμε δύο τυχούσες βάσεις να έχουν κοινά διανύσματα. Όπως θα δείξουμε παρακάτω η ιδιότητα η οποία παραμένει αναλλοίωτη είναι ότι δύο τυχούσες βάσεις περιέχουν τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων.

Το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα είναι το κλειδί για την απόδειξη του αναλλοίωτου του πλήθους διανυσμάτων δύο βάσεων.

Λήμμα 4.3.1 [Λήμμα Ανταλλαγής] Έστω $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων το οποίο παράγει τον \mathcal{V} , και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο διανυσμάτων του \mathcal{V} . Τότε $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{G}|$. Απόδειξη

Πόρισμα 4.3.2 Κάθε βάση ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου \mathcal{V} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} περιέχει πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων. Απόδειξη

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.3.3 Έστω \mathcal{B}_1 και \mathcal{B}_2 δύο βάσεις ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$. Τότε $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$. Απόδειξη

Το παραπάνω Θεώρημα μας οδηγεί άμεσα στον ακόλουθο ορισμό.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικός Χώρος
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 84 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Ορισμός 4.3.4 Έστω $V_{\mathbb{K}}$ ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Το πλήθος των διανυσμάτων μιας τυχούσας βάσης B του V καλείται **διάσταση** του V και συμβολίζεται ως εξής:

$$\dim_{\mathbb{K}} V := |B|, \quad B \text{ είναι τυχούσα βάση του } V$$

Από τώρα και στο εξής πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι $V_{\mathbb{K}}$ θα καλούνται **διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης** και τότε θα γράφουμε $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$. Το υπόλοιπο μέρος των σημειώσεων θα αφιερωθεί στην μελέτη τους.

Σχόλιο 4.3.5 Όπως έχουμε δει η έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου, και άρα και η έννοια της βάσης, εξαρτάται από το σώμα υπεράνω του οποίου είναι ορισμένος ο διανυσματικός χώρος. Επομένως και η έννοια της διάστασης εξαρτάται από το σώμα υπεράνω του οποίου είναι ορισμένος ο διανυσματικός χώρος. Αυτή την εξάρτηση υποδηλώνει και ο συμβολισμός $\dim_{\mathbb{K}} V$.

Έτσι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ έχει $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, διότι ο αριθμός $1 \in \mathbb{C}$ είναι μια βάση του \mathbb{C} υπεράνω του \mathbb{C} . Πράγματι $1 \neq 0$ και άρα το 1 είναι γραμμικά ανεξάρτητο διάνυσμα του \mathbb{C} . Από την άλλη πλευρά κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός $z = z1$ του 1 με συντελεστές από το \mathbb{C} . Άρα το σύνολο $\{1\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ και επομένως $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

Από την άλλη πλευρά ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ έχει διάσταση 2 διότι το σύνολο $\{1, i\}$ είναι μια βάση του \mathbb{C} υπεράνω του \mathbb{R} . Πράγματι όπως έχουμε δει το σύνολο $\{1, i\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υπεράνω του \mathbb{R} . Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται ως $z = a + bi = a1 + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, έπεται ότι το σύνολο $\{1, i\}$ παράγει τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ και άρα αποτελεί βάση του. Επομένως $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Παρατήρηση 4.3.6 [Διανυσματικοί Χώροι Άπειρης Διάστασης] Διανυσματικοί χώροι $V_{\mathbb{K}}$ οι οποίοι δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενοι καλούνται χώροι άπειρης διάστασης. Γι' αυτούς τους χώρους θα γράφουμε $\dim_{\mathbb{K}} V = \infty$. Η θεωρία των χώρων άπειρης διάστασης, η οποία είναι αντικείμενο διαφορετικών μαθημάτων, π.χ. της Συναρτησιακής Ανάλυσης, δεν



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 85 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

θα μας απασχολήσει στις παρούσες σημειώσεις παρά μόνο περιστασιακά. Ο συμβολισμός $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \infty$ υποδηλώνει ότι ο χώρος $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ δεν είναι πεπερασμένης διάστασης, δηλαδή δεν έχει βάση με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ή ισοδύναμα δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενος.

Από την άλλη πλευρά η έννοια της βάσης, όπως την έχουμε ορίσει, έχει έννοια και για άπειρα σύνολα, και επομένως και για διανυσματικούς χώρους οι οποίοι δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενοι. Μπορεί κανείς να δείξει ότι δύο τυχούσες βάσεις ενός τυχόντος διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$, όχι και' ανάγκη πεπερασμένα παραγόμενοι, έχουν το ίδιο (ενδεχόμενα άπειρο) πλήθος στοιχείων. Η κοινή αυτή τιμή καλείται όπως και παραπάνω διάσταση του $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$. Σ' αυτό το σημείο θα πρέπει να είναι κανείς προσεκτικός καθώς υπάρχουν διαφορετικές έννοιες και «ποιότητες» απείρου, και επομένως κάποια διάκριση είναι αναγκαία.

Ενδεικτικά αναφέρουμε, χωρίς απόδειξη, τα ακόλουθα παραδείγματα διανυσματικών χώρων άπειρης διάστασης.

1. $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$, δηλαδή το σώμα των πραγματικών αριθμών θεωρούμενο σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος των ρητών έχει άπειρη διάσταση.
2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t] = \infty$, δηλαδή ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων υπεράνω του \mathbb{K} έχει άπειρη διάσταση.
3. $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(S, \mathbb{R}) = \infty$, όπου S είναι ένα άπειρο σύνολο· δηλαδή ο διανυσματικός χώρος όλων των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένα άπειρο σύνολο, βλ. 4.3.15 έχει άπειρη διάσταση.

Τυπικά διανυσματικοί χώροι συναρτήσεων, οι οποίοι είναι αντικείμενο της Ανάλυσης, είναι άπειρης διάστασης.

Στις παρούσες σημειώσεις κυρίως θα μας απασχολήσουν πεπερασμένα παραγόμενοι υπόχωροι διανυσματικών χώρων άπειρης διάστασης. Τέτοιοι υπόχωροι υπάρχουν σε αφθονία όπως δείχνει η ακόλουθη άμεση συνέπεια του Πορίσματος 4.2.5:



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

➤ Γραμμική Ανεξαρτησία

➤ Η Έννοια της Βάσης

➤ Η Έννοια της Διάστασης

➤ Διάσταση Υπόχωρων

➤ Βαθμίδα Διανυσμάτων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 86 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Πόρισμα 4.3.7 Έστω \mathcal{W} ένας υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου \mathcal{V} (ο οποίος δεν είναι κατ' ανάγκη πεπερασμένης διάστασης). Αν ο \mathcal{W} παράγεται από πεπερασμένα το πλήθος διανύσματα, τότε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} < \infty$.

Παράδειγμα 4.3.8 Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και $n \geq 1$.

1. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$.

Πράγματι: για κάθε μη-μηδενικό στοιχείο $k \in \mathbb{K}$, το μονοσύνολο $\{k\}$ είναι βάση του \mathbb{K} και επομένως $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$.

2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

Πράγματι: Έχουμε δείξει ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, όπου $\bar{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (το 1 εμφανίζεται στην i συνιστώσα), είναι μια βάση του \mathbb{K}^n . Άρα $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

3. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[t] = n + 1$.

Πράγματι: Έχουμε δείξει ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[t]$, και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[t] = n + 1$.

Παράδειγμα 4.3.9 Έστω τα ακόλουθα υποσύνολα του \mathbb{R}^4 :

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Θα υπολογίσουμε μια βάση και την διάσταση του υπόχωρου $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

Έστω $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Προσθέτοντας και ακολουθώντας αφαιρώντας τις εξισώσεις $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ και $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, θα έχουμε άμεσα ότι $x_1 = -x_3$ και $x_2 = -x_4$. Αντίστροφα κάθε στοιχείο $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε $x_1 = -x_3$ και $x_2 = -x_4$, ανήκει προφανώς στον υπόχωρο $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Επομένως:

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = -x_3, \quad x_2 = -x_4\}$$



$$= \{(x_1, x_2, -x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x_1(1, 0, -1, 0) + x_2(0, 1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Επομένως $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle$, όπου $\bar{e}_1 = (1, 0, -1, 0)$, και $\bar{e}_2 = (0, 1, 0, -1)$. Εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και άρα αποτελεί μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Συμπεραίνουμε ότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} \cap \mathcal{W} = 2$.

Πρόταση 4.3.10 Έστω $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ διανυσματικού χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Τότε:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_n) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_2 + \dots + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_n$$

Απόδειξη

Παράδειγμα 4.3.11 1. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \times \mathbb{C}) = 3$.

2. Η Πρόταση 4.3.10 δίνει μια άληθη απόδειξη του τύπου 2. του Παραδείγματος 4.3.8. Πραγματικά αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$ (n -παράγοντες).

Άσκηση 4.3.12 Έστω \mathcal{V} το σύνολο των λύσεων της γραμμικής εξίσωσης:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n = 0$$

δηλαδή:

$$\mathcal{V} := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n = 0\}$$

όπου $k_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Να προσδιορισθεί μια βάση και η διάσταση του \mathcal{V} .

Λύση: Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $k_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, τότε προφανώς $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$. Επομένως $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n$, και τυχούσα βάση, π.χ. η κανονική, είναι βάση του \mathcal{V} .

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 87 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωματά Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης

- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 88 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

2. Έστω ότι $(k_1, k_2, \dots, k_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $k_i \neq 0$. Τότε από την Εφαρμογή 3.2.18 έπεται ότι το σύνολο διανυσμάτων του \mathbb{R}^n

$$\vec{l}_1 := (1, 0, \dots, 0, l_1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{l}_{i-1} := (0, 0, \dots, 1, l_{i-1}, 0, \dots, 0), \dots$$

$$\vec{l}_{i+1} := (0, 0, \dots, 0, l_{i+1}, 1, \dots, 0), \dots, \vec{l}_n := (0, 0, \dots, 0, l_n, 0, \dots, 1)$$

όπου οι αριθμοί $l_j := \frac{k_j}{k_i}, \forall j \neq i$, εμφανίζονται στην i -συντεταγμένη, είναι ένα σύνολο γεννητόρων του \mathcal{V} . Θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \{\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_{i-1}, \vec{l}_{i+1}, \dots, \vec{l}_n\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του \mathcal{V} . Έστω $\mu_1 \vec{l}_1 + \mu_2 \vec{l}_2 + \dots + \mu_{i-1} \vec{l}_{i-1} + \mu_{i+1} \vec{l}_{i+1} + \dots + \mu_n \vec{l}_n = \vec{0}$. Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{i-1}, \mu, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n) = (0, 0, \dots, 0)$, όπου $\mu := \mu_1 l_1 + \mu_2 l_2 + \dots + \mu_n l_n$. Τετρωμένα αυτές οι σχέσεις συνεπάγονται ότι $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$, και άρα πράγματι το σύνολο \mathcal{B} είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Συμπεραίνουμε ότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n - 1$, διότι η βάση \mathcal{B} του \mathcal{V} έχει $n - 1$ στοιχεία.

Κλείνουμε την παρούσα παράγραφο με κάποιες σημαντικές συνέπειες των όσων έχουμε αποδείξει μέχρι τώρα.

Θεώρημα 4.3.13 1. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, τότε κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του \mathcal{V} έχει το πολύ n στοιχεία.

2. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, τότε κάθε σύνολο γεννητόρων του \mathcal{V} έχει τουλάχιστον n στοιχεία.

3. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, τότε κάθε σύνολο διανυσμάτων του \mathcal{V} με περισσότερα από n στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένο.

4. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, τότε κάθε σύνολο διανυσμάτων \mathcal{B} του \mathcal{V} το οποίο ικανοποιεί 2 από τις ακόλουθες 3 ιδιότητες είναι βάση.

(a) Το \mathcal{B} είναι γραμμικά ανεξάρτητο.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

➤ Γραμμική Ανεξαρτησία

➤ Η Έννοια της Βάσης

➤ Η Έννοια της Διάστασης

➤ Διάσταση Υπόχωρων

➤ Βαθμίδα Διανυσμάτων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 89 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

(b) Το \mathcal{B} παράγει τον \mathcal{V} .

(c) Το \mathcal{B} έχει ακριβώς n στοιχεία.

Απόδειξη

Άσκηση 4.3.14 Έστω $\mathcal{B} = \{\bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_n\}$ μια βάση του διανυσματικού χώρου \mathcal{V} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Να δείξετε ότι το σύνολο:

$$\mathcal{B}' := \{\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2, \dots, \bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2 + \dots + \bar{\epsilon}_n\}$$

είναι επίσης μια βάση του \mathcal{V} .

Λύση: Επειδή $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.13, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο \mathcal{B}' είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω

$$k_1 \bar{\epsilon}_1 + k_2(\bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2) + \dots + k_n(\bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2 + \dots + \bar{\epsilon}_n) = \bar{0}$$

Αυτή η σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_n)\bar{\epsilon}_1 + (k_2 + \dots + k_n)\bar{\epsilon}_2 + \dots + (k_{n-1} + k_n)\bar{\epsilon}_{n-1} + k_n \bar{\epsilon}_n = \bar{0}$$

Επειδή το σύνολο $\{\bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι θα έχουμε:

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = k_2 + \dots + k_n = \dots = k_{n-1} + k_n = k_n = 0$$

Οι τελευταίες σχέσεις προφανώς δίνουν ότι $k_1 = \dots = k_n = 0$. Άρα το σύνολο \mathcal{B}' είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Παράδειγμα 4.3.15 Παραδείγματα Βάσεων στον $\mathbb{K}_n[t]$.

1. Έστω $P(t) \in \mathbb{K}_n[t]$ ένα πολυώνυμο βαθμού n . Τότε το σύνολο

$$\mathcal{B} := \{P(t), P'(t), P''(t), \dots, P^{(n)}(t)\}$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 90 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[t]$, όπου $P^{(k)}(t)$ είναι η παράγωγος k -τάξης του $P(t)$.

Πραγματικά: Επειδή $\deg P(t) = n$, έπεται άμεσα ότι $\deg P'(t) = n - 1$, $\deg P''(t) = n - 2$, \dots , $\deg P^{(n-1)}(t) = 1$, $\deg P^{(n)}(t) = 0$. Από το Παράδειγμα 4.1.9 έπεται ότι το σύνολο \mathcal{B} είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επειδή $|\mathcal{B}| = n + 1$ επειδή από το Παράδειγμα 4.3.8 έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[t] = n + 1$, από το Θεώρημα 4.3.13 έπεται ότι το σύνολο \mathcal{B} είναι βάση του $\mathbb{K}_n[t]$.

2. Έστω $a \in \mathbb{K}$. Τότε το σύνολο

$$\mathcal{C} := \{1, (t - a), (t - a)^2, \dots, (t - a)^n\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[t]$.

Εργαζόμενοι όπως και στο 1., επειδή το πλήθος των διανυσμάτων του συνόλου \mathcal{C} είναι $n + 1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[t]$, από το Θεώρημα 4.3.13 έπεται ότι το σύνολο \mathcal{C} είναι βάση του $\mathbb{K}_n[t]$.

Ερώτηση: Ποιές είναι οι συνιστώσες του τυχόντος πολυωνύμου $P(t) \in \mathbb{K}_n[t]$ στην παραπάνω βάση;

Απάντηση: Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor από τον Απειροστικό Λογισμό, έπεται ότι το πολυώνυμο $P(t)$ γράφεται μοναδικά ως εξής:

$$P(t) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(t - a) + \frac{P''(a)}{2!}(t - a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(t - a)^n$$

και επομένως οι συνιστώσες είναι: $\frac{P^{(k)}(a)}{k!}$, $0 \leq k \leq n$.

Άσκηση 4.3.16 Να εξετασθεί αν τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{K}_n[t]$ είναι βάσεις του $\mathbb{K}_n[t]$:

1. $\{1, 1 + t, 1 + t + t^2, \dots, 1 + t + t^2 + \dots + t^n\}$.
2. $\{1 + t, t + t^2, \dots, t^{n-1} + t^n\}$.
3. $\{1, 1 - t, (1 - t)^2, \dots, (1 - t)^n\}$.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωματά Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- **Διάσταση Υπόχωρων**
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 91 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

4.4. Διάσταση Υπόχωρων

Αν \mathcal{W} είναι ένας υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου \mathcal{V} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , τότε όπως έχουμε δει ο \mathcal{W} με τους περιορισμούς των πράξεων του \mathcal{V} είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} , και επομένως ορίζεται η διάσταση του \mathcal{W} , όταν αυτός είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της διάστασης ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης σε σχέση με τους υπόχωρους του.

Αρχίζουμε με την ακόλουθη πρόταση η οποία δείχνει ότι η ιδιότητα ενός διανυσματικού χώρου να είναι πεπερασμένης διάστασης κληρονομείται στους υπόχωρους του.

Πρόταση 4.4.1 Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και έστω \mathcal{W} ένας υπόχωρος του \mathcal{V} .

1. Ο υπόχωρος \mathcal{W} έχει πεπερασμένη διάσταση.
2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$.
3. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$ αν-ν $\mathcal{W} = \mathcal{V}$.

Απόδειξη

Σχόλιο 4.4.2 1. Σύμφωνα με τη Πρόταση 4.4.1 υπόχωροι διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης έχουν πεπερασμένη διάσταση. Από τώρα και στο εξής θα χρησιμοποιούμε αυτό το σημαντικό αποτέλεσμα χωρίς περαιτέρω αναφορά.

2. Η διάσταση του μηδενικού υπόχωρου $\{\bar{0}\}$ είναι, όπως θα περίμενε κανείς, ίση με 0. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι το κενό σύνολο \emptyset είναι μια βάση του $\{\bar{0}\}$. Αντίστροφα αν \mathcal{W} είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{V} και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = 0$, τότε $\mathcal{W} = \{\bar{0}\}$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα χαρακτηρίζει το ευθύ άθροισμα υπόχωρων συναρτήσσει ιδιότητα της διάστασης των υπόχωρων.



Πρόταση 4.4.3 Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και έστω \mathcal{Z} και \mathcal{W} δύο υπόχωροι του \mathcal{V} . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ είναι ευθύ.
2. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} + \mathcal{Z}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z}$.

Απόδειξη

Άσκηση 4.4.4 Έστω τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}_n[t]$:

$$\mathcal{V} := \{P(t) \in \mathbb{R}_n[t] \mid P(t) = P(-t)\}$$

$$\mathcal{W} := \{P(t) \in \mathbb{R}_n[t] \mid P(t) = -P(-t)\}$$

Να δείξετε τα υποσύνολα \mathcal{V} και \mathcal{W} είναι υπόχωροι και ισχύει: $\mathbb{R}_n[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. Ποιά είναι η διάσταση του \mathcal{V} και ποιά του \mathcal{W} ;

Το ακόλουθο Θεώρημα περιγράφει μια σπουδαία ιδιότητα την οποία ικανοποιούν οι διανυσματικοί χώροι, και η οποία δείχνει ότι κάθε υπόχωρος έχει έναν «συμπληρωματικό» υπόχωρο ως προς το ευθύ άθροισμα υπόχωρων.

Θεώρημα 4.4.5 Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας πεπερασμένα παραγόμενα διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Τότε για κάθε υπόχωρο \mathcal{W} του \mathcal{V} , υπάρχει (τουλάχιστον ένας) υπόχωρος \mathcal{Z} του \mathcal{V} έτσι ώστε: $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$.

Απόδειξη

Παρατήρηση 4.4.6 Ο υπόχωρος \mathcal{Z} που μας εξασφαλίζει το Θεώρημα 4.4.5 δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικός. Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι εν γένει υπάρχουν άπειροι το πλήθος διαφορετικοί υπόχωροι \mathcal{Z} που ικανοποιούν το Θεώρημα.

Έστω $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ και έστω $\mathcal{W} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ ο υπόχωρος του \mathbb{R}^2 που παράγεται από το διάνυσμα $(1, 0)$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι τα ακόλουθα σύνολα $\mathcal{Z}_n := \{(x, nx) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$, $n \geq 1$, είναι ανά δύο διαφορετικοί υπόχωροι του \mathbb{R}^2 και επιπρόσθετα: $\mathbb{R}^2 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}_1 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}_2 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}_3 = \dots$ (ΝΑ ΤΟ ΔΕΙΞΕΤΕ ΣΑΝ ΑΣΚΗΣΗ).

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης

➤ **Διάσταση Υπόχωρων**

- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 92 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- **Διάσταση Υπόχωρων**
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 93 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Άσκηση 4.4.7 Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \dots, \mathcal{W}_n$ υπόχωροι του \mathcal{V} . Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$ είναι ευθύ.
2. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W}_2 + \dots + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W}_n$.

Άσκηση 4.4.8 Αν \mathcal{V}_1 και \mathcal{V}_2 είναι δύο υπόχωροι διάστασης 2 ενός διανυσματικού χώρου \mathcal{E} , διάστασης 3, να δείξετε ότι $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \{\mathbf{0}\}$.

Εάν το άθροισμα δύο υπόχωρων δεν είναι ευθύ, ο τύπος 2. στην Πρόταση 4.4.3 δεν ισχύει (ΝΑ ΒΡΕΙΤΕ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ). Ο τύπος που συνδέει τις διαστάσεις δύο υπόχωρων σε σχέση με τις διαστάσεις του αθροίσματος και της τομής τους δίνεται από το ακόλουθο Θεώρημα, το οποίο γενικεύει την Πρόταση 4.4.3.

Θεώρημα 4.4.9 Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και έστω \mathcal{Z} και \mathcal{W} δύο υπόχωροι του \mathcal{V} . Τότε ισχύει ο εξής τύπος:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} + \mathcal{Z}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} \cap \mathcal{Z})$$

Απόδειξη

Άσκηση 4.4.10 Έστω $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} με $\dim_{\mathbb{K}} = 4$, και έστω \mathcal{V}, \mathcal{W} δύο υπόχωροι του \mathcal{E} για τους οποίους ισχύει $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 2$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = 3$. Να υπολογισθούν οι πιθανές τιμές της διάστασης $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$ και να δειχθεί ότι: $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ αν-ν $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 2$.

Λύση: Από την εξίσωση

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- **Βαθμίδα Διανυσμάτων**
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 94 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

του Θεωρήματος 4.4.9, θα έχουμε: $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = 2 + 3 - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 5 - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$. Όμως το σύνολο $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^4 , και άρα $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4$. Επομένως $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \geq 5 - 4 = 1$. Από την άλλη πλευρά το σύνολο $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του \mathcal{V} , και άρα $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$. Έτσι θα έχουμε: $1 \leq \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \leq 2$. Εάν $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 2$, τότε επειδή $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$ και $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, θα έχουμε $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V}$, το οποίο σημαίνει ότι $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. Αντίστροφα αν $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, τότε προφανώς $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V}$ και επομένως $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$.

Άσκηση 4.4.11 Έστω $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} με $\dim_{\mathbb{K}} = 7$, και έστω \mathcal{V}, \mathcal{W} δύο υπόχωροι του \mathcal{E} για τους οποίους ισχύει $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 4$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = 5$. Να υπολογισθούν οι πιθανές τιμές της διάστασης $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$ και ναδειχθεί ότι: $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ αν-ν $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 4$.

Άσκηση 4.4.12 Έστω $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και έστω $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$ τρεις υπόχωροι του \mathcal{E} . Να δείξετε ότι ισχύει ο ακόλουθος τύπος:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \cap \mathcal{Z}) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{Z}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \cap \mathcal{Z}).$$

4.5. Βαθμίδα Διανυσμάτων

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε μεθόδους υπολογισμού της διάστασης του υπόχωρου ο οποίος παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο δοθέντων διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου.

Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, και έστω

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$



για βάση του \mathcal{E} .

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο \mathcal{X} διανυσμάτων του \mathcal{E} :

$$\mathcal{X} := \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\} \subseteq \mathcal{E}$$

και θεωρούμε τον υπόχωρο $\langle \mathcal{X} \rangle := \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m \rangle$ του \mathcal{E} ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα αυτά.

Ορισμός 4.5.1 Η βαθμίδα $\mathbf{r}(\bar{x}_i)$ των διανυσμάτων $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ του \mathcal{E} ορίζεται να είναι η διάσταση του υπόχωρου του \mathcal{E} ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα αυτά:

$$\mathbf{r}(\bar{x}_i) := \dim_{\mathbb{K}} \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m \rangle$$

Με άλλα λόγια η βαθμίδα $\mathbf{r}(\bar{x}_i)$ των διανυσμάτων $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$ μετρά το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων τα οποία ανήκουν στο σύνολο διανυσμάτων $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και το σύνολο $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m \rangle$ είναι υπόχωρος του \mathcal{E} , έπεται ότι:

$$\mathbf{r}(\bar{x}_i) \leq n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$$

Παρατήρηση 4.5.2 Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με την Πρόταση ; η βαθμίδα $\mathbf{r}(\bar{x}_i)$ του συνόλου των διανυσμάτων $\mathcal{X} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$ δεν αλληλάζει αν εκτελέσουμε στο σύνολο \mathcal{X} μια από τις στοιχειώδεις πράξεις $(\Sigma\Pi_1)$, $(\Sigma\Pi_2)$, και $(\Sigma\Pi_3)$ ή τυχόντα συνδυασμό τους.

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B} := \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ είναι βάση του \mathcal{E} , τα διανύσματα του συνόλου \mathcal{X} γράφονται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης \mathcal{B} :

$$\bar{x}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n$$

$$\bar{x}_2 = a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \dots + a_{2n}\bar{e}_n$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

(*)

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 95 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 96 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

$$\vec{x}_m = a_{m1}\vec{e}_1 + a_{m2}\vec{e}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{e}_n$$

Το ακόλουθο κριτήριο είναι πολύ χρήσιμο για τον υπολογισμό της βαθμίδας διανυσμάτων.

Πρόταση 4.5.3 Διατηρώντας τους παραπάνω συμβολισμούς, υποθέτουμε επιπλέον ότι ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \text{και} \quad a_{ij} = 0, \forall i > j.$$

Τότε τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ιδιαίτερα: $r(\vec{x}_i) = m$.

Απόδειξη

Σημείωση 4.5.4 Η παραπάνω Πρόταση 4.5.3 ισχύει και με την υπόθεση:

$$a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \text{και} \quad a_{ij} = 0, \forall i < j.$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.5.3.

Παράδειγμα 4.5.5 Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο \mathcal{E} διάστασης 5 υπεράνω του σώματος \mathbb{K} και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ μια βάση του \mathcal{E} . Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του \mathcal{E} :

$$A_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + \vec{e}_5$$

$$A_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 + 8\vec{e}_5$$

$$A_3 = 6\vec{e}_1 + 17\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 + 10\vec{e}_4 + 22\vec{e}_5$$

$$A_4 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.5.3 θα προσδιορίσουμε την βαθμίδα $r(A_i)$ αυτών των διανυσμάτων.

Σχηματίζουμε τον ακόλουθο πίνακα ο οποίος περιγράφει τις συνιστώσες των διανυσμάτων στην βάση \mathcal{B} :



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 97 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

A_1	A_2	A_3	A_4
1	2	6	1
2	5	17	3
-4	-3	-7	-3
3	4	10	2
1	8	22	0

Εκτελώντας διαδοχικά τις στοιχειώδεις πράξεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

A_1	$A'_2 = A_2 - 2A_1$	$A'_3 = A_3 - 6A_1$	$A'_4 = A_4 - A_1$
1	0	0	0
2	1	5	1
-4	5	17	1
3	-2	-8	-1
1	6	16	-1

A_1	A'_2	$A''_3 = A'_3 - 5A'_2$	$A''_4 = A'_4 - A'_2$
1	0	0	0
2	1	0	0
-4	5	-8	-4
3	-2	2	1
1	6	-14	-7

A_1	A'_2	A''_3	$A'''_4 = A''_4 - \frac{1}{2}A''_3$
1	0	0	0
2	1	0	0
-4	5	-8	0
3	-2	2	0
1	6	-14	0



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 98 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

και χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 4.5.2 βλέπουμε ότι:

$$\mathbf{r}(A_1, A_2, A_3, A_4) = \mathbf{r}(A_1, A'_2, A''_3)$$

Όμως τα διανύσματα

$$A_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 4\bar{e}_3 + 3\bar{e}_4 + \bar{e}_5$$

$$A'_2 = \bar{e}_2 + 5\bar{e}_{23} - 2\bar{e}_4 + 6\bar{e}_5$$

$$A''_3 = -8\bar{e}_3 + 2\bar{e}_4 - 14\bar{e}_5$$

ικανοποιούν τις προϋποθέσεις της Πρότασης 4.5.3, και επομένως $\mathbf{r}(A_1, A'_2, A''_3) = 3$. Άρα:

$$\mathbf{r}(A_1, A_2, A_3, A_4) = 3$$

Άσκηση 4.5.6 Να προσδιορίσετε την βαθμίδα των διανυσμάτων:

$$\bar{X}_1 = (1, 4, -1, 3), \bar{X}_2 = (2, 1, -3, -1), \bar{X}_3 = (0, 2, 1, -5)$$

του \mathbb{R}^4 .

