Πανεπιστήμιο Αιγαίου

URL: http://www.aegean.gr

Ασκήσεις στην Αριθμητική Ανάλυση

Χρήστος Νικολόπουλος
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
832 00 Καρλόβασι
Σάμος

Κεφάλαιο 1

Υπολογισμοί και Σφάλματα

1.1. Στοιχεία Θεωρίας

Ορισμός 1.1.1 *Κάθε πραγματικός αριθμός x μπορεί να παρασταθεί μονοσήμαντα σε ένα σύστημα αριθμών με βάση $b \geq 2$ στη μορφή*

$$x = \pm \sum_{i=n}^{-\infty} d_i b^i,$$

όπου οι συντελεστές d_i της σειράς αυτής είναι τα στοιχεία από το σύνολο των ψηφίων $D = \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$, και ονομάζονται ψηφία του αριθμού x. Ο αριθμός x γράφεται ως εξής

$$x = \begin{cases} d_n d_{n-1} \ldots d_0 . d_{-1} d_{-2} \ldots, & n \geq 0,\ d_n \neq 0, \\ .000 \ldots 0 d_n d_{n-1} d_{n-1} d_{n-2 \ldots} & n < 0. \end{cases}$$

Το σύμβολο "." ονομάζεται υποδιαστολή.

Παρατήρηση. Ανάλογα με τη τιμή του b έχουμε αντίστοιχα τη ονομασία του συστήματος. Για $b = 2$ το σύστημα ονομάζεται δυαδικό, για $b = 8$ το σύστημα ονομάζεται οκταδικό κτλ. ενώ για $b = 10$ το σύστημα ονομάζεται δεκαδικό.

Ορισμός 1.1.2 *Κάθε αριθμός λέμε ότι έχει πεπερασμένη παράσταση σε ένα σύστημα αριθμών αν υπάρχει ακέραιος* k *με* $k \leq n$ *τέτοιος ώστε* $d_i = 0$ *για* $i \leq k$.

Ορισμός 1.1.3 *Σημαντικά ψηφία ενός πραγματικού αριθμού* x *ονομάζονται όλα τα ψηφία ενός αριθμού εκτός των μηδενικών ψηφίων που βρίσκονται στην αρχή του αριθμού. Το πρώτο ψηφίο διαφορετικό του μηδενός ονομάζεται πρώτο σημαντικό ψηφίο.*

Παρατήρηση. Για να παραστήσουμε το ακέραιο μέρος ενός αριθμού που ανήκει στο δεκαδικό σύστημα σε ένα άλλο σύστημα αριθμών με βάση b χρησιμοποιούμε τα ακέραια υπόλοιπα των διαδοχικών διαιρέσεων του x με τη βάση, δηλαδή $d_0 = x \mod b$, $d_1 = y_0 \mod b$, $y_0 = \frac{x-d_0}{b}$, κτλ. μέχρι $y_{n-1} < b$ για κάποιο n οπότε $d_n = y_{n-1}$.

Παρατήρηση. Για να παραστήσουμε το δεκαδικό μέρος x ενός αριθμού που ανήκει στο δεκαδικό σύστημα σε ένα άλλο σύστημα αριθμών με βάση b χρησιμοποιούμε το ακέραιο μέρος των διαδοχικών πολλαπλασιασμών του x με τη βάση b. Συγκεκριμένα $d_{-i-1} = [y_{-i} \times b]$ για $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ με $y_{-2} = (y_{-1} \times b) - d_{-2}$, όπου

$$y_{-i} = \begin{cases} x, & i = 0, \\ (y_{-i+1} \times b) - d_{-i} & i = 1, 2, \ldots k. \end{cases}$$

Ορισμός 1.1.4 *Ένας αριθμός* x *σε ένα σύστημα αριθμών με βάση* b *μπορεί να γραφεί στη μορφή* $x = \pm r \times b^{\pm E}$ *όπου* E *είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος και* r *ένας αριθμός στο σύστημα αριθμών με βάση* b. *Μια τέτοια παράσταση ονομάζεται παράσταση κινητής υποδιαστολής για τον αριθμό* x *σε ένα σύστημα αριθμών με βάση* b, *με εκθέτη* E *και ουρά η κλάσμα* r.

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 3 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Ορισμός 1.1.5 *Η κανονικοποιημένη παράσταση κινητής υποδιαστολής είναι η παράσταση εκείνη σύμφωνα με την οποία ένας αριθμός x σε ένα σύστημα αριθμών με βάση b γράφεται ως εξής :*

$$x = \pm r \times b^{\pm E}, \quad \text{με} \quad \frac{1}{b} \leq r < 1.$$

1.1.1. Απόλυτο και σχετικό σφάλμα

Ορισμός 1.1.6 *Εάν x είναι η ακριβής τιμή ενός μεγέθους ή μιας ποσότητας και x^* μια προσεγγιστική τιμή του x τότε η διαφορά $e = x - x^*$ ονομάζεται σφάλμα.*

Ορισμός 1.1.7 *Η απόλυτη τιμή του σφάλματος $|e| = |x - x^*|$ ονομάζεται απόλυτο σφάλμα.*

Ορισμός 1.1.8 *Ο λόγος του σφάλματος e προς την ακριβή τιμή x, όπου $x \neq 0$,*

$$e_r = \frac{e}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

ονομάζεται σχετικό σφάλμα.
Η ποσότητα $|e_r|$ ονομάζεται απόλυτο σχετικό σφάλμα.

Παρατήρηση. Πολλές φορές για τον υπολογισμό του σχετικού σφάλματος χρησιμοποιούμε την προσέγγιση

$$e_r \simeq \frac{e}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}.$$

Ορισμός 1.1.9 *Το σφάλμα που δημιουργείται από το χρησιμοποιούμενο αλγόριθμο και προσέγγιση με την υπόθεση ότι οι όλες οι αριθμητικές πράξεις είναι ακριβείς ονομάζεται σφάλμα αποκοπής. Δηλαδή το σφάλμα αποκοπής είναι το σφάλμα που δημιουργείται αν αντικαταστήσουμε μια ακριβή διαδικασία αποκοπής με μια προσεγγιστική.*

Ορισμός 1.1.10 *Το σφάλμα που προκύπτει από την ανάγκη παράστασης ενός αριθμού με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων ονομάζεται σφάλμα στρογγυλοποίησης.*

Παρατήρηση. Για παράδειγμα για τον αριθμό $x = \frac{4}{3} = 1.3333333\ldots$ ένα μέσο επεξεργασίας αριθμών μπορεί να αποθηκεύσει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος ψηφίων του πχ. $x^* = 1.333333$ και το σφάλμα στρογγυλοποίησης είναι $x - x^*$.
Συγκεκριμένα η διαδικασία στρογγυλοποίησης σε k δεκαδικά ψηφία γίνεται παραλείποντας αρχικά όλα τα ψηφία μετά την k θέση. Το τελευταίο ψηφίο που παραμένει μεγαλώνει κατά μια μονάδα αν το πρώτο ψηφίο που αποκόβεται είναι μεγαλύτερο του 5 η παραμένει το ίδιο αν το πρώτο ψηφίο που αποκόβεται είναι μικρότερο του 5. Αν το τελευταίο ψηφίο που αποκόβεται είναι 5 το τελευταίο ψηφείο που κρατάμε παραμένει το ίδιο αν αυτό είναι άρτιο ενώ αυξάνεται κατά μία μονάδα αν αυτό είναι περιττό.

Ορισμός 1.1.11 *Ένα σημαντικό ψηφίο ενός προσεγγιστικού αριθμού x^* λέγεται ακριβές εάν το απόλυτο σφάλμα δεν υπερβαίνει τη μισή μονάδα της τάξεως που αντιστοιχεί σε αυτό το ψηφίο. Εάν k ψηφία του x^* είναι ακριβή τότε λέμε ότι ο x^* είναι ακριβής σε k σημαντικά ψηφία. Εάν όλα τα σημαντικά ψηφία του x^* είναι ακριβή τότε λέμε ότι ο x^* είναι ακριβής στο δοθέντα αριθμό ψηφίων.*

1.1.2. Μετάδοση σφαλμάτων κατά τους υπολογισμούς

Πρόταση 1.1.12 *Το απόλυτο σφάλμα του αθροίσματος δυο αριθμών είναι μικρότερο η ίσο με το άθροισμα των απόλυτων σφαλμάτων των αριθμών αυτών.*

Πρόταση 1.1.13 *Το απόλυτο σφάλμα της διαφοράς δυο αριθμών είναι μικρότερο η ίσο με το άθροισμα των απόλυτων σφαλμάτων των αριθμών αυτών.*

Παρατήρηση. Πρέπει να αποφεύγεται εκεί που είναι δυνατόν η αφαίρεση δυο περίπου ίσων προσεγγιστικών αριθμών διότι αυτή η πράξη οδηγεί σε μείωση της ακρίβειας του αποτελέσματος. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται καταστροφική ακύρωση σημαντικών αριθμών και σχετίζεται με την απώλεια σωστών σημαντικών ψηφίων μικρών αριθμών, οι οποίοι απορρέουν από πράξεις μεταξύ μεγάλων αριθμών.

Πρόταση 1.1.14 *Το απόλυτο σφάλμα του γινομένου δυο αριθμών είναι κατά προσέγγιση μικρότερο η ίσο απο το άθροισμα των απόλυτων σφαλμάτων των αριθμών αυτών.*

Πρόταση 1.1.15 *Το απόλυτο σφάλμα του πηλίκου δυο αριθμών είναι κατά προσέγγιση μικρότερο η ίσο από το άθροισμα των απόλυτων σφαλμάτων των αριθμών αυτών.*

Παρατήρηση. Έστω ότι θέλουμε να βρούμε μια τιμή για τη συνάρτηση $f(x)$. Στη πράξη χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση, προσέγγιση της f, έστω $g(x)$. Έχουμε το σφάλμα αποκοπής $e_a = g(x) - f(x)$. Επιπλέον αντί της ακριβούς τιμής της τυχαίας μεταβλητής x χρησιμοποιείται μια προσεγγιστική τιμή x^* και έτσι έχουμε το σφάλμα διάδοσης $e_p = g(x^*) - g(x)$. Στη συνέχεια για να υπολογίσουμε τη τιμή της $g(x^*)$ κάνουμε μια σειρά από προσεγγιστικούς υπολογισμούς και έχουμε τη προσέγγιση της, $g^*(x^*)$. Το σφάλμα σε αυτή τη περίπτωση ονομάζεται παραχθέν σφάλμα $e_d = g^*(x^*) - g(x^*)$.

Το ολικό σφάλμα e_T στη τελική τιμή $g^*(x^*)$ θα είναι

$$e_T = g^*(x^*) - f(x) = [g^*(x^*) - g(x^*)] + [g(x^*) - g(x)] + [g(x) - f(x)] = e_d + e_p + e_a.$$

Επίσης το σφάλμα που δημιουργείται απο τη διαφορά της προσεγγιστικής τιμής $g^*(x^*)$ απο τη πραγματική τιμή ονομάζεται υπολογιστικό σφάλμα, e_c και

$$e_c = e_d + e_p,$$

άρα $e_T = e_c + e_a$.

1.2. Ασκήσεις

Άσκηση 1.2.1 *Ο αριθμός $Q_1 = 31.546824$ είναι προσέγγιση ενός αριθμού Q και είναι γνωστό ότι έχει σχετικό σφάλμα όχι μεγαλύτερο του $1/10^5$. Πόσα από τα ψηφία του είναι σωστά.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.2 *Βρείτε το σφάλμα στον υπολογισμό του κλάσματος* $N = \frac{7^o\,10'}{\log_{10} 242.7}$ *υποθέτοντας ότι η γωνία μπορεί να έχει σφάλμα εως και* $1'$ *και ότι ο αριθμός* 242.7 *μπορεί να έχει σφάλμα της τάξης της μονάδας στο τελευταίο ψηφίο του.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.3 *Υποθέστε ότι η πραγματική τιμή ενός υπολογισμού θα έπρεπε να είναι* 5.0 *ενώ η τιμή που υπολογίζουμε είναι* 4.0. *Υπολογίστε το απόλυτο σφάλμα, το σχετικό σφάλμα και το επί τοις εκατό σφάλμα του υπολογισμού.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.4 *Δείξτε ότι το σχετικό σφάλμα μίας ποσότητας είναι προσεγγιστικά ίσο με το λογάριθμο του απόλυτου σφάλματος.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.5 *Έστω* x *ένας πραγματικός αριθμός και* $F(x)$ *η αναπαράσταση του με* k *σημαντικά ψηφεία. Για παράδειγμα έστω* $x = \frac{2}{9}$ *και* $k = 4$ *οπότε* $F(\frac{2}{9}) = 0.2222$. *Η πράξη της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ορίζονται ως εξής*

$$\begin{aligned} x \oplus y &= F[F(x) + F(y)], \\ x \ominus y &= F[F(x) - F(y)], \\ x \otimes y &= F[F(x) \cdot F(y)], \\ x \div y &= F[\frac{F(x)}{F(y)}]. \end{aligned}$$

Υπολογίστε το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα για $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{7}$ *και* $k = 4$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.6 *Συγκρίνετε το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα αν* x *είναι η ακριβής τιμή και* x^* *η προσεγγιστική τιμή στις περιπτώσεις όπου :*
α) $x = 0.0000001$ *και* $x^* = 0.0000004$,
β) $x = 10000001$ *και* $x^* = 10000005$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.7 *Αν η ακριβής τιμή μιας ποσότητας είναι* $x = 4$ *και η προσεγγιστική της είναι* $x^* = 3.96$ *να βρεθούν : α) το σφάλμα, β) η διόρθωση, γ) το απόλυτο σφάλμα δ) το σχετικό σφάλμα, ε) το απόλυτο σχετικό σφάλμα* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.8 *Να παραστήσετε τον αριθμό* 1101111_2 *του δυαδικού συστήματος στο δεκαδικό σύστημα και τον αριθμό* 307.17_8 *του οκταδικού συστήματος επίσης στο δεκαδικό σύστημα.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.9 *Να μετατρέψετε τον αριθμό* 0.59375_{10} *του δεκαδικού συστήματος στον αντίστοιχο του στο δυαδικό σύστημα.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.10 *Για τους αριθμούς* $a = 0.731$ *και* $b = 9.12$ *έστω ότι αυτοί είναι στρογγυλοποιημένοι σε τρία σημαντικά ψηφία. Να βρεθεί το άνω φράγμα για το απόλυτο σφάλμα του αθροίσματος τους και το σχετικό σφάλμα του πηλίκου τους.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.11 *Υπολογίστε τη διαφορά* $\sqrt{708} - \sqrt{707}$ *χρησιμοποιώντας αρχικά τέσσερα, μετά έξι και κατόπιν με οκτώ σημαντικά ψηφία. Τι παρατηρείται.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.12 *Για τον υπολογισμό της παράστασης* $\sqrt{708} - \sqrt{707}$ *χρησιμοποιώντας τέσσερα σημαντικά ψηφία έχουμε αφαίρεση δύο σχεδόν ίσων αριθμών και ανακριβές αποτέλεσμα λόγω εμφάνισης μεγάλου σφάλματος. Αναδιατάξτε τη παράσταση έτσι ώστε να αποφεύγεται η εμφάνιση μεγάλου σφάλματος σε αυτή τη πράξη.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.13 *Για τις των ριζες του τριωνύμου* $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ *έχουμε* $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. *Αν* $b \gg 4ac$ *έχουμε αφαίρεση περίπου δύο ίσων αριθμών όταν υπολογίζουμε τη παράσταση* $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ *πράγμα που επιφέρει μεγάλο σφάλμα. Αναδιατάξτε τη παράσταση έτσι ώστε να αποφεύγεται αυτή η πράξη.* **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 2

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

2.1. Στοιχεία Θεωρίας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε αριθμητικές μεθόδους για την εύρεση προσεγγιστικής λύσης μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων μιας μεταβλητής. Αυτές οι προσεγγιστικές μέθοδοι, για την εύρεση των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, βασίζονται σε αναδρομικούς τύπους. Ο στόχος είναι να κατασκευάσουμε μια ακολουθία αριθμών $x_0, x_1, x_2, \ldots$ η οποία συγκλίνει σε κάποια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

2.1.1. Μέθοδος της Διχοτόμησης

Γνωρίζουμε ότι για να υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου f είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, πρέπει να ικανοποιείται η σχέση

$f(a)f(b) \leq 0$.

Για να βρούμε μία ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα $[a, b]$, με τη προϋπόθεση ότι ισχύει η σχέση $f(a)f(b) \leq 0$, διχοτομούμε το διάστημα $[a, b]$ και θέτουμε $a = a_0$, $b = b_0$, $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.

Αν $f(x_0) = 0$ τότε το x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης. Αν $f(x_0) \neq 0$ τότε αν $f(x_0)f(a) \leq 0$ υπάρχει μια ρίζα στο διάστημα $[a, x_0]$ και θέτουμε $a_1 = a_0$, $b_1 = x_0$, και $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Αν $f(a)f(x) > 0$,τότε υπάρχει μία ρίζα στο διάστημα $[x_0, b_0]$ και θέτουμε $a_1 = x_0$, $b_1 = b_0$, και $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Στη συνέχεια εργαζόμαστε ομοίως κατασκευάζοντας με αυτό το τρόπο μια ακολουθία αριθμών $x_1, x_2, \ldots$ η οποία συγκλίνει στη ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα $[a, b]$.

Πρόταση 2.1.1 *Έστω $f(x) \in C([a, b])$ και ισχύει $f(a)f(b) < 0$. Τότε η ακολουθία $\{x_n\}$ που κατασκευάζεται με τη μέθοδο της διχοτόμησης συγκλίνει στη ρίζα ρ της εξίσωσης και ικανοποιεί τη σχέση $|x_n - \rho| \leq \frac{b-a}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Παρατήρηση Για δοθείσα ανοχή $\epsilon > 0$ σταματάμε τις επαναλήψεις της μεθόδου της διχοτόμησης όταν $|x_n - x_{n+1}| \leq \epsilon$.

2.1.2. Επαναληπτική Μέθοδος Σταθερού Σημείου

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = 0$, με $f(x) \in C([a, b])$ και αναζητούμε μια ρίζα της εξίσωσης στο $[a, b]$. Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $g(x) = x$, (πχ. $g(x) = f(x) + x$) και λέμε ότι μία λύση της $f(x) = 0$ είναι ένα σταθερό σημείο της $g(x) = x$, και το ζητούμενο πλέον είναι να προσεγγίσουμε το σταθερό σημείο της g.

Πρόταση 2.1.2 *Αν $g(x) \in C([a, b])$ και $g(x) \in [a, b]$, $\forall x \in [a, b]$, τότε η $g(x)$ έχει ένα σταθερό σημείο στο $[a, b]$. Εάν υπάρχει η $g'(x)$ στο (a, b) και ένας αριθμός k με $0 < k < 1$ για τον οποίο ισχύει $|g'(x)| \leq k < 1$, $\forall x \in (a, b)$ τότε το σταθερό σημείο είναι μοναδικό στο $[a, b]$.*

Μεθοδολογία Βρίσκουμε ένα x_0 κοντά στη ρίζα της εξίσωσης και αντικαθιστούμε τη τιμή αυτή στη $g(x)$ οπότε παίρνουμε τον επόμενο όρο της ακολουθίας $x_1 = g(x_0)$. Κατόπιν θέτουμε $x_2 = g(x_1)$ και γενικά κατασκευάζουμε την ακολουθία $\{x_n\}$ όπου $x_{n+1} = g(x_n)$. Αν αυτή η ακολουθία συγκλίνει τότε το όριο της είναι η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Η ακλουθεί πρόταση προσδιορίζει τις προϋποθέσεις για να συγκλίνει η γενική επαναληπτική μέθοδος.