Άσκηση 4.5.7 Να προσδιοριθεί η βαθμίδα των ακόλουθων διανυσμάτων του \mathbb{C}^4 :

$$A_1 = (1, i, 1 + i, -i)$$

$$A_2 = (-i, 0, 2 - i, 1 + i)$$

$$A_3 = (0, -1, 0, 1)$$

$$A_4 = (3i, -2 - i, -4 + 3i, -i)$$

4.6. Ασκήσεις



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτων Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 99 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Άσκηση 4.6.1 Είναι τα παρακάτω σύνολα διανυσμάτων γραμμικά ανεξάρτητα; Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

1. $\{1, \pi\} \subseteq \mathbb{R}$ υπεράνω του \mathbb{Q} .

(α) Σωστό

(β) Λάθος

2. $\{1, i\} \subseteq \mathbb{C}$ υπεράνω του \mathbb{R} .

(α) Σωστό

(β) Λάθος

3. $\{1, i\} \subseteq \mathbb{C}$ υπεράνω του \mathbb{C} .

(α) Σωστό

(β) Λάθος

4. $\{\bar{x}_2, \bar{x}_4, \bar{x}_6\} \subseteq \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ όταν γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6\} \subseteq \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(α) Σωστό

(β) Λάθος

5. $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\} \subseteq \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ όταν γνωρίζουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 3$.

(α) Σωστό

(β) Λάθος

Άσκηση 4.6.2 Έστω \mathcal{V} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών, και έστω $\{\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$. Να δείξετε ότι ο \mathcal{V} μπορεί να θεωρηθεί και ως διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{R} , και μάλιστα το σύνολο $\{\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_n, i\bar{\varepsilon}_1, \dots, i\bar{\varepsilon}_n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$. Να συμπεράνετε ότι:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}$$

Άσκηση 4.6.3 Έστω \mathcal{V} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Να δείξετε ότι ο \mathcal{V} ακριβώς δύο υπόχωρους αν και μόνον αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 1$.

Άσκηση 4.6.4 Έστω \mathcal{V} ο υπόχωρος του \mathbb{R}^4 ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:

$$\bar{x}_1 = (1, 1, 2, 4), \quad \bar{x}_2 = (2, -1, -5, 2), \quad \bar{x}_3 = (1, -1, -4, 0), \quad \bar{x}_4 = (2, 1, 1, 5),$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
 - Η Έννοια της Βάσης
 - Η Έννοια της Διάστασης
 - Διάσταση Υπόχωρων
 - Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 100 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Να προσδιορίσετε μια βάση του \mathcal{V} την οποία να επεκτείνετε σε μια βάση του \mathbb{R}^4 .

Άσκηση 4.6.5 Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$$

Να δείξετε ότι το \mathcal{V} είναι ένας υπόχωρος του \mathbb{R}^3 και να προσδιορισθεί υπόχωρος \mathcal{W} του \mathbb{R}^3 έτσι ώστε: $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. Είναι ο υπόχωρος \mathcal{W} μοναδικός;

Άσκηση 4.6.6 Έστω \mathcal{V} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Να δείξετε ότι αν $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i, \dots, \bar{e}_n\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του \mathcal{V} , τότε και το σύνολο $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i + \lambda \bar{e}_j, \dots, \bar{e}_n\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του \mathcal{V} , για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και $i \neq j$.

Άσκηση 4.6.7 Έστω \mathcal{V} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Να δείξετε ότι αν $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i, \dots, \bar{e}_n\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του \mathcal{V} . Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το σύνολο

$$\{\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_{n-1} + \bar{e}_n, \bar{e}_n + \bar{e}_1\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Το n είναι περιττός.

Άσκηση 4.6.8 Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του \mathbb{R}^4 :

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4 \text{ και } x_2 = 2x_3\}$$

$$\mathcal{Z} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ και } x_2 = 2x_4\}$$

Να βρεθούν βάσεις και η διάσταση των υπόχωρων: $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ και $\mathcal{Z} \cap \mathcal{X}$.



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 101 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Άσκηση 4.6.9 Να προσδιορισθεί, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η βαθμίδα των διανυσμάτων:

$$\vec{x} = (-1, 1, 3), \quad \vec{y} = (5, -2, 9), \quad \vec{z} = (1, -\lambda, 2\lambda)$$

Άσκηση 4.6.10 Έστω $M_{(2 \times 2)}(\mathbb{C})$ ο διανυσματικός χώρος των 2×2 πινάκων υπεράνω του σώματος \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών. Να εξετασθεί αν το ακόλουθο σύνολο πινάκων $\{A, B, C, D\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3i & -2-i \\ -5+3i & -i \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4.6.11 1. Να προσδιορισθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε τα διανύσματα του \mathbb{R}^3

$$\vec{x}_1 = (\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \quad \vec{x}_2 = (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}), \quad \vec{x}_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda)$$

να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2. Για ποιές τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τα ακόλουθα διανύσματα του \mathbb{R}^4 είναι γραμμικά εξαρτημένα;

(α')

$$\vec{x}_1 = (3, -2, -1, 3), \quad \vec{x}_2 = (1, 0, 2, 4), \quad \vec{x}_3 = (1, -3, \lambda, \mu)$$

(β')

$$\vec{x}_1 = (1, 2, \lambda, 1), \quad \vec{x}_2 = (\lambda, 1, 2, 3), \quad \vec{x}_3 = (0, 1, \mu, 0)$$



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωματά Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

➤ Γραμμική Ανεξαρτησία
➤ Η Έννοια της Βάσης
➤ Η Έννοια της Διάστασης
➤ Διάσταση Υπόχωρων
➤ Βαθμίδα Διανυσμάτων
➤ Ασκήσεις

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 102 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

3. Να προσδιορισθεί η τιμή του $\beta \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε τα διανύσματα του $\mathbb{R}_3[t]$

$$P_1(t) = 3t^3 + t^2 - 4t + 6, \quad P_2(t) = t^3 + t^2 + 4t + 4, \quad P_3(t) = t^3 - 4t + \beta$$

να είναι γραμμικά εξαρτημένα.

4. Να προσδιορισθεί η τιμή του $\beta \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε τα διανύσματα του $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & \beta \end{pmatrix}$$

να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 4.6.12 Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του \mathbb{R}^3 :

$$\vec{x} = (1, -1, 2), \quad \vec{y} = (3, 1, -2)$$

Να δείξετε ότι τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ακολουθώντας να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός μ έτσι ώστε το σύνολο $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, όπου $\vec{z} = (1, \mu, 1)$, να είναι μια βάση του \mathbb{R}^3 .

Άσκηση 4.6.13 1. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου \mathcal{V} του \mathbb{R}^4 , όπου

$$\mathcal{V} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_3\}$$

2. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου \mathcal{V} του \mathbb{R}^4 , όπου

$$\mathcal{V} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$$

Άσκηση 4.6.14 Έστω \mathcal{V} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Έστω $\mathcal{X} := \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του \mathcal{V} .



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 103 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

1. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$\{\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{x}_2 + \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_{n-1} + \bar{x}_n, \bar{x}_n + \bar{x}_1\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$\{\bar{x}_1, k_2\bar{x}_1 + \bar{x}_2, k_3\bar{x}_1 + \bar{x}_3, \dots, k_{n-1}\bar{x}_1 + \bar{x}_n, k_n\bar{x}_1 + \bar{x}_n\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο, $\forall k_i \in \mathbb{K}, 2 \leq i \leq n$. Να εξετασθεί εάν ισχύει το αντίστροφο.

Άσκηση 4.6.15 Έστω \mathcal{V} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Αν \mathcal{W} είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{V} με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + 1 < \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$, να δείξετε ότι υπάρχει ένας υπόχωρος \mathcal{Z} του \mathcal{V} έτσι ώστε: $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{V}$ και $\mathcal{W} \neq \mathcal{Z} \neq \mathcal{V}$.

Άσκηση 4.6.16 Έστω \mathcal{V} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Το μήκος μια αλυσίδας υπόχωρων

$$\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \dots \subset \mathcal{W}_{k-1} \subset \mathcal{W}_k$$

ορίζεται να είναι ο αριθμός k . Να δείξετε ότι ο \mathcal{V} είναι πεπερασμένης διάστασης αν και μόνον αν υπάρχει μέγιστο στα μήκη όλων των δυνατών αλυσίδων υπόχωρων του \mathcal{V} .

Άσκηση 4.6.17 Να εξετάσετε εάν τα ακόλουθα πολυώνυμα

$$P(t) = t^3 - t^2 + 3, \quad Q(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 10, \quad R(t) = 3t^3 + 3t^2 + t + 1$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_3[t]$.

Άσκηση 4.6.18 Να προσδιορισθεί μια βάση του υπόχωρου του $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ο οποίος παράγεται από τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 104 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4.6.19 να δείξετε ότι το σύνολο πολυωνύμων:

$$P_0(t) = 1, P_1(t) = 1 + t, P_2(t) = 1 + t + t^2, \dots, P_n(t) = 1 + t + t^2 + \dots + t^n$$

είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n[t]$. Ακολουθώντας να βρεθούν οι συνιστώσες του τυχόντος πολυωνύμου $P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ ως προς την παραπάνω βάση.

Άσκηση 4.6.20 Να προσδιορισθεί η διάσταση του υπόχωρου του \mathbb{R}^n ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:

$$\bar{x}_1 = (1, 1, 0, \dots, 0, 0, 0), \quad \bar{x}_2 = (0, 1, 1, \dots, 0, 0, 0), \quad \dots$$

$$\bar{x}_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 1), \quad \bar{x}_n = (1, 0, 0, \dots, 0, 0, 1)$$

Άσκηση 4.6.21 Έστω \mathcal{V} το σύνολο όλων των 3×3 πινάκων υπεράνω του \mathbb{R} , της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι το \mathcal{V} είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, και αφού προσδιορίσετε μια βάση του, να υπολογίσετε την διάσταση του.

Άσκηση 4.6.22 Έστω \mathcal{V} το σύνολο όλων των 3×3 πινάκων υπεράνω του \mathbb{R} , της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι το \mathcal{V} είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, και αφού προσδιορίσετε μια βάση του, να υπολογίσετε την διάσταση του.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων

➤ Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 105 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Άσκηση 4.6.23 Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο με n στοιχεία. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ υπεράνω του \mathbb{R} όλων των συναρτήσεων $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Για κάθε στοιχείο $s \in S$ θεωρούμε την χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\chi_s : S \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \chi_s(t) = \begin{cases} 1, & \text{av } t = s \\ 0, & \text{av } t \neq s \end{cases}$$

Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{B} := \{\chi_s \mid s \in S\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$. Ποιά είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$;

Άσκηση 4.6.24 Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ των ακολουθιών με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, και έστω $p, q \in \mathbb{R}$ με $q \neq 0$. Έστω

$$\mathcal{V} = \{(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{R}) \mid x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}\}$$

ο υπόχωρος των αναγωγικών ακολουθιών. Να δείξετε προσδιορίσετε μια βάση και την διάσταση του \mathcal{V} .



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 106 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Κεφάλαιο 5

Γραμμικές Απεικονίσεις

Στην άλγεβρα, και γενικότερα στα Μαθηματικά, σπουδαίο ρόλο στην μελέτη μιας έννοιας ή ενός αντικειμένου διαδραματίζει η σύγκριση της με ομοειδείς έννοιες ή ομοειδή αντικείμενα. Στο παρόν Κεφάλαιο θα μελετήσουμε τρόπους σύγκρισης δύο διανυσματικών χώρων υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Όπως είδαμε η βασική δομή ενός διανυσματικού χώρου καθορίζεται από την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Επομένως είναι φυσικό να προσπαθήσουμε να συγκρίνουμε δύο διανυσματικούς χώρους μέσω μιας απεικόνισης η οποία απαιτούμε να διατηρεί την βασική δομή τους, δηλαδή την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Έτσι οδηγούμαστε στην έννοια της γραμμικής απεικόνισης μέσω της οποίας συσχετίζουμε και συγκρίνουμε δυο διανυσματικούς χώρους υπεράνω ενός σώματος, αν και ενδεχόμενα τα στοιχεία τους είναι διαφορετικής φύσης.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 107 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

5.1. Ορισμός - Βασικές Ιδιότητες - Παραδείγματα

Από τώρα και στο εξής θεωρούμε ένα σώμα \mathbb{K} και δύο διανυσματικούς χώρους \mathcal{E} και \mathcal{F} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} .

Ορισμός 5.1.1 Μια απεικόνιση $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ καλείται **γραμμική** αν ικανοποιεί τα ακόλουθες συνθήκες:

$$1. \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{E}: f(\bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y}).$$

$$2. \forall \bar{x} \in \mathcal{E}, \forall k \in \mathbb{K}: f(k\bar{x}) = kf(\bar{x}).$$

Πρίν περάσουμε σε παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων, θα δούμε κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες των γραμμικών απεικονίσεων οι οποίες απορρέουν σχετικά άμεσα από το ορισμό. Η παρακάτω πρόταση δείχνει ότι μια γραμμική απεικόνιση διατηρεί όλες τις έννοιες και κατασκευές οι οποίες απορρέουν από τον ορισμό του διανυσματικού χώρου.

Πρόταση 5.1.2 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ και $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$.

$$1. f(\vec{0}) = \vec{0}.$$

$$2. f(-\bar{x}) = -f(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{E}.$$

$$3. f(\bar{x} - \bar{y}) = f(\bar{x}) - f(\bar{y}), \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{E}.$$

$$4. \forall n \geq 1, \forall \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \mathcal{E}, \forall \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n \in \mathbb{K}:$$

$$f(\hat{\lambda}_1 \bar{x}_1 + \dots + \hat{\lambda}_n \bar{x}_n) = \hat{\lambda}_1 f(\bar{x}_1) + \dots + \hat{\lambda}_n f(\bar{x}_n).$$

Απόδειξη



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παράδειγμα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Αλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικονίσης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 108 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Πόρισμα 5.1.3 Έστω \mathcal{E}, \mathcal{F} δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Μια απεικόνιση $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ είναι γραμμική αν και μόνον αν:

$$f(\lambda \bar{x} + \mu \bar{y}) = \lambda f(\bar{x}) + \mu f(\bar{y}), \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{E}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Απόδειξη

Παράδειγμα 5.1.4 Έστω \mathcal{E}, \mathcal{F} δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος \mathbb{K} .

1. Η μηδενική απεικόνιση $\mathbb{O}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, η οποία ορίζεται ως εξής: $\mathbb{O}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(\bar{x}) = \bar{0}$, είναι τετριμμένα γραμμική.

2. Η ταυτοτική απεικόνιση $\text{Id}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, η οποία ορίζεται ως εξής: $\text{Id}_{\mathcal{E}}(\bar{x}) = \bar{x}$, είναι τετριμμένα γραμμική.

3. Έστω $r \in \mathbb{K}$ ένας σταθερός αριθμός. Ομοθεσία με λόγο r επί του \mathcal{E} καλείται η απεικόνιση $f_r : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $\bar{x} \mapsto f_r(\bar{x}) = r\bar{x}$. Προφανώς η f_r είναι μια γραμμική απεικόνιση.

Παρατηρούμε ότι για $r = 1$ έχουμε $f_1 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$, και για $r = 0$ έχουμε $f_0 = \mathbb{O}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$.

4. Έστω η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y, z)$. Τότε η f είναι γραμμική.

5. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής: $f(a + bi) = a$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε η f είναι γραμμική.

6. Έστω $n \geq 1$ ένας φυσικός αριθμός και έστω $\mathbb{K}_n[t]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με βαθμό $\leq n$ υπεράνω του \mathbb{K} . Τότε η απεικόνιση $f : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}_n[t]$ η οποία ορίζεται ως εξής

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

είναι γραμμική.

7. Η απεικόνιση $D : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$ η οποία στέλνει κάθε πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$ στην παράγωγο του $D(P(t)) = a_1 + 2a_2 t + \dots + na_n t^{n-1}$ είναι γραμμική απεικόνιση. Προφανώς η D μπορεί να θεωρηθεί και ως γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}_n[t] \rightarrow \mathbb{R}_n[t]$ ή ως γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}_n[t] \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[t]$.

8. Έστω $\theta \in [0, 2\pi]$ μια σταθερή γωνία, και έστω η απεικόνιση

$$f_{\theta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto f_{\theta}(x, y) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta))$$



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παράδειγμα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 109 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Τότε η απεικόνιση f_θ , η οποία αναπαριστά στροφή επιπέδου κατά γωνία θ , είναι γραμμική.

Άσκηση 5.1.5 Αποδείξτε ότι οι απεικονίσεις του Παραδείγματος 5.1.4 είναι πράγματι γραμμικές.

Άσκηση 5.1.6 Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) := (x + 1, y)$. Είναι η f γραμμική;

Σχόλιο 5.1.7 Όπως έχουμε δει υπάρχουν σύνολα τα οποία είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω δύο διαφορετικών σωμάτων. Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει ότι η έννοια της γραμμικής απεικόνισης εξαρτάται από το σώμα υπεράνω του οποίου είναι ορισμένοι οι διανυσματικοί χώροι.

Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(a + bi) = b + ai$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Αν θεωρήσουμε το \mathbb{C} σαν διανυσματικό χώρο υπεράνω του \mathbb{R} , τότε η f είναι γραμμική. Πραγματικά: έστω $z = a_1 + b_1 i$ και $w = a_2 + b_2 i$ δύο μιγαδικοί αριθμοί. Τότε $f(z+w) = f((a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)) = f((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i) = (b_1 + b_2) + (a_1 + a_2)i = (b_1 + a_1 i) + (b_2 + a_2 i) = f(z) + f(w)$. Επίσης αν $r \in \mathbb{R}$, τότε $f(rz) = f(r(a_1 + b_1 i)) = f(ra_1 + rb_1 i) = rb_1 + ra_1 i = r(b_1 + a_1 i) = rf(z)$. Άρα η $f : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ είναι γραμμική. Η f όμως δεν είναι γραμμική όταν το \mathbb{C} θεωρηθεί ως διανυσματικός χώρος υπεράνω του εαυτού του. Πραγματικά για να είναι η $f : \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ γραμμική θα πρέπει να ισχύει $f(zw) = zf(w)$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$. Όμως $f(zw) = f((a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)) = f((a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i) = (a_1 b_2 + b_1 a_2) + (a_1 a_2 + b_1 b_2)i$, και $zf(w) = (a_1 + b_1 i)(b_2 + a_2 i) = (a_1 b_2 - b_1 a_2) + (a_1 a_2 + b_1 b_2)i$. Ιδιαίτερα διαλέγοντας $z = w = i$ βλέπουμε ότι $f(zw) \neq zf(w)$ και επομένως η f δεν είναι γραμμική.

Άσκηση 5.1.8 Να δείξετε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z_1, z_2) = z_1 + \bar{z}_2$, όπου \bar{z} συμβολίζει τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού z , είναι γραμμική όταν τα σύνολα \mathbb{C}^2 και \mathbb{C} θεωρηθούν ως διανυσματικοί χώροι υπεράνω του \mathbb{C} , αλλά δεν είναι γραμμική όταν τα σύνολα \mathbb{C}^2 και \mathbb{C} θεωρηθούν ως διανυσματικοί χώροι υπεράνω του \mathbb{R} .



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 110 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Όπως έχουμε δει κάθε σώμα \mathbb{K} μπορεί να θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του εαυτού του. Αν \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} , τότε οι γραμμικές απεικονίσεις $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$ έχουν ιδιαίτερη σημασία και θα μας απασχολήσουν στο επόμενο Κεφάλαιο. Προς το παρόν αναφέρουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.1.9 Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$ καλείται **γραμμική μορφή** επί του \mathcal{E} .

Το σύνολο όλων των γραμμικών μορφών επί του \mathcal{E} συμβολίζεται με \mathcal{E}^* .

Οι ακόλουθες δύο προτάσεις μας εφοδιάζουν με μια μεγάλη ποικιλία παραδειγμάτων γραμμικών απεικονίσεων.

Πρόταση 5.1.10 Έστω \mathbb{K} ένα σώμα.

1. Έστω a_1, a_2, \dots, a_n σταθεροί αριθμοί από το σώμα \mathbb{K} . Τότε η απεικόνιση

$$f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, \quad \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(\bar{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

είναι γραμμική, δηλαδή είναι μια γραμμική μορφή.

2. Αντίστροφα αν $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ είναι μια γραμμική μορφή, τότε υπάρχουν (μοναδικοί) αριθμοί a_1, a_2, \dots, a_n από το σώμα \mathbb{K} , έτσι ώστε: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Απόδειξη

Παράδειγμα 5.1.11 Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) := 3x + 2y - 5z$ είναι γραμμική.

Πρόταση 5.1.12 Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και $n, m \in \mathbb{N}$. Αν $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ είναι μια απεικόνιση, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η f είναι γραμμική.

2. Υπάρχουν m το πλήθος γραμμικές μορφές $f_1, \dots, f_m : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})).$$



3. Υπάρχουν nm το πλήθος αριθμοί $\{a_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ από το σώμα \mathbb{K} , έτσι ώστε, $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)$$

Απόδειξη

Παράδειγμα 5.1.13 Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, \dots, x_5) \mapsto f(x_1, \dots, x_5) = (x_1 - 2x_3, 4x_5 + 8x_4, x_2 - 3x_5 + 6x_1 + 5x_3)$$

$$g: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = (x + iz, 3ix - 2y + iz, 4y + 5iz)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.12 οι απεικονίσεις f, g είναι γραμμικές.

Άσκηση 5.1.14 Έστω A ένας σταθερός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ των $n \times n$ πινάκων υπεράνω του \mathbb{K} και ορίζουμε απεικόνιση

$$f: \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K}), M \mapsto f(M) := MA - AM$$

Να εξετασθεί εάν η f είναι γραμμική.

Λύση: Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις ιδιότητες πινάκων από το Κεφάλαιο 2, θα έχουμε $f(M_1 + M_2) = (M_1 + M_2)A - A(M_1 + M_2) = M_1A + M_2A - AM_1 - AM_2 = (M_1A - AM_1) + (M_2A - AM_2) = f(M_1) + f(M_2)$. Επίσης αν $r \in \mathbb{K}$, τότε: $f(rM) = (rM)A - A(rM) = r(MA) - (Ar)M = r(MA) - r(AM) = r(MA - AM) = rf(M)$. Άρα η f είναι γραμμική.

Άσκηση 5.1.15 Έστω A ένας σταθερός $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους \mathbb{K}_n και \mathbb{K}_m των στηλών με n και m στοιχεία αντίστοιχα, από το σώμα \mathbb{K} . Ορίζουμε μια απεικόνιση

$$f_A: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_m, \vec{X} \mapsto f_A(\vec{X}) := A\vec{X}$$

Να δείξετε ότι η f είναι γραμμική.

• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παράδειγμα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 111 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 112 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

5.2. Πυρήνας και Εικόνα Γραμμικής Απεικόνισης

Όπως είδαμε στην Πρόταση 5.1.2 μια γραμμική απεικόνιση διατηρεί γραμμικούς συνδυασμούς διανυσμάτων. Στην παρούσα παράγραφο θα δούμε ότι γενικότερα μια γραμμική απεικόνιση διατηρεί υπόχωρους. Επίσης θα μελετήσουμε ειδικού τύπου γραμμικές απεικονίσεις.

Ορισμός 5.2.1 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων \mathcal{E}, \mathcal{F} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ και $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{F}$ τυχόντα υποσύνολα.

1. Η **εικόνα** $f(\mathcal{V})$ του υποσυνόλου \mathcal{V} μέσω της f ορίζεται να είναι το υποσύνολο:

$$f(\mathcal{V}) := \{\bar{y} \in \mathcal{F} \mid \exists \bar{x} \in \mathcal{V} : f(\bar{x}) = \bar{y}\}$$

2. Η **αντίστροφη εικόνα** $f^{-1}(\mathcal{W})$ του υποσυνόλου \mathcal{W} μέσω της f ορίζεται να είναι το υποσύνολο:

$$f^{-1}(\mathcal{W}) := \{\bar{x} \in \mathcal{E} \mid f(\bar{x}) \in \mathcal{W}\}$$

Επειδή, όπως θα δούμε σε λίγο, οι υπόχωροι $f^{-1}(\{\bar{0}\})$ και $f(\mathcal{E})$ παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον, αξίζουν ιδιαίτερη μνεία και γι' αυτό δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.2.2 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων \mathcal{E}, \mathcal{F} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} .

1. Η **εικόνα** $\text{Im}(f)$ της f ορίζεται να είναι η εικόνα του \mathcal{E} μέσω της f , δηλαδή:

$$\text{Im}(f) := f(\mathcal{E}) = \{\bar{y} \in \mathcal{F} \mid \exists \bar{x} \in \mathcal{E} : f(\bar{x}) = \bar{y}\}$$

2. Ο **πυρήνας** $\text{Ker}(f)$ της f ορίζεται να είναι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(\{\bar{0}\})$ του μηδενικού υπόχωρου $\{\bar{0}\}$ του \mathcal{F} μέσω της f , δηλαδή:

$$\text{Ker}(f) := f^{-1}(\{\bar{0}\}) = \{\bar{x} \in \mathcal{E} \mid f(\bar{x}) = \bar{0}\}$$



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Αλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 113 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Παράδειγμα 5.2.3 Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) := (x + y, y)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.12 η f είναι γραμμική. Θα προσδιορίσουμε την εικόνα $\text{Im}(f)$ και τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ της f . Έστω $(x, y, z) \in \text{Ker}(f)$. Τότε $f(x, y, z) = (0, 0)$ και επομένως $(x + y, y) = (0, 0)$. Αυτό σημαίνει ότι $x = -y$ και $y = 0$, και άρα $x = y = 0$. Επομένως $\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$. Προφανώς ο $\text{Ker}(f)$ είναι ο υπόχωρος του \mathbb{R}^3 ο οποίος παράγεται από το διάνυσμα $(0, 0, 1)$ το οποίο αποτελεί βάση του. Από την άλλη πλευρά έστω $(a, b) \in \text{Im}(f)$. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε $f(x, y, z) = (a, b)$, δηλαδή $(x + y, y) = (a, b)$. Επομένως $x + y = a$ και $y = b$, το οποίο συνεπάγεται ότι $x = a - b$. Έτσι $\text{Im}(f) = \{(a - b, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 0) - b(1, 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Προφανώς η εικόνα $\text{Im}(f)$ είναι ο υπόχωρος του \mathbb{R}^2 ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{e} = (1, 0)$ και $\vec{\varepsilon} = (1, 1)$ τα οποία αποτελούν βάση του. Άρα $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(f) = 2$ και επειδή $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, θα έχουμε $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ (φυσικά αυτό μπορεί να διαπιστωθεί και άμεσα).

Πρόταση 5.2.4 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων \mathcal{E}, \mathcal{F} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} .

1. Αν \mathcal{V} είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{E} , τότε η εικόνα $f(\mathcal{V})$ του \mathcal{V} μέσω της f είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{F} .
2. Αν \mathcal{W} είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{F} , τότε η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(\mathcal{W})$ του \mathcal{W} μέσω της f είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{E} .

Απόδειξη

Επειδή το μονοσύνολο $\{\vec{0}\}$ είναι υπόχωρος του \mathcal{F} και ο χώρος \mathcal{E} είναι υπόχωρος του εαυτού του, από την παραπάνω πρόταση έχουμε την ακόλουθη συνέπεια.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 114 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Πόρισμα 5.2.5 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων \mathcal{E}, \mathcal{F} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} .

1. Ο πυρήνας $\text{Ker}(f)$ της f είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{E} .

2. Η εικόνα $\text{Im}(f)$ της f είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{F} .

Θα δούμε τώρα ότι μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ επάγει μια 1-1 και επί αντιστοιχία ανάμεσα σε κάποια διακεκριμένα σύνολα υπόχωρων των διανυσματικών χώρων \mathcal{E} και \mathcal{F} .

Πρόταση 5.2.6 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων \mathcal{E}, \mathcal{F} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Τότε η απεικόνιση συνόλων

$$\mathbf{F} : \{\text{υπόχωροι } \mathcal{V} \text{ του } \mathcal{E} \text{ έτσι ώστε } \text{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}\} \longrightarrow \{\text{υπόχωροι } \mathcal{W} \text{ του } \text{Im}(f)\}$$

η οποία ορίζεται ως $\mathbf{F}(\mathcal{V}) := f(\mathcal{V})$ είναι 1-1 και επί. Η αντίστροφη της \mathbf{F} είναι η απεικόνιση $\mathbf{F}^{-1}(\mathcal{W}) := f^{-1}(\mathcal{W})$. Απόδειξη

Θα μελετήσουμε τώρα κάποιους ειδικούς τύπους γραμμικών απεικονίσεων οι οποίοι θα διαδραματίσουν σπουδαίο ρόλο στη συνέχεια.

Ορισμός 5.2.7 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων \mathcal{E}, \mathcal{F} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} .

1. Η f καλείται **μονομορφισμός** αν η f είναι 1-1, δηλαδή:

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{E} : f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \implies \bar{x} = \bar{y}$$

2. Η f καλείται **επιμορφισμός** αν η f είναι απεικόνιση επί:

$$\forall \bar{y} \in \mathcal{F}, \exists \bar{x} \in \mathcal{E} : f(\bar{x}) = \bar{y}$$



3. Η f καλείται **ισομορφισμός** αν η f είναι 1-1 και επί.

Ορισμός 5.2.8 Έστω \mathcal{E} και \mathcal{F} δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Οι \mathcal{E} και \mathcal{F} καλούνται **ισόμορφοι** αν υπάρχει ένας ισομορφισμός $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$. Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$.

Προφανώς οι διανυσματικοί χώροι \mathcal{E} και \mathcal{F} είναι ισόμορφοι αν-ν υπάρχει ένας ισομορφισμός $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$. Επιπλέον η σχέση ισομορφίας \cong στο σύνολο των διανυσματικών χώρων υπεράνω του \mathbb{K} είναι μια σχέση ισοδυναμίας όπως δείχνει η ακόλουθη άσκηση.

Άσκηση 5.2.9 Έστω ότι \mathcal{E} , \mathcal{F} και \mathcal{G} είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Τότε να δείξετε τα ακόλουθα:

1. $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}$.
2. $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$ αν και μόνον αν $\mathcal{F} \cong \mathcal{E}$.
3. Αν $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$ και $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$, τότε $\mathcal{E} \cong \mathcal{G}$.

Να συμπεράνετε ότι η σχέση ισομορφίας \cong στο σύνολο των διανυσματικών χώρων υπεράνω του \mathbb{K} είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Συμβολισμός 5.2.10 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων \mathcal{E}, \mathcal{F} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} .

1. Αν η f είναι μονομορφισμός, αυτό θα το συμβολίζουμε ως εξής: $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$.
2. Αν η f είναι επιμορφισμός, αυτό θα το συμβολίζουμε ως εξής: $f : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$.
3. Αν η f είναι ισομορφισμός, αυτό θα το συμβολίζουμε ως εξής: $f : \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}$.

Λήμμα 5.2.11 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ και $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ των διανυσματικών χώρων \mathcal{E}, \mathcal{F} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Αν ισχύει $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{F}}$, τότε η g είναι μονομορφισμός και η f είναι επιμορφισμός. **Απόδειξη**

Πρόταση 5.2.12 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων \mathcal{E}, \mathcal{F} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} .

• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
 - Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
 - Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
 - Γραμμικές Απεικονίσεις
- Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πιρήνας και Εικόνα

- Γραμμική Επέκταση
- Εξίσωση Διαστάσεων
- Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων
- Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης
- Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 115 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



1. Η f είναι **μονομορφισμός** αν-ν $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.

2. Η f είναι **επιμορφισμός** αν-ν $\text{Im}(f) = \mathcal{F}$.

3. Η f είναι **ισομορφισμός** αν-ν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{F}}$ και $g \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$. Σε αυτή τη περίπτωση η απεικόνιση f είναι αντιστρέψιμη και $g = f^{-1}$.

Απόδειξη

Άσκηση 5.2.13 Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) := (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

Να δείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός.

Λύση: Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \text{Ker}(f)$. Τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$, δηλαδή $f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ ή ισοδύναμα: $(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3) = (0, 0, 0)$. Η τελευταία σχέση δίνει: $x_1 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ η οποία είναι ισοδύναμη με την $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Άρα $\vec{x} = \vec{0}$, και επομένως $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, δηλαδή η f είναι μονομορφισμός. Έστω $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Θέτοντας $\vec{x} := (y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2) \in \mathbb{R}^3$, θα έχουμε: $f(\vec{x}) = f(y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2) = (y_1, y_1 + y_2 - y_1, y_1 + y_2 - y_1 + y_3 - y_2) = (y_1, y_2, y_3) = \vec{y}$. Άρα η f είναι επιμορφισμός και επομένως η f είναι ισομορφισμός. Παρατηρείστε ότι η $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ορίζεται ως εξής: $f^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2)$.

Άσκηση 5.2.14 1. Να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (4x - 2y - z, 3x - 4y + z)$$

είναι επιμορφισμός αλλά όχι μονομορφισμός.

2. Να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x - y, x + 2y, 0)$$

είναι μονομορφισμός αλλά όχι επιμορφισμός.

• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικό Χώρο
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 116 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 117 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

5.3. Το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης

Το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο εν συντομία υποστηρίζει ότι μια γραμμική απεικόνιση καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της σε μια βάση, είναι θεμελιώδες καθώς από τη μια πλευρά δίνει μια ισχυρή μέθοδο κατασκευής γραμμικών απεικονίσεων και από την άλλη περιγράφει μια από τις σπουδαιότερες ιδιότητες των διανυσματικών χώρων. Αυτό το αποτέλεσμα θα χρησιμοποιείται συνεχώς στα επόμενα εδάφια.

Θεώρημα 5.3.1 [Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης] Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων \mathcal{E}, \mathcal{F} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} .

Έστω $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ μια βάση του \mathcal{E} και έστω $C = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του \mathcal{F} . Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ έτσι ώστε:

$$f(\bar{e}_i) = \bar{w}_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (*)$$

Απόδειξη

Παράδειγμα 5.3.2 Στον διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^3 υπεράνω του \mathbb{R} , θεωρούμε τα διανύσματα $\bar{v}_1 = (1, 1, 0), \bar{v}_2 = (1, 0, 4), \bar{v}_3 = (0, 0, -1)$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το σύνολο $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του \mathbb{R}^3 . Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.3.1 θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(\bar{v}_1) = 2, f(\bar{v}_2) = -7$, και $f(\bar{v}_3) = -1$.

Έστω $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης για να υπολογίσουμε την τιμή $f(x_1, x_2, x_3)$ θα πρέπει να γράψουμε το \bar{x} ως γραμμικό συνδυασμό της βάσης B . Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3 = x_2\bar{v}_1 + (x_1 - x_2)\bar{v}_2 + (4x_1 - 4x_2 - x_3)\bar{v}_3$$

Επομένως σύμφωνα με την απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.1, θα έχουμε: $f(x_1, x_2, x_3 = 2x_2 + (-7)(x_1 - x_2) + (-1)(4x_1 - 4x_2 - x_3) = -11x_1 + 13x_2 + x_3$. Επομένως η ζητούμενη γραμμική απεικόνιση είναι $f(x_1, x_2, x_3) = -11x_1 + 13x_2 + x_3$.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 118 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Πόρισμα 5.3.3 Έστω $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου \mathcal{E}, \mathcal{F} είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Τότε $f = g$ αν και μόνον αν $f(\bar{e}_i) = g(\bar{e}_i), \forall i = 1, \dots, n$, όπου $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ είναι μια τυχούσα βάση του \mathcal{E} .

Ιδιαίτερα $f = \mathbb{O}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$, δηλαδή η f είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση, αν και μόνον αν $f(\bar{e}_i) = \bar{0}, \forall i = 1, \dots, n$.

Σχόλιο 5.3.4 Σύμφωνα με το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ καθορίζεται μοναδικά από τις τιμές της στα διανύσματα μιας, τυχούσας αλληλά σταθερής, βάσης του \mathcal{E} . Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί πολλές φορές στο να ορίζουμε με γραμμική απεικόνιση περιγράφοντας τις τιμές της στα διανύσματα της βάσης.

Στα επόμενα εδάφια θα δούμε πολλές σημαντικές εφαρμογές του Θεωρήματος Γραμμικής Επέκτασης.

5.4. Η Θεμελιώδης Εξίσωση Διαστάσεων

Στην παρούσα ενότητα θα αποδείξουμε την θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων η οποία συνοδεύει μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, και θα μελετήσουμε κάποιες σπουδαίες συνέπειες της.

Ορισμός 5.4.1 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων \mathcal{E} και \mathcal{F} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Αν οι χώροι \mathcal{E} και \mathcal{F} έχουν πεπερασμένη διάσταση, τότε η **βαθμίδα** της f ορίζεται να είναι η διάσταση του υπόχωρου $\text{Im}(f)$ και συμβολίζεται με $\mathbf{r}(f)$:

$$\mathbf{r}(f) := \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f)$$

Θεώρημα 5.4.2 [Θεμελιώδης Εξίσωση Διαστάσεων] Έστω \mathcal{E} και \mathcal{F} δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Αν $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι και Κατασκευές

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 119 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

απεικόνιση, τότε ισχύει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$$

Απόδειξη

Παράδειγμα 5.4.3 Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$$

Θα προσδιορίσουμε την βαθμίδα $\mathbf{r}(f)$ της f καθώς και μια βάση των υπόχωρων $\text{Im}(f)$ και $\text{Ker}(f)$.

Επειδή $(x, y, z) \in \text{Ker}(f)$ αν και μόνον αν $f(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z) = (0, 0, 0)$, έπεται ότι οι συντεταγμένες x, y, z του διανύσματος (x, y, z) είναι λύσεις του συστήματος:

$$x + 2y = 0, \quad y - z = 0, \quad x + 2z = 0$$

Εύκολα βλέπουμε ότι οι λύσεις του παραπάνω συστήματος περιγράφονται από το σύνολο $\{(-2t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Επομένως $\text{Ker}(f) = \{(-2t, t, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(-2, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Αυτή η περιγραφή του πυρήνα μας επιτρέπει να δούμε άμεσα ότι το διάνυσμα $\vec{\varepsilon} := (-2, 1, 1)$ είναι μια βάση του $\text{Ker}(f)$ και επομένως $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(f) = 1$. Από την θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$ θα έχουμε τότε $3 = 1 + \mathbf{r}(f)$, και επομένως $\mathbf{r}(f) = 2$. Θα προσδιορίσουμε μια βάση του υπόχωρου $\text{Im}(f)$. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(x + 2y, y - z, x + 2z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x, y, x) + (2y, -z + 2z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) + y(2, 0, 0) + z(0, -1, 2)) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \\ &= \{x(1, 0, 1) + y(2, 1, 0) + z(0, -1, 2) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \end{aligned}$$



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικονίσης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 120 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Επομένως $\text{Im}(f) = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle$, όπου

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 1), \quad \bar{e}_2 = (2, 1, 0), \quad \bar{e}_3 = (0, -1, 2)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι τα διανύσματα \bar{e}_1, \bar{e}_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον υπόχωρο $\text{Im}(f)$ διότι $\bar{e}_3 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$. Επομένως το σύνολο $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ είναι μια βάση του $\text{Im}(f)$. Όπως και παραπάνω διαπιστώνουμε ότι $\mathbf{r}(f) = 2$.

Άσκηση 5.4.4 Έστω $\mathcal{B} := \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ μια βάση του \mathbb{R}^3 (όχι κατ' ανάγκην η κανονική), και έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η μοναδική γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει:

$$f(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \quad f(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_1, \quad f(\bar{e}_3) = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$$

Να δείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός.

Λύση: Θα προσδιορίσουμε πρώτα την f και ακολούθως τον πυρήνα της. Έστω \bar{x} ένα τυχόν διάνυσμα του \mathbb{R}^3 . Τότε το \bar{x} γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης \mathcal{B} : $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$, όπου $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$. Τότε: $f(\bar{x}) = f(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3) = x_1f(\bar{e}_1) + x_2f(\bar{e}_2) + x_3f(\bar{e}_3) = x_1(\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3) + x_2(2\bar{e}_1) + x_3(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3)\bar{e}_1 + (-x_1 + x_3)\bar{e}_2 + (x_1 + 2x_3)\bar{e}_3$. Επομένως η f ορίζεται (ως προς τη βάση \mathcal{B}) από τον τύπο:

$$f(\bar{x}) = f(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3)\bar{e}_1 + (-x_1 + x_3)\bar{e}_2 + (x_1 + 2x_3)\bar{e}_3$$

Θα προσδιορίσουμε τον πυρήνα της f . Έστω $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 \in \text{Ker}(f)$. Τότε $f(\bar{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3)\bar{e}_1 + (-x_1 + x_3)\bar{e}_2 + (x_1 + 2x_3)\bar{e}_3 = \bar{0}$, και επομένως, επειδή τα $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, θα έχουμε:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \quad -x_1 + x_3 = 0, \quad x_1 + 2x_3 = 0$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα ως προς x_1, x_2, x_3 , βλέπουμε εύκολα ότι έχει μοναδική λύση $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Τότε όμως $\bar{x} = \bar{0}$ και επομένως $\text{Ker}(f) = \{\bar{0}\}$. Ιδιαίτερα η f είναι μονομορφισμός



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 121 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

και $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(f) = 0$. Από την θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$ έπεται τότε ότι $3 = \mathbf{r}(f)$. Με άλλα λόγια $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(f) = 3$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, δηλαδή η f είναι επιμορφισμός. Επομένως η f είναι ισομορφισμός.

Το υπόλοιπο τμήμα της παρούσης ενότητας θα αφιερωθεί στην μελέτη των συνεπειών της Θεμελιώδους Εξίσωσης Διαστάσεων και ιδιαίτερα στην μελέτη της βαθμίδας μιας γραμμικής απεικόνισης.

Αρχίζουμε με το ακόλουθο σπουδαίο Θεώρημα το οποίο δίνει ένα απλό κριτήριο για το πότε δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης είναι ισόμορφοι.

Θεώρημα 5.4.5 Έστω \mathcal{E} και \mathcal{F} δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$.

2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$.

Απόδειξη

Επειδή ο διανυσματικός χώρος \mathbb{K}^n , όπως έχουμε δει, έχει διάσταση n , θα έχουμε ως άμεσες συνέπειες του παραπάνω Θεωρήματος τα ακόλουθα σημαντικά πορίσματα.

Πόρισμα 5.4.6 Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} με διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$. Τότε ο χώρος \mathcal{E} είναι ισόμορφος με τον \mathbb{K}^n : $\mathcal{E} \cong \mathbb{K}^n$.

Πόρισμα 5.4.7 Έστω \mathbb{K} ένα σώμα, και $n, m \geq 1$ δύο φυσικοί αριθμοί. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. $\mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^m$.

2. $n = m$.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 122 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Σχόλιο 5.4.8 Τα Πορίσματα 5.4.6 και 5.4.7 είναι πολύ σημαντικά. Το μεν πρώτο διότι, καθώς ισόμορφοι χώροι έχουν τις ίδιες βασικές ιδιότητες, ανάγει την μελέτη των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} (των οποίων τα στοιχεία ενδέχεται να είναι πολυώνυμα, συναρτήσεις, πίνακες κτλ) στη μελέτη των διανυσματικών χώρων \mathbb{K}^n , $n \geq 1$ οι οποίοι μας είναι πολύ πιο προσίτοι. Γι' αυτό το λόγο αποτελούν μοντέλα των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Το δε δεύτερο πόρισμα μας εξασφαλίζει το «αναψιλοίωτο της διάστασης» διανυσματικών χώρων πεπερασμένων ακολουθιών.

Θα δούμε τώρα μια διαφορετική απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.9 με χρήση της Θεμελιώδους Εξίσωσης Διαστάσεων.

Θεώρημα 5.4.9 Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} , και έστω \mathcal{V} και \mathcal{W} δύο υποχώροι του \mathcal{E} . Τότε ισχύει ο εξής τύπος:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$$

Απόδειξη

Άσκηση 5.4.10 Να δείξετε ότι η απεικόνιση $f : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V} + \mathcal{W}$ του Θεωρήματος 5.4.9 είναι γραμμική.

Άσκηση 5.4.11 Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} , και έστω \mathcal{V} και \mathcal{W} δύο υποχώροι του \mathcal{E} . Αν $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$, να δείξετε ότι:

$$\mathcal{V} \times \mathcal{W} \cong \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$$

Θα δώσουμε τώρα κάποια χρήσιμα κριτήρια για το πότε μια γραμμική απεικόνιση είναι ισομορφισμός.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 123 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Πρόταση 5.4.12 [Κριτήρια Ισομορφισμού] Έστω \mathcal{E} και \mathcal{F} δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Αν $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$ και ηf είναι μονομορφισμός, τότε ηf είναι ισομορφισμός.
2. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$ και ηf είναι επιμορφισμός, τότε ηf είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη

Άσκηση 5.4.13 Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} και έστω $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ μια βάση του \mathcal{E} . Θέτοντας $\bar{w}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{w}_2 = 2\bar{e}_1$, και $\bar{w}_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$ στο Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης 5.3.1, έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \quad f(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_1, \quad f(\bar{e}_3) = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3.$$

Να δείξετε ότι ηf είναι ισομορφισμός.

Λύση: Θα προσδιορίσουμε τον τύπο της f σε σχέση με την βάση \mathcal{B} .

Άσκηση 5.4.14 Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ και $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις για τις οποίες ισχύει: $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{E}}$.

Να δείξετε ότι οι απεικονίσεις f και g είναι ισομορφισμοί και μάλιστα $g = f^{-1}$.

5.5. Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε την άλγεβρα των γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων υπεράνω ενός σώματος.

Από τώρα και στο εξής σταθεροποιούμε ένα σώμα \mathbb{K} .



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 124 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Συμβολισμός 5.5.1 Αν \mathcal{E} και \mathcal{F} είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω του \mathbb{K} , θα συμβολίζουμε με

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) := \{f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \mid \eta f \text{ είναι γραμμική}\}$$

το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από τον \mathcal{E} στον \mathcal{F} .

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το σύνολο $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} . Επομένως πρέπει να ορίσουμε πρώτα πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού γραμμικών απεικονίσεων.

Έστω \mathcal{E} και \mathcal{F} δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και έστω $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις.

Πρόσθεση: Ορίζουμε το άθροισμα $f + g$ των f και g να είναι η απεικόνιση

$$f + g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}, \quad \bar{x} \mapsto (f + g)(\bar{x}) := f(\bar{x}) + g(\bar{x})$$

Δείχνουμε ότι η απεικόνιση $f + g$ είναι γραμμική.

$$\begin{aligned} \text{Έστω } \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{E} \text{ και } k, l \in \mathbb{K}. \text{ Τότε } (f + g)(k\bar{x} + l\bar{y}) &= f(k\bar{x} + l\bar{y}) + g(k\bar{x} + l\bar{y}) = \\ kf(\bar{x}) + lf(\bar{y}) + kg(\bar{x}) + lg(\bar{y}) &= k(f(\bar{x}) + g(\bar{x})) + l(f(\bar{y}) + g(\bar{y})) = k[(f + g)(\bar{x})] + l[(f + g)(\bar{y})]. \end{aligned}$$

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός Γραμμικών Απεικονίσεων: Αν $k \in \mathbb{K}$, τότε ορίζουμε τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό kf της f με το k να είναι η απεικόνιση

$$kf : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}, \quad \bar{x} \mapsto (kf)(\bar{x}) := kf(\bar{x})$$

Δείχνουμε ότι η απεικόνιση kf είναι γραμμική.

$$\begin{aligned} \text{Έστω } \bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{E} \text{ και } \mu, \nu \in \mathbb{K}. \text{ Τότε } (kf)(\mu\bar{x} + \nu\bar{y}) &= k[f(\mu\bar{x} + \nu\bar{y})] = k[\mu f(\bar{x}) + \nu f(\bar{y})] = \\ \mu kf(\bar{x}) + \nu kf(\bar{y}) &= \mu kf(\bar{x}) + \nu kf(\bar{y}) = \mu(kf)(\bar{x}) + \nu(kf)(\bar{y}). \end{aligned}$$



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 125 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Θεώρημα 5.5.2 Με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, το σύνολο $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} .

Επιπλέον αν οι \mathcal{E} και \mathcal{F} έχουν πεπερασμένη διάσταση, τότε και ο διανυσματικός χώρος $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα:

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \cdot \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$$

Απόδειξη

Θέτοντας $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ στο Θεώρημα 5.5.2 θα έχουμε το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 5.5.3 Αν \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , τότε το σύνολο $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ των γραμμικών απεικονίσεων $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} .

Επιπλέον αν ο χώρος \mathcal{E} έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε και ο διανυσματικός χώρος $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα:

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = (\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E})^2$$

Υπενθυμίζουμε ότι θεωρώντας το σώμα \mathbb{K} σαν διανυσματικό χώρο υπεράνω του εαυτού του, έχουμε την ακόλουθη άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.4.2.

Πόρισμα 5.5.4 Αν \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , τότε το σύνολο $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} .

Επιπλέον αν ο χώρος \mathcal{E} έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε και ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα:

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^* = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$$

Πόρισμα 5.5.5 Αν \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διαστάσης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Τότε ο χώρος \mathcal{E} είναι ισόμορφος με τον δυϊκό του χώρο \mathcal{E}^* : $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^*$.

Απόδειξη



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικό Χώρο
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 126 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Σχόλιο 5.5.6 Αν και το Πρόσημα 5.5.5 μας εξασφαλίζει ότι κάθε διανυσματικός χώρος \mathcal{E} πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του \mathbb{K} είναι ισομορφος με τον δυϊκό του χώρο \mathcal{E}^* , αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι πλήρως ικανοποιητικό. Ο λόγος είναι ότι ο ισομορφισμός $f: \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}^*$ εξαρτάται δραστικά, όπως προκύπτει από το Θεώρημα 5.4.5, από την επιλογή βάσης στον χώρο \mathcal{E} . Επομένως αλλαγή βάσης στον \mathcal{E} ορίζει και νέο ισομορφισμό μεταξύ των \mathcal{E} και \mathcal{E}^* . Έτσι ο ισομορφισμός δεν είναι «φυσικός» δηλαδή δεν δίνεται από έναν τύπο ο οποίος είναι ανεξάρτητος της επιλογής βάσης.

Εκτός από την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό γραμμικών απεικονίσεων, σε κάποιες περιπτώσεις, μπορούμε να θεωρήσουμε και μια άλλη πράξη μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων. Πραγματικά αν $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ και $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε ορίζεται και η σύνθεση $g \circ f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$, ως εξής: $(g \circ f)(\bar{x}) := g(f(\bar{x}))$. Γι' αυτή την, όχι πάντοτε οριζόμενη πράξη, ισχύει η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 5.5.7 (α) Η σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων (όταν αυτή ορίζεται) είναι γραμμική απεικόνιση.

(β) Έστω ότι \mathcal{E}, \mathcal{F} και \mathcal{G} είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω του \mathbb{K} , και έστω ότι $h_1, h_2: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}, f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, και $g_1, g_2: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις:

$$\mathcal{H} \begin{array}{c} \xrightarrow{h_1} \\ \xrightarrow{h_2} \end{array} \mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} \mathcal{G}$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

$$1. (h_1 + h_2) \circ f = h_1 \circ f + h_2 \circ f.$$

$$2. f \circ (g_1 + g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2.$$

$$3. \text{Id}_{\mathcal{F}} \circ f = f = f \circ \text{Id}_{\mathcal{E}}.$$

$$4. g_1 \circ (f \circ h_1) = (g_1 \circ f) \circ h_1.$$



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 127 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

(γ) Αν $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ και $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, και $k \in \mathbb{K}$, τότε:

$$(kg) \circ f = g \circ (kf) = k(g \circ f).$$

Απόδειξη

Άσκηση 5.5.8 Αποδείξτε την Πρόταση 5.5.7.

Αν στην παραπάνω Πρόταση θέσουμε $\mathcal{E} = \mathcal{H} = \mathcal{F} = \mathcal{G}$, τότε η σύνθεση δύο οιωνδήποτε γραμμικών απεικονίσεων από τον \mathcal{E} στον \mathcal{E} ορίζεται πάντα. Επομένως ο διανυσματικός χώρος $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ έχει επιπρόσθετες ιδιότητες και δομή.

Συμβολισμός 5.5.9 Αν \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , τότε ο διανυσματικός χώρος $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ θα συμβολίζεται με $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$, τα δε στοιχεία του **ενδομορφισμοί** του \mathcal{E} .

Δηλαδή ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} είναι μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$.

Από τώρα και στο εξής, αν $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός του \mathcal{E} και $n \geq 1$ είναι ένας φυσικός αριθμός, θα συμβολίζουμε με $f^n : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ τη σύνθεση της γραμμικής απεικόνισης f με τον εαυτό της n φορές. Δηλαδή $f^n(\vec{x}) = f(f(\dots f(\vec{x})))$ όπου η f εφαρμόζεται n φορές. Για παράδειγμα $f^3(\vec{x}) = f(f(f(\vec{x})))$. Για λόγους σύμβασης θέτουμε $f^0 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$.

Σχόλιο 5.5.10 Από την παραπάνω Πρόταση έπεται ότι για τυχόντες ενδομορφισμούς $f, g, h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, και τυχόν στοιχείο $k \in \mathbb{K}$, ισχύουν τα εξής:

1. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
2. $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ και $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.
3. $k(f \circ g) = (kf) \circ g = f \circ (kg)$.
4. $\text{Id}_{\mathcal{E}} \circ f = f = f \circ \text{Id}_{\mathcal{E}}$.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 128 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} , επί του οποίου έχει ορισθεί μια πράξη $\circ : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $(f, g) \mapsto f \circ g$ (η οποία καλείται πολυπλασιασμός), έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω ιδιότητες 1. - 4. καλείται \mathbb{K} -**άλγεβρα** ή **άλγεβρα υπεράνω του \mathbb{K}** .

Επομένως για κάθε διανυσματικό χώρο \mathcal{E} υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , το σύνολο $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ των ενδομορφισμών του \mathcal{E} (με πολυπλασιασμό την σύνθεση απεικονίσεων) είναι μια **άλγεβρα υπεράνω του \mathbb{K}** .

Σχόλιο 5.5.11 Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και έστω f, g δύο στοιχεία της \mathbb{K} -άλγεβρας $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, δηλαδή $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις (ενδομορφισμοί του \mathcal{E}). Δεν είναι γενικά αληθές ότι ισχύει: $f \circ g = g \circ f$. Για παράδειγμα έστω $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ και έστω οι γραμμικές απεικονίσεις:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto f(x, y) = (-y, x)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto g(x, y) = (x, -y)$$

Τότε για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, έχουμε:

$$f(g(x, y)) = f(x, -y) = (y, x) \neq (-y, -x) = g(-y, x) = g(f(x, y))$$

Επομένως γενικά ισχύει:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Μια \mathbb{K} -άλγεβρα \mathcal{R} τα στοιχεία της οποίας ικανοποιούν την σχέση $f \circ g = g \circ f$ καλείται **αντιμεταθετική \mathbb{K} -άλγεβρα**. Για παράδειγμα ο διανυσματικός χώρος των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} υπεράνω του σώματος \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών είναι μια αντιμεταθετική \mathbb{R} -άλγεβρα. Η θεωρία των αλγεβρών είναι πολύ εκτεταμένη και ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτών των σημειώσεων, επομένως δεν θα μας απασχολήσει περαιτέρω.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι και Κατασκευές

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 129 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

5.6. Βαθμίδα Γραμμικής Απεικόνισης

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε πιο αναλυτικά τις βασικές ιδιότητες της βαθμίδας μιας γραμμικής απεικόνισης. Ιδιαίτερα θα μας απασχολήσει πώς μεταβάλλεται η βαθμίδα ως προς διάφορες πράξεις γραμμικών απεικονίσεων, όπως η σύνθεση, η πρόσθεση, και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός. Οι ιδιότητες τις οποίες θα αποδείξουμε στο παρόν εδάφιο θα έχουν σημαντικές εφαρμογές στην θεωρία βαθμίδας πινάκων.