Πρόταση 2.1.3 *Υποθέτουμε ότι $g(x) \in C([a, b])$ και $g(x) \in [a, b]$, $\forall x \in [a, b]$, και ότι υπάρχει η $g'(x)$ στο (a, b) και ένας αριθμός k με $0 < k < 1$ για τον οποίο ισχύει $|g'(x)| \leq k < 1$, $\forall x \in (a, b)$. Αν x_0 είναι μια αρχική προσέγγιση του σταθερού σημείου, ρ, της $g(x)$ στο $[a, b]$ τότε για την ακολουθία $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} |x_n - \rho| = 0$.*

Παρατήρηση Για δοθείσα ανοχή $\epsilon > 0$ σταματάμε τις επαναλήψεις της γενικής επαναληπτικής μεθόδου όταν $|x_n - x_{n+1}| \leq \epsilon$.

Για το σφάλμα της μεθόδου ισχύουν τα ακόλουθα

$|x_n - \rho| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$,

$|x_n - \rho| \leq \frac{k}{1-k}|x_{n-1} - x_n|$,

$|x_n - \rho| \leq k^n|x_n - \rho|$

2.1.3. Μέθοδος Newton - Ramphson

Υποθέτουμε ότι η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ βρίσκεται στο διάστημα $[a, b]$ και ότι η $f(x)$ είναι παραγωγίσημη. Εργαζόμαστε όπως στη γενική επαναληπτική μέθοδο και θέτουμε $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Τότε παίρνουμε την ακολουθία $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Η μέθοδος αυτή δεν εφαρμόζεται αν $f'(x) = 0$.

Παρατήρηση Για δοθείσα ανοχή $\epsilon > 0$ σταματάμε τις επαναλήψεις της γενικής επαναληπτικής μεθόδου όταν $|x_n - x_{n+1}| \leq \epsilon$.

2.1.4. Μέθοδος της Τέμνουσας

Η μέθοδος της τέμνουσας είναι μια παραλλαγή της μεθόδου Newton - Ramphson όπου τη παράγωγο $f'(x)$ την αντικαθιστούμε με τη προσέγγιση $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$. Η επαναληπτική μέθοδος σε αυτή τη περίπτωση παίρνει τη μορφή $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} f(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ και με x_0, x_1 αυθαίρετα.

2.2. Ασκήσεις

Άσκηση 2.2.1 *Δείξτε ότι αν r είναι μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και αν η εξίσωση αυτή γραφεί στη μορφή $x = F(x)$ με $F'(x) \leq L < 1$ σε ένα διάστημα I με κέντρο στο $x = r$, τότε η ακολουθία $x_n = F(x_{n-1})$ με x_0 αυθαίρετο αλλά στο I έχει $\lim x_n = r$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.2 *Να βρεθεί με τη μέθοδο της διχοτόμησης μια ρίζα της εξίσωσης $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$ στο διάστημα $[1, 2]$. Να γίνουν 3 επαναλήψεις. Μετά από πόσες επαναλήψεις η προσεγγιστική ρίζα θα έχει ανοχή $\epsilon = 10^{-6}$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.3 *Να λυθεί με τη γενική επαναληπτική μέθοδο η εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$ με αρχική προσέγγιση $x_0 = 4$* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.4 *Να βρεθεί με τη μέθοδο Newton - Ramphson η προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης $3\sin(x) + 4x - 5 = 0$ με αρχική προσέγγιση $x_0 = 1.0$ και $\epsilon = 10^{-4}$* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.5 *Να βρεθεί με τη μέθοδο της τέμνουσας η προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης $x^3 - 8 = 0$ με αρχικές προσεγγίσεις $x_0 = 3$, $x_1 = 1.5$ και $\epsilon = 0.02$* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.6 *Υπολογίστε τη $\sqrt{12}$ με τη μέθοδο Newton-Raphson. Λάβετε αρχικό σημείο $x_0 = 3$ και κριτήριο διακοπής $\epsilon = 0.01$.*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.7 *Να βρεθεί η προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης* $x - \cos^2(x) = 0$ *στο διάστημα* $[0, \frac{\pi}{4}]$ *εφαρμόζοντας 4 επαναλήψεις της μεθόδου διχοτόμησης. Βρείτε τον αριθμό βημάτων που χρειάζεται για να έχουμε ακρίβεια* $\epsilon = 0.01$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.8 *Δείξτε ότι η εξίσωση* $x^5 - 5x + 1 = 0$ *έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα* $[0, 1]$, *και προσεγγίστε την με τη μέθοδο Newton - Raphson. Σταματήστε στο τρίτο βήμα* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.9 *Δίνεται η εξίσωση* $f(x) = e^x - 1 - 2x = 0$. *Να εξετάσετε αν είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση των παρακάτω επαναληπτικών μεθόδων για κάθε* $x_0 \in [1, 2]$:

$$x_{n+1} = g_1(x_n) = \frac{e^{x_n} - 1}{2},$$

$$x_{n+1} = g_2(x_n) = \ln(1 + 2x_n).$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.10 *Δίνεται η εξίσωση* $f(x) = e^x - 1 - 2x = 0$. *Να δειχθεί ότι έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα* $[1, 2]$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.11 *Δείξτε ότι η επαναληπτική μέθοδος*

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{Q}{x_{n-1}}\right),$$

η οποία χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της τετραγωνικής ρίζας του αριθμού Q *(Μέθοδος του 'Ηρωνα) αποτελεί ειδική περίπτωση της μεθόδου Newton - Rampshon.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.12 *Εφαρμόστε τη γενική επαναληπτική μέθοδο για τον υπολογισμό της λύσης της εξίσωσης* $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ *(εξίσωση του Leonardo) αναδιατάσσοντας την εξίσωση στη μορφή* $x = \frac{20}{x^2+2x+10}$ *και παίρνοντας σαν αρχική προσέγγιση τη τιμή* $x_0 = 1$ *και ανοχή* $\epsilon = 10^{-6}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.13 *Βρείτε τη ρίζα της εξίσωσης* $x - e^{-x} = 0$ *με τη μέθοδο Newton - Rampson παίρνοντας αρχική τιμή* $x_0 = 1$ *και ανοχή* 10^{-5}. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.14 *Δείξτε ότι για το σφάλμα της μεθόδου Newton - Rampson,* $e_n = r - x_n$, *αν* r *είναι η ρίζα της εξίσωσης* $f(x) = 0$, *ισχύει η σχέση*

$$e_n = \simeq -\frac{f''(r)}{2f'(r)} e_{n-1}^2.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.15 *Να βρεθεί με τη μέθοδο της τέμνουσας η προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης* $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ *με αρχικές προσεγγίσεις* $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ *και ανοχή* $\epsilon = 10^{-3}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.16 *Να βρεθεί με τη μέθοδο της τέμνουσας η προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης* $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ *με αρχικές προσεγγίσεις* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ *και ανοχή* $\epsilon = 10^{-2}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 3

Επίλυση γραμμικών συστημάτων

3.1. Στοιχεία Θεωρίας

3.1.1. Μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι να μετατρέψουμε ένα σύστημα της μορφής $Ax = b$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, και με αγνώστους το διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, σε ένα ισοδύναμο σύστημα της μορφής $A'x = b'$ όπου ο πίνακας A' είναι άνω τριγωνικός, δηλαδή έχει στοιχεία $a'_{i,j} = 0$ για $i > j$. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται άνω τριγωνοποίηση. Πιο συγκεκριμένα πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης διαδοχικά επί $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, $-\frac{a_{31}}{a_{11}}, \ldots, -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ και τις νέες εξισώσεις αντίστοιχα τις προσθέτουμε στην δεύτερη, τρίτη, ..., n-οστή εξίσωση. Ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία για τη δεύτερη εξίσωση την οποία πολλαπλασιάζουμε διαδοχικά με $-\frac{a_{32}}{a_{22}}$, $-\frac{a_{42}}{a_{22}}, \ldots, -\frac{a_{n2}}{a_{22}}$ και τις νέες εξισώσεις αντίστοιχα τις προσθέτουμε στην τρίτη, ..., n-οστή εξίσωση. Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο τη διαδικασία καταλήγουμε τελικά σε ένα άνω τριγωνικό σύστημα.

Κατόπιν λύνουμε το νέο σύστημα με τη λεγόμενη πίσω αντικατάσταση. Αρχίζοντας από τη τελευταία εξίσωση υπολογίζουμε τον άγνωστο $x_n = \frac{b'_{n-1}}{a'_{nn}}$. Τη τιμή αυτή την αντικαθιστούμε στην $n-1$ εξίσωση και υπολογίζουμε τον x_{n-1} κοκ. μέχρι να υπολογίσουμε και τον x_1.

Παρατήρηση Οδήγηση είναι η διαδικασία κατά την οποία βρίσκουμε τον μεγαλύτερο σε απόλυτη τιμή συντελεστή των αγνώστων (οδηγό στοιχείο) και τον φέρνουμε στη θέση του συντελεστή a_{11} αλλάζοντας τη σειρά των γραμμών και των στηλών του συστήματος. Αν η οδήγηση γίνεται σε κάθε βήμα της άνω τριγωνοποίηση τότε λέγεται πλήρης οδήγηση. Με τη οδήγηση εξασφαλίζεται η ευστάθεια της διαδικασίας της άνω τριγωνοποίησης.

Μερική οδήγηση κατά στήλη είναι η διαδικασία κατα την οποία σε κάθε βήμα της τριγωνοποίησης, πριν την απαλοιφή του αγνώστου x_i ανταλλάσουμε την εξίσωση i με την εξίσωση $j \geq i$ που έχει μεγαλύτερο συντελεστή κατά απόλυτη τιμή. Μερική οδήγηση κατά γραμμή είναι η διαδικασία κατά την οποία σε κάθε βήμα της τριγωνοποίησης, πριν την απαλοιφή του αγνώστου x_i ανταλλάσουμε τον άγνωστο x_i με τον άγνωστο x_j, $j \geq i$ που έχει μεγαλύτερο συντελεστή κατα απόλυτη τιμή.

Παρατήρηση Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, χρησιμοποιούμε τη σχέση $AA^{-1} = I$ όπου $A^{-1} = \{x_{ij}\}$ είναι ο ζητούμενος πίνακας. Η εξίσωση $AA^{-1} = I$ μας δίνει n συστήματα με n^2 αγνώστους ή $\sum_{k=1}^{n} a_{ij} x_{kj} = \delta_{ij}$, όπου $\delta_{ij} = 1$ αν $i = j$ και $\delta_{ij} = 0$ αν $i \neq j$. Όλα τα συστήματα έχουν τον ίδιο πίνακα A οπότε εκτελούμε τη διαδικασία της άνω τριγωνοποίησης μία φορά και κατόπιν εκτελούμε τη διαδικασία της πίσω αντικατάστασης n φορές για να υπολογίσουμε τα $x_{kj}, j = 1, \ldots, n$.

Παρατήρηση Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με τη μέθοδο Gauss μετασχηματίζουμε την ορίζουσα με τη διαδικασία της άνω τριγωνοποίησης σε άνω τριγωνική και κατόπιν η ορίζουσα υπολογίζεται απο το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου της. Έχουμε $det(A) = (-1)^k \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ εάν έχουμε κάνει k εναλλαγές γραμμών ή στηλών για τη τριγωνοποίηση.

3.1.2. Παραγοντοποίηση LU

Πρόταση 3.1.1 *Αν το σύστημα* $Ax = b$ *μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο Gauss κατα μοναδικό τρόπο, χωρίς οδήγηση, τότε ο πίνακας* A *μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε γινόμενο ενός κάτω τριγωνικού πίνακα L και ενός άνω τριγωνικού πίνακα U, έτσι ώστε* $LU = A$ *με* $L = \{l_{ik}\}$,

$$l_{ik} = \begin{cases} 0, & i < k \\ 1 & i = k \\ \frac{a_{ik}}{a_{kk}} & i > k \end{cases}$$

και $U = \{u_{kj}\}$ *με*

$$u_{ik} = \begin{cases} 0, & k > j \\ a_{kj} & k \leq j \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τη παραγοντοποίηση LU μπορούμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής $Ax = b$ ώς εξής :
Παραγοντοποιούμε τον A και έχουμε $LU = A$. Θέτουμε $Ux = y$ και λύνουμε το κάτω τριγωνικό σύστημα $Ly = b$ με εμπρός αντικατάσταση. Κατόπιν για y γνωστό λύνουμε το κάτω τριγωνικό σύστημα $Ux = y$ με πίσω αντικατάσταση.

3.1.3. Ανάλυση Cholesky

Ορισμός 3.1.2 *Ένας πίνακας* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *λέγεται θετικά ορισμένος αν είναι συμμετρικός, δηλαδή* $A = A^T$ *όπου* A^T *ο ανάστροφος, και αν για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ *ισχύει* $x^T Ax > 0$.

Εάν ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος τότε μπορεί να γραφεί στη μορφή $A = LL^T$, δηλαδή ο A παραγοντοποιείται σε δύο τριγωνικούς πίνακες που ο ένας είναι ανάστροφος του άλλου. Επιπλέον αν $L = \{l_{ij}\}$ έχουμε

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

και για $i < j$

$$l_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik}}{l_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad j = i+1, \ldots, n.$$

3.1.4. Νόρμες διανυσμάτων και πινάκων

Ορισμός 3.1.3 *Μια σύνάρτηση* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to (0, +\infty]$ *που ικανοποιεί τις ιδιότητες*
α) $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0,$
β)$\|\lambda x\| = \lambda \|x\|,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R},$
γ)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *ονομάζεται νόρμα στον* $\mathbb{R}^n$.

Χαρακτηριστικές νόρμες διανυσμάτων, αν $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, είναι οι εξής :
$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|,$
$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$
$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, για $p \geq 1$.

Παρατήρηση Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισότητα Caushy - Schartz

$$|x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Ορισμός 3.1.4 *Λέμε ότι η ακολουθία* $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ *διανυσμάτων του* $\mathbb{R}^n$ *συγκλίνει στο διάνυσμα* $x \in \mathbb{R}^n$ *αν ισχύει*
$lim_{n\to\infty}\|x^n - x\| = 0$, *για κάποια νόρμα* $\|\cdot\|$ *του* $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 3.1.5 *Μια συνάρτηση* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to (0, +\infty]$ *που ικανοποιεί τις ιδιότητες*
α) $\|A\| \geq 0,\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \|A\| = 0 \leftrightarrow A = 0,$
β)$\|\lambda A\| = \lambda \|A\|,\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \lambda \in \mathbb{R},$
γ)$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,\ \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n},$
δ) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|,\ \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *ονομάζεται νόρμα πίνακα στον* $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Υπολογισμοί και Σφάλματα
Ασκήσεις
Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων
Ασκήσεις
Επίλυση γραμμικών συστημάτων
Ασκήσεις
Παρεμβολή
Ασκήσεις
Αριθμητική Παραγώγιση και Ολοκλήρωση
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Χαρακτηριστικές νόρμες πινάκων, αν $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, είναι οι εξής :
$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$,
$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$,
$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1,j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$.

Παρατήρηση Για κάθε νόρμα του $\mathbb{R}^n$ επάγεται μια φυσική νόρμα του $\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|y\|=1}\|Ay\|.$$

Επίσης αν $\|A\| > 0$ τότε $(1+\|A\|)^{-1} \le \|(I-A)^{-1}\| \le (1-\|A\|)^{-1}$, όπου I ο μοναδιαίος $n\times n$ πίνακας.

Θα λέμε ότι ένα σύστημα $Ax = b$ έχει κακή κατάσταση ή ότι είναι ασταθές αν μικρές διαταραχές στα δεδομένα (στο πίνακα A ή στο διάνυσμα b) του προκαλούν μεγάλες μεταβολές στη λύση του. Αντίστοιχα θα λέμε ότι ένα σύστημα είναι ευσταθές αν μικρές διαταραχές στα δεδομένα του προκαλούν μικρές μεταβολές στη λύση του.

Ορισμός 3.1.6 *Ονομάζουμε τη ποσότητα*

$$k(A) := \|A\|\,\|A^{-1}\|,$$

δείκτη κατάστασης του A ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$.

Παρατήρηση Αν $k(A) \gg 1$ τότε ο πίνακας A έχει κακή κατάσταση, ενώ αν $k(A) = O(1)$ (έχει τιμή κοντά στη μονάδα) τότε ο πίνακας A έχει καλή κατάσταση.

Ορισμός 3.1.7 *Για ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, πραγματικές ή μιγαδικές, ο αριθμός*

$$\rho(A) = \max_{1\le i\le n}|\lambda_i|,$$

ονομάζεται φασματική ακτίνα του πίνακα A.

Πρόταση 3.1.8 *Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει*
α) $\sqrt{\rho(A^T A)} = \|A\|_2$,
β) $\rho(A) \le \|A\|$, *για κάθε νόρμα* $\|\cdot\|$,
γ) $\rho(A) \le \|A\|_2$, *αν ο A είναι συμμετρικός.*

3.1.5. Γενική Επαναληπτική Μέθοδος

Για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $Ax = b$ με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, όπου A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και το σύστημα έχει μοναδική λύση γράφουμε αρχικά τον πίνακα A σαν διαφορά δύο πινάκων P και Q, $A = P - Q$, όπου ο Q είναι πίνακας με μηδενική ορίζουσα.

Έχουμε $A = Q - P$ και άρα $(Q - P)x = b$ ή $x = Q^{-1}Px + Q^{-1}b$ ή $x = Cx + d$, για $C = Q^{-1}P$, και $d = Q^{-1}b$. Ορίζουμε την επαναληπτική μέθοδο ως εξής:
$x_k = Cx_{k-1} + d_k$ με αρχικό διάνυσμα x_0 δεδομένο.

Πρόταση 3.1.9 *Η ακολουθία $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ που κατασκευάζεται με βάση την επαναληπτική μέθοδο $x_k = Cx_{k-1} + d_k$ συγκλίνει στη λύση x του συστήματος $Ax = b$ αν και μονο αν* $\lim_{k\to\infty} C^k = 0$.
Επιπλέον εναλλακτικά έχουμε ότι η ακολουθία $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ συγκλίνει στη λύση x αν και μόνο αν $\rho(C) < 1$.
Επίσης έχουμε τις εξής εκτιμήσεις σφάλματος
α) $\|x_k - x\| \le \|C\|^k \|x_0 - x\|$,
β) $\|x_k - x\| \le \frac{\|C\|^k}{1-\|C\|}\|x_1 - x_0\|$.

Μέθοδος Jacobi Εφαρμόζουμε τη γενική επαναληπτική μέθοδο παίρνοντας τον πίνακα Q να έχει τη μορφή

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

ενώ

$$P = Q - A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Η επαναληπτική μέθοδος Jacobi έχει τη μορφή

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{k-1}\right), \quad j \neq i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots$$

Αν ισχύει η σχέση $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a - ij|, j \neq i, \quad i = 1, \ldots, n$ τότε η επαναληπτική μέθοδος Jacobi συγκλίνει για οποιοδήποτε x^0.