Πριν περάσουμε στις ιδιότητες της βαθμίδας θα δούμε κάποιες ιδιότητες της εικόνας μιας γραμμικής απεικόνισης.

Πρόταση 5.6.1 Έστω \mathcal{E}, \mathcal{F} και \mathcal{G} τρεις διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος \mathbb{K} .

1. Αν $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, και $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$, τότε:

$$\text{Im}(kf) = \text{Im}(f)$$

2. Αν $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις, τότε:

$$\text{Im}(f + g) \subseteq \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$$

3. Αν $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ και $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις, τότε:

$$\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g)$$

4. Αν $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε:

$$\dots \subseteq \text{Im}(f^{n+1}) \subseteq \text{Im}(f^n) \subseteq \dots \subseteq \text{Im}(f^2) \subseteq \text{Im}(f)$$

Απόδειξη



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 130 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Άσκηση 5.6.2 Διατυπώστε και αποδείξτε τις ανάλογες ιδιότητες της Πρότασης 5.6.1 για τον πυρήνα γραμμικής απεικόνισης.

Άσκηση 5.6.3 Έστω \mathcal{E} και \mathcal{F} δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και έστω $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ μια βάση του \mathcal{E} . Αν $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, να δείξετε ότι η βαθμίδα $\mathbf{r}(f)$ είναι ίση με την βαθμίδα των διανυσμάτων $f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_n)$:

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}\langle f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_n) \rangle$$

Λύση: Υπενθυμίζουμε ότι $\mathbf{r}\langle \bar{e}_1, \dots, f(\bar{e}_n) \rangle = \dim_{\mathbb{K}}\langle \bar{e}_1, \dots, f(\bar{e}_n) \rangle$, και άρα για να δείξουμε την ζητούμενη σχέση αρκεί να δείξουμε ότι $\text{Im}(f) = \langle \bar{e}_1, \dots, f(\bar{e}_n) \rangle$. Προφανώς $\text{Im}(f) \supseteq \langle \bar{e}_1, \dots, f(\bar{e}_n) \rangle$. Έστω $\bar{z} \in \text{Im}(f)$. Τότε υπάρχει $\bar{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f(\bar{x}) = \bar{z}$. Επειδή το σύνολο \mathcal{B} είναι μια βάση του \mathcal{E} , μπορούμε να γράψουμε μοναδικά $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$, όπου $x_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Τότε $\bar{z} = f(\bar{x}) = x_1f(\bar{e}_1) + \dots + x_nf(\bar{e}_n) \in \langle \bar{e}_1, \dots, f(\bar{e}_n) \rangle$. Άρα $\text{Im}(f) \subseteq \langle \bar{e}_1, \dots, f(\bar{e}_n) \rangle$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ

1. Έστω \mathcal{E} και \mathcal{F} δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση.

(a) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{r}(kf) = \mathbf{r}(f), \quad \forall k \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad (1)$$

Απόδειξη: Από τη Πρόταση 5.6.1 έχουμε $\text{Im}(kf) = \text{Im}(f)$. Παίρνοντας διαστάσεις θα έχουμε $\mathbf{r}(kf) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(kf) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f) = \mathbf{r}(f)$.

(b) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{r}(f) \leq \min\{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}, \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}\} \quad (2)$$



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικονίσεις

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 131 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Επειδή $\text{Im}(f) \subseteq \mathcal{F}$, παίρνοντας διαστάσεις έχουμε $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Επίσης από την θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων έχουμε $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f)$. Άρα $\mathbf{r}(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$ και επομένως $\mathbf{r}(f) \leq \min\{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}, \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}\}$.

2. Έστω \mathcal{E} και \mathcal{F} δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και έστω $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις:

$$\mathcal{E} \xrightarrow[f]{g} \mathcal{F}$$

Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \leq \mathbf{r}(f + g) \leq \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)} \quad (3)$$

Απόδειξη: Από τη Πρόταση 5.6.1 έχουμε ότι $\text{Im}(f + g) \subseteq \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. Παίρνοντας διαστάσεις θα έχουμε: $\mathbf{r}(f + g) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f + g) \leq \dim_{\mathbb{K}} (\text{Im}(f) + \text{Im}(g))$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανισότητα και το Θεώρημα 5.4.9 θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(f + g) &\leq \dim_{\mathbb{K}} (\text{Im}(f) + \text{Im}(g)) = \\ \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(g) - \dim_{\mathbb{K}} (\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) &\leq \\ \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) & \end{aligned}$$

Επειδή $f = f + g + (-g)$, εφαρμόζοντας την παραπάνω ανισότητα για τις απεικονίσεις $(f + g)$ και $(-g)$ καθώς και την ισότητα (1), θα έχουμε:

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}[(f + g) + (-g)] \leq \mathbf{r}(f + g) + \mathbf{r}(-g) = \mathbf{r}(f + g) + \mathbf{r}(g)$$

Επομένως: $\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g) \leq \mathbf{r}(f + g)$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των f και g , θα έχουμε και: $\mathbf{r}(g) - \mathbf{r}(f) \leq \mathbf{r}(f + g)$. Άρα $|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \leq \mathbf{r}(f + g)$. Συνοψίζοντας θα έχουμε τελικά: $|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \leq \mathbf{r}(f + g) \leq \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)$.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικονίσεις

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 132 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

3. Έστω \mathcal{E} , \mathcal{F} και \mathcal{G} τρεις διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ και $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις:

$$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{G}$$

(a) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{r}(g \circ f) \leq \min\{\mathbf{r}(f), \mathbf{r}(g)\} \quad (4)$$

Απόδειξη: Από τη Πρόταση 5.6.1 έχουμε ότι: $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g)$. Επομένως παίρνοντας διαστάσεις, θα έχουμε: $\mathbf{r}(g \circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(g \circ f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(g) = \mathbf{r}(g)$. Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα και τη θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων για την απεικόνιση $g \circ f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$, θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(g \circ f) + \mathbf{r}(g \circ f)$$

Επίσης από τη θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων για την απεικόνιση $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) + \mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(g \circ f) + \mathbf{r}(g \circ f)$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{r}(g \circ f) - \mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(g \circ f)$$

Όμως $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(g \circ f)$. Πράγματι: αν $\bar{x} \in \text{Ker}(f)$, τότε $f(\bar{x}) = \bar{0}$ και άρα $g(f(\bar{x})) = g(\bar{0}) = \bar{0}$. Έτσι $\bar{x} \in \text{Ker}(g \circ f)$. Τότε όμως $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(g \circ f)$. Επομένως η τελευταία εξίσωση έχει σαν συνέπεια ότι $\mathbf{r}(g \circ f) - \mathbf{r}(f) \leq 0$, δηλαδή $\mathbf{r}(g \circ f) \leq \mathbf{r}(f)$. Συνοψίζοντας θα έχουμε: $\mathbf{r}(g \circ f) \leq \min\{\mathbf{r}(f), \mathbf{r}(g)\}$.



(b) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(f) \Leftrightarrow \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{\vec{0}\} \quad (5)$$

(c) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(g) \Leftrightarrow \text{Im}(f) + \text{Ker}(g) = \mathcal{F} \quad (6)$$

(d) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g) \Leftrightarrow \mathcal{F} = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(g) \quad (7)$$

Άσκηση 5.6.4 Αποδείξτε τις ισοδυναμίες (5), (6) και (7).

Άσκηση 5.6.5 Έστω $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$. Να δείξετε ότι αν η g είναι ισομορφισμός, τότε:

$$\mathbf{r}(f \circ g) = \mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(f)$$

Λύση: Πράγματι χρησιμοποιώντας την σχέση (4) και το ότι η βαθμίδα ενός ισομορφισμού είναι ίση με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, θα έχουμε:

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f \circ g \circ g^{-1}) \leq \mathbf{r}(f \circ g) \leq \mathbf{r}(f)$$

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g^{-1} \circ g \circ f) \leq \mathbf{r}(g \circ f) \leq \mathbf{r}(f)$$

Επομένως:

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f \circ g) \quad \text{και} \quad \mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g \circ f)$$

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις
 - Ορισμοί-Παραδείγματα
 - Πυρήνας και Εικόνα
 - Γραμμική Επέκταση
 - Εξίσωση Διαστάσεων
 - Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων
 - Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης
 - Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 133 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 134 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

5.7. Ασκήσεις

Άσκηση 5.7.1 Ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές; Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x - y, x).$

(α) Σωστό

(β) Λάθος

2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (z, x + y).$

(α) Σωστό

(β) Λάθος

3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^2, y^2).$

(α) Σωστό

(β) Λάθος

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = (2x, -x).$

(α) Σωστό

(β) Λάθος

5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = (1, -1).$

(α) Σωστό

(β) Λάθος

6. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (xy, y, x).$

(α) Σωστό

(β) Λάθος

7. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (|x|, 0).$

(α) Σωστό

(β) Λάθος

8. $f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}), f(A) = A^2.$

(α) Σωστό

(β) Λάθος

9. $f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}), f(A) = A + X,$ όπου X είναι ένας σταθερός $n \times n$ πίνακας.

(α) Σωστό

(β) Λάθος

10. $f : \mathbb{R}_n[t] \rightarrow \mathbb{R}_n[t], f(P(t)) = P(t)P'(t).$



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 135 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

(α) Σωστό

(β) Λάθος

Άσκηση 5.7.2 Θεωρούμε τις ακόλουθες γραμμικές απεικονίσεις:

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f_1(x, y, z) = (x + y + z, x + y)$$

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f_2(x, y, z) = (2x + z, x + y)$$

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f_3(x, y, z) = (2y, x)$$

1. Να δείξετε ότι το υποσύνολο $\mathcal{F} := \{f_1, f_2, f_3\}$ του διανυσματικού χώρου $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ των γραμμικών απεικονίσεων $: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
2. Να εξετάσετε αν το υποσύνολο \mathcal{F} είναι βάση του χώρου $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Άσκηση 5.7.3 Έστω a_0, a_1, \dots, a_n διακεκριμένα στοιχεία ενός σώματος \mathbb{K} . Να δείξετε ότι η απεικόνιση

$$f : \mathbb{K}_n[t] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}, P(t) \mapsto f(P(t)) := (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$$

είναι γραμμική. Επίσης να εξεταστεί αν η f είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 5.7.4 Να βρεθούν βάσεις της εικόνας και του πυρήνα για κάθε μια από τις γραμμικές απεικονίσεις $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ της παραπάνω Άσκησης, $i = 1, 2, 3$.

Άσκηση 5.7.5 Θεωρούμε τη βάση

$$\mathcal{B} := \{\bar{e}_1 = (1, 2, 3), \bar{e}_2 = (2, 5, 3), \bar{e}_3 = (1, 0, 1)\}$$

του \mathbb{R}^3 και τα διανύσματα

$$\bar{w}_1 = (1, 0), \bar{w}_2 = (1, 0), \bar{w}_3 = (1, 1)$$

του \mathbb{R}^2 . Να προσδιοριστεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ έτσι ώστε: $f(\bar{e}_i) = \bar{w}_i, 1 \leq i \leq 3$.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 136 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Άσκηση 5.7.6 Θεωρούμε τη βάση

$$\mathcal{B} := \{\bar{e}_1 = 1, \bar{e}_2 = t, \bar{e}_3 = t^2\}$$

του $\mathbb{R}_2[t]$ και τα διανύσματα

$$\bar{w}_1 = 1 + t, \bar{w}_2 = 3 - t^2, \bar{w}_3 = 4 + 2t - 3t^2$$

του $\mathbb{R}_2[t]$. Να προσδιοριστεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$ έτσι ώστε: $f(\bar{e}_i) = \bar{w}_i, 1 \leq i \leq 3$.

Άσκηση 5.7.7 Έστω $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{V}, \mathcal{W} είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η f είναι ισομορφισμός.
2. Η f στέλνει μια τυχούσα βάση του \mathcal{V} σε μια βάση του \mathcal{W} .

Άσκηση 5.7.8 Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ η μοναδική γραμμική απεικόνιση η οποία στέλνει τα διανύσματα της κανονικής βάσης $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ του \mathbb{R}^n στα διανύσματα

$$\bar{w}_1 = (0, 0, \dots, 0, 0), \bar{w}_2 = (1, 0, \dots, 0, 0), \bar{w}_3 = (0, 2, \dots, 0, 0), \dots, \bar{w}_n = (0, 0, \dots, n-1, 0)$$

Δηλαδή $f(\bar{e}_i) = \bar{w}_i, 1 \leq i \leq n$. Να δείξετε ότι $f^n = 0$ και ακολουθούσως να προσδιορίσετε βάσεις για τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ και την εικόνα $\text{Im}(f)$.

Άσκηση 5.7.9 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Υποθέτουμε ότι $f^n = 0$, και $f^{n-1} \neq 0$ (0 είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση: $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$). Αν $\bar{x} \in \mathcal{E}$, τότε να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικονίσης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 137 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

1. $Hf^{n-1}(\bar{x}) \neq \bar{0}$.

2. Το υποσύνολο διανυσμάτων $\{\bar{x}, f(\bar{x}), f^2(\bar{x}), \dots, f^{n-1}(\bar{x})\}$ του \mathcal{V} είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Άσκηση 5.7.10 Να βρεθεί η βαθμίδα καθώς και η διάσταση του πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης:

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z, w) := (x - y + z + w, x + 2y - z + w, 3y - 2z)$$

Άσκηση 5.7.11 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Υποθέτουμε ότι $\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f^2)$. Να δείξετε ότι $\mathcal{E} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Άσκηση 5.7.12 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f^2)$. Να δείξετε ότι $\mathcal{E} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Άσκηση 5.7.13 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} , και έστω $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Αν ισχύει $f^2 = af$, να δείξετε ότι $\mathcal{E} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Άσκηση 5.7.14 Έστω $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ μια βάση του \mathbb{R}^4 . Να βρεθεί η τιμή του $\beta \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ για την οποία ισχύει:

$$f(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_4, f(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2, f(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3, f(\bar{e}_4) = 2\bar{e}_3 + \bar{e}_4$$

να είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 5.7.15 Έστω \mathbb{K} ένα σώμα και $f : \mathbb{K}_n[t] \rightarrow \mathbb{K}_n[t]$ η απεικόνιση η οποία ορίζεται ως εξής: $f(P(t)) = P(t + 1)$. Να δείξετε ότι η f είναι γραμμική και ακολούθως να εξετάσετε εάν η f είναι ισομορφισμός.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 138 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Άσκηση 5.7.16 Να βρεθεί η βαθμίδα καθώς και η διάσταση του πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης:

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z, w) := (x - z + 2w, -2x + y + 2z, y + 4w)$$

Επιπλέον:

1. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $(1, 3, k)$ ανήκει στην εικόνα $\text{Im}(f)$ της f αν και μόνον αν $k = 5$.
2. Ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το διάνυσμα $(1, a, 1, b)$ να ανήκει στον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ της f :

Άσκηση 5.7.17 Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Υποθέτουμε ότι $f^2 = 0$. Να δείξετε τα ακόλουθα:

1. $\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(f)$.
2. $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) \geq \frac{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}}{2}$.
3. Η ανισότητα του 2. είναι ισότητα αν και μόνον αν $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.

Άσκηση 5.7.18 Έστω $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις (γραμμικές μορφές), όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Ορίζουμε μια νέα απεικόνιση ως εξής:

$$h: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}^2, h(\bar{x}) := (f(\bar{x}), g(\bar{x}))$$

Να δείξετε τα ακόλουθα:

1. Η απεικόνιση h είναι γραμμική.
2. $\text{Ker}(h) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$.



3. $\text{Im}(h) = \mathbb{K}^2$ (δηλαδή η h είναι επιμορφισμός) αν και μόνον αν $f \neq 0 \neq g$.

Άσκηση 5.7.19 Έστω $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, και έστω ότι $f + g = \text{Id}_{\mathcal{E}}$. Να δείξετε ότι:

$$\mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \geq n$$

Άσκηση 5.7.20 Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Να δείξετε ότι υπάρχει $m \geq 1$, έτσι ώστε:

$$\mathcal{E} = \text{Ker}(f^m) \oplus \text{Im}(f^m)$$

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις
 - Ορισμοί-Παραδείγματα
 - Πυρήνας και Εικόνα
 - Γραμμική Επέκταση
 - Εξίσωση Διαστάσεων
 - Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων
 - Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης
 - Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 139 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις
 - Ορισμοί-Παραδείγματα
 - Πυρήνας και Εικόνα
 - Γραμμική Επέκταση
 - Εξίσωση Διαστάσεων
 - Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων
 - Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης
 - Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 140 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 141 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη:

1. Εάν προσθέσουμε στο διάνυσμα $(\kappa - \beta) \cdot \bar{x}$ το διάνυσμα $\beta \cdot \bar{x}$ και χρησιμοποιήσουμε το Αξίωμα **(ΔX5)** θα έχουμε: $(\kappa - \beta) \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{x} = (\kappa - \beta + \beta) \cdot \bar{x} = \kappa \cdot \bar{x}$. Αν στην τελευταία σχέση προσθέσουμε και στα δύο μέλη το διάνυσμα $-(\beta \cdot \bar{x})$ και χρησιμοποιήσουμε διαδοχικά τα Αξιώματα **(ΔX1)**, **(ΔX4)**, **(ΔX3)** θα έχουμε την ζητούμενη σχέση:

$$\begin{aligned}\kappa \cdot \bar{x} - \beta \cdot \bar{x} &= [(\kappa - \beta) \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{x}] - (\beta \cdot \bar{x}) \\ &= (\kappa - \beta) \cdot \bar{x} + [\beta \cdot \bar{x} - (\beta \cdot \bar{x})] \\ &= (\kappa - \beta) \cdot \bar{x} + \vec{0} \\ &= (\kappa - \beta) \cdot \bar{x}\end{aligned}$$

2. Αν προσθέσουμε στο διάνυσμα $\kappa \cdot (\bar{x} - \bar{y})$ το διάνυσμα $\kappa \cdot \bar{y}$, θα έχουμε το διάνυσμα $\kappa \cdot (\bar{x} - \bar{y}) + \kappa \cdot \bar{y}$. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τα Αξιώματα **(ΔX1)**, **(ΔX4)**, **(ΔX3)** θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\kappa \cdot (\bar{x} - \bar{y}) + \kappa \cdot \bar{y} &= \kappa \cdot [(\bar{x} - \bar{y}) + \bar{y}] \\ &= \kappa \cdot [\bar{x} + (-\bar{y}) + \bar{y}] \\ &= \kappa \cdot (\bar{x} + \vec{0}) \\ &= \kappa \cdot \bar{x}\end{aligned}$$

Αν τώρα στην σχέση $\kappa \cdot (\bar{x} - \bar{y}) + \kappa \cdot \bar{y} = \kappa \cdot \bar{x}$ προσθέσουμε και στα δύο μέλη το διάνυσμα $-(\kappa \cdot \bar{y})$ και χρησιμοποιήσουμε διαδοχικά τα Αξιώματα **(ΔX1)**, **(ΔX4)**, **(ΔX3)** θα έχουμε τελικά την ζητούμενη σχέση:

$$\begin{aligned}[\kappa \cdot (\bar{x} - \bar{y}) + \kappa \cdot \bar{y}] - (\kappa \cdot \bar{y}) &= \kappa \cdot \bar{x} - \kappa \cdot \bar{y} \implies \\ \kappa \cdot (\bar{x} - \bar{y}) + (\kappa \cdot \bar{y} - \kappa \cdot \bar{y}) &= \kappa \cdot \bar{x} - \kappa \cdot \bar{y} \implies \\ \kappa \cdot (\bar{x} - \bar{y}) + \vec{0} &= \kappa \cdot \bar{x} - \kappa \cdot \bar{y} \implies \\ \kappa \cdot (\bar{x} - \bar{y}) &= \kappa \cdot \bar{x} - \kappa \cdot \bar{y}\end{aligned}$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 142 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

3. Στην σχέση 1. που αποδείξαμε θέτουμε $\kappa = \lambda$. Τότε θα έχουμε την σχέση $0 \cdot \vec{x} = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{x}$, το δεύτερο μέλος της οποίας είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔX4)**. Επομένως $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
4. Στην σχέση 1. που αποδείξαμε θέτουμε $\kappa = 0$ και $\lambda = 1$. Τότε θα έχουμε την σχέση $(-1) \cdot \vec{x} = -(1 \cdot \vec{x})$, το δεύτερο μέλος της οποίας είναι ίσο με το διάνυσμα $-\vec{x}$ σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔX8)**. Επομένως $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$.
5. Από την ιδιότητα 4. η σχέση $-(-\vec{x})$ γράφεται ισοδύναμα $(-1) \cdot [(-1) \cdot \vec{x}]$. Χρησιμοποιώντας τα Αξιώματα **(ΔX7)** και **(ΔX8)**, θα έχουμε $-(-\vec{x}) = (-1) \cdot [(-1) \cdot \vec{x}] = [(-1)(-1)] \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.
6. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 4., και το Αξίωμα **(ΔX6)**, θα έχουμε: $-(\vec{x} + \vec{y}) = (-1) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = (-1) \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{y} = -\vec{x} - \vec{y}$.
7. Στην σχέση 2. που αποδείξαμε θέτουμε $\vec{x} = \vec{y}$. Τότε θα έχουμε την σχέση $\kappa \cdot (\vec{x} - \vec{x}) = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{x}$, το δεύτερο μέλος της οποίας είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ και το πρώτο μέλος είναι ίσο με το διάνυσμα $\kappa \cdot \vec{0}$, σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔX4)**. Επομένως $\kappa \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
8. Υποθέτουμε ότι $\kappa \neq 0$ και δείχνουμε ότι αναγκαστικά θα πρέπει να ισχύει $\vec{x} = \vec{0}$. Επειδή $\kappa \neq 0$, ο αριθμός $\kappa \in \mathbb{K}$ είναι αντιστρέψιμος και επομένως υπάρχει ο αντίστροφος του $\kappa^{-1} \in \mathbb{K}$ και ισχύει $\kappa \kappa^{-1} = 1 = \kappa^{-1} \kappa$. Πολλαπλασιάζοντας βαθμωτά και από τα δύο μέλη την δοθείσα σχέση $\kappa \cdot \vec{x} = \vec{0}$ με κ^{-1} , θα έχουμε την σχέση

$$\kappa^{-1} \cdot (\kappa \cdot \vec{x}) = \kappa^{-1} \cdot \vec{0} \quad (*)$$

Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τα Αξιώματα **(ΔX7)** και **(ΔX8)**, το πρώτο μέλος της σχέσης (*) είναι ίσο με $(\kappa^{-1} \kappa) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$. Το δεύτερο μέλος της σχέσης (*) είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ σύμφωνα με την ιδιότητα 5. που αποδείξαμε παραπάνω. Επομένως $\vec{x} = \vec{0}$.

□
Πίσω στο Λήμμα 2.1.4



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες
- Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων
- Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων
- Ασκήσεις
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 143 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 144 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη:

1. Θέτοντας $\vec{x} = \vec{0}_1$ στο Αξίωμα **(ΔΧ3)** και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $\vec{0}_2$ ικανοποιεί αυτό το Αξίωμα, έχουμε: $\vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_1$. Παρόμοια θέτοντας $\vec{x} = \vec{0}_2$ στο Αξίωμα **(ΔΧ3)** και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $\vec{0}_1$ ικανοποιεί αυτό το Αξίωμα, έχουμε: $\vec{0}_2 + \vec{0}_1 = \vec{0}_2$. Όμως από το Αξίωμα **(ΔΧ2)** έχουμε $\vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2 + \vec{0}_1$. Επομένως $\vec{0}_1 = \vec{0}_2$.
2. Προσθέτοντας στην σχέση $\vec{x} + \vec{x}_1 = \vec{0}$ το διάνυσμα \vec{x}_2 θα έχουμε την σχέση $(\vec{x} + \vec{x}_1) + \vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{x}_2$, το δεύτερο μέλος της οποίας είναι ίσο με το \vec{x}_2 σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔΧ3)**. Εφαρμόζοντας διαδοχικά τα Αξιώματα **(ΔΧ1)**, **(ΔΧ2)**, **(ΔΧ3)**, και την σχέση $\vec{x} + \vec{x}_2 = \vec{0}$, θα έχουμε:

$$\vec{x}_2 = (\vec{x} + \vec{x}_1) + \vec{x}_2 = \vec{x} + (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{x} + (\vec{x}_2 + \vec{x}_1) =$$

$$(\vec{x} + \vec{x}_2) + \vec{x}_1 = \vec{0} + \vec{x}_1 = \vec{x}_1 + \vec{0} = \vec{x}_1.$$

3. Προσθέτοντας και στα δύο μέλη της σχέσης $\hat{\rho} \cdot \vec{x} = \hat{\rho} \cdot \vec{y}$ το διάνυσμα $-(\hat{\rho} \cdot \vec{y})$ θα έχουμε την σχέση $\hat{\rho} \cdot \vec{x} - (\hat{\rho} \cdot \vec{y}) = \hat{\rho} \cdot \vec{y} - (\hat{\rho} \cdot \vec{y}) = \vec{0}$. Επομένως η αρχική σχέση γράφεται ισοδύναμα $\hat{\rho} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = 0$. Επειδή $\hat{\rho} \neq 0$, από την ιδιότητα 8 του Λήμματος 2.1.4, έπεται ότι $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$. Προσθέτοντας στην τελευταία σχέση το διάνυσμα \vec{y} θα έχουμε $\vec{x} - \vec{y} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{0}$ και επομένως $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x} = \vec{y}$.
4. Σκεπτόμενοι όπως στην απόδειξη του 3. η σχέση $\hat{\rho}_1 \cdot \vec{x} = \hat{\rho}_2 \cdot \vec{x}$ γράφεται ισοδύναμα $(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2) \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Επειδή $\hat{\rho}_1 \neq \hat{\rho}_2$, από την ιδιότητα 8. του Λήμματος 2.1.4, έπεται ότι $\vec{x} = \vec{0}$.

□

Πίσω στο Λήμμα 2.1.5



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικό Χώρο

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυώνυμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 145 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε τα Αξιώματα **(ΔX1)**, **(ΔX3)**, **(ΔX4)**, **(ΔX6)**, **(ΔX7)**. Η απόδειξη των Αξιωμάτων **(ΔX2)**, **(ΔX5)**, **(ΔX8)** είναι παρόμοια και αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη. Στο υπόλοιπο της απόδειξης θέτουμε για συντομία $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n$.

Εστω $a = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, $\beta = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$ και $\gamma = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n)$ τρία στοιχεία του \mathcal{V} , και έστω $k \in \mathbb{K}$.

1. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔX1)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους \mathcal{V}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$a + (\beta + \gamma) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + [(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) + (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n)] =$$

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + (\bar{y}_1 + \bar{z}_1, \bar{y}_2 + \bar{z}_2, \dots, \bar{y}_n + \bar{z}_n) =$$

$$(\bar{x}_1 + (\bar{y}_1 + \bar{z}_1), \bar{x}_2 + (\bar{y}_2 + \bar{z}_2), \dots, \bar{x}_n + (\bar{y}_n + \bar{z}_n)) =$$

$$((\bar{x}_1 + \bar{y}_1) + \bar{z}_1, (\bar{x}_2 + \bar{y}_2) + \bar{z}_2, \dots, (\bar{x}_n + \bar{y}_n) + \bar{z}_n) =$$

$$(\bar{x}_1 + \bar{y}_1, \bar{x}_2 + \bar{y}_2, \dots, \bar{x}_n + \bar{y}_n) + (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n) =$$

$$[(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)] + (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n) = (a + \beta) + \gamma.$$

2. Θεωρούμε το διάνυσμα $\bar{0} := (\bar{0}_1, \bar{0}_2, \dots, \bar{0}_n)$, όπου $\bar{0}_i$ είναι το μηδενικό διάνυσμα του διανυσματικού χώρου \mathcal{V}_i . Τότε χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔX3)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους \mathcal{V}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$a + \bar{0} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + (\bar{0}_1, \bar{0}_2, \dots, \bar{0}_n) = (\bar{x}_1 + \bar{0}_1, \bar{x}_2 + \bar{0}_2, \dots, \bar{x}_n + \bar{0}_n) =$$

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = a.$$

Παρόμοια $\bar{0} + a = a$. Άρα το διάνυσμα $\bar{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα του \mathcal{V} .

3. Θεωρούμε το διάνυσμα $-a := (-\bar{x}_1, -\bar{x}_2, \dots, -\bar{x}_n)$. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔX4)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους \mathcal{V}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$a + (-a) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + (-\bar{x}_1, -\bar{x}_2, \dots, -\bar{x}_n) =$$

$$(\bar{x}_1 + (-\bar{x}_1), \bar{x}_2 + (-\bar{x}_2), \dots, \bar{x}_n + (-\bar{x}_n)) = (\bar{0}_1, \bar{0}_2, \dots, \bar{0}_n) = \bar{0}.$$

Παρόμοια $(-a) + a = \bar{0}$. Άρα το διάνυσμα $-a$ είναι το αντίθετο διάνυσμα του a .

4. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔX6)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους \mathcal{V}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$k \cdot (a + \beta) = k \cdot [(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)] =$$

$$k \cdot (\bar{x}_1 + \bar{y}_1, \bar{x}_2 + \bar{y}_2, \dots, \bar{x}_n + \bar{y}_n) = (k \cdot (\bar{x}_1 + \bar{y}_1), k \cdot (\bar{x}_2 + \bar{y}_2), \dots, k \cdot (\bar{x}_n + \bar{y}_n)) =$$

$$(k \cdot \bar{x}_1 + k \cdot \bar{y}_1, k \cdot \bar{x}_2 + k \cdot \bar{y}_2, \dots, k \cdot \bar{x}_n + k \cdot \bar{y}_n) =$$

$$(k \cdot \bar{x}_1, k \cdot \bar{x}_2, \dots, k \cdot \bar{x}_n) + (k \cdot \bar{y}_1, k \cdot \bar{y}_2, \dots, k \cdot \bar{y}_n) =$$

$$k \cdot (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + k \cdot (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) = k \cdot a + k \cdot \beta.$$

5. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔX7)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους \mathcal{V}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$k \cdot (l \cdot a) = k \cdot [l \cdot (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)] = k \cdot (l \cdot \bar{x}_1, l \cdot \bar{x}_2, \dots, l \cdot \bar{x}_n) =$$

$$(k \cdot (l \cdot \bar{x}_1), k \cdot (l \cdot \bar{x}_2), \dots, k \cdot (l \cdot \bar{x}_n)) = (kl \cdot \bar{x}_1, kl \cdot \bar{x}_2, \dots, kl \cdot \bar{x}_n) =$$

$$kl \cdot (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = kl \cdot a.$$

□

Πίσω στο Θεώρημα 2.2.6



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 146 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 147 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Λαμβάνοντας υπ' όψιν το πως ορίστηκαν οι πράξεις στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$, η ιδέα της απόδειξης βασίζεται στο ότι τα Αξιώματα **(ΔX1)**, ..., **(ΔX8)** ισχύουν στον διανυσματικό χώρο \mathcal{V} .

Έστω $f, g, h : S \rightarrow \mathcal{V}$ τρεις τυχούσες συναρτήσεις, και έστω $k, l \in \mathbb{K}$.

1. Ισχύει $f + (g + h) = (f + g) + h$ αν-ν για κάθε $x \in S$ έχουμε $[f + (g + h)](x) = [(f + g)h](x)$. Όμως $[f + (g + h)](x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔX1)** ισχύει στον \mathcal{V} , το δεύτερο μέλος της τελευταία σχέσης είναι ίσο με $[f(x) + g(x)] + h(x) = (f + g)(x) + h(x) = [(f + g) + h](x)$. Επομένως $[f + (g + h)](x) = [(f + g) + h](x)$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $x \in \mathcal{V}$, έπεται ότι $f + (g + h) = (f + g) + h$.
2. Η απόδειξη της σχέσης $f + g = g + f$ είναι παρόμοια με την αποδειξη της 1.
3. Θεωρούμε την συνάρτηση $\vec{0} : S \rightarrow \mathcal{V}$, με $\vec{0}(x) = \vec{0}$. Τότε για κάθε $x \in S$, έχουμε $(f + \vec{0})(x) = f(x) + \vec{0}(x) = f(x) + \vec{0}$. Επειδή $f(x) \in \mathcal{V}$, από το Αξίωμα **(ΔX3)** για τον \mathcal{V} , θα έχουμε $f(x) + \vec{0} = f(x)$. Επομένως $(f + \vec{0})(x) = f(x)$, $\forall x \in S$, το οποίο σημαίνει ότι $f + \vec{0} = f$. Παρόμοια $\vec{0} + f = f$.
4. Θεωρούμε την συνάρτηση $-f : S \rightarrow \mathcal{V}$ η οποία ορίζεται ως εξής: $(-f)(x) := -f(x)$. Τότε $[f + (-f)](x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = \vec{0} = \vec{0}(x)$. Επομένως $f + (-f) = \vec{0}$ και παρόμοια αποδεικνύεται ότι $(-f) + f = \vec{0}$.
5. Ισχύει $(k + l) \cdot f = k \cdot f + l \cdot f$ αν-ν για κάθε $x \in S$ έχουμε $[(k + l) \cdot f](x) = (k \cdot f + l \cdot f)(x)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ και την ισχύ του Αξιώματος **(ΔX5)** στον \mathcal{V} , έχουμε: $[(k + l) \cdot f](x) = (k + l) \cdot f(x) = k \cdot f(x) + l \cdot f(x) = (k \cdot f)(x) + (l \cdot f)(x) = (k \cdot f + l \cdot f)(x)$. Επομένως $(k + l) \cdot f = k \cdot f + l \cdot f$.
6. Η απόδειξη της σχέσης $k \cdot (f + g) = k \cdot f + k \cdot g$ είναι παρόμοια με την απόδειξη της 5.

7. Ισχύει $k \cdot (l \cdot f) = (kl) \cdot f$ αν-ν για κάθε $x \in S$ έχουμε: $[k \cdot (l \cdot f)](x) = [(kl) \cdot f](x)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ και την ισχύ του Αξιώματος **(ΔX7)** στον \mathcal{V} , έχουμε: $[k \cdot (l \cdot f)](x) = k \cdot [(l \cdot f)(x)] = k \cdot [l \cdot f(x)] = (kl) \cdot f(x) = [(kl) \cdot f](x)$. Επομένως ισχύει η σχέση $k \cdot (l \cdot f) = (kl) \cdot f$.
8. Ισχύει $1 \cdot f = f$ αν-ν για κάθε $x \in S$ έχουμε: $(1 \cdot f)(x) = f(x)$. Επειδή το Αξίωμα **(ΔX8)** ισχύει στον \mathcal{V} , θα έχουμε: $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$. Άρα $1 \cdot f = f$.

□

Πίσω στο Θεώρημα 2.2.10



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 148 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 149 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Θέτοντας $S = \mathbb{N}_0$ και $\mathcal{V} = \mathbb{K}$ στο Θεώρημα 2.2.10, παρατηρούμε ότι $\mathbb{A}(\mathbb{K}) = \mathcal{F}(S, \mathbb{K})$. Επίσης η πρόσθεση $(a_n)_{n \geq 0} + (b_n)_{n \geq 0}$ των ακολουθιών $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ συμπίπτει με την πρόσθεση $a + b$ των συναρτήσεων $n \mapsto a(n) = a_n$ και $n \mapsto b(n) = b_n$. Παρόμοια ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός $k \cdot (a_n)_{n \geq 0}$ συμπίπτει με τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό $k \cdot a$ της συνάρτησης $n \mapsto a(n) = a_n$ με το k . Επειδή, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.10, με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{K} , έπεται ότι και το σύνολο $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το \mathbb{K} . \square

Πίσω στο Πρόσιμα 2.2.12



Απόδειξη: Θέτουμε $S = \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ και $\mathcal{V} = \mathbb{K}$ στο Θεώρημα 2.2.10, και εργαζόμαστε όπως στο Πρόγραμμα 2.2.12. \square

Πίσω στο Πρόγραμμα 2.3.2

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι

➤ Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

➤ Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

➤ Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

➤ Ασκήσεις

- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 150 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀▶

◀▶

Σελίδα 151 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Επειδή το υποσύνολο \mathcal{W} είναι μη-κενό, έπεται ότι υπάρχει $\bar{x} \in \mathcal{W}$. Τότε όμως και $0\bar{x} \in \mathcal{W}$ σύμφωνα με την συνθήκη 3. του ορισμού 3.1.3 . Επειδή $0\bar{x} = \bar{0}$, έχουμε $\bar{0} \in \mathcal{W}$. Αν τώρα $\bar{x} \in \mathcal{W}$, τότε παρόμοια $(-1)\bar{x} \in \mathcal{W}$. Επειδή $(-1)\bar{x} = -\bar{x}$, έχουμε ότι $-\bar{x} \in \mathcal{W}$. □

Πίσω στο Λήμμα 3.1.4



Απόδειξη: Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση σημειώνοντας ότι είναι άμεση συνέπεια του ορισμού **3.1.3** και του Λήμματος **3.1.4**. □

Πίσω στο Λήμμα 3.1.6

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Διανυσματικοί Υπόχωροι
- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων
- Ασκήσεις
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 152 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

- Διανυσματικοί Υπόχωροι
- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων
- Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 153 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1., 2. Η απόδειξη είναι προφανής καθώς οι συνθήκες του ορισμού 3.1.3 ικανοποιούνται κατά τετριμμένο τρόπο.

3. Κατ' αρχήν το σύνολο $\langle \bar{x} \rangle$ δεν είναι κενό διότι περιέχει το μηδενικό διάνυσμα: $\vec{0} = 0\bar{x} \in \langle \bar{x} \rangle$. Αν $\vec{a}, \vec{\beta} \in \langle \bar{x} \rangle$, τότε υπάρχουν $k, l \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε: $\vec{a} = k\bar{x}$ και $\vec{\beta} = l\bar{x}$. Τότε $\vec{a} + \vec{\beta} = k\bar{x} + l\bar{x} = (k + l)\bar{x} \in \langle \bar{x} \rangle$. Τέλος αν $\vec{a} = k\bar{x} \in \langle \bar{x} \rangle$, και $r \in \mathbb{K}$, τότε θα έχουμε: $r\vec{a} = r(k\bar{x}) = (rk)\bar{x} \in \langle \bar{x} \rangle$. \square

Πίσω στην Πρόταση 3.1.7



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀▶

◀▶

Σελίδα 154 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Επειδή $\vec{0} = 0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n$, έπεται ότι $\vec{0} \in \langle S \rangle$ και ιδιαίτερα $\langle S \rangle \neq \emptyset$. Έστω $\vec{a}, \vec{b} \in \langle S \rangle$. Τότε $\vec{a} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \dots + k_n\vec{x}_n$ και $\vec{b} = l_1\vec{x}_1 + l_2\vec{x}_2 + \dots + l_n\vec{x}_n$, όπου $k_i, l_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Επομένως $\vec{a} + \vec{b} = (k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \dots + k_n\vec{x}_n) + (l_1\vec{x}_1 + l_2\vec{x}_2 + \dots + l_n\vec{x}_n) = (k_1 + l_1)\vec{x}_1 + (k_2 + l_2)\vec{x}_2 + \dots + (k_n + l_n)\vec{x}_n \in \langle S \rangle$. Άρα το $\langle S \rangle$ είναι κλειστό στην πρόσθεση του \mathcal{V} . Αν $r \in \mathbb{K}$, τότε $r\vec{a} = r(k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \dots + k_n\vec{x}_n) = (rk_1)\vec{x}_1 + (rk_2)\vec{x}_2 + \dots + (rk_n)\vec{x}_n \in \langle S \rangle$. Επομένως το $\langle S \rangle$ είναι υπόχωρος του \mathcal{V} . Επιπρόσθετα ο υπόχωρος $\langle S \rangle$ περιέχει το S διότι για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, έχουμε $\vec{x}_i = 0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_{i-1} + 1\vec{x}_i + 0\vec{x}_{i+1} + \dots + 0\vec{x}_n \in \langle S \rangle$. Επομένως $S \subseteq \langle S \rangle$. Έστω τώρα \mathcal{W} ένας υπόχωρος του \mathcal{V} με $S \subseteq \mathcal{W}$, και έστω $\vec{a} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \dots + k_n\vec{x}_n$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\langle S \rangle$. Επειδή ο \mathcal{W} περιέχει το S , δηλαδή τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, έπεται εύκολα από τον ορισμό 3.1.3 με χρήση επαγωγής επί του πλήθους n των διανυσμάτων του S , ότι $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \dots + k_n\vec{x}_n \in \mathcal{W}$. Δηλαδή $\vec{a} \in \mathcal{W}$. Επομένως $\langle S \rangle \subseteq \mathcal{W}$. \square

Πίσω στην Πρόταση 3.2.6



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

- Διανυσματικοί Υπόχωροι
- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων
- Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 155 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. Προκύπτει άμεσα χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης, δηλαδή το Αξίωμα **(ΔΧ2)**.

2. Έστω $\bar{x} \in \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle$. Τότε $\bar{x} = l_1 \bar{x}_1 + \dots + l_i \bar{x}_i + \dots + l_n \bar{x}_n$. Επειδή $k \neq 0$, η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί και ως εξής: $\bar{x} = l_1 \bar{x}_1 + \dots + (l_i k^{-1}) k \bar{x}_i + \dots + l_n \bar{x}_n$. Αυτή η σχέση δείχνει ότι $\bar{x} \in \langle \bar{x}_1, \dots, k \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle$ και επομένως $\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle \subseteq \langle \bar{x}_1, \dots, k \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle$. Αντίστροφα αν $\bar{x} \in \langle \bar{x}_1, \dots, k \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle$, τότε $\bar{x} = m_1 \bar{x}_1 + \dots + m_i (k \bar{x}_i) + \dots + m_n \bar{x}_n$. Η τελευταία σχέση γράφεται $\bar{x} = m_1 \bar{x}_1 + \dots + (m_i k) \bar{x}_i + \dots + m_n \bar{x}_n$ και αυτό σημαίνει ότι $\bar{x} \in \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle$. Άρα $\langle \bar{x}_1, \dots, k \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle \subseteq \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle$. Επομένως τελικά θα έχουμε $\langle \bar{x}_1, \dots, k \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle$.

3. Έστω $\bar{x} \in \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle$, και επομένως $\bar{x} = l_1 \bar{x}_1 + \dots + l_i \bar{x}_i + \dots + l_j \bar{x}_j + \dots + l_n \bar{x}_n$, όπου $l_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα $\bar{x} = l_1 \bar{x}_1 + \dots + l_i (\bar{x}_i + k \bar{x}_j) + \dots + (l_j - k l_i) \bar{x}_j + \dots + l_n \bar{x}_n$, δηλαδή προσθέσαμε και αφαιρέσαμε το διάνυσμα $l_i k \bar{x}_j$ στο \bar{x} . Η τελευταία σχέση δείχνει ότι $\bar{x} \in \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + k \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_n \rangle$ και επομένως $\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle \subseteq \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + k \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_n \rangle$. Αντίστροφα έστω $\bar{x} \in \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + k \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_n \rangle$, επομένως $\bar{x} = m_1 \bar{x}_1 + \dots + m_i (\bar{x}_i + k \bar{x}_j) + \dots + m_j \bar{x}_j + \dots + m_n \bar{x}_n$, όπου $m_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Η τελευταία σχέση γράφεται προφανώς $\bar{x} = m_1 \bar{x}_1 + \dots + m_i \bar{x}_i + \dots + (m_i k + m_j) \bar{x}_j + \dots + m_n \bar{x}_n$. Αυτό δείχνει ότι $\bar{x} \in \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle$ και επομένως $\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + k \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_n \rangle \subseteq \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle$. Έτσι τελικά θα έχουμε $\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + k \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_n \rangle = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n \rangle$.
□

Πίσω στην Πρόταση 3.2.8



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 156 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Από το Λήμμα 3.1.4 έπεται ότι κάθε υπόχωρος του \mathcal{V} περιέχει το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ του \mathcal{V} . Άρα $\vec{0} \in \mathcal{W}_i$, $\forall i \in I$, και επομένως $\vec{0} \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i$. Ιδιαίτερα $\bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i \neq \emptyset$. Έστω \vec{x}, \vec{y} δύο διανύσματα τα οποία ανήκουν στην τομή $\bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i$. Τότε $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{W}_i$, $\forall i \in I$. Επειδή, $\forall i \in I$, το υποσύνολο \mathcal{W}_i είναι υπόχωρος του \mathcal{V} , έπεται ότι $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{W}_i$, $\forall i \in I$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\vec{x} + \vec{y} \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i$ και επομένως το υποσύνολο $\bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i$ είναι κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης. Τέλος αν $k \in \mathbb{K}$ και $\vec{x} \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i$, τότε $k\vec{x} \in \mathcal{W}_i$, $\forall i \in I$. Επειδή $\forall i \in I$, το υποσύνολο \mathcal{W}_i είναι υπόχωρος του \mathcal{V} , έπεται ότι $k\vec{x} \in \mathcal{W}_i$, $\forall i \in I$. Τότε όπως και παραπάνω θα έχουμε $k\vec{x} \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i$. Δηλαδή το υποσύνολο $\bigcap_{i \in I} \mathcal{W}_i$ είναι κλειστό στην πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και επομένως είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{V} . \square

Πίσω στην Πρόταση 3.3.1



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

- Διανυσματικοί Υπόχωροι
- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων
- Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 157 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έστω Z το υποσύνολο στο δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης. Από την Πρόταση 3.2.6 έπεται ότι ο υπόχωρος $\langle S \rangle$ περιέχεται σε κάθε υπόχωρο W του \mathcal{V} με $S \subseteq W$. Άρα ο υπόχωρος $\langle S \rangle$ θα περιέχεται και στην τομή τους, και επομένως $\langle S \rangle \subseteq Z$. Από την άλλη πλευρά το σύνολο $\langle S \rangle$ είναι υπόχωρος του \mathcal{V} που περιέχει το S και άρα είναι κάποιος από τους υπόχωρους W που εμφανίζονται στην τομή Z . Αυτό όμως έχει σαν συνέπεια ότι $Z \subseteq \langle S \rangle$. Επομένως $\langle S \rangle = Z$. \square

Πίσω στην Πρόταση 3.3.2



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 158 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 2. \Rightarrow 1. Αν $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$, τότε προφανώς $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_2$ και αν $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$, τότε προφανώς $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1$. Έτσι σε κάθε περίπτωση η ένωση είναι υπόχωρος.

1. \Rightarrow 2. Υποθέτουμε ότι η ένωση $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ είναι υπόχωρος του \mathcal{V} και έστω ότι ο \mathcal{W}_1 δεν περιέχεται στον \mathcal{W}_2 , δηλαδή $\mathcal{W}_1 \not\subseteq \mathcal{W}_2$. Θα δείξουμε ότι αναγκαστικά ισχύει $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$. Επειδή υποθέσαμε ότι $\mathcal{W}_1 \not\subseteq \mathcal{W}_2$, έπεται ότι υπάρχει (τουλάχιστον ένα) διάνυσμα $\bar{x}_0 \in \mathcal{W}_1$ με $\bar{x}_0 \notin \mathcal{W}_2$. Έστω τώρα ένα τυχόν διάνυσμα $\bar{y} \in \mathcal{W}_2$. Επειδή τα \bar{x}_0, \bar{y} ανήκουν προφανώς στην ένωση $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ η οποία είναι υπόχωρος, έπεται ότι $\bar{x}_0 + \bar{y} \in \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$. Αυτό σημαίνει ότι είτε $\bar{x}_0 + \bar{y} \in \mathcal{W}_1$ ή $\bar{x}_0 + \bar{y} \in \mathcal{W}_2$. Αν $\bar{x}_0 + \bar{y} \in \mathcal{W}_2$, τότε επειδή $\bar{y} \in \mathcal{W}_2$ και ο \mathcal{W}_2 είναι υπόχωρος, έπεται ότι $(\bar{x}_0 + \bar{y}) - \bar{y} = \bar{x}_0 \in \mathcal{W}_2$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $\bar{x}_0 \notin \mathcal{W}_2$. Άρα $\bar{x}_0 + \bar{y} \in \mathcal{W}_1$, και τότε επειδή $\bar{x}_0 \in \mathcal{W}_1$ και ο \mathcal{W}_1 είναι υπόχωρος, έπεται ότι $(\bar{x}_0 + \bar{y}) - \bar{x}_0 = \bar{y} \in \mathcal{W}_1$. Επομένως δείξαμε ότι το τυχόν διάνυσμα \bar{y} του \mathcal{W}_2 ανήκει στον \mathcal{W}_1 , δηλαδή $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$.

Αν $\mathcal{W}_2 \not\subseteq \mathcal{W}_1$, τότε εργαζόμενοι παρόμοια, θα έχουμε $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$. □

Πίσω στην Πρόταση 3.3.4



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 159 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έχουμε δείξει στο Λήμμα 3.1.4 ότι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ του \mathcal{V} ανήκει σε κάθε υπόχωρο, άρα και σε κάθε έναν από τους \mathcal{W}_i . Επειδή $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} + \dots + \vec{0}$, έπεται ότι $\vec{0} \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$ και ιδιαίτερα το τελευταίο σύνολο δεν είναι κενό. Έστω τώρα $\vec{x} = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n$ και $\vec{y} = \vec{y}_1 + \dots + \vec{y}_n$ δύο διανύσματα του $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$. Τότε χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα και αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης (Αξιώματα **(ΔX1)**, **(ΔX2)**), θα έχουμε: $\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n) + (\vec{y}_1 + \dots + \vec{y}_n) = (\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + \dots + (\vec{x}_n + \vec{y}_n)$. Επειδή οι \mathcal{W}_i είναι υπόχωροι του \mathcal{V} και $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in \mathcal{W}_i, \forall i = 1, \dots, n$, έπεται ότι $\vec{x}_i + \vec{y}_i \in \mathcal{W}_i, \forall i = 1, \dots, n$. Επομένως $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$. Αν $k \in \mathbb{K}$ και $\vec{x} = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$, τότε $k\vec{x} = k(\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n) = k\vec{x}_1 + \dots + k\vec{x}_n$. Επειδή οι \mathcal{W}_i είναι υπόχωροι του \mathcal{V} και $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i, \forall i = 1, \dots, n$, έπεται ότι $k\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i, \forall i = 1, \dots, n$. Τότε όμως $k\vec{x} \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$. Επομένως το σύνολο $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$ είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{V} .

Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, έστω $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$. Τότε επειδή, σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔX3)**, έχουμε $\vec{x}_i = \vec{0} + \dots + \vec{0} + \vec{x}_i + \vec{0} + \dots + \vec{0}$ και επειδή $\vec{0} \in \mathcal{W}_i$, έπεται ότι $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$. Επομένως θα έχουμε $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Έστω τώρα \mathcal{W} ένας υπόχωρος του \mathcal{V} με την ιδιότητα $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{W}, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Επειδή ο \mathcal{W} είναι κλειστός στην πράξη της πρόσθεσης και περιέχει κάθε διάνυσμα \vec{x}_i , με $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$, έπεται ότι θα περιέχει και το άθροισμα τους $\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n$. Με άλλα λόγια θα περιέχει κάθε διάνυσμα του $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$ και επομένως $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n \subseteq \mathcal{W}$. \square

Πίσω στην Πρόταση 3.3.7



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

- Διανυσματικοί Υπόχωροι
- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων
- Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 160 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει κυκλικά: $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1.$

$1. \Rightarrow 2.$ Έστω ότι το άθροισμα των υπόχωρων \mathcal{W}_i είναι ευθύ και έστω \bar{x} ένα διάνυσμα του $\mathcal{W}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_n$ το οποίο υποθέτουμε ότι μπορούμε να το γράψουμε με δύο τρόπους σαν άθροισμα διανυσμάτων από τους \mathcal{W}_i :

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n = \bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_n, \quad \bar{x}_i, \bar{y}_i \in \mathcal{W}_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (*)$$

Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, προσθέτοντας και στα δύο μέλη το διάνυσμα $-\bar{y}_i$, θα έχουμε $\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{i-1} + (\bar{x}_i - \bar{y}_i) + \bar{x}_{i+1} + \dots + \bar{x}_n = \bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_{i-1} + \bar{y}_{i+1} + \dots + \bar{y}_n$. Στην τελευταία σχέση μεταφέρουμε τα διανύσματα $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n$ στο δεύτερο μέλος, δηλαδή προσθέτουμε στο πρώτο μέλος τα διανύσματα $-\bar{x}_1, \dots, -\bar{x}_{i-1}, -\bar{x}_{i+1}, \dots, -\bar{x}_n$. Τότε χρησιμοποιώντας τα Αξιώματα του ορισμού **2.1.1** θα έχουμε την σχέση:

$$\bar{x}_i - \bar{y}_i = (\bar{y}_1 - \bar{x}_1) + \dots + (\bar{y}_{i-1} - \bar{x}_{i-1}) + (\bar{y}_{i+1} - \bar{x}_{i+1}) + \dots + (\bar{y}_n - \bar{x}_n) \quad (**)$$

Στην σχέση (**), το πρώτο μέλος ανήκει στον υπόχωρο \mathcal{W}_i , διότι $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in \mathcal{W}_i$. Το δεύτερο μέλος της σχέσης ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}_1 + \dots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_{i+1} + \dots + \mathcal{W}_n$, διότι $\bar{x}_j, \bar{y}_j \in \mathcal{W}_j$, $j = 1, \dots, n, j \neq i$. Άρα $\bar{x}_i - \bar{y}_i \in \mathcal{W}_i \cap (\mathcal{W}_1 + \dots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_{i+1} + \dots + \mathcal{W}_n)$. Επειδή το άθροισμα των υπόχωρων \mathcal{W}_i είναι ευθύ, η τομή αυτή είναι ίση με $\{\bar{0}\}$, και επομένως $\bar{x}_i = \bar{y}_i$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, συμπεραίνουμε ότι θα έχουμε μοναδικότητα γραφής του διανύσματος \bar{x} ως προς τους υπόχωρους $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_n$.

$2. \Rightarrow 3.$ Υποθέτουμε ότι ισχύει το 2. και έστω ότι $\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n = \bar{0}$, όπου $\bar{x}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \dots, n$. Επειδή $\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n = \bar{0} + \dots + \bar{0}$ και το διάνυσμα $\bar{0}$ ανήκει σε κάθε υπόχωρο \mathcal{W}_i , από την μοναδικότητα της γραφής έπεται ότι $\bar{x}_i = \bar{0}$, $\forall i = 1, \dots, n$.

$3. \Rightarrow 1.$ Υποθέτουμε ότι ισχύει το 3. και έστω \bar{x} ένα διάνυσμα του \mathcal{V} το οποίο ανήκει στην τομή $\mathcal{W}_i \cap (\mathcal{W}_1 + \dots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_{i+1} + \dots + \mathcal{W}_n)$. Αυτό σημαίνει ότι $\bar{x} \in \mathcal{W}_i$ και $\bar{x} = \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{i-1} + \bar{x}_{i+1} + \dots + \bar{x}_n$, όπου $\bar{x}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$. Προσθέτοντας σε αυτή τη σχέση το διάνυσμα $-\bar{x}$, και χρησιμοποιώντας τα Αξιώματα του ορισμού **2.1.1**, θα έχουμε την σχέση

$$\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{i-1} + (-\bar{x}) + \bar{x}_{i+1} + \dots + \bar{x}_n = \bar{0} \quad (***)$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

- Διανυσματικοί Υπόχωροι
- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων
- Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 161 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Επειδή ο \mathcal{W}_i είναι υπόχωρος και $\bar{x} \in \mathcal{W}_i$, έπεται ότι $-\bar{x} \in \mathcal{W}_i$. Αυτό σημαίνει ότι στην σχέση (**), το πρώτο μέλος ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}_1 + \dots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_i + \mathcal{W}_{i+1} + \dots + \mathcal{W}_n$. Τότε όμως από την υπόθεση μας, θα έχουμε $\bar{x} = \bar{0}$ και $\bar{x}_j = 0, \forall j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$. Αυτό δείχνει ότι $\mathcal{W}_i \cap (\mathcal{W}_1 + \dots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_{i+1} + \dots + \mathcal{W}_n) = \{\bar{0}\}$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, θα έχουμε από το ορισμό 3.3.9 ότι το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \dots + \mathcal{W}_n$ είναι ευθύ. \square

Πίσω στην Πρόταση 3.3.15



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

- Διανυσματικοί Υπόχωροι
- Γραμμικοί Συνδυασμοί
- Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων
- Ασκήσεις

- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 162 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. \Rightarrow 2. Επειδή $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_n$, θα έχουμε ότι κάθε διάνυσμα του \mathcal{V} θα ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_n$, και επομένως θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων των υπόχωρων \mathcal{W}_i . Η μοναδικότητα της γραφής προκύπτει από την Πρόταση 3.3.15 διότι το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_n$ είναι ευθύ.

2. \Rightarrow 1. Η συνθήκη στο 2. έχει σαν συνέπεια ότι $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_n$. Επιπρόσθετα, σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.15, η μοναδικότητα της γραφής δείχνει ότι το άθροισμα είναι ευθύ. \square

Πίσω στο Πρόσιμα 3.3.16



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀▶

◀▶

Σελίδα 163 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Υπόδειξη: Θεωρείστε στο καρτεσιανό επίπεδο \mathbb{R}^2 δύο διαφορετικές ευθείες οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων $(0, 0)$. □

Πίσω στην Άσκηση 3.3.5



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀▶

◀▶

Σελίδα 164 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Υπόδειξη: Θεωρείστε τους ακόλουθους υπόχωρους του \mathbb{R}^2 :

$$Z_1 := \{(0, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad Z_n := \{((n-1)x, nx) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad \forall n \geq 2.$$

□

Πίσω στην Άσκηση **3.3.19**



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 165 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Υπόδειξη: Εργαστείτε όπως στο Παράδειγμα 3.1.9.



Πίσω στην Άσκηση 3.4.5



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀▶

◀▶

Σελίδα 166 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Υπόδειξη: Θεωρείστε τους $m \times n$ το πλήθος πίνακες E_{ij} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, όπου ο πίνακας E_{ij} έχει στην (i, j) -θέση 1 και παντού αλλού 0. Δηλαδή:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου το 1 εμφανίζεται στην τομή της j -στήλης με την i -γραμμή. Ακολουθως δείξτε ότι $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) = \langle E_{ij} \rangle_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. □

Πίσω στην Άσκηση 3.4.18



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 167 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. Αν $\bar{x} = \bar{0}$, τότε $1\bar{x} = \bar{0}$. Επειδή $1 \neq 0$, έπεται ότι το $\{\bar{0}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, και επομένως αν το $\{\bar{x}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε $\bar{x} \neq \bar{0}$. Αντίστροφα αν $\bar{x} \neq \bar{0}$, έστω $k \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $k\bar{x} = \bar{0}$. Αν $k \neq 0$, τότε υπάρχει το k^{-1} και επομένως πολλαπλασιάζοντας με το k^{-1} την σχέση $k\bar{x} = \bar{0}$, θα έχουμε $k^{-1}(k\bar{x}) = k^{-1}\bar{0} = \bar{0}$. Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την σχέση $(k^{-1}k)\bar{x} = 1\bar{x} = \bar{x} = \bar{0}$, η οποία είναι αδύνατη. Άρα $k = 0$, και επομένως το μονοσύνολο $\{\bar{x}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Αν τα \bar{x}_1, \bar{x}_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε $k\bar{x}_1 + l\bar{x}_2 = \bar{0}$, όπου $k, l \in \mathbb{K}$ και είτε $k \neq 0$ ή $l \neq 0$. Αν $k \neq 0$, τότε $\bar{x}_1 = -\frac{l}{k}\bar{x}_2$: όμοια αν $l \neq 0$, τότε $\bar{x}_2 = \frac{k}{l}\bar{x}_1$. Αντίστροφα αν $\bar{x}_2 = l\bar{x}_1$, τότε $l\bar{x}_1 + (-1)\bar{x}_2 = \bar{0}$, και επομένως τα \bar{x}_1, \bar{x}_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα· παρόμοια αν $\bar{x}_1 = k\bar{x}_2$, τότε $\bar{x}_1 + (-k)\bar{x}_2 = \bar{0}$, και επομένως τα \bar{x}_1, \bar{x}_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα. □

Πίσω στο Λήμμα 4.1.7



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωματά Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 168 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. Έστω $\mathcal{X} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του \mathcal{V} , και έστω $\mathcal{X}' := \{\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_k}\}$ ένα υποσύνολο του \mathcal{X} , όπου $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ είναι ένα υποσύνολο του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$. Έστω ότι $\beta_{i_1} \bar{x}_{i_1} + \dots + \beta_{i_k} \bar{x}_{i_k} = \vec{0}$. Αν $\{\bar{x}_{i_{k+1}}, \bar{x}_{i_{k+2}}, \dots, \bar{x}_{i_n}\}$ είναι τα υπόλοιπα στοιχεία του \mathcal{X} (δηλαδή $\mathcal{X} = \{\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_k}, \bar{x}_{i_{k+1}}, \dots, \bar{x}_{i_n}\}$), τότε η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα $\beta_{i_1} \bar{x}_{i_1} + \dots + \beta_{i_k} \bar{x}_{i_k} + 0\bar{x}_{i_{k+1}} + \dots + 0\bar{x}_{i_n} = \vec{0}$. Επειδή το \mathcal{X} είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι $\beta_{i_1} = \beta_{i_2} = \dots = \beta_{i_n} = 0$. Άρα το \mathcal{X}' είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Έστω $\mathcal{X} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο διανυσμάτων του \mathcal{V} , και έστω \mathcal{X}' ένα (πεπερασμένο) υπερσύνολο του. Τότε υπάρχουν στοιχεία $\bar{x}_{n+1}, \dots, \bar{x}_m$ του \mathcal{X}' , έτσι ώστε $\mathcal{X}' = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}, \dots, \bar{x}_m\}$. Επειδή το \mathcal{X} είναι γραμμικά εξαρτημένο, έπεται ότι υπάρχουν αριθμοί k_1, k_2, \dots, k_n , όχι όλοι ταυτόχρονα ίσοι με 0, έτσι ώστε: $k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_n \bar{x}_n = \vec{0}$. Η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα ως εξής: $k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_n \bar{x}_n + 0\bar{x}_{n+1} + \dots + 0\bar{x}_m = \vec{0}$. Επειδή ένα τουλάχιστον από τα k_i είναι μη-μηδενικό, έπεται ότι τα διανύσματα $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}, \dots, \bar{x}_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. \square

Πίσω στην Πρόταση 4.1.13



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 169 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. Έστω ότι το \mathcal{X} είναι γραμμικά εξαρτημένο· τότε υπάρχουν αριθμοί $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}$, όχι όλοι ταυτόχρονα ίσοι με μηδεν, έτσι ώστε: $k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_{i-1} \bar{x}_{i-1} + k_i \bar{x}_i + k_{i+1} \bar{x}_{i+1} + \dots + k_n \bar{x}_n = \bar{0}$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $k_i \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση γραμμικής εξάρτησης με k_i^{-1} , θα έχουμε την σχέση $k_i^{-1} k_1 \bar{x}_1 + k_i^{-1} k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_i^{-1} k_{i-1} \bar{x}_{i-1} + \bar{x}_i + k_i^{-1} k_{i+1} \bar{x}_{i+1} + \dots + k_i^{-1} k_n \bar{x}_n = \bar{0}$. Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την σχέση $\bar{x}_i = (-k_i^{-1} k_1) \bar{x}_1 + (-k_i^{-1} k_2) \bar{x}_2 + \dots + (-k_i^{-1} k_{i-1}) \bar{x}_{i-1} + (-k_i^{-1} k_{i+1}) \bar{x}_{i+1} + \dots + (-k_i^{-1} k_n) \bar{x}_n$. Άρα το \bar{x}_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων διανυσματών του συνόλου \mathcal{X} .

Αντίστροφα αν ένα από τα διανύσματα του συνόλου \mathcal{X} , π.χ. το \bar{x}_i , είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε υπάρχουν αριθμοί $k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε $\bar{x}_i = k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_{i-1} \bar{x}_{i-1} + k_{i+1} \bar{x}_{i+1} + \dots + k_n \bar{x}_n$. Αυτή η σχέση είναι προφανώς ισοδύναμη με την $k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_{i-1} \bar{x}_{i-1} + (-1) \bar{x}_i + k_{i+1} \bar{x}_{i+1} + \dots + k_n \bar{x}_n = \bar{0}$ η οποία είναι ένας μη-τετριμμένος (διότι ο συντελεστής του \bar{x}_i είναι $-1 \neq 0$) γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου \mathcal{X} ίσος με το μηδενικό διάνυσμα. Άρα το \mathcal{X} είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Υποθέτουμε ότι το $\mathcal{X} \cup \{\bar{x}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο σύνολο. Τότε θα έχουμε την σχέση (*) : $k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_{i-1} \bar{x}_{i-1} + k_i \bar{x}_i + k_{i+1} \bar{x}_{i+1} + \dots + k_n \bar{x}_n + k \bar{x} = \bar{0}$, για κάποιους αριθμούς $k_1, \dots, k_n, k \in \mathbb{K}$ οι οποίοι δεν είναι όλοι ταυτόχρονα ίσοι με 0. Αν $k = 0$, τότε θα έχουμε $k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_{i-1} \bar{x}_{i-1} + k_i \bar{x}_i + k_{i+1} \bar{x}_{i+1} + \dots + k_n \bar{x}_n = \bar{0}$, και επομένως, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$, θα έχουμε $k_1 = \dots = k_n = 0$, το οποίο είναι άτοπο διότι ένα τουλάχιστον από τα k_1, \dots, k_n, k είναι $\neq 0$. Άρα $k \neq 0$, και επομένως πολλαπλασιάζοντας την σχέση (*) με k^{-1} , θα έχουμε την σχέση $\bar{x} = (-k^{-1} k_1) \bar{x}_1 + \dots + k^{-1} k_n \bar{x}_n$ η οποία δείχνει ότι το \bar{x} είναι γραμμικός συνδυασμός των $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Το αντίστροφο προκύπτει άμεσα από το 1.

□

Πίσω στην Πρόταση 4.1.14



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 170 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. \Rightarrow 2. Έστω ότι $k_1\bar{x}_1 + \dots + k_n\bar{x}_n = l_1\bar{x}_1 + \dots + l_n\bar{x}_n$, όπου $k_i, l_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Η σχέση αυτή είναι προφανώς ισοδύναμη με την σχέση $(k_1 - l_1)\bar{x}_1 + \dots + (k_n - l_n)\bar{x}_n = \vec{0}$, η οποία λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ έχει σαν συνέπεια ότι $k_i - l_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$. Επομένως $k_i = l_i$, $\forall i = 1, \dots, n$.

2. \Rightarrow 1. Έστω ότι $k_1\bar{x}_1 + \dots + k_n\bar{x}_n = \vec{0}$, όπου $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Επειδή $0\vec{x} = \vec{0}$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$, η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα $k_1\bar{x}_1 + \dots + k_n\bar{x}_n = 0\bar{x}_1 + \dots + 0\bar{x}_n$. Τότε από την υπόθεση 2. έπεται ότι $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. \square

Πίσω στην Πρόταση 4.1.15



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 171 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. \Rightarrow 2.

Πίσω στο Πόρισμα 4.1.16 □



Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.1.15 και του Πορίσματος 4.1.16. □

Πίσω στην Πρόταση 4.2.2

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
 - Διανυσματικοί Χώροι
 - Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
 - Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμική Ανεξαρτησία
 - Η Έννοια της Βάσης
 - Η Έννοια της Διάστασης
 - Διάσταση Υπόχωρων
 - Βαθμίδα Διανυσμάτων
 - Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 172 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 173 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Θεωρούμε την συλλογή \mathcal{H} όλων των υποσυνόλων \mathcal{H} του \mathcal{V} τα οποία ικανοποιούν τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. Κάθε υποσύνολο $\mathcal{H} \in \mathcal{H}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
2. Για κάθε υποσύνολο $\mathcal{H} \in \mathcal{H}$ ισχύει: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$.

Δηλαδή:

$$\mathcal{H} := \{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{V} \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \text{ και το } \mathcal{H} \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητο}\}$$

Παρατηρούμε ότι η συλλογή υποσυνόλων \mathcal{H} είναι μη-κενή και περιέχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία, δηλαδή πεπερασμένα υποσύνολα του \mathcal{V} με τις ιδιότητες 1. και 2. Πράγματι η συλλογή \mathcal{H} είναι μη-κενή διότι περιέχει το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, και το πλήθος των στοιχείων της \mathcal{H} είναι πεπερασμένο διότι κάθε στοιχείο της \mathcal{H} περιέχεται στο σύνολο \mathcal{G} και το \mathcal{G} είναι πεπερασμένο από την υπόθεση. Επομένως μπορούμε να διαλέξουμε εκείνο το στοιχείο \mathcal{B} του \mathcal{H} με το μικρότερο πλήθος στοιχείων. Με άλλα λόγια από την κατασκευή του το σύνολο \mathcal{B} είναι το υποσύνολο του \mathcal{V} με το μικρότερο πλήθος στοιχείων το οποίο είναι γραμμικά ανεξάρτητο και περιέχει το \mathcal{F} και περιέχεται στο \mathcal{G} : $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. Θα δείξουμε ότι το \mathcal{B} είναι μια βάση του \mathcal{B} .

Επειδή το σύνολο \mathcal{B} είναι εκ' κατασκευής γραμμικά ανεξάρτητο, αρκεί να δείξουμε ότι παράγει τον \mathcal{V} . Έστω $\bar{x} \in \mathcal{G}$ ένα τυχόν διάνυσμα του \mathcal{G} . Αν $\bar{x} \in \mathcal{B}$, τότε το \bar{x} είναι τετριμμένα γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του \mathcal{B} . Έστω $\bar{x} \notin \mathcal{B}$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \cup \{\bar{x}\}$. Επειδή προφανώς το σύνολο \mathcal{B}' ικανοποιεί τη σχέση $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{G}$ και έχει μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων από το \mathcal{B} , δεν μπορεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητο από την κατασκευή του \mathcal{B} . Άρα το \mathcal{B} είναι γραμμικά εξαρτημένο, και επομένως από την Πρόταση 4.1.14 έπεται ότι το \bar{x} είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου \mathcal{B} . Επειδή το \mathcal{G} είναι σύνολο γεννητόρων του \mathcal{V} , κάθε διάνυσμα του \mathcal{B} θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του \mathcal{G} . Συνδυάζοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις, καταλήγουμε στο ότι το \bar{x} θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου \mathcal{B} . Άρα σε κάθε



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωματά Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 174 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

περίπτωση το τυχόν διάνυσμα \vec{x} του \mathcal{G} είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του \mathcal{B} . Επειδή από την υπόθεση το σύνολο \mathcal{G} είναι σύνολο γεννητόρων του \mathcal{V} , έπεται ότι και το \mathcal{B} είναι σύνολο γεννητόρων του \mathcal{V} . Άρα το \mathcal{B} είναι μια βάση του \mathcal{V} η οποία εκ' κατασκευής περιέχει το σύνολο \mathcal{F} και περιέχεται στο σύνολο \mathcal{G} . \square

Πίσω στο Θεώρημα 4.2.4



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωματά Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀▶

◀▶

Σελίδα 175 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Θέτοντας $\mathcal{F} = \emptyset$, και παρατηρώντας ότι τετριμμένα το \mathcal{F} είναι γραμμικά ανεξάρτητο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, από το Θεώρημα 4.2.4 έπεται ότι υπάρχει μια βάση \mathcal{B} του \mathcal{V} με την ιδιότητα $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. Επομένως υπάρχουν δείκτες $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}, \dots, \vec{x}_{i_k}\}$ να είναι βάση του \mathcal{V} . \square

Πίσω στο Πρόσιμα 4.2.5



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 176 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Θέτουμε $\mathcal{F} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\}$. Επειδή ο διανυσματικός χώρος \mathcal{V} είναι πεπερασμένα παραγόμενος, υπάρχει ένα σύνολο γεννητόρων \mathcal{G}' του \mathcal{V} . Θέτουμε $\mathcal{G} := \mathcal{F} \cup \mathcal{G}'$. Τότε προφανώς το \mathcal{G} παραμένει σύνολο γεννητόρων του \mathcal{V} και εκ' κατασκευής περιέχει το σύνολο \mathcal{F} : $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Τότε από το Θεώρημα 4.2.4 έπεται ότι υπάρχει μια βάση \mathcal{B} του \mathcal{V} με την ιδιότητα $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν διανύσματα $\bar{x}_{k+1}, \bar{x}_{k+2}, \dots, \bar{x}_n$, όπου $n \geq 1$, έτσι ώστε το σύνολο $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \bar{x}_{k+2}, \dots, \bar{x}_n\}$ να είναι μια βάση του \mathcal{V} . \square

Πίσω στο Πρόγραμμα 4.2.6



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 177 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με εις άτοπο επαγωγή: Υποθέτουμε ότι $|\mathcal{F}| > |\mathcal{G}|$ και θα δείξουμε ότι αυτή η υπόθεση θα μας οδηγήσει σε άτοπο. Έστω $\mathcal{G} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$. Τότε από την υπόθεση μας έχουμε ότι $|\mathcal{F}| > n$. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο \mathcal{F} περιέχει τουλάχιστον $n + 1$ διανύσματα ή ισοδύναμα το \mathcal{F} περιέχει ένα υποσύνολο $\mathcal{F}' := \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{y}_{n+1}\} \subseteq \mathcal{F}$ το οποίο αποτελείται από $n + 1$ διανύσματα. Η στρατηγική μας είναι να αντικαταστήσουμε τα διανύσματα του συνόλου \mathcal{G} με διανύσματα του συνόλου \mathcal{F}' με τέτοιο τρόπο ώστε το σύνολο που θα προκύψει να παραμείνει σύνολο γεννητόρων του \mathcal{V} .

Εν πρώτοις παρατηρούμε ότι επειδή το \mathcal{F} είναι γραμμικά ανεξάρτητο, από την Πρόταση 4.1.13 έπεται ότι και το σύνολο \mathcal{F}' είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επειδή το \mathcal{G} είναι σύνολο γεννητόρων του \mathcal{V} , έπεται ότι το $\bar{y}_1 \in \mathcal{F}'$ θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του \mathcal{G} . Έτσι θα έχουμε ότι

$$\bar{y}_1 = k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + \dots + k_n \bar{x}_n, \quad k_i \in \mathbb{K}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

Αν $k_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$, τότε $\bar{y}_1 = \bar{0}$ και αυτό είναι άτοπο διότι το μονοσύνολο $\{\bar{y}_1\}$ είναι υποσύνολο του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου \mathcal{F}' και γνωρίζουμε ότι το μονοσύνολο $\{\bar{0}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο από το Λήμμα 4.1.7. Άρα υπάρχει $i = 1, \dots, n$ έτσι ώστε $k_i \neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, εν ανάγκη αλλάζοντας την αρίθμηση των $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, ότι $k_1 \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (1) με k_1^{-1} , θα έχουμε ισοδύναμα τη σχέση

$$\bar{x}_1 = k_1^{-1} \bar{y}_1 + (-k_1^{-1} k_2) \bar{x}_2 + \dots + (-k_1^{-1} k_n) \bar{x}_n \quad (1')$$

Επειδή το σύνολο $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ παράγει τον \mathcal{V} και το \bar{x}_1 είναι γραμμικός συνδυασμός των $\bar{y}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, έπεται άμεσα ότι και το σύνολο $\{\bar{y}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ παράγει τον \mathcal{V} .

Επομένως το διάνυσμα \bar{y}_2 είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\{\bar{y}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$, δηλαδή:

$$\bar{y}_2 = l_1 \bar{y}_1 + l_2 \bar{x}_2 + \dots + l_n \bar{x}_n, \quad l_i \in \mathbb{K}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2)$$

Αν $l_i = 0, \forall i = 2, \dots, n$, τότε θα έχουμε $\bar{y}_2 = l_1 \bar{y}_1$, δηλαδή τα \bar{y}_1, \bar{y}_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα, και αυτό είναι άτοπο διότι το σύνολο $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο ως



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 178 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

υποσύνολο του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου \mathcal{F}' . Άρα υπάρχει $i = 2, \dots, n$ έτσι ώστε $l_i \neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, εν ανάγκη αλλάζοντας την αρίθμηση των $\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, ότι $l_2 \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (2) με l_2^{-1} , θα έχουμε ισοδύναμα τη σχέση

$$\bar{x}_2 = l_2^{-1} \bar{y}_2 + (-l_2^{-1} l_1) \bar{y}_1 + (-l_2^{-1} l_3) \bar{x}_3 + \dots + (-l_2^{-1} l_n) \bar{x}_n \quad (2)'$$

Επειδή το σύνολο $\{\bar{y}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ παράγει τον \mathcal{V} και το \bar{x}_2 είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n$, έπεται άμεσα ότι και το σύνολο $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n\}$ παράγει τον \mathcal{V} .

Μέχρι τώρα έχουμε αντικαταστήσει τα δύο πρώτα διανύσματα \bar{x}_1, \bar{x}_2 του συνόλου των γεννητόρων \mathcal{G} με τα δύο πρώτα διανύσματα \bar{y}_1, \bar{y}_2 έτσι ώστε το σύνολο $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n\}$ που προκύπτει να παραμένει σύνολο γεννητόρων του \mathcal{V} . Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία αντικατάστασης ενός διανύσματος του \mathcal{G} με ένα διάνυσμα του \mathcal{F}' , μετά από n βήματα, καταλήγουμε να αντικαταστήσουμε τα διανύσματα του \mathcal{G} με τα διανύσματα του \mathcal{F}' , και το σύνολο $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n\}$ παραμένει σύνολο γεννητόρων του \mathcal{V} . Επομένως, συνεχίζοντας στο $(n+1)$ βήμα, το διάνυσμα \bar{y}_{n+1} είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n\}$, δηλαδή:

$$\bar{y}_{n+1} = m_1 \bar{y}_1 + m_2 \bar{y}_2 + \dots + m_n \bar{y}_n, \quad m_i \in \mathbb{K}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (n+1)$$

Τότε όμως από την Πρόταση 4.1.14 έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{F}' = \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n, \bar{y}_{n+1}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο και αυτό είναι άτοπο. Στο άτοπο καταλήξαμε υποθέτοντας ότι $|\mathcal{F}'| > |\mathcal{G}|$. Επομένως θα έχουμε $|\mathcal{F}'| \leq |\mathcal{G}|$. \square

Πίσω στο Λήμμα 4.3.1



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 179 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έστω \mathcal{B} μια βάση του διανυσματικού χώρου \mathcal{V} , ιδιαίτερα το σύνολο \mathcal{B} είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επειδή ο \mathcal{V} είναι πεπερασμένα παραγόμενος, έπεται ότι ο \mathcal{V} έχει ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων \mathcal{G} . Τότε από το Λήμμα Ανταλλαγής 4.3.1 θα έχουμε ότι $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{G}| < \infty$. \square

Πίσω στο Πόρισμα 4.3.2



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀▶

◀▶

Σελίδα 180 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος Ανταλλαγής **4.3.1**: Επειδή τα σύνολα $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ είναι βάσεις, θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα γεννητόρων του \mathcal{V} .

1. Επειδή το \mathcal{B}_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητο και το \mathcal{B}_2 είναι σύνολο γεννητόρων του \mathcal{V} , από το Λήμμα Ανταλλαγής θα έχουμε: $|\mathcal{B}_1| \leq |\mathcal{B}_2|$.
2. Επειδή το \mathcal{B}_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητο και το \mathcal{B}_1 είναι σύνολο γεννητόρων του \mathcal{V} , από το Λήμμα Ανταλλαγής θα έχουμε: $|\mathcal{B}_2| \leq |\mathcal{B}_1|$.

Επομένως: $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$. □

Πίσω στο Θεώρημα 4.3.3



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 181 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Θα δείξουμε την ζητούμενη σχέση όταν $n = 2$. η γενική περίπτωση προκύπτει άμεσα με επαγωγή. Έστω $\mathcal{B}_1 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ μια βάση του \mathcal{V}_1 και $\mathcal{B}_2 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m\}$ μια βάση του \mathcal{V}_2 . Θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} := \{(\bar{e}_1, \bar{0}), (\bar{e}_2, \bar{0}), \dots, (\bar{e}_n, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{e}_1), (\bar{0}, \bar{e}_2), \dots, (\bar{0}, \bar{e}_m)\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$. Δείχνουμε πρώτα ότι το σύνολο \mathcal{B} παράγει τον $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$. Έστω $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ ένα τυχόν διάνυσμα. Επειδή $\bar{x} \in \mathcal{V}_1$ και το σύνολο \mathcal{B}_1 είναι μια βάση του \mathcal{V}_1 , έπεται ότι $\bar{x} = k_1 \bar{e}_1 + k_2 \bar{e}_2 + \dots + k_n \bar{e}_n$, $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Παρόμοια επειδή $\bar{y} \in \mathcal{V}_2$ και το σύνολο \mathcal{B}_2 είναι μια βάση του \mathcal{V}_2 , έπεται ότι $\bar{y} = l_1 \bar{e}_1 + l_2 \bar{e}_2 + \dots + l_m \bar{e}_m$, $l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq j \leq m$. Τότε θα έχουμε τη σχέση

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (k_1 \bar{e}_1 + k_2 \bar{e}_2 + \dots + k_n \bar{e}_n, l_1 \bar{e}_1 + l_2 \bar{e}_2 + \dots + l_m \bar{e}_m) =$$

$$k_1 (\bar{e}_1, \bar{0}) + k_2 (\bar{e}_2, \bar{0}) + \dots + k_n (\bar{e}_n, \bar{0}) + l_1 (\bar{0}, \bar{e}_1) + l_2 (\bar{0}, \bar{e}_2) + \dots + l_m (\bar{0}, \bar{e}_m)$$

η οποία δείχνει ότι το σύνολο \mathcal{B} παράγει τον χώρο $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το \mathcal{B} είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω ότι υπάρχουν αριθμοί $k_i, l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, έτσι ώστε:

$$k_1 (\bar{e}_1, \bar{0}) + k_2 (\bar{e}_2, \bar{0}) + \dots + k_n (\bar{e}_n, \bar{0}) + l_1 (\bar{0}, \bar{e}_1) + l_2 (\bar{0}, \bar{e}_2) + \dots + l_m (\bar{0}, \bar{e}_m) = (\bar{0}, \bar{0})$$

Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$(k_1 \bar{e}_1 + k_2 \bar{e}_2 + \dots + k_n \bar{e}_n, l_1 \bar{e}_1 + l_2 \bar{e}_2 + \dots + l_m \bar{e}_m) = (\bar{0}, \bar{0})$$

από την οποία συνάγεται άμεσα ότι

$$k_1 \bar{e}_1 + k_2 \bar{e}_2 + \dots + k_n \bar{e}_n = \bar{0}, \quad l_1 \bar{e}_1 + l_2 \bar{e}_2 + \dots + l_m \bar{e}_m = \bar{0}$$

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των συνόλων \mathcal{B}_1 και \mathcal{B}_2 έπεται ότι $k_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ και $l_j = 0, \forall j = 1, 2, \dots, m$. Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο \mathcal{B} είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και επομένως είναι μια βάση του $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$. Τότε όμως

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) = |\mathcal{B}| = n + m = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_2$$

□
Πίσω στην Πρόταση **4.3.10**



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 182 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωματά Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 183 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.6, κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο \mathcal{F} του \mathcal{V} επεκτείνεται σε μια βάση του \mathcal{V} . Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, έπεται ότι $|\mathcal{F}| \leq n$.

2. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.5, κάθε σύνολο γεννητόρων \mathcal{G} του \mathcal{V} περιέχει σαν υποσύνολο μια βάση του \mathcal{V} . Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, έπεται ότι $|\mathcal{G}| \geq n$.

3. Προκύπτει άμεσα από το 1.

4. Αν το υποσύνολο \mathcal{B} ικανοποιεί τα (a), (b), τότε το \mathcal{B} είναι εξ' ορισμού βάση του \mathcal{V} . Αν το υποσύνολο \mathcal{B} ικανοποιεί τα (a), (c), τότε από το (a) και το Πόρισμα 4.2.6, το \mathcal{B} επεκτείνεται σε μια βάση \mathcal{B}' του \mathcal{V} . Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, η βάση \mathcal{B}' έχει n το πλήθος στοιχεία. Επειδή $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ και $|\mathcal{B}| = n$, έπεται ότι $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, και άρα το σύνολο \mathcal{B} είναι βάση του \mathcal{V} . Αν το υποσύνολο \mathcal{B} ικανοποιεί τα (b), (c), τότε από το (b) και το Πόρισμα 4.2.5, το \mathcal{B} περιέχει σαν υποσύνολο μια βάση \mathcal{B}' του \mathcal{V} . Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, η βάση \mathcal{B}' έχει n το πλήθος στοιχεία. Επειδή $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ και $|\mathcal{B}| = n$, έπεται ότι $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, και άρα το σύνολο \mathcal{B} είναι βάση του \mathcal{V} . \square

Πίσω στο Θεώρημα 4.3.13



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 184 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n < \infty$.

1. - 2. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.13, κάθε σύνολο διανυσμάτων του \mathcal{V} , και άρα και του \mathcal{W} , με περισσότερα από $n + 1$ στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένα. Άρα το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του \mathcal{W} δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο το n . Έστω $\mathcal{C} := \{\bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_m\}$ το υποσύνολο του \mathcal{W} με το μεγαλύτερο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Τότε τα διανύσματα του \mathcal{C} είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα θεωρούμενα ως διανύσματα του \mathcal{V} , και άρα $m \leq n$. Έστω $\bar{\gamma} \in \mathcal{W}$ τότε το σύνολο $\mathcal{C} \cup \{\bar{\gamma}\} = \{\bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_m, \bar{\gamma}\}$ έχει $m + 1$ στοιχεία και άρα από την κατασκευή του \mathcal{C} είναι γραμμικά εξαρτημένο. Από τη Πρόταση 4.1.14 έπεται ότι το $\bar{\gamma}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του \mathcal{C} , και άρα το σύνολο \mathcal{C} είναι ένα σύνολο γεννητόρων του \mathcal{W} , και μάλιστα είναι μια βάση του \mathcal{W} αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως ο \mathcal{W} είναι πεπερασμένα παραγόμενος, και μάλιστα, η διάσταση του είναι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = m = |\mathcal{C}| \leq n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$.

3. Προφανώς αν $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, τότε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$. Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} := n$ και έστω \mathcal{C} μια βάση του \mathcal{W} . Τότε το σύνολο \mathcal{C} περιέχει n διανύσματα τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα ως διανύσματα του \mathcal{W} , άρα και ως διανύσματα του \mathcal{V} . Από το Θεώρημα 4.3.13 έπεται ότι το σύνολο \mathcal{C} είναι και βάση του \mathcal{V} . Αυτό όμως σημαίνει ότι $\mathcal{V} = \langle \mathcal{C} \rangle = \mathcal{W}$. □

Πίσω στην Πρόταση 4.4.1



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωματά Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 185 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{C} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ μια βάση του \mathcal{W} και $\mathcal{D} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ μια βάση του \mathcal{Z} .

1. \Rightarrow 2. Επειδή το άθροισμα $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ είναι ευθύ, έπεται εξ ορισμού ότι $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \{\bar{0}\}$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$, το οποίο είναι προφανώς υποσύνολο του $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$, είναι μια βάση του $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Έστω $k_1 \bar{e}_1 + \dots + k_n \bar{e}_n + l_1 \bar{e}_1 + \dots + l_m \bar{e}_m = \bar{0}$, όπου $k_i, l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Τότε θα έχουμε ισοδύναμα τη σχέση:

$$k_1 \bar{e}_1 + \dots + k_n \bar{e}_n = (-l_1) \bar{e}_1 + \dots + (-l_m) \bar{e}_m \quad (\dagger)$$

Το πρώτο μέλος της (\dagger) , ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του \mathcal{W} , ανήκει στον υπόχωρο \mathcal{W} . Παρόμοια το δεύτερο μέλος της (\dagger) , ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του \mathcal{Z} , ανήκει στον υπόχωρο \mathcal{Z} . Επομένως και τα δύο μέλη της (\dagger) ανήκουν στην τομή $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \{\bar{0}\}$. Άρα $k_1 \bar{e}_1 + \dots + k_n \bar{e}_n = \bar{0}$ και $(-l_1) \bar{e}_1 + \dots + (-l_m) \bar{e}_m = \bar{0}$. Όμως τα διανύσματα $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ και $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα καθώς αποτελούν βάσεις των \mathcal{W} και \mathcal{Z} αντίστοιχα. Άρα $k_1 = \dots = k_n = 0$ και $l_1 = \dots = l_m = 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω τώρα $\bar{x} \in \mathcal{W} + \mathcal{Z}$ ένα τυχόν διάνυσμα του υπόχωρου $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Τότε υπάρχουν διανύσματα $\bar{w} \in \mathcal{W}$ και $\bar{z} \in \mathcal{Z}$ έτσι ώστε $\bar{x} = \bar{w} + \bar{z}$. Επειδή το σύνολο \mathcal{C} είναι βάση του \mathcal{W} , θα έχουμε $\bar{w} = k_1 \bar{e}_1 + \dots + k_n \bar{e}_n$, όπου $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Παρόμοια επειδή το σύνολο \mathcal{D} είναι βάση του \mathcal{Z} , θα έχουμε $\bar{z} = l_1 \bar{e}_1 + \dots + l_m \bar{e}_m$, όπου $l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq j \leq m$. Τότε $\bar{x} = \bar{w} + \bar{z} = k_1 \bar{e}_1 + \dots + k_n \bar{e}_n + l_1 \bar{e}_1 + \dots + l_m \bar{e}_m$, το οποίο σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ παράγει τον υπόχωρο $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Άρα το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ αποτελεί βάση του $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ και επομένως θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} + \mathcal{Z}) = |\mathcal{C} \cup \mathcal{D}| = n + m = |\mathcal{C}| + |\mathcal{D}| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z}.$$

2. \Rightarrow 1. Όπως και στην απόδειξη του 1. \Rightarrow 2. βλέπουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ παράγει τον υπόχωρο $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση θα έχουμε $|\mathcal{C} \cup \mathcal{D}| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z} = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} + \mathcal{Z})$, και επομένως από το Θεώρημα 4.3.13 θα έχουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ είναι μια βάση του $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Τώρα για να δείξουμε το 1., αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \{\bar{0}\}$. Έστω $\bar{x} \in \mathcal{W} \cap \mathcal{Z}$. Τότε $\bar{x} \in \mathcal{W}$, και άρα επειδή το σύνολο $\mathcal{C} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ είναι μια βάση του \mathcal{W} , θα έχουμε $\bar{x} = k_1 \bar{e}_1 + \dots + k_n \bar{e}_n$, όπου $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Επίσης $\bar{x} \in \mathcal{Z}$, και



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀▶

◀▶

Σελίδα 186 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

άρα επειδή το σύνολο $\mathcal{D} = \{\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_m\}$ είναι μια βάση του \mathcal{Z} , θα έχουμε $\bar{x} = l_1 \bar{\epsilon}_1 + \dots + l_m \bar{\epsilon}_m$, όπου $l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq j \leq m$. Τότε $\bar{x} = k_1 \bar{\epsilon}_1 + \dots + k_n \bar{\epsilon}_n = l_1 \bar{\epsilon}_1 + \dots + l_m \bar{\epsilon}_m$ ή ισοδύναμα $k_1 \bar{\epsilon}_1 + \dots + k_n \bar{\epsilon}_n + (-l_1) \bar{\epsilon}_1 + \dots + (-l_m) \bar{\epsilon}_m = \bar{0}$. Επειδή, όπως δείξαμε παραπάνω, το σύνολο $\{\bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_n, \bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_n\}$ είναι βάση του $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$, θα έχουμε $k_i = 0 = l_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\bar{x} = \bar{0}$. Άρα $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \{\bar{0}\}$, και επομένως το άθροισμα $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ είναι ευθύ. \square

Πίσω στην Πρόταση 4.4.3



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 187 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n < \infty$. Από την Πρόταση 4.4.1 έπεται ότι ο υπόχωρος \mathcal{W} έχει πεπερασμένη διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = m \leq n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$. Έστω $\mathcal{C} = \{\bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_m\}$ μια βάση του \mathcal{W} . Από το Πρόσημα 4.2.6 έπεται ότι υπάρχει ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{D} := \{\bar{\epsilon}_{m+1}, \dots, \bar{\epsilon}_n\}$ του \mathcal{V} , έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{B} := \mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \{\bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_m, \bar{\epsilon}_{m+1}, \dots, \bar{\epsilon}_n\}$ να είναι μια βάση του \mathcal{V} . Θέτουμε $\mathcal{Z} := \langle \mathcal{D} \rangle = \langle \bar{\epsilon}_{m+1}, \dots, \bar{\epsilon}_n \rangle$. Επειδή το σύνολο \mathcal{D} είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του \mathcal{V} (ως υποσύνολο της βάσης \mathcal{B}), έπεται ότι το \mathcal{D} είναι μια βάση του \mathcal{Z} . Θα δείξουμε ότι $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$. Έστω $\bar{x} \in \mathcal{V}$. Επειδή το σύνολο \mathcal{B} είναι βάση του \mathcal{V} , έπεται ότι $\bar{x} = k_1 \bar{\epsilon}_1 + \dots + k_m \bar{\epsilon}_m + k_{m+1} \bar{\epsilon}_{m+1} + \dots + k_n \bar{\epsilon}_n$. Θέτοντας $\bar{w} = k_1 \bar{\epsilon}_1 + \dots + k_m \bar{\epsilon}_m$ και $\bar{z} = k_{m+1} \bar{\epsilon}_{m+1} + \dots + k_n \bar{\epsilon}_n$, και χρησιμοποιώντας ότι $\mathcal{W} = \langle \bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_m \rangle$ και $\mathcal{Z} = \langle \bar{\epsilon}_{m+1}, \dots, \bar{\epsilon}_n \rangle$, έπεται ότι $\bar{w} \in \mathcal{W}$ και $\bar{z} \in \mathcal{Z}$. Επομένως το τυχόν διάνυσμα $\bar{x} \in \mathcal{V}$ γράφεται ως $\bar{x} = \bar{w} + \bar{z}$, όπου $\bar{w} \in \mathcal{W}$ και $\bar{z} \in \mathcal{Z}$. Άρα $\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = |\mathcal{B}| = n + m = |\mathcal{C}| + |\mathcal{D}| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z}$, από την Πρόταση 4.4.3 έπεται ότι το άθροισμα $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ είναι ευθύ. Επομένως θα έχουμε $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$. \square

Πίσω στο Θεώρημα ;;



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 188 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k\}$ μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}$. Επειδή ο $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}$ είναι υπόχωρος του \mathcal{W} , από το Πρόρισμα 4.2.6, το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο \mathcal{C} επεκτείνεται σε μια βάση του \mathcal{W} : υπάρχουν διανύσματα $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ του \mathcal{W} έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{D} := \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ να είναι βάση του \mathcal{W} . Παρόμοια επειδή ο $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}$ είναι και υπόχωρος του \mathcal{Z} , από το Πρόρισμα 4.2.6, το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο \mathcal{C} επεκτείνεται σε μια βάση του \mathcal{Z} : υπάρχουν διανύσματα $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ του \mathcal{Z} έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{E} := \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ να είναι βάση του \mathcal{Z} . Σημειώνουμε ότι με τις παραπάνω κατασκευές και επιλογές θα έχουμε:

1. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}) = |\mathcal{C}| = k$.
2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = |\mathcal{D}| = k + n$.
3. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z} = |\mathcal{E}| = k + m$.
4. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}) = (k + n) + (k + m) - k = k + n + m$.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} := \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$, διότι τότε θα έχουμε: $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} + \mathcal{Z}) = |\mathcal{B}| = k + n + m = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} \cap \mathcal{Z})$ η οποία είναι η σχέση που θέλουμε να δείξουμε.

Έστω ότι για κάποιους αριθμούς $\beta_i, \mu_j, \nu_r \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq r \leq m$, ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\beta_1 \vec{f}_1 + \dots + \beta_k \vec{f}_k + \mu_1 \vec{e}_1 + \dots + \mu_n \vec{e}_n + \nu_1 \vec{e}_1 + \dots + \nu_m \vec{e}_m = \vec{0} \quad (1)$$

Τότε θα έχουμε ισοδύναμα τη σχέση

$$\mu_1 \vec{e}_1 + \dots + \mu_n \vec{e}_n = (-\beta_1) \vec{f}_1 + \dots + (-\beta_k) \vec{f}_k + (-\nu_1) \vec{e}_1 + \dots + (-\nu_m) \vec{e}_m \quad (2)$$



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις
- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 189 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Το πρώτο μέλος της (2) ανήκει στον υπόχωρο \mathcal{W} και το δεύτερο μέλος ανήκει στον υπόχωρο \mathcal{Z} . Άρα και τα δύο (ίσα) μέλη ανήκουν στην τομή $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}$. Επειδή το σύνολο $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k\}$ είναι μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}$, έπεται ότι υπάρχουν αριθμοί $\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $\mu_1 \vec{e}_1 + \dots + \mu_n \vec{e}_n = \rho_1 \vec{f}_1 + \dots + \rho_k \vec{f}_k$. Ισοδύναμα θα έχουμε τη σχέση:

$$\rho_1 \vec{f}_1 + \dots + \rho_k \vec{f}_k + (-\mu_1) \vec{e}_1 + \dots + (-\mu_n) \vec{e}_n = \vec{0} \quad (3)$$

Επειδή εκ' κατασκευής το σύνολο $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του \mathcal{W} , έπεται ότι $\rho_i = 0 = \mu_j$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$. Τότε όμως από τη σχέση (1) θα έχουμε

$$\beta_1 \vec{f}_1 + \dots + \beta_k \vec{f}_k + \nu_1 \vec{e}_1 + \dots + \nu_m \vec{e}_m = \vec{0} \quad (4)$$

Επειδή εκ' κατασκευής το σύνολο $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ είναι μια βάση του \mathcal{Z} , από τη σχέση (4) έπεται ότι $\beta_i = 0 = \nu_j$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$. Καταλήγουμε ότι όλοι οι συντελεστές β_i, μ_j, ν_r είναι ίσοι με 0 και άρα το σύνολο \mathcal{B} είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Μένει να δείξουμε ότι το σύνολο \mathcal{B} παράγει τον υπόχωρο $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Αυτό προκύπτει άμεσα, καθώς όπως δείξαμε στην απόδειξη της Πρότασης 4.4.3, η ένωση μιας βάσης του \mathcal{W} και μιας βάσης του \mathcal{Z} είναι ένα σύνολο γεννητόρων του υπόχωρου $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. \square

Πίσω στο Θεώρημα 4.4.9



- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

- Γραμμική Ανεξαρτησία
- Η Έννοια της Βάσης
- Η Έννοια της Διάστασης
- Διάσταση Υπόχωρων
- Βαθμίδα Διανυσμάτων
- Ασκήσεις

- Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

⏪ ⏩

◀ ▶

Σελίδα 190 από 212

Πίσω

Όλη η σθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έστω $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m = \vec{0}$. Τότε από τις σχέσεις (*) θα έχουμε: $\lambda_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \dots + a_{1n}\vec{e}_n) + \lambda_2(a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \dots + a_{2n}\vec{e}_n) + \dots + \lambda_m(a_{m1}\vec{e}_1 + a_{m2}\vec{e}_2 + \dots + a_{mn}\vec{e}_n) = \vec{0}$. Η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_m a_{m1})\vec{e}_1 +$$

$$(\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_m a_{m2})\vec{e}_2 +$$

... ..

$$(\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_m a_{mn})\vec{e}_n = \vec{0}.$$

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, θα έχουμε τις σχέσεις:

$$\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_m a_{m1} = 0$$

$$\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_m a_{m2} = 0$$

... ..

$$\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_m a_{mn} = 0$$

Από την υπόθεση όμως οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως εξής:

$$\lambda_1 a_{11} = 0$$

$$\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} = 0$$

... ..

$$\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_m a_{mn} = 0$$

Χρησιμοποιώντας ότι $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, m$, από τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε άμεσα ότι: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$. Άρα το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως $\mathbf{r}(\vec{x}_i) = m$. \square

Πίσω στην Πρόταση 4.5.3



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 191 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. Επειδή $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, από τη γραμμικότητα της f έπεται ότι $f(\vec{0}) = f(\vec{0} + \vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0})$. Επομένως $\vec{0} = f(\vec{0}) - f(\vec{0}) = [f(\vec{0}) + f(\vec{0})] - f(\vec{0}) = f(\vec{0}) + [f(\vec{0}) - f(\vec{0})] = f(\vec{0}) + \vec{0} = f(\vec{0})$.

2. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της f θα έχουμε: $f(-\vec{0}) = f((-1)\vec{0}) = (-1)f(\vec{0}) = -f(\vec{0})$.

3. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της f και το 2. θα έχουμε: $f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x} + (-\vec{y})) = f(\vec{x}) + f(-\vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y})$.

4. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο πλήθος $n \geq 1$ των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Η περίπτωση $n = 1$ συμπίπτει με το 2. του ορισμού 5.1.1. Αν $n = 2$, τότε από τον ορισμό 5.1.1 θα έχουμε: $f(\beta_1 \vec{x}_1 + \beta_2 \vec{x}_2) = f(\beta_1 \vec{x}_1) + f(\beta_2 \vec{x}_2) = \beta_1 f(\vec{x}_1) + \beta_2 f(\vec{x}_2)$. Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $n \geq 2$ το πλήθος διανύσματα. Τότε, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, θα έχουμε $f(\beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_n \vec{x}_n + \beta_{n+1} \vec{x}_{n+1}) = f((\beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_n \vec{x}_n) + \beta_{n+1} \vec{x}_{n+1}) = f(\beta_1 \vec{x}_1 + \dots + \beta_n \vec{x}_n) + f(\beta_{n+1} \vec{x}_{n+1}) = \beta_1 f(\vec{x}_1) + \beta_2 f(\vec{x}_2) + \dots + \beta_n f(\vec{x}_n) + \beta_{n+1} f(\vec{x}_{n+1})$. Επομένως ο ισχυρισμός 4. ισχύει για κάθε $n \geq 1$. \square

Πίσω στην Πρόταση 5.1.2



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 192 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Αν η f είναι γραμμική, τότε η ζητούμενη σχέση προκύπτει από την Πρόταση 5.1.2. Αν η παραπάνω σχέση ισχύει, τότε η γραμμικότητα της f προκύπτει θέτοντας διαδοχικά $\beta = \mu = 1$ και $\mu = 0$ στην παραπάνω σχέση. \square

Πίσω στο Πρόγραμμα 5.1.3



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Αλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 193 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. Τότε: $f(\vec{x} + \vec{y}) = f((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = a_1(x_1 + y_1) + a_2(x_2 + y_2) + \dots + a_n(x_n + y_n) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) + (a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$. Άρα ισχύει η συνθήκη 1. του ορισμού 5.1.1. Επίσης αν $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε: $f(\lambda\vec{x}) = f(\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = a_1\lambda x_1 + a_2\lambda x_2 + \dots + a_n\lambda x_n = \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = \lambda f(\vec{x})$. Άρα ισχύει και η συνθήκη 2. του ορισμού 5.1.1, και επομένως η f είναι γραμμική.

2. Έστω $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ μια γραμμική απεικόνιση. Θέτουμε $a_1 := f(\vec{e}_1)$, $a_2 := f(\vec{e}_2)$, \dots , $a_n := f(\vec{e}_n)$, όπου $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ είναι η κανονική βάση του \mathbb{K}^n . Τότε για κάθε $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, θα έχουμε $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα της f , θα έχουμε: $f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1f(\vec{e}_1) + x_2f(\vec{e}_2) + \dots + x_nf(\vec{e}_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$. Από τον ορισμό τους οι αριθμοί a_1, a_2, \dots, a_n είναι μοναδικοί. \square

Πίσω στην Πρόταση 5.1.10



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικονίσης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 194 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. \Rightarrow 2. Η απεικόνιση f προσδιορίζει μοναδικά m απεικονίσεις $f_i : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, όπου $f_i(\vec{x}) = \eta$ i -οστή συνιστώσα του διανύσματος $f(\vec{x})$. Θα δείξουμε ότι η f_i είναι γραμμική, $\forall i = 1, 2, \dots, m$. Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Τότε $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = (f_1(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}), f_2(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}), \dots, f_m(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}))$. Επειδή η f είναι γραμμική θα έχουμε

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) &= \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) \\ &= \lambda(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})) + \mu(f_1(\vec{y}), f_2(\vec{y}), \dots, f_m(\vec{y})) \\ &= (\lambda f_1(\vec{x}), \lambda f_2(\vec{x}), \dots, \lambda f_m(\vec{x})) + (\mu f_1(\vec{y}), \mu f_2(\vec{y}), \dots, \mu f_m(\vec{y})) \\ &= (\lambda f_1(\vec{x}) + \mu f_1(\vec{y}), \lambda f_2(\vec{x}) + \mu f_2(\vec{y}), \dots, \lambda f_m(\vec{x}) + \mu f_m(\vec{y})) \end{aligned}$$

Επομένως $f_i(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f_i(\vec{x}) + \mu f_i(\vec{y})$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$, και άρα η f_i είναι γραμμική.

2. \Leftrightarrow 3. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 5.1.10.

2. \Rightarrow 1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των πράξεων του διανυσματικού χώρου \mathbb{K}^m και την γραμμικότητα των απεικονίσεων f_i , $1 \leq i \leq m$, έπεται άμεσα ότι η f είναι γραμμική.

□

Πίσω στην Πρόταση 5.1.12



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 195 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. Παρατηρούμε ότι επειδή ο \mathcal{V} είναι υπόχωρος του \mathcal{X} , θα έχουμε $\vec{0} \in \mathcal{V}$. Επίσης επειδή η f είναι γραμμική, θα έχουμε $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Άρα $\vec{0} \in f(\mathcal{V})$ και επομένως το σύνολο $f(\mathcal{V})$ είναι μη-κενό. Έστω $\vec{z}, \vec{w} \in f(\mathcal{V})$, και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Τότε υπάρχουν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \vec{z}$ και $f(\vec{y}) = \vec{w}$. Επειδή το σύνολο \mathcal{V} είναι υπόχωρος του \mathcal{X} , έπεται ότι $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in \mathcal{V}$. Τότε $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \in f(\mathcal{V})$, και επομένως επειδή η f είναι γραμμική θα έχουμε: $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) = \lambda\vec{z} + \mu\vec{w} \in f(\mathcal{V})$. Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $f(\mathcal{V})$ είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{F} .

2. Επειδή η f είναι γραμμική θα έχουμε $f(\vec{0}) = \vec{0}$, και επειδή ο \mathcal{W} είναι υπόχωρος του \mathcal{X} θα έχουμε $\vec{0} \in \mathcal{W}$. Άρα $\vec{0} \in f^{-1}(\mathcal{W})$ και επομένως το σύνολο $f^{-1}(\mathcal{W})$ είναι μη-κενό. Έστω τώρα $\vec{x}, \vec{y} \in f^{-1}(\mathcal{W})$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Τότε $f(\vec{x}), f(\vec{y}) \in \mathcal{W}$, και επειδή ο \mathcal{W} είναι υπόχωρος του \mathcal{F} , έπεται ότι $\lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) \in \mathcal{W}$. Όμως επειδή η f είναι γραμμική θα έχουμε $\lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) = f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \in \mathcal{W}$, το οποίο σημαίνει ότι $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in f^{-1}(\mathcal{W})$. Άρα το σύνολο $f^{-1}(\mathcal{W})$ είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{X} . \square

Πίσω στην Πρόταση 5.2.4



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικονίσης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 196 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Αν \mathcal{V} είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{E} , τότε από τη Πρόταση 5.2.4 έπεται ότι $f(\mathcal{V})$ είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{F} , και προφανώς θα έχουμε $f(\mathcal{V}) \subseteq \text{Im}(f) = f(\mathcal{E})$. Επομένως η απεικόνιση \mathbf{F} είναι καλά ορισμένη. Έστω $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ δύο υπόχωροι του \mathcal{E} οι οποίοι περιέχουν τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$: $\text{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}_i$, $i = 1, 2$, και υποθέτουμε ότι ισχύει: $\mathbf{F}(\mathcal{V}_1) = \mathbf{F}(\mathcal{V}_2)$, δηλαδή $f(\mathcal{V}_1) = f(\mathcal{V}_2)$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$. Έστω $\bar{x} \in \mathcal{V}_1$. Τότε $f(\bar{x}) \in f(\mathcal{V}_1) = f(\mathcal{V}_2)$. Άρα υπάρχει $\bar{y} \in \mathcal{V}_2$ έτσι ώστε $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$, και επομένως $f(\bar{x} - \bar{y}) = \vec{0}$ δηλαδή $\bar{x} - \bar{y} \in \text{Ker}(f)$. Επειδή $\text{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}_2$, έπεται ότι $\bar{z} := \bar{x} - \bar{y} \in \mathcal{V}_2$. Τότε όμως το διάνυσμα $\bar{x} = \bar{z} + \bar{y}$ ανήκει στον υπόχωρο \mathcal{V}_2 . Επομένως $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$. Δουλεύοντας ανάλογα θα έχουμε $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_1$. Άρα $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$ και η απεικόνιση \mathbf{F} είναι 1-1. Έστω τώρα \mathcal{W} ένας υπόχωρος του \mathcal{F} έτσι ώστε $\mathcal{W} \subseteq \text{Im}(f) = f(\mathcal{E})$. Θέτουμε $\mathcal{V} := f^{-1}(\mathcal{W})$. Από τη Πρόταση 5.2.4 έπεται ότι ο \mathcal{V} είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{E} . Θα δείξουμε ότι $\text{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}$ και $\mathbf{F}(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$. Αν $\bar{x} \in \text{Ker}(f)$, τότε $f(\bar{x}) = \vec{0} \in \mathcal{W}$. Άρα $\bar{x} \in f^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{V}$ και επομένως $\text{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}$. Από την άλλη πλευρά, εξ ορισμού προκύπτει άμεσα ότι $f(\mathcal{V}) = \mathbf{F}(f^{-1}(\mathcal{W})) \subseteq \mathcal{W}$. Αν $\bar{w} \in \mathcal{W}$, τότε $\bar{w} \in \text{Im}(f) = f(\mathcal{E})$ και άρα $\bar{w} = f(\bar{x})$ για κάποιο $\bar{x} \in \mathcal{E}$. Τότε εξ ορισμού το \bar{x} ανήκει στο $f^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{V}$ και άρα $\bar{w} = f(\bar{x}) \in f(f^{-1}(\mathcal{W})) = f(\mathcal{V})$. Επομένως $\mathcal{W} = f(f^{-1}(\mathcal{W})) = f(\mathcal{V})$ και αυτό σημαίνει ότι $\mathbf{F}(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$, δηλαδή η απεικόνιση \mathbf{F} είναι επί. \square

Πίσω στην Πρόταση 5.2.6



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 197 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έστω $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{F}$ και υποθέτουμε ότι $g(\bar{x}) = g(\bar{y})$. Τότε $f(g(\bar{x})) = f(g(\bar{y}))$, και άρα επειδή $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{F}}$, θα έχουμε $\bar{x} = (f \circ g)(\bar{x}) = f(g(\bar{x})) = f(g(\bar{y})) = (f \circ g)(\bar{y}) = \bar{y}$. Άρα η g είναι μονομορφισμός. Έστω τώρα $\bar{y} \in \mathcal{F}$. Εφαρμόζοντας το διάνυσμα \bar{y} στη σχέση $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{F}}$, θα έχουμε $(f \circ g)(\bar{y}) = f(g(\bar{y})) = \bar{y}$. Επομένως η f είναι επιμορφισμός. \square

Πίσω στο Λήμμα 5.2.11



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Αλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 198 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. Έστω ότι η f είναι μονομορφισμός, και έστω $\bar{x} \in \text{Ker}(f)$. Τότε $f(\bar{x}) = \bar{0}$, και επειδή $f(\bar{0}) = \bar{0}$, θα έχουμε $f(\bar{x}) = f(\bar{0})$. Όμως η f είναι 1-1 και άρα $\bar{x} = \bar{0}$. Επειδή πάντοτε $\bar{0} \in \text{Ker}(f)$ συμπεραίνουμε ότι $\text{Ker}(f) = \{\bar{0}\}$. Αντίστροφα αν $\text{Ker}(f) = \{\bar{0}\}$, και $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$, τότε $f(\bar{x} - \bar{y}) = \bar{0}$, και άρα $\bar{x} - \bar{y} \in \text{Ker}(f) = \{\bar{0}\}$. Επομένως $\bar{x} = \bar{y}$ και άρα η f είναι μονομορφισμός.

2. Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό.

3. Υποθέτουμε ότι η f είναι ισομορφισμός. Τότε, επειδή η f είναι 1-1 και επί, υπάρχει η αντίστροφή της απεικόνιση $g := f^{-1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις: $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{F}}$ και $g \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η g είναι γραμμική. Έστω $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathcal{F}$, και $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Επειδή η f είναι ισομορφισμός, για τα διανύσματα $\bar{y}_1, \bar{y}_2, k_1\bar{y}_1 + k_2\bar{y}_2 \in \mathcal{F}$ υπάρχουν μοναδικά διανύσματα $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f(\bar{x}_1) = \bar{y}_1, \quad f(\bar{x}_2) = \bar{y}_2, \quad f(\bar{x}_3) = k_1\bar{y}_1 + k_2\bar{y}_2 \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας την g στις δύο πρώτες σχέσεις θα έχουμε:

$$\bar{x}_1 = g(f(\bar{x}_1)) = g(\bar{y}_1), \quad \bar{x}_2 = g(f(\bar{x}_2)) = g(\bar{y}_2) \quad (2)$$

Τότε $k_1f(\bar{x}_1) = k_1\bar{y}_1$ και $k_2f(\bar{x}_2) = k_2\bar{y}_2$. Επειδή η f είναι γραμμική, προσθέτοντας τις τελευταίες σχέσεις θα έχουμε $f(k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2) = k_1\bar{y}_1 + k_2\bar{y}_2$. Εφαρμόζοντας την g , θα έχουμε $g(f(k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2)) = k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2 = g(k_1\bar{y}_1 + k_2\bar{y}_2)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (2), η τελευταία σχέση γράφεται

$$k_1g(\bar{y}_1) + k_2g(\bar{y}_2) = g(k_1\bar{y}_1 + k_2\bar{y}_2) \quad (3)$$

Η σχέση (3) δείχνει ότι η απεικόνιση g είναι γραμμική.

Αντίστροφα αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις: $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{F}}$ και $g \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$, τότε η f είναι ισομορφισμός όπως προκύπτει απο το λήμμα 5.2.11. \square

Πίσω στην Πρόταση 5.2.12



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικονίσης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 199 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έστω $\bar{x} \in \mathcal{E}$ ένα τυχόν διάνυσμα του \mathcal{E} . Επειδή το σύνολο B είναι μια βάση του \mathcal{E} , κατά τα γνωστά, υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n \quad (1)$$

Ορίζουμε μια απεικόνιση $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ως εξής

$$f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}, \quad \bar{x} \mapsto f(\bar{x}) := x_1 \bar{w}_1 + x_2 \bar{w}_2 + \dots + x_n \bar{w}_n \quad (2)$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι μια καλά ορισμένη γραμμική, και είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις (*).

Κατ' αρχήν από την μοναδικότητα της γραφής ενός διανύσματος του \mathcal{E} ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης B , έπεται άμεσα ότι η f είναι καλά ορισμένη απεικόνιση. Επιπλέον η f ικανοποιεί τις σχέσεις (*). Πράγματι θα έχουμε: $\bar{e}_i = 0\bar{e}_1 + 0\bar{e}_2 + \dots + 1\bar{e}_i + \dots + 0\bar{e}_n$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Έτσι από τον ορισμό της f έπεται ότι: $f(\bar{e}_i) = \bar{w}_i$, $1 \leq i \leq n$. Έστω τώρα $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{E}$ και $k, l \in \mathbb{K}$. Τότε τα διανύσματα \bar{x}, \bar{y} και $k\bar{x} + l\bar{y}$ γράφονται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης B :

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n \quad (3)$$

$$\bar{y} = y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2 + \dots + y_n \bar{e}_n \quad (4)$$

$$k\bar{x} + l\bar{y} = z_1 \bar{e}_1 + z_2 \bar{e}_2 + \dots + z_n \bar{e}_n \quad (5)$$

Από τις (3) και (4) έπεται άμεσα ότι $k\bar{x} + l\bar{y} = (kx_1 + ly_1)\bar{e}_1 + (kx_2 + ly_2)\bar{e}_2 + \dots + (kx_n + ly_n)\bar{e}_n$, και άρα από τη μοναδικότητα της γραφής έχουμε: $z_i = kx_i + ly_i$, $1 \leq i \leq n$. Από την άλλη πλευρά, σύμφωνα με τον ορισμό της f , θα έχουμε:

$$f(\bar{x}) = x_1 \bar{w}_1 + x_2 \bar{w}_2 + \dots + x_n \bar{w}_n$$

$$f(\bar{y}) = y_1 \bar{w}_1 + y_2 \bar{w}_2 + \dots + y_n \bar{w}_n$$



$$f(k\bar{x} + l\bar{y}) = (kx_1 + ly_1)\bar{w}_1 + (kx_2 + ly_2)\bar{w}_2 + \cdots + (kx_n + ly_n)\bar{w}_n$$

Προσθέτοντας τις δύο πρώτες θα έχουμε

$$kf(\bar{x}) + lf(\bar{y}) = k(x_1\bar{w}_1 + x_2\bar{w}_2 + \cdots + x_n\bar{w}_n) + l(y_1\bar{w}_1 + y_2\bar{w}_2 + \cdots + y_n\bar{w}_n)$$

Επομένως $f(k\bar{x} + l\bar{y}) = kf(\bar{x}) + lf(\bar{y})$, και άρα η f είναι γραμμική.

Έστω τώρα $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια άλλη γραμμική απεικόνιση η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις (*). Επομένως θα έχουμε $f(\bar{e}_i) = \bar{w}_i = g(\bar{e}_i)$, $1 \leq i \leq n$. Τότε λόγω της γραμμικότητας της g , από την σχέση (1) θα έχουμε: $g(\bar{x}) = g(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \cdots + x_n\bar{e}_n) = x_1g(\bar{e}_1) + x_2g(\bar{e}_2) + \cdots + x_n g(\bar{e}_n) = x_1\bar{w}_1 + x_2\bar{w}_2 + \cdots + x_n\bar{w}_n = f(\bar{x})$, δηλαδή $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$. Επειδή το $\bar{x} \in \mathcal{E}$ είναι τυχόν, έπεται ότι $f = g$. Άρα η f είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις (*). \square

Πίσω στο Θεώρημα 5.3.1

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις
 - Ορισμοί-Παραδείγματα
 - Πυρήνας και Εικόνα
 - Γραμμική Επέκταση
 - Εξίσωση Διαστάσεων
 - Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων
 - Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης
 - Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 200 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικό Χώρο
- Διανυσματικό Υπόχωρο και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Αλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 201 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Επειδή ο χώρος \mathcal{E} έχει πεπερασμένη διάσταση και ο πυρήνας $\text{Ker}(f)$ είναι υπόχωρος του \mathcal{E} , έπεται ότι ο χώρος $\text{Ker}(f)$ έχει πεπερασμένη διάσταση, βλέπε την Πρόταση 4.4.1. Έστω $k := \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f)$ και έστω $\mathbf{C} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k\}$ μια βάση του $\text{Ker}(f)$. Σύμφωνα με το Πρόσχημα 4.2.6 υπάρχουν διανύσματα $\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_n \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathbf{B} := \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k, \bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_n\}$ να είναι μια βάση του \mathcal{E} . Τότε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, και αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f) = n - k = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f)$. Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathbf{D} := \{f(\bar{e}_{k+1}), \dots, f(\bar{e}_n)\}$$

είναι μια βάση του υπόχωρου $\text{Im}(f)$, καθώς τότε $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f) = |\mathbf{D}| = n - k$. Προφανώς τα διανύσματα του συνόλου \mathbf{D} ανήκουν στον υπόχωρο $\text{Im}(f)$.

Το σύνολο \mathbf{D} είναι γραμμικά ανεξάρτητο: Έστω $l_{k+1}, \dots, l_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε να ισχύει $l_{k+1}f(\bar{e}_{k+1}) + \dots + l_n f(\bar{e}_n) = \bar{0}$ ή ισοδύναμα (λόγω της γραμμικότητας της f) $f(l_{k+1}\bar{e}_{k+1} + \dots + l_n\bar{e}_n) = \bar{0}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το διάνυσμα $l_{k+1}\bar{e}_{k+1} + \dots + l_n\bar{e}_n$ ανήκει στον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ της f , και επομένως θα γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης \mathbf{C} . Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί $l_1, \dots, l_k \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$l_{k+1}\bar{e}_{k+1} + \dots + l_n\bar{e}_n = l_1\bar{e}_1 + \dots + l_k\bar{e}_k$$

ή ισοδύναμα:

$$(-l_1)\bar{e}_1 + \dots + (-l_k)\bar{e}_k + l_{k+1}\bar{e}_{k+1} + \dots + l_n\bar{e}_n = \bar{0}$$

Τότε όμως $l_1 = \dots = l_k = l_{k+1} = \dots = l_n = 0$, διότι το σύνολο $\mathbf{B} := \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k, \bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο ως βάση του \mathcal{E} . Επομένως το σύνολο \mathbf{D} είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Το σύνολο \mathbf{D} παράγει τον υπόχωρο $\text{Im}(f)$: Έστω $\bar{y} \in \text{Im}(f)$: τότε υπάρχει $\bar{x} \in \mathcal{E}$: $f(\bar{x}) = \bar{y}$. Επειδή το σύνολο \mathbf{B} είναι βάση του \mathcal{E} , θα έχουμε $\bar{x} = l_1\bar{e}_1 + \dots + l_k\bar{e}_k + l_{k+1}\bar{e}_{k+1} + \dots + l_n\bar{e}_n$, για κάποιους (μοναδικούς) αριθμούς $l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq j \leq n$. Τότε, χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της f και ότι τα διανύσματα $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k$ ανήκουν στον πυρήνα της f (άρα



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 202 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

$f(\bar{e}_i) = \bar{0}$, $1 \leq i \leq k$, θα έχουμε: $\bar{y} = f(\bar{x}) = f(l_1\bar{e}_1 + \dots + l_k\bar{e}_k + l_{k+1}\bar{e}_{k+1} + \dots + l_n\bar{e}_n) = l_1f(\bar{e}_1) + \dots + l_kf(\bar{e}_k) + l_{k+1}f(\bar{e}_{k+1}) + \dots + l_nf(\bar{e}_n) = l_{k+1}f(\bar{e}_{k+1}) + \dots + l_nf(\bar{e}_n)$. Άρα το σύνολο D παράγει τον υπόχωρο $\text{Im}(f)$.

Συνοψίζοντας θα έχουμε ότι το σύνολο $D = \{f(\bar{e}_{k+1}), \dots, f(\bar{e}_n)\}$ είναι μια βάση του $\text{Im}(f)$, και άρα $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f) = |D| = n - k = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f)$. Επομένως $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$. \square

Πίσω στο Θεώρημα 5.4.2



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 203 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. \Rightarrow 2. Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ένας ισομορφισμός, και έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$ η θεμελιώδης εξίσωση διαστάσεων της f . Επειδή η f είναι μονομορφισμός, από την Πρόταση 5.2.12 θα έχουμε $\text{Ker}(f) = \{\bar{0}\}$ και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) = 0$. Επίσης η f είναι επιμορφισμός, δηλαδή $\text{Im}(f) = \mathcal{F}$, και άρα $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Συνοψίζοντας θα έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$.

2. \Rightarrow 1. Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} := n$, και έστω $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ και $C = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ βάσεις των \mathcal{E} και \mathcal{F} αντίστοιχα. Σύμφωνα με το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης 5.3.1, υπάρχουν μοναδικές γραμμικές απεικονίσεις

$$f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}, \text{ έτσι ώστε: } f(\bar{e}_i) = \bar{e}_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}, \text{ έτσι ώστε: } g(\bar{e}_i) = \bar{e}_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι ισομορφισμός με αντίστροφη την g . Θεωρούμε την σύνθεση $g \circ f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ η οποία προφανώς είναι μια γραμμική απεικόνιση. Παρατηρούμε ότι $(g \circ f)(\bar{e}_i) = g(f(\bar{e}_i)) = g(\bar{e}_i) = \bar{e}_i, \quad 1 \leq i \leq n$. Όμως και η ταυτοτική απεικόνιση $\text{Id}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι γραμμική και ικανοποιεί τις σχέσεις $\text{Id}(\bar{e}_i) = \bar{e}_i, \quad 1 \leq i \leq n$. Άρα από το κριτήριο μοναδικότητας στο Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης 5.3.1, έπεται ότι $g \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των διανυσματικών χώρων \mathcal{E} και \mathcal{F} , θα έχουμε με παρόμοιο τρόπο ότι $f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{F}}$. Επομένως από την Πρόταση 5.2.12 έπεται ότι η f είναι ισομορφισμός με αντίστροφη την g . Άρα οι χώροι \mathcal{E} και \mathcal{F} είναι ισόμορφοι. \square

Πίσω στο Θεώρημα 5.4.5



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 204 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ και τον υπόχωρο $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ του \mathcal{E} . Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με την Πρόταση 4.3.10, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \times \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W}$. Ορίζουμε μια απεικόνιση ως εξής:

$$f : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V} + \mathcal{W}, (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{x} + \bar{y}$$

Είναι εύκολο να δειχθεί (βλέπε την επόμενη Άσκηση 4.3.15) ότι η f είναι μια γραμμική απεικόνιση. Επίσης είναι προφανές ότι η f είναι επιμορφισμός, και άρα $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{W})$. Επομένως η θεμελιώδης εξίσωση διαστάσεων για την f έχει την μορφή: $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{W})$ ή ισοδύναμα $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f)$. Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$. Όμως

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \mid f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0}\} \\ &= \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \mid \bar{x} + \bar{y} = \bar{0}\} \\ &= \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \mid \bar{x} = -\bar{y}\} \end{aligned}$$

Έτσι αν $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Ker}(f)$, τότε $\bar{x} = -\bar{y}$. Επειδή $\mathcal{V} \ni \bar{x} = -\bar{y} \in \mathcal{W}$, έπεται ότι

$$\text{Ker}(f) = \{(\bar{x}, -\bar{x}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \mid \bar{x} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}\}$$

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση

$$g : \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \rightarrow \text{Ker}(f), \bar{x} \mapsto g(\bar{x}) = (\bar{x}, -\bar{x})$$

Ισχυριζόμαστε ότι η g είναι ισομορφισμός. Πραγματικά είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι η g είναι γραμμική. Επιπλέον η g είναι ισομορφισμός διότι είναι προφανώς επί, και 1-1 διότι $\text{Ker}(g) = \{\bar{x} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \mid g(\bar{x}) = (\bar{0}, \bar{0})\} = \{\bar{x} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \mid (\bar{x}, -\bar{x}) = (\bar{0}, \bar{0})\} = \{\bar{0}\}$. Επομένως οι χώροι $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ και $\text{Ker}(f)$ είναι ισόμορφοι, ιδιαίτερα θα έχουμε $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f)$.

□

Πίσω στο Θεώρημα 5.4.9



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

- Διανυσματικοί Χώροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 205 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. Επειδή ηf είναι μονομορφισμός, θα έχουμε $\text{Ker}(f) = \{\bar{0}\}$ και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) = 0$. Επομένως η θεμελιώδης εξίσωση διαστάσεων θα έχει την μορφή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f)$. Από την υπόθεση όμως θα έχουμε και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f)$. Τότε από την Πρόταση 4.4.1 έπεται ότι $\mathcal{F} = \text{Im}(f)$ και επομένως ηf είναι επί. Άρα ηf είναι ισομορφισμός.

2. Επειδή ηf είναι επιμορφισμός, θα έχουμε $\text{Im}(f) = \mathcal{F}$ και άρα $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Επομένως η θεμελιώδης εξίσωση διαστάσεων θα έχει την μορφή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Επειδή από την υπόθεση έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$, έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) = 0$ ή ισοδύναμα $\text{Ker}(f) = \{\bar{0}\}$, και άρα ηf είναι μονομορφισμός. Επομένως ηf είναι ισομορφισμός. \square

Πίσω στην Πρόταση 5.4.12



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 206 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε από το Κεφάλαιο 1 ότι αν \mathcal{V} είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} και S είναι ένα τυχόν σύνολο, τότε το σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ όλων των απεικονίσεων $f : S \rightarrow \mathcal{V}$ με πράξεις όπως ορίστηκαν από τις σχέσεις (2.1) και (2.2) του Κεφαλαίου 1 (και οι οποίες συμπίπτουν με τις παραπάνω), είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} . Επομένως θέτοντας $S = \mathcal{E}$ και $\mathcal{V} = \mathcal{F}$, έπεται ότι με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ όλων των απεικονίσεων (όχι κατ' ανάγκην γραμμικών) $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του \mathbb{K} . Θα δείξουμε ότι το υποσύνολο $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ του $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ το οποίο αποτελείται από όλες τις γραμμικές απεικονίσεις είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, και άρα είναι ένας διανυσματικός χώρος. Πράγματι: όπως είδαμε παραπάνω η πρόσθεση γραμμικών απεικονίσεων καθώς και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός αριθμού με γραμμική απεικόνιση είναι επίσης γραμμική απεικόνιση. Επιπρόσθετα Η μηδενική απεικόνιση $\mathbb{O}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}, \bar{x} \mapsto \mathbb{O}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(\bar{x}) = \bar{0}$, η οποία είναι το μηδενικό στοιχείο του διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, είναι προφανώς γραμμική και επομένως ανήκει στο υποσύνολο $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ του $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Ιδιαίτερα $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \neq \emptyset$. Επομένως το υποσύνολο $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ του $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, και άρα είναι ένας διανυσματικός χώρος.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = m$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = n$. Θα δείξουμε ο χώρος $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα: $\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = mn$.

Έστω $\mathbf{B} := \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ μια βάση του \mathcal{E} και $\mathbf{C} := \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ μια βάση του \mathcal{F} . Σταθεροποιούμε δύο δείκτες i και j με $1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq n$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$f_{ij} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}, \text{ έτσι ώστε: } f_{ij}(\bar{e}_k) = \delta_{ik}\bar{e}_j, \quad 1 \leq k \leq m \quad (*)$$

Αν $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_m\bar{e}_m = \sum_{k=1}^m x_k\bar{e}_k$, τότε:

$$f_{ij}(\bar{x}) = \left(\sum_{k=1}^m \delta_{ik}x_k \right) \bar{e}_j$$

Έτσι αποκτούμε nm γραμμικές απεικονίσεις $f_{ij} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathbf{B}_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})} := \{f_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 207 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Το σύνολο $\mathbf{B}_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο: Θεωρούμε nm το πλήθος αριθμούς $\{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ από το σώμα \mathbb{K} έτσι ώστε:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} f_{ij} = \mathbb{O}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$$

Επειδή μια γραμμική απεικόνιση είναι η μηδενική αν και μόνον αν στέλνει κάθε διάνυσμα της βάσης στο μηδενικό διάνυσμα, η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με την σχέση:

$$\left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} f_{ij} \right](\bar{e}_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} f_{ij}(\bar{e}_k) = \mathbb{O}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(\bar{e}_k) = \bar{0}, \quad 1 \leq k \leq m$$

Σύμφωνα με τη σχέση (*) η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_{ik} \bar{e}_j = \bar{0}, \quad 1 \leq k \leq m$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \bar{e}_j = \bar{0}, \quad 1 \leq k \leq m$$

Όμως επειδή το σύνολο $\mathbf{C} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ είναι βάση του \mathcal{F} , θα έχουμε ότι $\forall k = 1, 2, \dots, m$:

$$c_{kj} = 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

Επομένως οι αριθμοί $\{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ είναι ίσοι με μηδέν, και άρα το σύνολο γραμμικών απεικονίσεων $\mathbf{B}_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 208 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Το σύνολο $B_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})}$ παράγει τον χώρο $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση. Εφαρμόζοντας την f σε κάθε διάνυσμα \bar{e}_i της βάσης B του \mathcal{E} , γνωρίζουμε ότι η τιμή $f(\bar{e}_i)$ είναι γραμμικός συνδυασμός της βάσης $C = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ του \mathcal{F} . Έτσι υπάρχουν (μοναδικοί) αριθμοί $\{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ από το σώμα \mathbb{K} έτσι ώστε:

$$f(\bar{e}_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{e}_j, \quad 1 \leq i \leq m \quad (1)$$

Ισχυριζόμαστε ότι $f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} f_{ij}$. Αυτή η σχέση είναι μια ισότητα μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων. Επομένως η ισχύς της είναι ισοδύναμη, σύμφωνα με το Πρόσημα 5.3.3 με την ισχύ της ακόλουθης σχέσης:

$$f(\bar{e}_k) = \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} f_{ij} \right](\bar{e}_k), \quad \forall k = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

Θα έχουμε, $\forall k = 1, 2, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} f_{ij} \right](\bar{e}_k) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} f_{ij}(\bar{e}_k) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_{ik} \bar{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^n a_{kj} \bar{e}_j \\ &= f(\bar{e}_k) \end{aligned}$$

Άρα η ζητούμενη σχέση (2) ισχύει και επομένως η τυχούσα γραμμική απεικόνιση f είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμικών απεικονίσεων f_{ij} . Συνοψίζοντας, έχουμε ότι το σύνολο $B_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})}$ παράγει τον χώρο $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.



Έτσι το σύνολο $\mathcal{B}_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})}$ είναι μια βάση του χώρου $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, και επομένως επειδή $|\mathcal{B}_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})}| = nm$, έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = mn = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \cdot \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$$

□

Πίσω στο Θεώρημα 5.5.2

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις
 - Ορισμοί-Παραδείγματα
 - Πυρήνας και Εικόνα
 - Γραμμική Επέκταση
 - Εξίσωση Διαστάσεων
 - Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων
 - Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης
 - Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 209 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



Απόδειξη: Από το Πρόγραμμα 5.5.4 έχουμε ότι οι χώροι \mathcal{E} και \mathcal{E}^* έχουν την ίδια διάσταση.
Έτσι το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 5.4.5. \square

Πίσω στο Πρόγραμμα 5.5.5

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις
 - Ορισμοί-Παραδείγματα
 - Πυρήνας και Εικόνα
 - Γραμμική Επέκταση
 - Εξίσωση Διαστάσεων
 - Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων
 - Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης
 - Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 210 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



Απόδειξη: Η απόδειξη αφήνεται ως Άσκηση 5.5.8 στον αναγνώστη. □

Πίσω στην Πρόταση 5.5.7

- Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών
- Διανυσματικοί Χώροι
- Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
- Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση
- Γραμμικές Απεικονίσεις
 - Ορισμοί-Παραδείγματα
 - Πυρήνας και Εικόνα
 - Γραμμική Επέκταση
 - Εξίσωση Διαστάσεων
 - Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων
 - Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης
 - Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 211 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές
• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

➤ Ορισμοί-Παραδείγματα

➤ Πυρήνας και Εικόνα

➤ Γραμμική Επέκταση

➤ Εξίσωση Διαστάσεων

➤ Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

➤ Βαθμίδα Γρ. Απεικόνισης

➤ Ασκήσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 212 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1. Αν $\bar{y} \in \text{Im}(f)$, τότε $f(\bar{x}) = \bar{y}$ για κάποιο $\bar{x} \in \mathcal{E}$. Όμως $\bar{y} = kf(\frac{1}{k}\bar{x})$, διότι $k \neq 0$, και αυτό σημαίνει ότι $\bar{y} \in \text{Im}(kf)$. Άρα $\text{Im}(f) \subseteq \text{Im}(kf)$. Αν $\bar{y} \in \text{Im}(kf)$, τότε $\bar{y} = (kf)(\bar{x}) = kf(\bar{x}) = f(k\bar{x}) \in \text{Im}(f)$. Άρα $\text{Im}(kf) \subseteq \text{Im}(f)$, και επομένως $\text{Im}(f) = \text{Im}(kf)$.

2. Έστω $\bar{y} \in \text{Im}(f + g)$. Τότε $\bar{y} = (f + g)(\bar{x})$, για κάποιο $\bar{x} \in \mathcal{E}$. Τότε $\bar{y} = f(\bar{x}) + g(\bar{x}) \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. Άρα $\text{Im}(f + g) \subseteq \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

3. Έστω $\bar{y} \in \text{Im}(g \circ f)$. Τότε $\bar{y} = (g \circ f)(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$ για κάποιο $\bar{x} \in \mathcal{E}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\bar{y} \in \text{Im}(g)$. Επομένως $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im}(g)$.

4. Είναι άμεση εφαρμογή του 3. □

Πίσω στην Πρόταση 5.6.1



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀▶

◀▶

Σελίδα 213 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Λύσεις των Ασκήσεων

Λύση της Άσκησης: Τα διάνυσματα $\vec{x} = (0, 3, 0, 0)$ και $\vec{y} = (-1, -2, 0, 0)$ ανήκουν στο \mathcal{E} , αλλά $\vec{x} + \vec{y} = (-1, 1, 0, 0) \notin \mathcal{E}$. ■



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα



Σελίδα 214 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Λύση της Άσκησης: Βλέπε το Παράδειγμα 3.1.11.





• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀▶

◀▶

Σελίδα 215 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Λύση της Άσκησης: Τα διανύσματα $\vec{x} = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{y} = (0, 1, \dots, 0)$ ανήκουν στο \mathcal{W} , αλλά το άθροισμα τους δεν ανήκει. ■



• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀▶

◀▶

Σελίδα 216 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Λύση της Άσκησης: Τα πολυώνυμα $1 + t^n$, t^n ανήκουν στο \mathcal{W} , αλλά $(1 + t^n) - t^n = 1 \notin \mathcal{W}$.





• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀ ▶

◀ ▶

Σελίδα 217 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Λύση της Άσκησης: Η σταθερή ακολουθία $(1, 1, \dots, 1, \dots)$ ανήκει στο \mathcal{W} , αλλά η ακολουθία $(-3)(1, 1, \dots, 1, \dots) = (-3, -3, \dots, -3, \dots)$ δεν ανήκει.





• Εισαγωγή: Πράξεις επί Συνόλων και Σωμάτα Αριθμών

• Διανυσματικοί Χώροι
• Διανυσματικοί Υπόχωροι και Κατασκευές

➤ Διανυσματικοί Υπόχωροι

➤ Γραμμικοί Συνδυασμοί

➤ Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

➤ Ασκήσεις

• Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

• Γραμμικές Απεικονίσεις

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀▶

◀▶

Σελίδα 218 από 212

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Λύση της Άσκησης: $(1, 1, \dots, 1, 0) \in \mathcal{W}$ και $(0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathcal{W}$, αλλά $(1, 1, \dots, 1, 0) + (0, 0, \dots, 0, 1) = (1, 1, \dots, 1, 1) \notin \mathcal{W}$.