Μέθοδος Gauss - Seidel Εφαρμόζουμε τη γενική επαναληπτική μέθοδο παίρνοντας τον πίνακα Q να έχει τη μορφή

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad P = Q - A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Η επαναληπτική μέθοδος Gauss - Seidel έχει τη μορφή

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i}^{n} a_{ij}x_j^k - \sum_{j>1}^{n} a_{ij}x_j^{k-1}\right), \quad i = 1,\ldots,n, \quad k = 1,\ldots$$

Το κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου Gauss - Seidel είναι το ίδιο με αυτό της μεθόδου Jacobi.

Παρατήρηση Σαν κριτήριο διακοπής των επαναληπτικών μεθόδων, για δοθέν μικρό αριθμό ϵ χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\|x^k - x^{k-1}\|_\infty \leq \epsilon.$$

3.2. Ασκήσεις

Άσκηση 3.2.1 *Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss το σύστημα*

$$\begin{aligned} E_1 : &\quad 5x - 2y + 3z = -2 \\ E_2 : &\quad -2x + 7y + 5z = 7 \\ E_3 : &\quad 3x + 5y + 6z = 9 \end{aligned}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.2 *Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss και με οδήγηση το σύστημα*

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 10 \\ 5x + 6y - z &= 2 \\ x - y - z &= 6 \end{aligned}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.3 *Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss και με χρήση του επαυξημένου πίνακα το σύστημα*

$$\begin{aligned} 4x + y + 4z &= -2 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ x + y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.4 *Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.5 *Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

με τη μέθοδο Gauss.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.6 *Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss το σύστημα*

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 0 \\ x - 4y + 3z &= 1 \\ -x - 7y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.7 *Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, και ο A είναι αντιστρέψιμος. Αν ισχύει $\|A - B\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ δείξτε ότι και ο B είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον δείξτε ότι για οπουδήποτε μη αντιστρέψιμο πίνακα $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει $\frac{1}{k(A)} \leq \frac{\|A-B\|}{A\|}$.*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.8 *Να δειχθεί ότι*

(α) $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1 \|x\|_\infty$

(β) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$

(γ) $y = \frac{x}{\|x\|} \Leftrightarrow \|y\| = 1$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.9 *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $\|A\| < 1$, δείξτε ότι ο πίνακας $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος και επιπλέον ισχύει $\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$.*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.10 *Να εξετάσετε αν η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_k = Bx_{k-1} + C$ όπου*

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

συγκλίνει και να προσδιορίσετε το όριο της σύγκλισης.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.11 *Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss, με οδήγηση, το σύστημα*

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z &= 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z &= 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z &= 0 \end{aligned}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.12 *Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα*

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

με τη μέθοδο Gauss. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.13 *Να υπολογιστούν οι νόρμες* $\|x\|_\infty$, $\|x\|_1$ $\|x\|_2$ *του διανύσματος*

$$x = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 42 \\ 147 \end{pmatrix}.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.14 *Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss το σύστημα*

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 26 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ 3x + 2y + z &= 42 \end{aligned}$$

Υπολογισμοί και Σφάλματα
Ασκήσεις
Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων
Ασκήσεις
Επίλυση γραμμικών συστημάτων
Ασκήσεις
Παρεμβολή
Ασκήσεις
Αριθμητική Παραγώγιση και Ολοκλήρωση
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 25 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.15 *Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss το ομογενές σύστημα*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ x+3y+2z &= 0 \\ 2x+4y+3z &= 0 \end{aligned}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.16 *Δείξτε ότι για τον δείκτη κατάστασης ενός πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k(A)$ *ισχύει* $k(A) \geq 1$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.17 *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} 3x+2y \quad &= 5 \\ 2y+z &= 3 \\ x \quad +2z &= 3 \end{aligned}$$

με την επαναληπτική μέθοδο Gauss - Siedel παίρνοντας αρχική τιμή $[x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}] = [0,0,0]$ *και με ακρίβεια δύο σημαντικών ψηφιών.*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.18 *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} x+2y-2z &= 1 \\ x+y+z &= 1 \\ 2x+2y+z &= 1 \end{aligned}$$

με την επαναληπτική μέθοδο Jacobi παίρνοντας αρχική τιμή $[x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}] = [1,1,1]$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.19 *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} 7x + y + z &= 12 \\ -x + 5y + z &= 12 \\ 2x - y + 6z &= 18 \end{aligned}$$

με την επαναληπτική μέθοδο Jacobi παίρνοντας αρχική τιμή $[x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}] = [0, 0, 0]$.
Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.20 *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{aligned} 7x + y + z &= 12 \\ -x + 5y + z &= 12 \\ 2x - y + 6z &= 18 \end{aligned}$$

με την επαναληπτική μέθοδο Gauss - Seidel παίρνοντας αρχική τιμή $[x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}] = [0, 0, 0]$.
Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.21 *Να λυθεί με τη μέθοδο Choleski το σύστημα*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 3 \\ 2x + 2y + 8z &= -2. \end{aligned}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.22 *Να λυθεί με τη μέθοδο της παραγοντοποίησης LU το σύστημα*

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 9z &= 7 \\ 2x - 8y + 2z &= -12 \\ 3x - 4y - z &= -6. \end{aligned}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.23 *Να βρεθεί αν είναι ευσταθές η όχι το σύστημα* $Ax = b$, *όπου*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3.001 \end{bmatrix}.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.24 *Να υπολογιστεί η νόρμα* $\|A\|_2$ *του πίνακα* A, *όπου*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Υπόδειξη-Λύση

Κεφάλαιο 4

Παρεμβολή

4.1. Στοιχεία Θεωρίας

Το πρόβλημα της παρεμβολής έγκειται στο να βρούμε μια συνάρτηση όσο το δυνατόν πιο απλή που προσεγγιστικά να παριστάνει μια άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε μόνο κάποια σημεία της γραφικής της παράστασης.

4.1.1. Παρεμβολή Lagrange

Πρόταση 4.1.1 *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ και ότι γνωρίζουμε τις τιμές της σε $n + 1$ σημεία $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ του $[a, b]$. Τότε υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$, μοναδικό, το οποίο ονομάζεται πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange, το πολύ n βαθμού τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση $P(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Επιπλέον ισχύει η ισότητα*

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \ldots + L_n(x)f(x_n).$$

Οι συντελεστές $L_i(x)$ ονομάζονται συντελεστές Lagrange και

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

Η ακόλουθη πρόταση προσδιορίζει το σφάλμα παρεμβολής Lagrange.

Πρόταση 4.1.2 *Έστω $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$ και x_i, $i = 0,1,2,\ldots,n$ είναι $n+1$ διαφορετικά σημεία παρεμβολής της $P(x)$ στο διάστημα $[a,b]$. Τότε για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει ένα $\xi := \xi(x)$ τέτοιο ώστε για το σφάλμα E να ισχύει*

$$E = f(x) - P(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!}$$

Παρατήρηση. Αν θέσουμε $M = \max_{a\le x\le b}|f^{n+1}(x)|$ τότε

$$E \le \frac{M}{(n+1)!}\Big|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\Big|$$

4.1.2. Παρεμβολή Newton

Έστω $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,2,\ldots,n$ οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ στα σημεία x_i, $i = 0,1,2,\ldots,n$ τα οποία γενικά δεν ισαπέχουν. Ορίζουμε ως πηλίκο διαφορών πρώτης τάξης τους λόγους

$$f[x_{i-1},x_i] = \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \quad i = 0,1,2,\ldots,n,$$

ως πηλίκο διαφορών δεύτερης τάξης τους λόγους

$$f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}] = \frac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i-1},x_i]}{x_{i+1}-x_{i-1}}, \quad i = 0,1,2,\ldots,n,$$

και γενικά ως πηλίκο διαφορών n τάξης τους λόγους

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_n]}{x_n - x_0}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton που περνάει απο τα σημεία $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ είναι

$$\begin{aligned} P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Πρόταση 4.1.3 *Έστω $f(x) \in C^n[a, b]$ και x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ είναι $n + 1$ διαφορετικά σημεία στο διάστημα $[a, b]$. Τότε υπάρχει ένα $\xi(x) \in (a, b)$ τέτοιο ώστε*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^n(\xi)}{n!}$$

Παρατήρηση. Το σφάλμα παρεμβολής Newton δίνεται απο τη σχέση

$$E = f(x) - P(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$

Παρατήρηση. Εάν τα σημεία παρεμβολής ισαπέχουν μεταξύ τους, $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ τότε τα πολυώνυμα παρεμβολής εκφράζονται καλύτερα με τη χρήση πεπερασμένων διαφορών.

Ορίζουμε ώς πεπερασμένη διαφορά πρώτης τάξης τη διαφορά

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i), i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

ως πεπερασμένη διαφορά δεύτερης τάξης, τη διαφορά

$$\Delta^2 f(x_i) = f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}), i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

και γενικά ως πεπερασμένη διαφορά r τάξης τη διαφορά

$$\Delta^r f(x_i) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} f(x_{i+k}), i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

με $\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} = \frac{r!}{k!(r-k)!}$.

Γενικά έχουμε

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n},$$

και το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton με προς τα εμπρός διαφορές (δηλαδή της μορφής $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$) είναι

$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! h^2} + \ldots$$
$$+(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)\frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n}.$$

Το σφάλμα παρεμβολής σε αυτή τη περίπτωση είναι $E = z(z-1)\ldots(z-n)\frac{h^{n+1} f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$, για $z = \frac{x - x_0}{h}$.

Εάν χρησιμοποιήσουμε αντί του Δ τον τελεστή ∇, όπου $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton με προς τα πίσω διαφορές παίρνει τη μορφή

$$P(x) = f(x_n) + (x - x_n)\frac{\nabla f(x_n)}{h} + (x - x_n)(x - x_{n-1})\frac{\nabla^2 f(x_n)}{2! h^2} + \ldots$$
$$+(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_0)\frac{\nabla^n f(x_n)}{n! h^n}.$$

Το σφάλμα σε αυτή τη περίπτωση είναι $E = z(z+1)\ldots(z+n)\frac{h^{n+1} f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$.

4.1.2.0.1. Πολυώνυμα Chebychev Το σφάλμα E είναι δυνατόν να ελαχιστοποιηθεί αν εάν επιλέξουμε κατάλληλα σημεία παρεμβολής x_i. Μια τέτοια επιλογή είναι να πάρουμε για x_i, $i = 0, \ldots, n$ τα σημεία

$$x_i = \frac{1}{2}\left(b + a + (b-a)r_i\right),$$

όπου r_i είναι οι ρίζες του πολυωνύμου Chebychev πρώτου είδους T_{n+1}. Συγκεκριμένα

$$T_{n+1}(x) = \cos\left((n+1)\arccos(x)\right), \quad x \in [-1, 1],$$

$$r_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right), \quad i = 0, 1, 2 \ldots, n.$$

Σε αυτή τη περίπτωση το μέγιστο δυνατό σφάλμα της παρεμβολής Lagrange θα είναι

$$\min_{x_i}\{\max_{a \le x \le b} |P(x) - f(x)|\} \le \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1},$$

όπου M τέτοιο ώστε $f^{n+1}(x) \le M$ για κάθε x στο $[a, b]$.

4.1.3. Παρεμβολή Hermite

Ένας τρόπος για να προσεγγίσουμε με πιο ομαλό τρόπο την $f(x)$ είναι με τα πολυώνυμα Hermite

Πρόταση 4.1.4 *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$ και ότι γνωρίζουμε τις τιμές της σε $n + 1$ σημεία, $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ του $[a, b]$. Τότε υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$, μοναδικό, το οποίο ονομάζεται πολυώνυμο παρεμβολής Hermite, το πολύ $2n + 1$ βαθμού τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση $P(x_i) = f(x_i)$ και $P'(x_i) = f'(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Επιπλέον ισχύει η ισότητα*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} H_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} \hat{H}_i(x) f(x_i).$$

Υπολογισμοί και Σφάλματα
Ασκήσεις
Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων
Ασκήσεις
Επίλυση γραμμικών συστημάτων
Ασκήσεις
Παρεμβολή
Ασκήσεις
Αριθμητική Παραγώγιση και Ολοκλήρωση
Ασκήσεις
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 33 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

όπου

$$H_i(x) = (1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i))\, L_i^2(x), \quad \hat{H}_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x).$$

Οι συντελεστές $L_i(x)$ είναι οι συντελεστές (πολυώνυμα) Lagrange.

Η ακόλουθη πρόταση μας δίνει μια εκτίμηση για το σφάλμα της μεθόδου

Πρόταση 4.1.5 *Έστω $f(x) \in C^{2n+2}[a, b]$ και x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ είναι $n + 1$ διαφορετικά σημεία στο διάστημα $[a, b]$. Τότε για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει ένα $\xi(x) \in (a, b)$ τέτοιο ώστε*

$$E = f(x) - P(x) = \frac{f^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$$

4.1.4. Παρεμβολή με Splines

Οι συναρτήσεις Splines είναι κατά τμήματα πολυώνυμα, βαθμού $n \geq 3$, που συνδέονται στα σημεία παρεμβολής με τέτοιο τρόπο ώστε σε αυτά τα σημεία η συνάρτηση παρεμβολής να είναι συνεχής αλλά και να έχει τις δύο πρώτες παραγώγους της συνεχείς.

Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$ ότι γνωρίζουμε τις τιμές της σε $n + 1$ σημεία, $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ του $[a, b]$. Η Spline τρίτου βαθμού ή κυβική Spline, S, είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνθήκες :

1. Η S είναι κυβικό πολυώνυμο στα διαστήματα $[x_i, x_{i+1}]$ και ο περιορισμός της S στο $[x_i, x_{i+1}]$ συμβολίζεται με S_i.
2. $S(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 2$
3. $S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1})$, $S_{i+1}'(x_{i+1}) = S_i'(x_{i+1})$, $S_{i+1}''(x_{i+1}) = S_i''(x_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 2$.
4. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ ή $S'(x_0) = f'(x_0)$ και $S'(x_n) = f'(x_n)$.

Για να κατασκευάσουμε μια κυβική Spline μιας συνάρτησης f αρχικά θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Οι συντελεστές a_i, b_i, c_i, d_i, για $h_i = x_i - x_{i-1}$, υπολογίζονται απο τις σχέσεις

$$a_i = f(x_i),$$

$$b_i = \frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}),$$

$$d_i = \frac{1}{3h_i}(c_{i+1} - c_i),$$

όπου τα c_i δίνονται από τη λύση του γραμμικού συστήματος $Ac = B$ ως προς c, όπου $c = [c_0, c_1, \dots, c_n]^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & . & . & . \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & . \\ . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + hn - 1) & h_{n-1} \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.1.5. Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Θέλουμε να προσαρμόσουμε μια ευθεία της μορφής $y = ax + b$ σε ένα πλήθος σημείων (x_i, y_i), $i = 1, 2, \dots, n$. Ο προσδιορισμός των συντελεστών a και b γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, δηλαδή με την ελαχιστοποίηση της παράστασης $Q = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2$. Με αυτό το τρόπο προκύπτει ότι

$$a = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

και

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Εάν τα δεδομένα είναι συνεχή και δίνονται από μια συνάρτηση $y(x)$ τότε κατά αντιστοιχία θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^{1} [y(x) - a_0 P_0(x) - \ldots - a_m P_m(x)]^2 dx.$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής σε αυτή τη περίπτωση είναι το $P(x) = a_0 P_0(x) + \ldots + a_m P_m(x)$, όπου οι συντελεστές a_k δίνονται από τη σχέση

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} y(x) P_k(x),$$

και $P_k(x)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre.

Γενικά αν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{a}^{b} w(x)[y(x) - a_0 Q_0 - \ldots - a - mQ_m]^2 dx,$$

όπου $w(x)$ είναι μια μη αρνητική συνάρτηση βάρους και τα $Q_k(x)$ είναι ορθογώνια πολυώνυμα, δηλαδή ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\int_{a}^{b} w(x) Q_j(x) Q_k(x) dx = 0,$$

για $j \neq k$, τότε οι συντελεστές a_k δίνονται από τις σχέσεις

$$a_k = \frac{\int_a^b w(x) y(x) Q_k(x) dx}{\int_a^b w(x) Q_k^2(x) dx}.$$

4.2. Ασκήσεις

Άσκηση 4.2.1 *Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange, που παρεμβάλλεται στα σημεία* $(0,-1)$, $(1,0)$, $(2,3)$, $(3,8)$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.2 *Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange, που παρεμβάλλεται στα σημεία* $(0,2)$, $(1,-3)$, $(3,0)$, $(4,1)$, $(7,-2)$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.3 *Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange που παρεμβάλει τη συνάρτηση* $f(x) = \sin(x)$ *στα σημεία* $60, 70, 80, 90$.
Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.4 *Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange που παρεμβάλει τη συνάρτηση* $f(x) = x^4$ *στα σημεία* $-1, 0, 2$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.5 *Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton που παρεμβάλει τη συνάρτηση* $f(x) = \ln(x)$ *στα σημεία* $2, 3, 4$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.6 *Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange που παρεμβάλει τη συνάρτηση* $f(x) = x^5$ *στα σημεία* $-2, 0, 1$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.7 *Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής* $u(x)$*, του Newton, που παρεμβάλει τα σημεία* $(0,5)$, $(1,8)$, $(2,17)$, $(3,44)$, $(4,101)$ *και να προσδιοριστούν τα σημεία* $(0.5, u(0,5))$ *και* $(1.1, u(1,1))$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.8 *Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής $u(x)$, του Newton που παρεμβάλει τα σημεία $(10, 5)$, $(14, 1)$, $(18, -3)$, $(22, 89)$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.9 *Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange για τη συνάρτηση $f(x) = 1 - \cos(\frac{\pi x}{2})$ η οποία το παρεμβάλει στα σημεία -1, 0, 1.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.10 *Αν το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange, απο τα σημεία -1, 0, 1 της συνάρτησης $f(x) = 1 - \cos(\frac{\pi x}{2})$ είναι $p(x) = x^2$ να υπολογιστεί μια εκτίμηση για το σφάλμα.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.11 *Να βρεθεί το σφάλμα παρεμβολής του Lagrange για την συνάρτηση $f(x) = x^4$ στο $[0, 3]$ στα σημεία $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x = 2$, $x_3 = 3$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.12 *Να δηχθεί ότι το σφάλμα παρεμβολής του Newton για την συνάρτηση $f(x) = \ln(x)$ στα σημεία $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x = 4$, $\epsilon(x) = f(x) - p(x)$, ικανοποιεί τη σχέση $-\frac{1}{64} \le \epsilon(3.5) \le -\frac{1}{512}$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.13 *Εάν το πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού n παίρνει τις ίδιες τιμές με τη συνάρτηση $y(x)$ για $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ να υπολογιστεί η διαφορά $y(x) - p(x)$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.14 *Να βρεθεί το σφάλμα παρεμβολής του Lagrange για την συνάρτηση $f(x) = e^x$ στα σημεία $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x = 1$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.15 *Έστω $p(x)$ πολυώνυμο με $p(x_i) = e^{2i}$, $x_i = i, i = 1, 2, 3, 4$. Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in (1, 2)$ ισχύει $e^{2x} < p(x)$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.16 *Με δεδομένα τα σημεία (x_i, y_i) να προσδιοριστεί η ευθεία $p(x) = Mx + B$ έτσι ώστε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{N}(y_i - Mx_i - B)^2$ να γίνεται ελάχιστο.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.17 *Προσδιορίστε μια γραμμική σχέση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για τα παρακάτω δεδομένα*

X	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Y	3.8	3.7	4.0	3.9	4.3	4.2	4.2	4.4	4.5	4.5

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.18 *Βρείτε μια σχέση της μορφής* $P(x) = Ae^{Mx}$ *από τα ακόλουθα δεδομένα*

x_i	1	2	3	4
P_i	7	11	17	27

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.19 *Προσδιορίστε τους συντελεστές* a_i *έτσι ώστε το*

$$I = \int_{-1}^{1} [y(x) - a_0 P_0(x) - a_1 P_1(x) - \ldots - a_m P_m(x)]^2 dx$$

να γίνεται ελάχιστο. Τα $P_k(x)$ *είναι τα πολυώνυμα Legendre.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.20 *Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων προσδιορίστε μια παραβολή που να προσεγγίζει την* $y(t) = \sin(t)$ *στο διάστημα* $(0, \pi)$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.21 *Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων προσδιορίστε μια ευθεία που να προσεγγίζει την παραβολή* $y(t) = t^2$ *στο διάστημα* $(0, 1)$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.22 *Εκφράστε το πολυώνυμο ελαχίστων τετραγώνων με πολυώνυμα ορθογώνια στο διάστημα* (a, b) *και για μία μη αρνητική συνάρτηση βάρους* $w(x)$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.23 *Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite που παρεμβάλει τη συνάρτηση* $y = \frac{1}{x}$ *στα σημεία* $x_0 = 1$, $x_1 = 2$. *Να γίνει η εκτίμηση του σφάλματος στο σημείο* $x = 1.5$ *όταν* $x_0 = a$, $x_0 = b$ **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.24 *Να βρεθεί το πολυώνυμο Hermite που παρεμβάλει τη συνάρτηση* $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ *στα σημεία* $x_0 = -1$, $x_1 = 1$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.25 *Να υπολογιστεί η συνάρτηση spline,* $S(x)$, *η οποία παρεμβάλει τη συνάρτηση* $f(x) = \frac{1}{1+x}$ *στα σημεία* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ *με συνοριακές συνθήκες* $S''(0) = 0$ *και* $S''(3) = 0$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.26 *Να υπολογιστεί η συνάρτηση spline, $S(x)$, η οποία παρεμβάλει τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ στα σημεία $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ με συνοριακές συνθήκες $S''(1) = 0$ και $S''(4) = 0$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.27 *Για τα πολυώνυμα Chebychev δείξτε ότι ισχύει η αναδρομική σχέση $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}x$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.28 *Προσδιορίστε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων για τη συνάρτηση $y(t) = t^2$ στο διάστημα $(0, 1)$ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση βάρους $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. και τα πολυώνυμα Chebychev.* **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 5

Αριθμητική Παραγώγιση και Ολοκλήρωση

5.1. Στοιχεία Θεωρίας

5.1.1. Αριθμητική Παραγώγιση

Έστω συνάρτηση f για την οποία έχουμε ότι η μορφή της είναι πολύπλοκη ή ότι μας δίνεται ένα σύνολο τιμών αυτής. Για να προσεγγίσουμε την $f'(x)$ θεωρούμε ότι $f(x) \simeq P_n(x)$ όπου $P_n(x)$ είναι ένα πολυώνυμο παρεμβολής. Εάν $x = x_0 + \ell h$ και $f_i := f(x_i)$ έχουμε ότι

$$P_n(x) = f_0 + \binom{\ell}{1}\Delta f_0 + \binom{\ell}{2}\Delta^2 f_0 + \ldots + \binom{\ell}{n}\Delta^n f_0$$

ή

$$P_n'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2\ell - 1)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}(3\ell^2 - 6\ell + 2)\Delta^3 f_0 + \ldots + \ldots \Delta^n f_0\right)$$

Απο αυτή τη σχέση μπορούμε να πάρουμε διακριτές προσεγγίσεις για τις παραγώγους της f.

Εάν θέσουμε $x = x_0$ έχουμε $\ell = 0$ και

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}\Delta^n f_0\right).$$

Άρα για $n = 1$ έχουμε

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\Delta f_0 = \frac{1}{h}(f_1 - f_0),$$

για $n = 2$

$$f'(x_0) \simeq \frac{f_2 - 4f_1 + 3f_0}{2h}.$$

Όμοια για $x = x_0$ και $n = 2$

$$f''(x_0) \simeq \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}.$$

5.1.2. Μέθοδος του Ορθογωνίου

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[a, b]$. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ υποδιαιρούμε το διάστημα $[a, b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα με τα σημεία $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$, τα οποία έχουν μήκος $h = \frac{b-a}{n}$.

Σύμφωνα με τον κανόνα του ορθογωνίου έχουμε ότι

$$\int_a^b f(x)dx \approx y_0 h + y_1 h + \ldots + y_{n-1} h,$$

ή

$$\int_a^b f(x)dx \approx y_1 h + y_1 h + \ldots + y_n h,$$

όπου $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Αυτός είναι ο σύνθετος κανόνας του ορθογωνίου. Στη πιο απλή μορφή του ($n = 1$) έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx \approx y_0 h,$$

δηλαδή τον απλό κανόνα του ορθογωνίου.

Παρατήρηση. Εναλλακτικά μπορούμε να πάρουμε $y_i = f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ και έτσι παίρνουμε μια προσέγγιση του ολοκληρώματος με μικρότερο σφάλμα.

5.1.3. Μέθοδος του Τραπεζίου

Σε αυτή τη περίπτωση προσεγγίζουμε τη καμπύλη $y(x)$ από μια τεθλασμένη γραμμή. Το ολοκλήρωμα, $\int_a^b f(x)dx$ τότε προσεγγίζεται από το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right),$$

όπου $y_k = f(x_k)$ $k = 0, 1, \ldots, n$. Στη περίπτωση που $n = 1$ παίρνουμε τον απλό κανόνα του τραπεζίου

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2}\right).$$

5.1.4. Μέθοδος του Simpson

Μπορούμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ αν μεταξύ δύο σημείων της $y(x)$, y_i και y_{i+1} παρεμβάλουμε μια καμπύλη της μορφής $y = ax^2 + bx + c$ η οποία διέρχεται από αυτά τα δύο σημεία. Σε αυτή τη περίπτωση, και για μια διαμέριση με άρτιο αριθμό υποδιαστημάτων ($n = 2k$), το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται από τον ακόλουθο σύνθετο κανόνα του Simpson.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})\right).$$

Για $n = 2$ παίρνουμε τον απλό κανόνα του Simpson,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right).$$

5.1.5. Μέθοδοι ολοκλήρωσης του Newton-Cotes

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)dx$ θα υπολογίσουμε το πολυώνυμο παρεμβολής, $P(x)$, της $f(x)$ στο $[a, b]$ και θα προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα του $P(x)$.

Συγκεκριμένα έστω μια συνάρτηση $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, και θεωρούμε μια διαμέριση του $[a, b]$ με $n+1$ σημεία $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$. Τότε $f(x) = P(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi(x))$, όπου $P(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$, και $\xi(x)$ ένας αριθμός στο $[a, b]$ που εξαρτάται απο το x. Απο αυτή τη προσέγγιση της $f(x)$ προκύπτει ότι

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)dx,$$

και το σφάλμα της προσέγγισης είναι

$$E = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) f^{(n+1)}(\xi)dx.$$

Εάν τα σημεία της διαμέρισης, x_i, ισαπέχουν τότε για $n = 2k + 1$ το σφάλμα παίρνει τη μορφή

$$E = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)dx,$$

ενώ για $n = 2k$ έχουμε

$$E = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) dx.$$

Για $n = 1$ προκύπτει η απλή μέθοδος του τραπεζίου. Επιπλέον μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η σύνθετη μέθοδος του Τραπεζίου έχει σφάλμα

$$|E| \leq \frac{h^2}{12}(b - a)M,$$

για M τέτοιο ώστε της $|f''(\xi)| \leq M$, για κάθε $\xi \in [a, b]$.

Για $n = 2$ προκύπτει η απλή μέθοδος Simpson. Επίσης για τη σύνθετη μέθοδο Simpson έχουμε ότι για το σφάλμα ισχύει

$$|E| \leq \frac{h^4}{180}(b - a)M,$$

για M τέτοιο ώστε της $|f^{(4)}(\xi)| \leq M$, για κάθε $\xi \in [a, b]$.

5.1.6. Μέθοδοι ολοκλήρωσης του Gauss

Οι μέθοδοι ολοκλήρωσης του Gauss βασίζονται στο γεγονός ότι επιλέγουμε τη διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$ έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα. Θεωρούμε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + E_n,$$

όπου $c_i = \int_a^b P_i(x)dx$, P_i ορθογώνια πολυώνυμα, βαθμού n και E_n το σφάλμα ολοκλήρωσης. Επιλέγουμε τα σημεία x_i έτσι ώστε να είναι οι $n+1$ ρίζες του ορθογωνίου πολυωνύμου P_{n+1}, βαθμού $n + 1$ στο $[a, b]$.

Πρόταση 5.1.1 *Αν P_k είναι μια ακολουθία ορθογωνίων πολυωνύμων στο $[a, b]$ με μοναδιαίο τον συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τότε ισχύει $P_0 = 1$, $P_1 = x - \frac{a+b}{2}$ και $P_{k+1}(x) = (x - A_k)P_k(x) - B_k P_{k-1}(x)$, όπου*

$$A_k = \frac{\int_a^b x(P_k(x))^2 dx}{\int_a^b (P_k(x))^2 dx}, \quad B_k = \frac{\int_a^b xP_k(x)P_{k-1}(x)dx}{\int_a^b (P_{k-1}(x))^2 dx}$$

Πρόταση 5.1.2 *Για κάθε k το ορθογώνιο πολυώνυμο P_k στο $[a, b]$ έχει k απλές πραγματικές ρίζες στο διάστημα αυτό, οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους.*

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ αρχικά θέτουμε $t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$, έτσι ώστε να μεταφέρουμε το πεδίο ολοκλήρωσης στο $[-1, 1]$ και μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα στο

$$I = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} g(x)dx,$$

όπου $g(x) = f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right)$.

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} g(x)dx$, το προσεγγίσουμε ως εξής

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i).$$

Προσδιορίζουμε τα w_i και x_i έτσι ώστε η ολοκλήρωση με αυτή τη μέθοδο να είναι ακριβής για πολυώνυμα μέχρι και $2n + 2$ βαθμού. Χρησιμοποιούμε για το προσδιορισμό αυτών των συντελεστών τα πολυώνυμα Legendre και, $L_i(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k}(x^2 - 1)^k$ ως x_i τις ρίζες τους. Για $n = 0$ έχουμε

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx 2g(0).$$

Για $n = 1$ έχουμε
$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$
Για $n = 2$ έχουμε
$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

5.2. Ασκήσεις

Άσκηση 5.2.1 *Να βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος*
$$\int_0^2 x^3 dx,$$
με τη σύνθετη μέθοδο του ορθογωνίου, για $n = 4$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.2 *Να βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος*
$$\int_0^2 x^3 dx,$$
με τη σύνθετη μέθοδο του ορθογωνίου, παίρνοντας $y_i = f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})$, για $n = 4$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.3 *Να βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος*
$$\int_0^2 x^3 dx,$$
με τη μέθοδο του τραπεζίου, για $n = 4$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.4 *Να βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος*

$$\int_0^2 x^3 dx,$$

με τη μέθοδο του Simpson, για $n = 4$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.5 *Να βρεθεί στη μέθοδο του τραπεζίου το σφάλμα αποκοπής του ολοκληρώματος $\int_0^1 e^{2x}dx$ για $n = 4$.*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.6 *Υποθέτουμε ότι*

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = A_0 f_0 + A_1 f_1 + A_2 f_2 + R,$$

όπου $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, 3$. Προσδιορίστε τα A_0, A_1, A_2 ανεξαρτήτως της $f(x)$, τέτοια ώστε $R = 0$ εάν η $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού ≤ 2. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.7 *Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 x^2 dx$, του οποίου η ακριβής τιμή είναι $\frac{1}{3}$. Βρείτε τη προσεγγιστική τιμή του I χρησιμοποιώντας τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου με $h = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Επιπλέον δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} Q_{n+1} = I \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$, όπου Q_{n+1} η προσέγγιση του ολοκληρώματος I χρησιμοποιώντας τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου και R_{n+1} το σφάλμα της μεθόδου.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.8 *Να βρεθεί ο αριθμός των υποδιαστημάτων που απαιτούνται για να προσεγγιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ με σφάλμα $|R_{n+1}| \leq 0.5\,10^{-6}$ με*
(α) μέθοδο του τραπεζίου
(β) μέθοδο του Simpson.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.9 *Να υπολογιστεί με χρήση της μεθόδου Simpson μία προσέγγιση του ολοκληρώματος* $\int_1^2 xe^{-x}dx$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.10 *Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα* $I = \int_1^2 (x^3 - \frac{1}{4}x^4)dx$ *με τη μέθοδο Simpson.*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.11 *Να βρεθεί η προσεγγιστική τιμή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης* $f(x) = \ln(x)$ *στο σημείο* $x_0 = 2$ *με* $h = 0.1$ *και να συγκριθεί με την ακριβή τιμή της παραγώγου στο σημείο αυτό.*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.12 *Να βρεθεί η προσεγγιστική τιμή της δευτέρας παραγώγου για την* $f(x) = x\ln(x)$ *στο σημείο* $x_0 = 2$ *με* $h = 0.1$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.13 *Να προσεγγιστεί η τιμή του ολοκληρώματος* $I = \int_1^3 (x\ln(x))dx$ *με τη μέθοδο του τραπεζίου για* $h = 0.25$. *Πόσα σημεία πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να είναι το σφάλμα το πολύ* $\frac{1}{2}10^{-4}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.14 *Να γίνει εκτίμηση του σφάλματος στον υπολογισμό, με τη μέθοδο Simpson και με* $h = 0.25$ *του ολοκληρώματος* $I = \int_0^3 (0.003x^{10} - 0.25x^4)dx$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.15 *Να βρεθεί η εκτίμηση του σφάλματος στη προσέγγιση του ολοκληρώματος* I *το οποίο προσεγγίζεται με τη παρακάτω μέθοδο*

$$\int_{-h}^{h} y(x)dx = \frac{h}{3}[y(-h) + 4y(0) + y(h)].$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.16 *Να βρεθεί με τη μέθοδο Gauss- Legendre η τιμή του ολοκληρώματος*

$$I = \int_0^2 e^t dt,$$

για $n = 2$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.17 *Να βρεθεί με τη μέθοδο Gauss- Legendre η τιμή του ολοκληρώματος*

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{x+2}dx,$$

για $n = 2$ **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.18 *Να βρεθεί με τη μέθοδο Gauss- Legendre η τιμή του ολοκληρώματος*

$$I = \int_0^2 e^t dt,$$

για $n = 3$. Δίνεται ότι για $n = 3$ έχουμε

$x_0 = -0.8611363116, \quad x_1 = -0.3399810436, \quad x_2 = 0.3399810436, \quad x_3 = 0.8611363116,$

$w_0 = 0.3478548451, \quad w_1 = 0.6521451549, \quad w_2 = 0.6521451549, w_3 = 0.3478548451.$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.19 *Να βρεθεί με τη μέθοδο Gauss- Legendre η τιμή του ολοκληρώματος*

$$I = \int_0^1 \sqrt{2t+1}dt,$$

για $n = 2$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.20 *Έστω μια συνάρτηση* $f(x) \in C^4([a,b])$. *Χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο παρεμβολής Newton της* f *μέχρι και τον τρίτο όρο και υποθέτοντας ότι έχουμε μια διαμέριση στο* $[a,b]$ *με σημεία* $a = x_0, \ldots, x_3 = b$, $x_i = x_0 + ih$, $i = 1,2,3$ *δείξτε ότι*

$$\int_{x_0}^{x^3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)).$$

Αυτός η μέθοδος ολοκλήρωσης ονομάζεται μέθοδος των $\frac{3}{8}$.

Υπόδειξη-Λύση

Αποδείξεις

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση

$$|\frac{Q - Q_1}{Q}| \leq \frac{1}{10^5}.$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.1

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση για το σχετικό σφάλμα E_r του πηλίκου $\frac{u_1}{u_2}$ σύμφωνα με την οποία

$$E_r \leq \frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2}.$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.2

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τους ορισμούς του απόλυτου και σχετικού σφάλματος. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.3

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση $\Delta \ln(y) \simeq \frac{\Delta y}{y}$ $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.4

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τους ορισμούς του απόλυτου και σχετικού σφάλματος. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.5

Υπόδειξη: Το απόλυτο σφάλμα δίνεται απο τη σχέση $\epsilon = |x - x^*|$ ενώ το σχετικό από τη σχέση $\epsilon_r = \frac{x - x^*}{x}$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.6

Υπόδειξη: Το σφάλμα είναι $\epsilon = x - x^*$, η διόρθωση $r = -\epsilon$, το σχετικό σφάλμα $\epsilon_r = \frac{x^* - x}{x}$ και το απόλυτο σχετικό σφάλμα $|\epsilon_r|$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.7

Υπόδειξη: Για τον αριθμό $d_n d_{n-1} \ldots d_{1b}$ η μορφή του στο δεκαδικό σύστημα είναι $d_n \times b^{n-1} + d_{n-1} \times b^{n-2} + \ldots + d_1 \times b^0$ κτλ. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.8

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο $d_{-i-1} = [y_{-i} \times b]$ για $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ με $y_{-2} = (y_{-1} \times b) - d_{-2}$, όπου

$$y_{-i} = \begin{cases} x, & i = 0, \\ (y_{-i+1} \times b) - d_{-i} & i = 1, 2, \ldots k. \end{cases}$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.9

Υπόδειξη: Αν ϵ το σφάλμα $a+b$ τότε $\epsilon \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$ και αν ϵ_r το σχετικό σφάλμα του $\frac{a}{b}$ έχουμε $|\epsilon_r| \simeq \frac{|\epsilon_1|}{a} + \frac{|\epsilon_2|}{b}$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.10

Υπόδειξη: Συγκρίνεται το αποτέλεσμα με το αναμενόμενο σφάλμα της αφαίρεσης δύο αριθμών. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.11

Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε και διαιρέστε με τη συζυγή παράσταση. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.12

Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε και διαιρέστε με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.13

Απόδειξη: Σε αυτή τη περίπτωση το σχετικό σφάλμα, για $\Delta Q = Q - Q_1$ είναι

$$|\frac{\Delta Q}{Q}| \leq \frac{1}{10^5},$$

ή

$$\Delta Q \leq \frac{1}{10^5}|Q|.$$

Στη περίπτωση που το Q είναι άγνωστο και το $Q_1(= 31.546824)$ είναι γνωστό έχουμε

$$|Q| \leq |Q_1| + \Delta Q.$$

Άρα

$$|\Delta Q| \leq 10^{-5}(|Q_1| + \Delta Q),$$

ή

$$\Delta Q \leq 0.00031546824 + 10^{-5}\Delta Q,$$

ή

$$\frac{99999}{100000}\Delta Q \leq 0.00031546824,$$

και

$$\Delta Q \leq 0.00032.$$

Εφόσον το ΔQ είναι μικρότερο από το μισό της μονάδας στο χιλιοστό σημείο το σημαντικό ψηφίο στο χιλιοστό σημείο, δηλαδή το ψηφίο 6 είναι σωστό και άρα ο αριθμός έχει τουλάχιστον 5 σωστά σημαντικά ψηφία.

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.1

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 66 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Υπολογίζουμε το σχετικό σφάλμα E_r απο τη σχέση

$$E_r \leq \frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2},$$

και κατόπιν το απόλυτο σφάλμα E_a απο τη σχέση $E_a = NE_r$.

Έχουμε ότι για κάποια x και y,

$$N = \frac{7^o\,10'}{\log_{10} 242.7} = \frac{\cos(x)}{\log_{10} y} = \frac{u_1}{u_2}$$

και

$$\Delta u_1 = \Delta cos(x) = -\sin(x)\Delta x,$$

$$\Delta u_2 = \Delta \log_{10} y = 0.43429\frac{\Delta y}{y}.$$

Επομένως

$$E_r \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\Delta x + \frac{0.43429}{y\log(y)}\Delta y,$$

ή

$$E_r \leq \tan(x)\Delta x + \frac{0.435}{y\log(y)}\Delta y.$$

Παίρνοντας $x = 7^o\,10'$, $\Delta x = 1^o = 0.000291$ ακτίνια, $y = 242$, $\Delta y = 0.1$ έχουμε

$$E_r \leq 0.126 \cdot 0.000291 + \frac{0.435 \cdot 0.1}{242 \cdot 2.38} = 0.00011.$$

Επιπλέον δεδομένου ότι $N = \frac{7^o\,10'}{\log_{10} 242.7} = 0.41599$ έχουμε ότι

$$E_a = 0.00011 \cdot 0.416 = 0.000046,$$

ή $E_a < 0.00005$ και η τιμή του κλάσματος είναι μεταξύ του 0.41604 και του 0.41594 και η μέση τιμή αυτών των δύο εκτιμήσεων είναι η βέλτιστη εκτίμηση αυτού του κλάσματος. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.2

Απόδειξη: Έχουμε για το απόλυτο σφάλμα E_a

$$E_a = 4.0 - 5.0 = -1.0,$$

για το σχετικό σφάλμα E_r

$$E_r = \frac{4.0 - 5.0}{5.0} = \frac{-1.0}{5.0} = -0.2,$$

και για το επι τοις εκατό σφάλμα του υπολογισμού E_{100} έχουμε

$$E_{100} = (-0.2) \cdot (100) = -20\%.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.3

Απόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\Delta \ln(y) \simeq d(\ln(y)) = \frac{dy}{y} \simeq \frac{\Delta y}{y}$$

Έχουμε ότι

$$\Delta(\ln(y)) = \ln(y + \Delta y) - \ln(y) = \ln\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right) \simeq \frac{\Delta y}{y}.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.4

Απόδειξη: Έχουμε $F(\frac{1}{3}) = 0.3333$ και $F(\frac{4}{7}) = 0.5714$ επομένως $x \oplus y = \frac{1}{3} \oplus \frac{4}{7} = F[F(x) + F(y)] = F(0.3333 + 0.5714) = F(0.9047) = 0.9047$ ενώ η πραγματική τιμή είναι $x + y = \frac{19}{21}$. Όμοια βρίσκουμε ότι
$x \ominus y = \frac{1}{3} \ominus \frac{4}{7} = F[F(x) - F(y)] = F(0.3333 + 0.5714) = -0.2381$ ενώ $x - y = -\frac{5}{21}$,
$x \otimes y = \frac{1}{3} \otimes \frac{4}{7} = F[F(x) \cdot F(y)] = F(0.3333 \cdot 0.5714) = 0.1904$ ενώ $x \cdot y = \frac{4}{21}$,
$x \div y = \frac{1}{3} \div \frac{4}{7} = F[\frac{F(x)}{F(y)}] = F(\frac{0.3333}{0.5714}) = 0.5833$ ενώ $\frac{x}{y} = \frac{7}{12}$.

Εάν $\bar{z}$ είναι η προσεγγιστική τιμή του αριθμού z τότε το απόλυτο σφάλμα είναι $E_a(z) = |\bar{z} - z|$ και το σχετικό $E_r(z) = \frac{|\bar{z}-z|}{z}$. Επομένως
$E_a(x \oplus y) = 0.6190\,10^{-4}$, $E_r(x \oplus y) = 0.6842\,10^{-4}$,
$E_a(x \ominus y) = 0.4762\,10^{-5}$, $E_r(x \ominus y) = 0.2\,10^{-4}$,
$E_a(x \otimes y) = 0.7619\,10^{-4}$, $E_r(x \otimes y) = 0.4\,10^{-3}$,
$E_a(x \div y) = 0.3333\,10^{-4}$, $E_r(x \div y) = 0.5714\,10^{-4}$.

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.5

Απόδειξη: α) Έχουμε ακριβή τιμή $x = 0.0000001$ και προσεγγιστική τιμή $x^* = 0.0000004$ άρα το απόλυτο σφάλμα είναι

$$|\epsilon| = |0.0000001 - 0.0000004| = 0.0000003,$$

ενώ το σχετικό σφάλμα είναι

$$\epsilon_r = \frac{x - x^*}{x} = \frac{0.0000003}{0.0000001} = 3$$

β) Έχουμε ακριβή τιμή $x = 10000001$ και προσεγγιστική τιμή $x^* = 10000005$ άρα το απόλυτο σφάλμα είναι

$$|\epsilon| = |10000001 - 10000005| = 4,$$

ενώ το σχετικό σφάλμα είναι

$$\epsilon_r = \frac{x - x^*}{x} = \frac{4}{10000001} = 0.0000004$$

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις οι προσεγγίσεις είναι ικανοποιητικές. Στη πρώτη περίπτωση $\epsilon = 0.0000003 \ll 1$ ενώ στη δεύτερη $\epsilon_r = 0.0000004 \ll 1$.

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.6

Απόδειξη: Έχουμε ακριβή τιμή $x = 4$ και προσεγγιστική τιμή $x^* = 3.96$ άρα
α) Το σφάλμα ϵ είναι $\epsilon = x^* - x = 3.96 - 4 = -0.04$,
β) Η διόρθωση r είναι $r = -\epsilon = 0.04$,
γ) Το σχετικό σφάλμα ϵ_r είναι $\epsilon_r = \frac{x^* - x}{x} = \frac{-0.04}{4} = -0.01$,
δ) Το απόλυτο σχετικό σφάλμα $|\epsilon_r|$ είναι $|\epsilon_r| = |\frac{x^* - x}{x}| = \frac{0.04}{4} = 0.01$.

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.7

Απόδειξη: Για τον αριθμό 1101111_2 έχουμε

$$\begin{aligned} 1101111_2 &= 1\times 2^6 + 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 \\ &= 64 + 32 + 0 + 8 + 4 + 2 + 1 = 111_{10} \end{aligned}$$

Επίσης για τον αριθμό 307.17_8 έχουμε

$$307.17_8 = 3\times 8^6 + 0\times 8^1 + 7\times 8^0 + 1\times 8^{-1} + 7\times 8^{-2} = 199.234375_{10}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.8

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι για να παραστήσουμε το δεκαδικό μέρος x ενός αριθμού που ανήκει στο δεκαδικό σύστημα σε ένα άλλο σύστημα αριθμών με βάση b χρησιμοποιούμε το ακέραιο μέρος των διαδοχικών πολλαπλασιασμών του x με τη βάση b. Συγκεκριμένα $d_{-i-1} = [y_{-i} \times b]$ για $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ με $y_{-2} = (y_{-1} \times b) - d_{-2}$, όπου

$$y_{-i} = \begin{cases} x, & i = 0, \\ (y_{-i+1} \times b) - d_{-i} & i = 1, 2, \ldots k. \end{cases}$$

Στη περίπτωση μας έχουμε
Για $i = 1$, $y_{-1} = 0.59375$, $y_{-1} \times 2 = 0.1875 + 1$ για $d_{-1} = 1$,
για $i = 2$, $y_{-2} = 0.1875$, $y_{-2} \times 2 = 0.375 + 0$ για $d_{-2} = 0$,
για $i = 3$, $y_{-3} = 0.375$, $y_{-3} \times 2 = 0.75 + 0$ για $d_{-3} = 0$,
για $i = 4$, $y_{-4} = 0.75$, $y_{-4} \times 2 = 0.5 + 1$ για $d_{-4} = 1$,
για $i = 5$, $y_{-5} = 0.5$, $y_{-5} \times 2 = 0 + 1$ για $d_{-5} = 1$,
και άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι 0.10011_2 □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.9

Απόδειξη: Έστω ότι ϵ_1 και ϵ_2 είναι τα σφάλματα των στρογγυλοποιήσεων των αριθμών a και b αντίστοιχα, τότε ισχύει $|\epsilon_1| \leq \frac{1}{2}10^{-3}$ και $|\epsilon_2| \leq \frac{1}{2}10^{-3}$. Αν ϵ είναι το σφάλμα του αθροίσματος $a+b$ έχουμε

$$|\epsilon| \leq |\epsilon_1| + |\epsilon_2| \leq \frac{1}{2}10^{-3} + \frac{1}{2}10^{-3} = 0.0055.$$

Εαν το σχετικό σφάλμα του $\frac{a}{b}$ είναι ϵ_r και των a και b, ϵ_{r1} και ϵ_{r2} αντίστοιχα έχουμε

$$|\epsilon_r| \simeq |\epsilon_{r1}| + |\epsilon_{r2}| = \frac{|\epsilon_1|}{a} + \frac{|\epsilon_2|}{b} = \frac{\frac{1}{2}10^{-3}}{0.731} + \frac{\frac{1}{2}10^{-3}}{0.9.12} = 0.0012321.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.10

Απόδειξη: Έχουμε στη πρώτη περίπτωση

$$\sqrt{708} - \sqrt{707} = 26.61 - 26.59 = 0.02.$$

Χρησιμοποιώντας έξι σημαντικά ψηφία παίρνουμε

$$\sqrt{708} - \sqrt{707} = 26.6083 - 26.5895 = 0.0188,$$

και χρησιμοποιώντας οκτώ

$$\sqrt{708} - \sqrt{707} = 26.608269 - 26.589471 = 0.0187977$$

Παρατηρούμε ότι επειδή αφαιρούμε δύο σχεδόν ίσους αριθμούς στη περίπτωση που χρησιμοποιούμε μόνο τέσσερα σημαντικά ψηφία το σφάλμα της διαφοράς των δύο αριθμών μικρότερο ή ίσο με $.5 \times 10^{-2} + .5 \times 10^{-2} = 0.01$ ενώ το αποτέλεσμα είναι του ίδιου μεγέθους 0.02 και άρα ανακριβές. Χρειάζονται περισσότερα σημαντικά ψηφία ή μια αναδιάταξη της παράστασης έτσι ώστε να αποφεύγεται η αφαίρεση δύο σχεδόν ίσων αριθμών για πιο ακριβές αποτέλεσμα. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.11

Απόδειξη: Θέλουμε να βρούμε ένα εναλλακτικό τύπο για τον υπολογισμό της παράστασης $\sqrt{708}-\sqrt{707}$. Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση και έχουμε

$$
\begin{aligned}
\sqrt{708}-\sqrt{707} &= \sqrt{708}-\sqrt{707}\frac{\sqrt{708}+\sqrt{707}}{\sqrt{708}+\sqrt{707}} = \frac{1}{\sqrt{708}+\sqrt{707}} \\
&= \frac{1}{26.61+26.59} = \frac{1}{53.20} = 0.0188
\end{aligned}
$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.12

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Σελίδα 78 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Θέλουμε να βρούμε ένα εναλλακτικό τύπο για τον υπολογισμό της παράστασης $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την συζυγή παράσταση του αριθμητή και έχουμε

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-b-\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Επομένως χρησιμοποιώντας τη σχέση $x_1 = \frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$ αποφεύγεται η αφαίρεση δύο σχεδόν ίσων αριθμών και η εμφάνιση μεγάλου σφάλματος.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.13

Υπόδειξη: Δείξτε και κατόπιν χρησιμοποιείστε τη σχέση $|x_n - r| = |F(x_{n-1}) - F(r)| \leq |x_{n-1} - r|$.
□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.1

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τη μέθοδο της διχοτόμησης κατασκευάζοντας μια ακολουθία διαστημάτων $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots$ με $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ που περιέχουν τα σημεία $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ τα οποία συγκλίνουν στη ρίζα της εξίσωσης. Η σχέση που μας δίνει το σφάλμα της μεθόδου καθορίζει και τον αριθμό των επαναλήψεων. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.2

Υπόδειξη: Γράψτε ισοδύναμα την εξίσωση στη μορφή $x = \pm\sqrt{2x+3}$ $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.3

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την επαναληπτική διαδικασία $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, για $f(x) = 3\sin(x) + 4x - 5$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.4

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο της τέμνουσας σύμφωνα με την οποία $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$ για $f(x) = x^3 - 8$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.5

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την επαναληπτική διαδικασία $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, για $f(x) = x^2 - 12$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.6

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τη μέθοδο της διχοτόμησης κατασκευάζοντας μια ακολουθία διαστημάτων $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots$ με $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ που περιέχουν τα σημεία $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ τα οποία συγκλίνουν στη ρίζα της εξίσωσης. Η σχέση που μας δίνει το σφάλμα της μεθόδου καθορίζει και τον αριθμό των επαναλήψεων. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.7

Υπόδειξη: Δείξτε ότι $f(0)f(1) \leq 0$ και εξετάστε τη μονοτονία της f για να δείξετε ότι έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$. Στη συνέχεια χρησιμοποιείστε την επαναληπτική διαδικασία $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, για $f(x) = x^5 - 5x + 1$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.8

Υπόδειξη: Εξετάστε αν κατά πόσο ισχύει η σχέση $g'(x) < 1$ στο $[1, 2]$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.9

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το θεώρημα του Rolle □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.10

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τη μέθοδο Newton - Rampshon για την εξίσωση $f(x) = x^2 - Q = 0$.
$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.11

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τη γενική επαναληπτική μέθοδο $x_{n+1} = g(x_n)$, για $g(x) = \frac{20}{x^2+2x+10}$.
□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.12

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τη μέθοδο Newton - Rampson $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ για $f(x) = x - e^{-x}$.
□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.13

Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε τη σχέση $f(r) = f(x_{n-1}) + (r - x_{n-1})f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2}(r - x_{n-1})^2 f''(\xi)$, σε συνδυασμό με αυτή της μεθόδου Newton - Rampson. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.14

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 93 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την επαναληπτική μέθοδο της τέμνουσας

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.15

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την επαναληπτική μέθοδο της τέμνουσας

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.16

Απόδειξη: Έχουμε

$$|F(x) - F(y)| = |F'(\xi)(x-y)| \leq L|x-y|,$$

για σημεία x και y κοντά στο r. Θα μπορούσαμε να είχαμε δεχθεί αυτή τη συνθήκη του Lipschitz που αρκεί αντί για τη πιο περιοριστική συνθήκη για την $F'(x)$. Επειδή

$$|x_n - r| = |F(x_{n-1}) - F(r)| \leq |x_{n-1} - r|,$$

και $L < 1$ κάθε προσέγγιση είναι τόσο καλή όσο και η προηγούμενη. Συνεπώς όλες οι προσεγγίσεις είναι σημεία του I. Εφαρμόζοντας τη τελευταία ανισότητα n φορές έχουμε

$$|x_n - r| \leq L^n |x_0 - r|$$

και επειδή $L < 1$, $\lim_{n\to\infty} x_n = r$.

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.1

Απόδειξη: Έχουμε $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$, $a = 1$, $b = 2$. Θα εξετάσουμε αν υπάρχει ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$

$$f(1) \cdot f(2) = (-4) \cdot (3) = -12 < 0.$$

Άρα υπάρχει ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$, οπότε διχοτομούμε αυτό το διάστημα

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5.$$

Θα εξετάσουμε αν υπάρχει ρίζα στο διάστημα $[1, 1.5]$. Έχουμε

$$f(1) \cdot f(1.5) = (-4) \cdot (-1.875) > 0.$$

Άρα δεν υπάρχει ρίζα στο διάστημα $[1, 1.5]$ και υπάρχει ρίζα στο διάστημα $[1.5, 2]$ το οποίο διχοτομούμε θέτοντας

$$x_1 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75.$$

Θα εξετάσουμε αν υπάρχει ρίζα στο διάστημα $[1.5, 1.75]$. Έχουμε

$$f(1.5) \cdot f(1.75) = (-1.875) \cdot (0.171875) < 0.$$

Άρα υπάρχει ρίζα στο διάστημα $[1.5, 1.75]$ το οποίο διχοτομούμε θέτοντας

$$x_2 = \frac{1.5+1.75}{2} = 1.625.$$

Επομένως η προσέγγιση της ρίζας στην 3^{η} επανάληψη είναι $\rho = 1.625$

Θέλουμε να βρούμε πόσες επαναλήψεις θα χρειαστούν ώστε η προσεγγιστική ρίζα να έχει ανοχή $\epsilon = 10^{-6}$. Από τη σχέση $b - a \leq \epsilon 2^N$ και για $\epsilon = 10^{-6}$, $a = 1$, $b = 2$, $a = 6$, έχουμε $N \geq \frac{\log(b-a)}{\log 2 - a}$ ή $N \geq \frac{\log(2-1)}{\log 2 - 6} = 19.931568$. Άρα στην 20^{η} επανάληψη θα καταλήξουμε στη προσεγγιστική ρίζα που έχει ανοχή $\epsilon = 10^{-6}$. Η ρίζα αυτή είναι $\rho = 1.732051$.

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.2

Απόδειξη: Γράφουμε την $f(x) = 0$ στη μορφή $x = g(x)$ όπου $g(x) = \pm\sqrt{2x+3}$.

Έχουμε $|g'(x)| = \left| \pm \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \right| < 1$, για κάθε $x \in [0,4]$. Επομένως έχουμε την επαναληπτική σχέση $x_n = \sqrt{2x_{n-1}+3}$ (θέλουμε το x_n πάντα θετικό) και παίρνουμε διαδοχικά :

$x_0 = 4$
$x_1 = 3.316$
$x_2 = 3.104$
$x_3 = 3.011$
$x_4 = 3.004$
$\vdots$
$x_n = 3.$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.3

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 99 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έχουμε $f(x) = 3\sin(x) + 4x - 5$ και $f'(x) = 3\cos(x) + 4$, άρα η επαναληπτική διαδικασία σύμφωνα με τη μέθοδο Newton - Ramphson είναι

$$x_n = x_{n-1} - \frac{3\sin(x_{n-1}) + 4x_{n-1} - 5}{3\cos(x_{n-1}) + 4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Για $n = 1$ έχουμε

$$x_1 = x_0 - \frac{3\sin(x_0) + 4x_0 - 5}{3\cos(x_0) + 4} = 1.0 - \frac{1.524413}{5.620907} = 0.7287959$$

και $|x_1 - x_0| = 0.2712041 > \epsilon$.

Για $n = 2$ έχουμε

$$x_2 = x_1 - \frac{3\sin(x_1) + 4x_1 - 5}{3\cos(x_1) + 4} = 0.7287959 - \frac{0.0869007}{6.23793} = 0.7427269$$

και $|x_2 - x_1| = 0.013931 > \epsilon$.

Για $n = 3$ έχουμε

$$x_3 = x_2 - \frac{3\sin(x_2) + 4x_2 - 5}{3\cos(x_2) + 4} = 0.7427269 - \frac{0.000194549}{6.209882} = 0.7427583$$

και $|x_3 - x_2| = 0.000031352 < \epsilon = 10^{-4}$.

Άρα η προσέγγιση της ρίζας, με ανοχή $\epsilon = 10^{-4}$, είναι $x_3 = 0.7427583$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.4

Απόδειξη: Έχουμε $f(x) = x^3 - 8$ άρα η επαναληπτική διαδικασία σύμφωνα με τη μέθοδο της τέμνουσας είναι

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{(x_n^3 - 8) - (x_{n-1}^3 - 8)}(x_n^3 - 8), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ή

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 8}{x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Για $n = 1$ έχουμε

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 8}{x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2} = 1.793651\,,$$

και $|x_2 - x_1| = 0.2936509 > \epsilon$.

Για $n = 2$ έχουμε

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 8}{x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2} = 2.066952$$

και $|x_3 - x_2| = 0.2733011 > \epsilon$.

Για $n = 3$ έχουμε

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^3 - 8}{x_3^2 + x_3 x_2 + x_2^2} = 1.992769$$

και $|x_4 - x_3| = 0.0741832 > \epsilon$.

Για $n = 4$ έχουμε

$$x_5 = x_4 - \frac{x_4^3 - 8}{x_4^2 + x_4 x_3 + x_3^2} = 1.999763$$

και $|x_5 - x_4| = 0.00699389 < \epsilon = 0.02$.

Άρα η προσέγγιση της ρίζας με ανοχή $\epsilon = 0.02$ είναι $x_5 = 1.999763$.

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.5

Απόδειξη: Έστω $f(x) = x^2 - 12$. Θέλουμε να βρεθεί η προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 12 = 0$ με αρχική προσέγγιση $x_0 = 3$ και κριτήριο διακοπής $\epsilon = 0.01$. Θέτουμε $f(x) = x^2 - 12$ και έχουμε $f'(x) = 2x$. Άρα η μέθοδος Newton-Raphson έχει τη μορφή

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-1}^2) - 12}{2x_{n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Για $n = 1$ έχουμε

$$x_1 = x_0 - \frac{(x_0^2) - 12}{2x_0} = 3 - \frac{3^2 - 12}{2 \cdot 3} = 3.5,$$

$x_1 = 3$ και $|x_1 - x_0| = 0.5 > \epsilon$. Για $n = 2$ έχουμε

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1^2) - 12}{2x_1} = 3.5 - \frac{(3.5)^2 - 12}{2 \cdot 3.5} = 3.464,$$

$x_2 = 3.464$ και $|x_2 - x_1| = 0.036 < \epsilon$. Άρα η προσεγγιστική τιμή της $\sqrt{12}$ με τη μέθοδο Newton-Raphson με αρχικό σημείο $x_0 = 3$ και κριτήριο διακοπής $\epsilon = 0.01$ είναι $x_2 = 3.464$. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.6

Απόδειξη: Η συνάρτηση $f(x) = x - \cos^2(x)$ είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, δηλαδή το $\mathbb{R}$ και $f(0) = -1 < 0$ ενώ $f(\pi/4) = 0.285 > 0$. Συνεπώς από το θεώρημα Rolle θα υπάρχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{4})$.

Επιπλέον έχουμε ότι $f'(x) = 1 + 2\cos(x)\sin(x) = 1 + \sin(2x) > 0$ στο $[0, \frac{\pi}{4}]$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και κατά συνέπεια η ρίζα είναι μοναδική.

Στη συνέχεια προσεγγίζουμε τη ρίζα με τη μέθοδο της διχοτόμησης. Έχουμε
$a_0 = 0$, $b_0 = \frac{\pi}{4}$, $f(a_0) = -1$, $f(b_0) = 0.285$ και

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 0.393, \quad f(x_1) = -0.461.$$

$a_1 = x_1$, $b_1 = b_0$, $f(a_1) = -0.461$, $f(b_1) = 0.285$ και

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 0.589, \quad f(x_1) = -0.102.$$

$a_2 = x_2$, $b_2 = b_1$, $f(a_2) = -0.102$, $f(b_2) = 0.285$ και

$$x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 0.687, \quad f(x_3) = 0.09.$$

$a_3 = a_2$, $b_3 = x_3$, $f(a_3) = -0.102$, $f(b_2) = 0.09$ και

$$x_4 = \frac{a_3 + b_3}{2} = 0.638, \quad f(x_3) = -0.007.$$

Άρα η προσεγγιστική ρίζα είναι $x_4 = 0.638$.

Για να έχουμε ακρίβεια $\epsilon = 0.01$ απαιτείται ένας ελάχιστος αριθμός επαναλήψεων N

$$N \geq \frac{\ln(b-a) - \ln(\epsilon)}{\ln(2)}.$$

Για $a = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$, $\epsilon = 0.01$ έχουμε $N \geq 6.295$, δηλαδή $N \geq 7$.

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.7

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 104 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Η συνάρτηση $f(x) = x^5 - 5x + 1$ είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, δηλαδή το $\mathbb{R}$ και $f(0) = 1 > 0$ ενώ $f(1) = -3 < 0$. Συνεπώς από το θεώρημα Rolle θα υπάρχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$.

Έχουμε $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x-1)(x+1)(x^2+1) < 0$ στο $[0, 1]$. Επομένως η φ είναι γνησίως φθίνουσα και κατά συνέπεια η ρίζα είναι μοναδική.

Για την επιλογή του σημείου αφετηρίας, αφενός βρίσκουμε τη μονοτονία της συνάρτησης και αφετέρου μελετάμε τα κοίλα της συνάρτησης. Έχουμε $f''(x) = 20x^3 > 0$ στο $(0, 1)$, άρα η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ενώ έχουμε αποδείξει ότι είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως επιλέγουμε ως $x_0 = 0$.

Για $n = 1$ έχουμε

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^5 - 5x_0 + 1}{5x_0^4 - 5} = \frac{1}{5}.$$

Για $n = 2$ έχουμε

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1^5 - 5x_1 + 1}{5x_1^4 - 5} = 0.2.$$

Για $n = 3$ έχουμε

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = x_2 - \frac{x_2^5 - 5x_2 + 1}{5x_2^4 - 5} = 0.20006.$$

Άρα η προσέγγιση είναι $x_3 = 0.20006$.

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.8

Απόδειξη: Για να εξασφαλίσουμε σύγκλιση των επαναληπτικών μεθόδων για κάθε $x \in [1,2]$ πρέπει να ισχύει, για την γενική επαναληπτική μέθοδο $x_{n+1} = g(x_n)$,
$g'(x) \le c$ με $0 \le c < 1$.

Για την $x_{n+1} = g_1(x_n) = \frac{e^{x_n}-1}{2}$ έχουμε $|g_1'(x)| = \frac{e^x}{2} \ge \frac{e}{2} > 1$ για $x \in [1,2]$. Άρα η $|g_1'(x)|$ δεν είναι μικρότερη του 1 για κάθε $x \in [1,2]$ και δεν εξασφαλίζεται η σύγκλιση της μεθόδου.

Για την $x_{n+1} = g_2(x_n) = \ln(1+2x_n)$ έχουμε $|g_2'(x)| = \frac{2}{1+2x} \le \frac{2}{5} < 1$. Άρα η $|g_2'(x)|$ είναι μικρότερη του 1 για κάθε $x \in [1,2]$ και εξασφαλίζεται η σύγκλιση της μεθόδου. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.9

Απόδειξη: Θα Χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Rolle. Υπολογίζουμε πρώτα τις τιμές της $f(x) = e^x - 1 - 2x$ στα άκρα του διαστήματος $[1, 2]$

$$f(1) = e^1 - 1 - 2 \cdot 1 = e^1 - 3 < 0,$$
$$f(2) = e^2 - 1 - 2 \cdot 2 = e^2 - 5 > 0.$$

Άρα απο το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$.

Επιπλέον $f'(x) = e^x - 2 > 0$, και $f(x) \neq 0$, στο διάστημα $[1, 2]$. Άρα η ρίζα είναι μοναδική.

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.10

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 107 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έχουμε ότι η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού Q αποτελεί ρίζα της εξίσωσης $x^2 - Q = 0$. Εάν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - Q$, μπορούμε να αναζητήσουμε τις ρίζες της $f(x) = 0$, εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton - Rampshon. Είναι $f'(x) = 2x$ και η μέθοδος Newton - Rampshon στη συγκεκριμένη περίπτωση θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - Q}{2x_n} \\ &= \frac{2x_n^2 - x_n^2 + Q}{2x_n} = \frac{x_n^2 + Q}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2 + Q}{x_n}\right) \end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.11

Απόδειξη: Η αρχική εξίσωση έχει τη μορφή $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$. Τη γράφουμε στη μορφή $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ ή $x(x^2 + 2x + 10) = 20$ και ισοδύναμα στη μορφή $x = \frac{20}{x^2+2x+10}$. Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι το σταθερό σημείο της συνάρτησης $g(x) = \frac{20}{x^2+2x+10}$, όπου $g(x) = x$. Η επαναληπτική μέθοδος θα έχει τη μορφή $x_{n+1} = g(x_n)$. Παίρνοντας σαν αρχική προσέγγιση το σημείο $x_0 = 1$ έχουμε τις διαδοχικές προσεγγίσεις :

x_0	1
x_1	1.53846153846154
x_2	1.29501915708812
x_3	1.40182530944860
x_4	1.35420939040429
x_5	1.37529809248738
x_6	1.36592978817065
x_7	1.37008600340182
x_8	1.36824102361284
x_9	1.36905981200748
x_{10}	1.36869639755552
x_{11}	1.36885768862873
x_{12}	1.36878610257799
x_{13}	1.36881787439609
x_{14}	1.36880377314363
x_{15}	1.36881003167509
x_{16}	1.36880725396078
x_{17}	1.36880848678893
x_{18}	1.36880793962484

Βλέπουμε ότι η μέθοδος συγκλίνει ικανοποιώντας το κριτήριο διακοπής $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$

στη 18η επανάληψη, στη λύση της εξίσωσης $x \simeq 1.368807939$.

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.12

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Newton - Rampson η οποία στη προκειμένη περίπτωση για $f(x) = x - e^{-x}$ θα έχει τη μορφή

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}}.$$

Παίρνοντας αρχική τιμή $x_0 = 1$ έχουμε

x_0	1
x_1	0.53788284273999
x_2	0.56698699140541
x_3	0.56714328598912
x_4	0.56714329040978

Βλέπουμε ότι η μέθοδος συγκλίνει, ικανοποιώντας το κριτήριο διακοπής $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$

στη 4η επανάληψη, στη λύση της εξίσωσης $x \simeq 0.56714329040978$. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.13

Απόδειξη: Εάν r είναι η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ τότε έχουμε

$$f(r) = f(x_{n-1}) + (r - x_{n-1})f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2}(r - x_{n-1})^2 f''(\xi),$$

για κάποιο ξ μεταξύ των r και ,x_{n-1}. Επιπλέον, απο τη μορφή της επαναληπτικής μεθόδου Newton - Rampson, $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, έχουμε ότι

$$0 = f(x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1})f'(x_{n-1}).$$

Από αυτές τις δύο σχέσεις προκύπτει αφαιρώντας τες ότι

$$0 = (r - x_n)f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2}(r - x_{n-1})^2 f''(\xi),$$

ή θέτοντας $e_n = r - x_n$

$$0 = e_n f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2}e_{n-1}^2 f''(\xi),$$

από την οποία, θέτωντας αντί των x_{n-1}, ξ τη τιμή r δεδομένου ότι η μέθοδος συγκλίνει ($x_n \to r$, $n \to \infty$), προκύπτει η ζητούμενη σχέση

$$e_n = \simeq -\frac{f''(r)}{2f'(r)}e_{n-1}^2,$$

η οποία επιβεβαιώνει τη τετραγωνική ($e_n \propto e_{n-1}^2$) σύγκλιση της μεθόδου.

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.14

Απόδειξη: Έχουμε $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, όποτε ο επαναληπτικός τύπος στη περίπτωση αυτή γίνεται

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Παίρνοντας $x_0 = 1$ και $x_1 = 3$ έχουμε τις διαδοχικές προσεγγίσεις

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 1, \quad x_4 = 1.$$

Βλέπουμε ότι η μέθοδος συγκλίνει πολύ γρήγορα, στη 2η επανάληψη στη λύση της εξίσωσης $x = 1$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.15

Απόδειξη: Έχουμε $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, όποτε ο επαναληπτικός τύπος στη περίπτωση αυτή γίνεται

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Παίρνοντας $x_0 = 0$ και $x_1 = 1$ έχουμε τις διαδοχικές προσεγγίσεις

x_0	0
x_1	1
x_2	0.3333
x_3	0.4706
x_4	0.5594
x_5	0.5426
x_6	0.5437
x_7	0.5437

Βλέπουμε ότι η μέθοδος συγκλίνει, ικανοποιώντας το κριτήριο διακοπής $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$

στη 5η επανάληψη, στη λύση της εξίσωσης $x \simeq 0.5437$. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.16

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 114 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Μετατρέψτε το σύστημα σε ένα ισοδύναμο σύστημα της μορφής $A'x = b'$ όπου ο πίνακας A' είναι άνω τριγωνικός το οποίο μπορείτε να το λύσετε με τη μέθοδο της πίσω αντικατάστασης. Απαλείψτε αρχικά το x από τις εξισώσεις E_2 και E_3 μετά το y απο E_3 κτλ. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.1

Υπόδειξη: Αλλάξτε τη σειρά των εξισώσεων και των αγνώστων έτσι ώστε ο μεγαλύτερος κατά απόλυτη τιμή συντελεστής του πίνακα του συστήματος A να μεταφερθεί στη θέση a_{11} (οδήγηση). Κατόπιν μετατρέψτε το σύστημα σε ένα ισοδύναμο σύστημα της μορφής $A'x = b'$ όπου ο πίνακας A' είναι άνω τριγωνικός, χρησιμοποιώντας οδήγηση σε κάθε βήμα. Το σύστημα που προκύπτει μπορείτε να το λύσετε με τη μέθοδο της πίσω αντικατάστασης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.2

Υπόδειξη: Μετατρέψτε το σύστημα $Ax = b$, χρησιμοποιώντας το πίνακα $[A|b]$, σε ένα ισοδύναμο σύστημα της μορφής $A'x = b'$ όπου ο πίνακας A' είναι άνω τριγωνικός το οποίο μπορείτε να το λύσετε με τη μέθοδο της πίσω αντικατάστασης. Απαλείψτε αρχικά το x από τις εξισώσεις E_2 και E_3 μετά το y απο E_3 κτλ. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.3

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss για να λύσετε το σύστημα $AA^{-1} = I$ με $A^{-1} = \{x_{ij}\}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.4

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss για να λύσετε το σύστημα $AA^{-1} = I$ με $A^{-1} = \{x_{ij}\}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.5

Υπόδειξη: Μετατρέψτε το σύστημα σε ένα ισοδύναμο σύστημα της μορφής $A'x = b'$ όπου ο πίνακας A' είναι άνω τριγωνικός το οποίο μπορείτε να το λύσετε με τη μέθοδο της πίσω αντικατάστασης. Απολείψτε αρχικά το x από τις εξισώσεις E_2 και E_3 μετά το y από E_3 κτλ. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.6

Υπόδειξη: Υποθέστε ότι ο B δεν είναι αντιστρέψιμος και ότι υπάρχει $x \neq 0$ με $Bx = 0$, και καταλήξτε σε άτοπο χρησιμοποιώντας τη σχέση $\|A - B\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.7

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον ορισμό της νόρμας $\|\cdot\|$ και τη τριγωνική ανισότητα. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.8

Υπόδειξη: Υποθέστε ότι ο $I_n - A$ δεν είναι αντιστρέψιμος και ότι υπάρχει $x \neq 0$ με $(I_n - A)x = 0$, και καταλήξτε σε άτοπο. Στη συνέχεια δείξτε αρχικά ότι $\|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$ και κατόπιν ότι $\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\|$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.9

Υπόδειξη: Εξετάστε αν $\|B\|_\infty < 1$ και στη συνέχεια προσδιορίστε άνα σύστημα της μορφής $Ax = b$ έτσι ώστε η επαναληπτική μέθοδος να συγκλίνει στη λύση του. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.10

Υπόδειξη: Μετατρέψτε το σύστημα σε ένα ισοδύναμο σύστημα της μορφής $A'x = b'$ όπου ο πίνακας A' είναι άνω τριγωνικός, χρησιμοποιώντας οδήγηση σε κάθε βήμα, το οποίο μπορείτε να το λύσετε με τη μέθοδο της πίσω αντικατάστασης. Απαλείψτε αρχικά το x από τις εξισώσεις E_2 και E_3 μετά το y απο E_3 κτλ. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.11

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 125 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss για να λύσετε το σύστημα $AA^{-1} = I$ με $A^{-1} = \{x_{ij}\}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.12

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε του ορισμούς για τις νόρμες $\|x\|_\infty$, $\|x\|_1$ $\|x\|_2$ ενός διανύσματος. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.13

Υπόδειξη: Μετατρέψτε το σύστημα σε ένα ισοδύναμο σύστημα της μορφής $A'x = b'$ όπου ο πίνακας A' είναι άνω τριγωνικός, χρησιμοποιώντας οδήγηση σε κάθε βήμα, το οποίο μπορείτε να το λύσετε με τη μέθοδο της πίσω αντικατάστασης. Απαλείψτε αρχικά το x από τις εξισώσεις E_2 και E_3 μετά το y από E_3 κτλ. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.14

Υπόδειξη: Μετατρέψτε το σύστημα σε ένα ισοδύναμο σύστημα της μορφής $A'x = 0$ όπου ο πίνακας A' είναι άνω τριγωνικός, χρησιμοποιώντας οδήγηση σε κάθε βήμα, το οποίο μπορείτε να το λύσετε με τη μέθοδο της πίσω αντικατάστασης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.15

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον ορισμό του δείκτη κατάστασης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.16

Υπόδειξη: Για ένα σύστημα $Ax = b$ η επαναληπτική μέθοδος Gauss - Seidel έχει τη μορφή

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i}^{n} a_{ij}x_j^k - \sum_{j>1}^{n} a_{ij}x_j^{k-1}\right), \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots,$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.17

Υπόδειξη: Η επαναληπτική μέθοδος Jacobi, για τη λύση ενός γραμμικού συστήματος $Ax = b$, έχει τη μορφή

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{k-1}\right), \quad j \neq i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.18

Υπόδειξη: Η επαναληπτική μέθοδος Jacobi, για τη λύση ενός γραμμικού συστήματος $Ax = b$, έχει τη μορφή

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{k-1}\right), \quad j \neq i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.19

Υπόδειξη: Για ένα σύστημα $Ax = b$ η επαναληπτική μέθοδος Gauss - Seidel έχει τη μορφή

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i}^{n} a_{ij}x_j^k - \sum_{j>1}^{n} a_{ij}x_j^{k-1}\right), \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots,$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.20

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 134 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Διαπιστώστε ότι ο πίνακας του συστήματος A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος και κατόπιν παραγοντοποιήστε τον στη μορφή $A = LL^T$ όπου L κάτω τριγωνικός. Τέλος λύστε τα συστήματα $Ly = b$ και $L^T x = y$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.21

Υπόδειξη: Αν A είναι ο πίνακας του συστήματος βρείτε πίνακες L κάτω τριγωνικό και U άνω τριγωνικό έτσι ώστε $LU = A$ κατόπιν λύστε διαδοχικά τα συστήματα $Lv = b$ και $UX = v$, όπου $X = [x, y, x]^T$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.22

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 136 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Υπόδειξη: Υπολογίστε το δείκτη κατάστασης $k(A)$ και εξετάστε αν είναι πολύ μεγάλος η όχι σε σχέση με τη μονάδα. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.23

Υπόδειξη: Επειδή ο A είναι συμμετρικός χρησιμοποιείστε τη σχέση $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.24

Απόδειξη: Απαλείφουμε αρχικά το x από τις εξισώσεις E_2 και E_3. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση E_1 με $\frac{2}{5}$ και την προσθέτουμε στην εξίσωση E_2. Όμοια αντικαθιστούμε την E_3 με την εξίσωση $E_1 \times (-\frac{3}{5}) + E_3$.

$$\begin{array}{rcl} E_1 : \quad 5x - 2y + 3z & = & -2 \\ E_2 : \quad y + z & = & 1 \\ E_3 : \quad 31y + 21z & = & 51 \end{array}$$

Στη συνέχεια απαλείφουμε το y από την E_3 αντικαθιστώντας την E_3 με την $E_2 \times (-31) + E_3$.

$$\begin{array}{rcl} E_1 : \quad 5x - 2y + 3z & = & -2 \\ E_2 : \quad y + z & = & 1 \\ E_3 : \quad -10z & = & 20 \end{array}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι τριγωνοποιημένο και προκύπτει από την E_3 ότι $z = -2$. Κατόπιν από την E_2 έχουμε ότι $y = 3$. Τέλος στη συνέχεια παίρνουμε από E_1 ότι $x = 2$.

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.1

Απόδειξη: Ο μεγαλύτερος συντελεστής στο σύστημα είναι 6. Αλλάζουμε τη σειρά των εξισώσεων και των αγνώστων του συστήματος καθιστώντας το 6 πρώτο οδηγό στοιχείο.

$$\begin{aligned} E_1 : \quad 6y + 5x - z &= 2 \\ E_2 : \quad -2y + x - 3z &= 10 \\ E_3 : \quad -y + x - z &= 6 \end{aligned}$$

Απαλείφουμε αρχικά το y από τις εξισώσεις E_2 και E_3. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση E_1 με $\frac{2}{6}$ και την προσθέτουμε στην εξίσωση E_2. Όμοια αντικαθιστούμε την E_3 με την εξίσωση $E_1 \times (\frac{1}{6}) + E_3$.

$$\begin{aligned} E_1 : \quad 6y + 5x - z &= 2 \\ E_2 : \quad 8x - 10z &= 32 \\ E_3 : \quad 11x - 7z &= 38 \end{aligned}$$

Ο μεγαλύτερος σε απόλυτη τιμή συντελεστής του συστήματος στις E_2 και E_3 είναι ο 11. Αναδιατάσσοντας κατάλληλα τις εξισώσεις καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{aligned} E_1 : \quad 6y + 5x &= 2 \\ E_2 : \quad 11x - 7z &= 38 \\ E_3 : \quad 8x - 10z &= 32 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια απαλείφουμε το y απο την E_3 αντικαθιστώντας την E_3 με την $E_2 \times (-\frac{8}{11}) + E_3$.

$$\begin{aligned} E_1 : \quad 6y + 5x - z = 2 & \\ E_2 : \quad 11x - 7z &= 38 \\ E_3 : \quad -9z &= 32 \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι τριγωνοποιημένο και προκύπτει από την E_3 ότι $z = -\frac{8}{9}$. Κατόπιν από την E_2 έχουμε ότι $x = \frac{26}{9}$. Τέλος στη συνέχεια παίρνουμε από E_1 ότι $y = -\frac{20}{9}$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.2

Απόδειξη: Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Ο μεγαλύτερος συντελεστής στο σύστημα είναι 4 και είναι ήδη οδηγό στοιχείο. Εάν $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ είναι οι γραμμές του πίνακα αντικαθιστούμε την Γ_2 με $\Gamma_1 \times (-\frac{2}{4}) + \Gamma_1$. Το σύστημα γίνεται

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1.5 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την Γ_3 με $\Gamma_1 \times (-\frac{1}{4}) + \Gamma_3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1.5 & 0 & -3 \\ 0 & 0.75 & 1 & -0.5 \end{array}\right]$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την Γ_3 με $\Gamma_2 \times (\frac{1}{2}) + \Gamma_3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1.5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Από τη τρίτη γραμμή παίρνουμε $z = -2$, από τη δεύτερη $y = 2$ και από τη πρώτη $x = 1$.

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.3

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 142 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έχουμε $\det A = 4 \neq 0$ και υπάρχει ο αντίστροφος $A^{-1} = \{x_{i,j}\}$. Έχουμε

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{i,j} \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{aligned} 3x_{1,j} + x_{2,j} - x_{3,j} &= \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ x_{1,j} + 2x_{2,j} - x_{3,j} &= \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ x_{1,j} + x_{2,j} - x_{3,j} &= \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{aligned}$$

Απαλείφουμε το $x_{1,j}$ από τις δύο τελευταίες γραμμές και παίρνουμε

$$\begin{aligned} 3x_{1,j} + x_{2,j} - x_{3,j} &= \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \frac{5}{3}x_{2,j} + \frac{2}{3}x_{3,j} &= \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ \frac{2}{3}x_{2,j} + \frac{4}{3}x_{3,j} &= \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad 1 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια απαλείφουμε το $x_{2,j}$ από τη τελευταία γραμμή και έχουμε

$$\begin{aligned} 3x_{1,j} + x_{2,j} - x_{3,j} &= \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \frac{5}{3}x_{2,j} + \frac{2}{3}x_{3,j} &= \quad -\frac{1}{3} \quad 1 \quad 0 \\ \frac{4}{5}x_{3,j} &= \quad -\frac{1}{5} \quad -\frac{2}{5} \quad 1 \end{aligned}$$

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 143 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Από τα συστήματα αυτά με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\begin{array}{ccc} x_{11} = \frac{1}{4} & x_{12} = -\frac{1}{2} & x_{13} = \frac{3}{4} \\ x_{21} = 0 & x_{22} = 1 & x_{23} = -1 \\ x_{31} = -\frac{1}{4} & x_{32} = -\frac{1}{2} & x_{33} = \frac{5}{4} \end{array}$$

Άρα

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.4

Απόδειξη: Έχουμε $\det A = 5 \neq 0$ και υπάρχει ο αντίστροφος $A^{-1} = \{x_{i,j}\}$. Έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Απαλείφουμε από τη δεύτερη γραμμή το 3 και από τη τρίτη το 1 οπότε παίρνουμε τον ισοδύναμο πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Απαλείφουμε απο τη τρίτη γραμμή το 1 και έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right].$$

Άρα τελικά έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \left[x_{i,j}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύνοντας τα συστήματα που προκύπτουν παίρνουμε

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.5

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έχουμε

$$\begin{aligned} E_1: \quad 2x+3y+5z &= 0 \\ E_2: \quad x-4y+3z &= 1 \\ E_3: \quad -x-7y-2z &= 1 \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε την εξίσωση E_2 με την $E_2 - (\frac{1}{2})E_1$ και την E_3 με την $E_3 + (\frac{1}{2})E_1$ και παίρνουμε

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 5 & | & 0 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} & | & 1 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} & | & 1 \end{array}\right]$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την εξίσωση E_3 με την $E_3 - E_2$ και παίρνουμε

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 5 & | & 0 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right].$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι καταλήξαμε σε απροσδιοριστία (0=0). Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε $z = \lambda$ και βρίσκουμε με προς τα πίσω αντικατάσταση $y = -\frac{2}{11} + \frac{\lambda}{11}$ και $x = \frac{3}{11} - \frac{29\lambda}{11}$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.6

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έστω ότι ο B είναι μη αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ με $x \neq 0$ τέτοιος ώστε $Bx = 0$, άρα $Ax - Bx = Ax$ και $x = A^{-1}(A - B)x$. Επομένως

$$||x|| = ||A^{-1}(A - B)x|| \leq ||A^{-1}||||A - B||||x||$$

ή

$$1 \leq ||A^{-1}||||A - B||$$

και συνεπώς

$$\frac{1}{||A^{-1}||} \leq ||A - B||,$$

και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα ο B είναι αντιστρέψιμος.

Εάν ο B δεν είναι αντιστρέψιμος είδαμε οτι ισχύει

$$\frac{1}{||A^{-1}||} \leq ||A - B||$$

και επειδή $||A|| \neq 0$ έχουμε

$$\frac{1}{||A||||A^{-1}||} \leq \frac{||A - B||}{||A||},$$

άρα και

$$\frac{1}{k(A)} \leq \frac{||A - B||}{||A||},$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.7

Απόδειξη: Έχουμε

(α) $||x||_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |x_i| \leq \sum_{i=1}^n (\max|x_i|) \cdot |x_i|$
$= (\max|x_i|)_{1\leq i\leq n} \sum_{i=1}^n |x_i| = ||x||_1 ||x||_\infty$ (β) $||x|| = ||x+y-y|| \leq ||x-y|| + ||y||$ και άρα $||x|| - ||y|| \leq ||x-y||$. Όμοια δείχνουμε ότι $||y|| - ||x|| \leq ||x-y||$, και τελικά $\big| ||x|| - ||y|| \big| \leq ||x-y||$.

(γ) $||y|| = ||\frac{x}{||x||}|| = ||\frac{1}{||x||}x|| = \frac{1}{||x||}||x|| = \frac{1}{||x||}||x|| = 1$.

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.8

Απόδειξη: Έστω ότι ο πίνακας $I_n - A$ είναι μη αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ με $x \neq 0$ τέτοιο ώστε $(I_n - A)x = 0$ και $I_n x - Ax = 0$ επομένως $I_n x - Ax = 0$ ή $x = Ax$, $\|x\| = \|Ax\|$ και $\|x\| \leq \|A\|\|x\| < \|x\|$ το οποίο είναι άτοπο και συνεπώς ο $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος.

Επιπλέον έχουμε $(I_n - A)(I_n - A)^{-1} = I_n$, ή $I_n(I_n - A) - A(I_n - A)^{-1} = I_n$ και $(I_n - A)^{-1} = I_n + A(I_n - A)^{-1}$,
$\|(I_n - A)^{-1}\| = \|I_n + A(I_n - A)^{-1}\|$,
$\|(I_n - A)^{-1}\| \leq \|I_n\| + \|A(I_n - A)^{-1}\| = 1 + \|A\|\|A(I_n - A)^{-1}\|$,
άρα $\|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι
$(I_n - A)(I_n - A)^{-1} = I_n$
$\|(I_n - A)(I_n - A)^{-1}\| = \|I_n\|$
$1 = \|(I_n - A)(I_n - A)^{-1}\| \leq \|(I_n - A)\|\|(I_n - A)^{-1}\| \leq \|I_n + (-A)\|\|(I_n - A)^{-1}\| \leq (\|I_n\| + \|A\|)\|(I_n - A)^{-1}\|$,
$1 \leq (\|I_n\| + \|A\|)\|(I_n - A)^{-1}\|$, $\frac{1}{\|I_n\|+\|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\|$.

Επομένως από τις σχέσεις $\|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$,
και $\frac{1}{\|I_n\|+\|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\|$
προκύπτει ότι $\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.9

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 149 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έχουμε ότι

$$\|B\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\{(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}),(\frac{1}{4}+\frac{1}{3})\} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{7}{12} < 1,$$

άρα η μέθοδος συγκλίνει.

Για να βρούμε πού συγκλίνει αυτή η επαναληπτική μέθοδος πρέπει να προσδιορίσουμε ένα σύστημα της μορφής $Ax = b$ του οποίου η λύση του να είναι το όριο της επαναληπτικής διαδικασίας. Αν θέσουμε $A = Q-P$ έχουμε $(Q-P)x = b$ ή $Qx-Px = b$, ή $x = Q^{-1}Px + Q^{-1}b$. Επομένως μπορούμε να θέσουμε $B = Q^{-1}P$ και $Q-P = A$ για κάποια P και Q. Για απλότητα παίρνουμε $Q = I$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας. Συνεπώς

$$B = P \Longrightarrow A = Q-P = I-B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3}\end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

Επίσης πρέπει να έχουμε $C = Q^{-1}b = Ib$ ή

$$C = b = \begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

Συνεπώς η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει στη λύση του συστήματος $Ax = b$ η οποία, λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι είναι το διάνυσμα $\begin{pmatrix}300/53\\ 376/53\end{pmatrix}$.

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.10

Απόδειξη:

Βρίσκουμε τον μεγαλύτερο συντελεστή και τον φέρνουμε στη πάνω αριστερή γωνία του πίνακα αλλάζοντας τη σειρά των εξισώσεων και των αγνώστων δηλαδή τις σειρές και τις στήλες του πίνακα. Στη συνέχεια διαιρούμε τη πρώτη εξίσωση με το πρώτο οδηγό στοιχείο και έτσι έχουμε το πάνω αριστερά στοιχείο του πίνακα ίσο με τη μονάδα. Στη συνέχεια μηδενίζουμε τους συντελεστές της πρώτης στήλης πολλαπλασιάζοντας τη πρώτη εξίσωση επί $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ και αφαιρώντας την από τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση αντίστοιχα.

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z &= 1 \\ \frac{1}{12}y+\frac{1}{12}z &= -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{12}y+\frac{4}{45}z &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το υπόλοιπο σύστημα.

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z &= 1 \\ y+z &= -6 \\ \frac{1}{180}z &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Στο τρίτο βήμα το τελευταίο οδηγό στοιχείο γίνεται ίσο με τη μονάδα και έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z &= 1 \\ y+z &= -6 \\ z &= 30 \end{aligned}$$

Επομένως $z = 30$, από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $y = -6 - 30 = -36$, και από τη πρώτη $x = 1 - \frac{1}{2}(-36) - \frac{1}{3}(30) = 9$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.11

Απόδειξη: Έχουμε $\det A = \frac{1}{2160} \neq 0$ και υπάρχει ο αντίστροφος $A^{-1} = \{x_{i,j}\}$. Έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Με πρώτο οδηγό στοιχείο το πάνω αριστερά παίρνουμε το πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right],$$

και στη συνέχεια έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{array}\right],$$

Υποδιπλασιάζοντας τη δεύτερη γραμμή και αφαιρώντας τη απο τη πρώτη γραμμή έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{array}\right],$$

Συνεχίζοντας παίρνουμε το μοναδιαίο πίνακα στα αριστερά

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \end{array}\right],$$

Συνεπώς ο αντίστροφος πίνακας είναι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.12

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 154 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έχουμε
$\|x\|_\infty = \max(|14|, |-8|, |42|, |147|) = 147,$
$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |14| + |-8| + |42| + |147| = 211,$
$\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(14)^2 + (-8)^2 + (42)^2 + (147)^2} = 181,6.$ $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.13

Απόδειξη: Κρατάμε τη πρώτη γραμμή αμετάβλητη και τη χρησιμοποιούμε για να απαλείψουμε τον άγνωστο x από τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση. Έχουμε αντικαθιστώντας τη δεύτερη εξίσωση με −2×1η εξίσωση + 2η εξίσωση και τη τρίτη με −3×1η εξίσωση + 3η εξίσωση και παίρνουμε

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 26 \\ -y-5z &= -18 \\ 4y+8z &= 36 \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας και αντικαθιστώντας τη τρίτη εξίσωση με 4×2η εξίσωση + 3η εξίσωση παίρνουμε

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 26 \\ -y-5z &= -18 \\ -12z &= -36 \end{aligned}$$

Άρα τελικά παίρνουμε $z = 3$ κατόπιν $y = 18 - 15 = 3$ και τελικά $x = 26 - 6 - 9 = 11$.

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.14

Απόδειξη: Μηδενίζουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης στη δεύτερη και τρίτη γραμμή αντικαθιστώντας την δεύτερη εξίσωση με $-1\times$1η γραμμή + 2η γραμμή και τη τρίτη με $-2\times$1η γραμμή +3η γραμμή και παίρνουμε

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ 2y+z &= 0 \\ 2y+z &= 0 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τη τρίτη γραμμή με $-1\times$ 2η γραμμή + 3η γραμμή και παίρνουμε

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ 2y+z &= 0 \\ 0z &= 0 \end{aligned}$$

Θέτουμε $z = c$ και επομένως από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $y = -\frac{c}{2}$ ενώ από τη πρώτη $x = \frac{c}{2} - c = -\frac{c}{2}$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.15

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 157 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έχουμε ότι ο δείκτης κατάστασης ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ως προς μια νόρμα $\|\cdot\|$ δίνεται απο τη σχέση $k(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$, όμως ισχύει $\|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|$ άρα, αν I ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας,

$$k(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1,$$

και $k(A) \geq 1$. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.16

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 158 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gauss - Siedel ως εξής :
Λύνουμε τη πρώτη εξίσωση ως προς x τη δεύτερη ως προς y και τη τρίτη ως προς z και έχουμε

$$x = \frac{1}{3}(5-2y), \quad y = \frac{1}{2}(3-z), \quad z = \frac{1}{2}(3-x).$$

Θεωρούμε επαναλήψεις τοποθετώντας στο αριστερό μέλος $x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1}$ και στο δεξί τις πιο πρόσφατες τιμές των x, y, z που είναι γνωστές, δηλαδή

$$x^{k+1} = \frac{1}{3}(5-2y^k), \quad y^{k+1} = \frac{1}{2}(3-z^k), \quad z^{k+1} = \frac{1}{2}(3-x^{k+1}).$$

Προσέξτε ότι η τιμή του x, x^{k+1}, στην τρίτη εξίσωση είναι είδη γνωστή από τη πρώτη. Εναλλακτικά το επαναληπτικό σχήμα παίρνει τη μορφή

$$x^{k+1} = \frac{1}{3}(5-2y^k), \quad y^{k+1} = \frac{1}{2}(3-z^k), \quad z^{k+1} = \frac{1}{2}(3-\frac{1}{3}(5-2y^k)).$$

ή

$$x^{k+1} = \frac{1}{3}(5-2y^k), \quad y^{k+1} = \frac{1}{2}(3-z^k), \quad z^{k+1} = \frac{2}{3}+\frac{1}{3}y^k.$$

Για αρχική τιμή $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) = [0,0,0]$ παίρνουμε

$$[x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}] = [1.667, 1.5, 0.666], \quad [x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}] = [1.667, 1.5, 0.666],$$
$$[x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)}] = [0.889, 0.917, 1.056], \quad [x^{(4)}, y^{(4)}, z^{(4)}] = [1.055, 0.972, 0.973],$$
$$[x^{(5)}, y^{(5)}, z^{(5)}] = [1.019, 1.014, 0.991], \quad [x^{(6)}, y^{(6)}, z^{(6)}] = [0.991, 0.004, 1.004],$$
$$[x^{(7)}, y^{(7)}, z^{(7)}] = [0.997, 0.998, 1.002], \quad [x^{(8)}, y^{(8)}, z^{(8)}] = [1.002, 0.999, 0.999].$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\|[x^{(8)},y^{(8)},z^{(8)}]-[x^{(7)},y^{(7)},z^{(7)}]\|_\infty}{\|[x^{(8)},y^{(8)},z^{(8)}]\|} \leq \frac{1}{2}10^{-2}$ και άρα ικανοποιείται το κριτήριο τερματισμού. Επομένως η λύση με ακρίβεια δύο σημαντικών ψηφίων είναι

$$[x, y, z] = [1.00, 1.00, 1.00].$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.17

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 160 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Λύνουμε τη πρώτη εξίσωση ως προς x τη δεύτερη ως προς y και τη τρίτη ως προς z και έχουμε

$$x = 1 - 2y + 2z, \quad y = 1 - x - z, \quad z = 1 - 2x - 2y.$$

Θεωρούμε επαναλήψεις τοποθετώντας στο αριστερό μέλος $x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, z^{(k+1)}$ και στο δεξί $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}$. Έχουμε

$$x^{(k+1)} = 1 - 2y^{(k)} + 2z^{(k)}, \quad y^{(k+1)} = 1 - x^{(k)} - z^{(k)}, \quad z^{(k+1)} = 1 - 2x^{(k)} - 2y^{(k)}.$$

Για αρχική τιμή $[x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}] = [1, 1, 1]$ παίρνουμε

$$[x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}] = [1, -1, -3], \quad [x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}] = [-3, 3, 1],$$

$$[x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)}] = [-3, 3, 1].$$

Βλέπουμε ότι η μέθοδος συγκλίνει στη τρίτη επανάληψη και η λύση του συστήματος είναι

$$[x, y, z] = [-3, 3, 1].$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.18

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Σελίδα 161 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Λύνουμε τη πρώτη εξίσωση ως προς x τη δεύτερη ως προς y και τη τρίτη ως προς z και έχουμε

$$x = \frac{1}{7}(12 - y - z), \quad y = \frac{1}{5}(12 + x - z), \quad z = \frac{1}{6}(18 - 2x + y).$$

Θεωρούμε επαναλήψεις τοποθετώντας στο αριστερό μέλος $x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, z^{(k+1)}$ και στο δεξί $x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}$. Έχουμε

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{7}(12 - y^{(k)} - z^{(k)}), \quad y^{(k+1)} = \frac{1}{5}(12 - x^{(k)} - z^{(k)}), \quad z^{(k+1)} = \frac{1}{6}(18 - 2x^{(k)} + y^{(k)}).$$

Για αρχική τιμή $[x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}] = [0, 0, 0]$ παίρνουμε

$$[x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}] = [1.7143, 2.4000, 3.0000], \quad [x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}] = [0.9429, 2.1429, 2.8286],$$

$$[x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)}] = [1.0041, 2.0229, 3.0429], [x^{(4)}, y^{(4)}, z^{(4)}] = [0.9906, 1.9922, 3.0024],$$

$$[x^{(5)}, y^{(5)}, z^{(5)}] = [1.0008, 1.9976, 3.0018], \quad [x^{(6)}, y^{(6)}, z^{(6)}] = [1.0001, 1.9998, 2.9994],$$

$$[x^{(7)}, y^{(7)}, z^{(7)}] = [1.0001, 2.0001, 2.9999], \quad [x^{(8)}, y^{(8)}, z^{(8)}] = [1.0000, 2.0000, 3.0000],$$

$$[x^{(9)}, y^{(9)}, z^{(9)}] = [1.0000, 2.0000, 3.0000].$$

Βλέπουμε ότι η μέθοδος συγκλίνει στη ένατη επανάληψη και η λύση του συστήματος είναι

$$[x, y, z] = [1, 2, 3].$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.19

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Σελίδα 162 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Λύνουμε τη πρώτη εξίσωση ως προς x τη δεύτερη ως προς y και τη τρίτη ως προς z και έχουμε

$$x = \frac{1}{7}(12 - y - z), \quad y = \frac{1}{5}(12 + x - z), \quad z = \frac{1}{6}(18 - 2x + y).$$

Θεωρούμε επαναλήψεις τοποθετώντας στο αριστερό μέλος $x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, z^{(k+1)}$ και στο δεξί τις πιο πρόσφατες τιμές των x, y, z που είναι γνωστές, δηλαδή

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{7}(12 - y^{(k)} - z^{(k)}), \quad y^{(k+1)} = \frac{1}{5}(12 - x^{(k+1)} - z^{(k)}), \quad z^{(k+1)} = \frac{1}{6}(18 - 2x^{(k+1)} + y^{(k+1)}).$$

Για αρχική τιμή $[x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}] = [0, 0, 0]$ παίρνουμε

$$[x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}] = [1.7143, 2.7429, 2.8857], \quad [x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}] = [0.9102, 2.0049, 3.0307],$$

$$[x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)}] = [0.9949, 1.9928, 3.0005], [x^{(4)}, y^{(4)}, z^{(4)}] = [1.0010, 2.0001, 2.9997],$$

$$[x^{(5)}, y^{(5)}, z^{(5)}] = [1.0000, 2.0001, 3.0000], \quad [x^{(6)}, y^{(6)}, z^{(6)}] = [1.0000, 2.0000, 3.0000].$$

Βλέπουμε ότι η μέθοδος συγκλίνει στη έκτη επανάληψη και η λύση του συστήματος είναι

$$[x, y, z] = [1, 2, 3].$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.20

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 163 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Choleski πρέπει ο πίνακας του συστήματος

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

να είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Είναι συμμετρικός και για κάθε $v = [v_1, v_2, v_3]^T \in \mathbb{R}^3$ έχουμε

$$\begin{aligned} v^T A v &= [v_1, v_2, v_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \\ &= [v_1, v_2, v_3] \begin{bmatrix} v_1 + v_2 + v_3 \\ v_1 + 2v_2 + 2v_3 \\ 2v_1 + 2v_2 + 8v_3 \end{bmatrix} \\ &= \left[v_1^2 + (v_1 + v_2)^2 + (v_2 + v_3)^2 + (v_1 - 2v_3)^2 \right] > 0, \end{aligned}$$

άρα ο A είναι θετικά ορισμένος. Ο πίνακας A επομένως μπορεί να γραφεί στη μορφή $A = LL^T$ όπου $L = \{l_{ij}\}$ πίνακας κάτω τριγωνικός. Έχουμε

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, \quad i = 2, \ldots, n$$

και για $i < j$

$$l_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik}}{l_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad j = i+1, \ldots, n.$$

Άρα

$$l_{11} = \sqrt{1} = 1, \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{2 - 1} = 1,$$

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 164 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{8 - (4+0)} = 2,$$

$$l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1, \quad l_{31}\frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{2}{1} = 2, \quad l_{32} = \frac{a_{23} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{2-2}{1} = 0.$$

Επομένως

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

και λύνουμε το σύστημα $Lu = b$ ή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Με εμπρός αντικατάσταση βρίσκουμε $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = -2$. Κατόπιν λύνουμε το σύστημα $L^T[x, y, z]^T = b$ ή

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

και με πίσω αντικατάσταση βρίσκουμε $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.21

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 165 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έστω ότι ο κάτω τριγωνικός πίνακας L έχει τα διαγώνια στοιχεία ίσα με τη μονάδα. Τότε θα είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 9 \\ 2 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{21}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 9 \\ 2 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Από αυτή τη σχέση υπολογίζουμε τα στοιχεία l_{ij} και u_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ και παίρνουμε

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.75 & 0.2692 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 9 \\ 0 & -6 & -2.5 \\ 0 & 0 & -7.0769 \end{bmatrix}$$

Λύνουμε το σύστημα $Lv = b$ με εμπρός αντικατάσταση και προκύπτει $v = (7, -15.5, -7.0769)$. Κατόπιν λύνουμε το σύστημα $Ux = v$ με πίσω αντικατάσταση και παίρνουμε $x = 1, y = 2, z = 1$.

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.22

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◂◂ ▸▸
◂ ▸
Σελίδα 166 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Η ορίζουσα του A είναι $D(A) = 2998 \neq 0$ και ο A είναι αντιστρέψιμος. Έχουμε

$$A^{-1} = 1000 \begin{bmatrix} 3.001 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε $\|A\|_\infty = 4.001$ και $A^{-1} = 4001$. Άρα ο δείκτης κατάστασης είναι

$$k(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 16008.001 \gg 1,$$

και το σύστημα είναι ασταθές. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.23

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 167 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Επειδή ο A είναι συμμετρικός πίνακας θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$. Υπολογίζουμε τον A^TA,

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο αυτού του πίνακα είναι

$$|A^TA - \lambda I| = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9-\lambda \end{bmatrix} = (9-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 9) = 0.$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του πίνακα A^TA είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 1$ και η φασματική ακτίνα του, $\rho(A^TA) = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = 9$. Επομένως έχουμε $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = 3$.

Εναλλακτικά η νόρμα $\|A\|_2$ θα μπορούσε να υπολογιστεί απευθείας με τη χρήση του ορισμού για την $\|\cdot\|_2$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.24

Υπόδειξη: Προσδιορίστε το πολυώνυμο

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \ldots + L_n(x)f(x_n).$$

όπου

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.1

Υπόδειξη: Υπολογίστε το πολυώνυμο

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \ldots + L_n(x)f(x_n).$$

όπου

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.2

Υπόδειξη: Υπολογίστε το πολυώνυμο

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \ldots + L_n(x)f(x_n).$$

όπου

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.3

Υπόδειξη: Υπολογίστε το πολυώνυμο

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \ldots + L_n(x)f(x_n).$$

όπου

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.4

Υπόδειξη: Κατασκευάστε το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton που περνάει από τα σημεία $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2$ και έχει τη μορφή $p(x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)(x-3)$ έτσι ώστε $p(x_i) = f(x_i)$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.5

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε τους συντελεστές Lagrange $L_i(x)$ για $i = 0, 1, 2$, όπου

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)},$$

και κατασκευάζουμε το πολυώνυμο

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \ldots + L_n(x)f(x_n).$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.6

Υπόδειξη: Το πολυώνυμο παρεμβολής $u(x)$, του Newton με προς τα εμπρός διαφορές (δηλαδή της μορφής $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$) είναι

$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} + \dots$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}.$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.7

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 175 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Το πολυώνυμο παρεμβολής $u(x)$, του Newton με προς τα εμπρός διαφορές (δηλαδή της μορφής $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$) είναι

$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} + \dots$$
$$+(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}.$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.8

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε τους συντελεστές Lagrange $L_i(x)$ για $i = 0, 1, 2, ..., n$ όπου

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)},$$

και κατασκευάζουμε το πολυώνυμο

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \ldots + L_n(x)f(x_n).$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.9

Υπόδειξη: $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.10

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση για το σφάλμα E της παρεμβολής Lagrange

$$E = f(x) - P(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!}.$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.11

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση για το σφάλμα παρεμβολής Newton το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$E = f(x) - P(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.12

Υπόδειξη: Θεωρείστε τη συνάρτηση $F(x) = y(x) - p(x) - C\pi(x)$ όπου C είναι μια σταθερά και $\pi(x)$ πολυώνυμο $n+1$ βαθμού και προσδιορίστε τη σταθερά C και άρα και τη διαφορά $y(x) - p(x)$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.13

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση για το σφάλμα της παρεμβολής του Lagrange η οποία είναι στη συγκεκριμένη περίπτωση

$$f(x) - p(x) = \frac{f'''(x)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.14

Υπόδειξη: Θεωρείστε το $p(x)$ σαν ένα πολυώνυμο παρεμβολής της e^{2x} στα σημεία x_i και χρησιμοποιείστε τη σχέση που προκύπτει για το σφάλμα της παρεμβολής. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.15

Υπόδειξη: Ελαχιστοποιείστε τη συνάρτηση $S = S(B, M) = \sum_{i=0}^{N}(y_i - Mx_i - B)^2$ θέτοντας $\frac{\partial S}{\partial B} = 0$ και $\frac{\partial S}{\partial M} = 0$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.16

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τις σχέσεις

$$M = \frac{n\left(n\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2},$$

και

$$B = \frac{n\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2},$$

που προσδιορίζουν την ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων $p(x) = Mx + B$.

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.17

Υπόδειξη: Θεωρείστε ότι $y = \ln(P)$, $B = \ln(A)$ και ότι $\ln(P) = \ln(A) + Mx$. Η $y(x) = Mx + B$ είναι μια ευθεία που μπορεί να προσδιοριστεί με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.18

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τις ιδιότητες ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Legendre. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.19

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το μετασχηματισμό $t = \frac{\pi(x+1)}{2}$ και στη συνέχεια προσδιορίστε τους συντελεστές a_i έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1}[y(x) - a_0 P_0(x) - a_1 P_1(x) - \ldots - a_m P_m(x)]^2 dx$, όπου $P_k(x)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.20

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το μετασχηματισμό $t = \frac{(x+1)}{2}$ και στη συνέχεια προσδιορίστε τους συντελεστές a_i έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} [y(x) - a_0 P_0(x) - a_1 P_1(x)]^2 dx$, όπου $P_k(x)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.21

Υπόδειξη: Ελαχιστοποιείστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_a^b w(x)\left[y(x) - a_0 Q_0(x) - \ldots - a_m Q_m(x)\right]^2 dx,$$

όπου τα πολυώνυμα $Q_k(x)$ ικανοποιούν τις συνθήκες ορθογωνιότητας

$$\int_a^b w(x) Q_j(x) Q_k(x) dx = 0,$$

για $j \neq i$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.22

Υπόδειξη: Υπολογίστε τους συντελεστές Hermite, $H_0, H_1, \hat{H}_0, \hat{H}_1$ και το πολυώνυμο Hermite απο τη σχέση

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} H_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} \hat{H}_i(x) f(x_i).$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.23

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 191 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Υπολογίστε τους συντελεστές Hermite, $H_0, H_1, \hat{H}_0, \hat{H}_1$ και το πολυώνυμο Hermite απο τη σχέση

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} H_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} \hat{H}_i(x) f(x_i).$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.24

Υπόδειξη: θεωρήστε τα κυβικά πολυώνυμα

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i = 0, 1, 2,$$

στα διαστήματα $[0, 1]$, $[1, 2]$ και $[2, 3]$ και υπολογίστε τους συντελεστές a_i, b_i, c_i, d_i. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.25

Υπόδειξη: θεωρήστε τα κυβικά πολυώνυμα

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i = 0, 1, 2,$$

στα διαστήματα $[0, 1]$, $[1, 2]$ και $[2, 3]$ και υπολογίστε τους συντελεστές a_i, b_i, c_i, d_i. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.26

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 194 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον ορισμό των πολυωνύμων Chebychev. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.27

Υπόδειξη: Το ζητούμενο είναι να προσδιοριστούν τα a_i έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[y(x) - a_0 T_0 - \ldots - a_m T_m(x)\right]^2 dx,$$

όπου $T_i(x)$ τα πολυώνυμα Chebychev. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.28

Απόδειξη: Υπολογίζουμε τους συντελεστές Lagrange $L_i(x)$ για $i = 0, 1, 2, 3$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = \frac{x^3-6x^2+11x-6}{-6}.$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{x^3-5x^2+6x}{2}.$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = \frac{x^3-4x^2+3x}{-2}.$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{6}.$$

Επομένως το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange είναι

$$\begin{aligned} P(x) &= L_0F(x_0) + L_1F(x_1) + L_2F(x_2) + L_3F(x_3) \\ &= -1\frac{x^3-6x^2+11x-6}{-6} + 0\frac{x^3-5x^2+6x}{2} + 3\frac{x^3-4x^2+3x}{-2} + 8\frac{x^3-3x^2+2x}{6} \\ &= \frac{1}{6}\left[x^3-6x^2+11x-6-9(x^3-4x^2+3x)+8(x^3-3x^2+2x)\right] = \frac{1}{6}(6x^2-6). \end{aligned}$$

Άρα το πολυώνυμο παρεμβολής είναι $P(x) = x^2 - 1$.

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.1

Απόδειξη: Υπολογίζουμε τους συντελεστές Lagrange $L_i(x)$ για $i = 0, 1, 2, 3, 4$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-7)}{(-1)(-3)(-4)(-7)}.$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = \frac{(x)(x-3)(x-4)(x-7)}{(1)(-2)(-3)(-6)}.$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{(x)(x-1)(x-4)(x-7)}{(3)(2)(-1)(-4)}.$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{(x)(x-1)(x-3)(x-7)}{(7)(3)(1)(-3)}.$$

$$L_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \frac{(x)(x-1)(x-3)(x-4)}{(7)(6)(4)(3)}.$$

Επομένως το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange είναι

$$\begin{aligned}
P(x) &= L_0F(x_0) + L_1F(x_1) + L_2F(x_2) + L_3F(x_3) + L_4F(x_4) \\
&= 2\frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-7)}{(-1)(-3)(-4)(-7)} - 3\frac{(x)(x-3)(x-4)(x-7)}{(1)(-2)(-3)(-6)} \\
&\quad +0\frac{(x)(x-1)(x-4)(x-7)}{(3)(2)(-1)(-4)} + \frac{(x)(x-1)(x-3)(x-7)}{(4)(3)(1)(-3)} \\
&\quad -2\frac{(x)(x-1)(x-3)(x-4)}{(7)(6)(4)(3)} \\
&= \frac{19}{252}x^4 - \frac{299}{252}x^3 + \frac{1495}{252}x^2 - \frac{275}{28} + 2 \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.2

Απόδειξη: Υπολογίζουμε τους συντελεστές Lagrange $L_i(x)$ για $i = 0, 1, 2, 3, 4$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-70)(x-80)(x-90)}{-6000}.$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-60)(x-80)(x-90)}{2000}.$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-60)(x-70)(x-90)}{-2000}.$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-60)(x-70)(x-80)}{6000}.$$

Επομένως το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange είναι

$$\begin{aligned}
P(x) &= L_0F(x_0) + L_1F(x_1) + L_2F(x_2) + L_3F(x_3) \\
&= 0.866\frac{(x-70)(x-80)(x-90)}{-6000} + 0.9397\frac{(x-60)(x-80)(x-90)}{2000} \\
&\quad +0.9848\frac{(x-60)(x-70)(x-90)}{-2000} + \frac{(x-60)(x-70)(x-80)}{6000} \\
&= 2.1667\cdot 10^{-7}x^3 - 9.75\cdot 10^{-5}x^2 - 2.2797\cdot 10^{-2}x - 0.104 \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.3

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 200 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \frac{x^2-2x}{3}.$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} = \frac{x^2-x-2}{-2}.$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = \frac{x^2+x}{6}.$$

Επιπλέον $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 16$. Επομένως το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange είναι

$$\begin{aligned} P(x) &= L_0F(x_0) + L_1F(x_1) + L_2F(x_2) \\ &= \frac{x^2-2x}{3} + 0\frac{x^2-x-2}{-2} + 16\frac{x^2+x}{6} \\ &= \frac{1}{3}\left[x^2-2x+8(x^2+x)\right] = 3x^2+2x. \end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.4

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 201 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Θεωρούμε το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton

$p(x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)(x-3)$ και $p(2) = a_0$ ενώ $p(2) = f(2) = \ln(2)$. Άρα $a_0 = \ln(2)$.

Όμοια $p(3) = \ln(2) + a_1$ ή $p(3) = f(3) = \ln(3)$ και $a_1 = \ln(3) - \ln(2)$.

Επίσης $p(4) = \ln(2) + 2\ln(3) - 2\ln(2) + 2a_2$ ή $p(4) = -\ln(2) + 2\ln(3) + 2a_2$ και $p(4) = f(4) = \ln(4)$ επομένως $a_2 = \frac{\ln(4)-2\ln(3)+\ln(2)}{2}$.

Τελικά

$$p(x) = \ln(2) + (\ln(3) - \ln(2))(x-2) + \frac{\ln(4) - 2\ln(3) + \ln(2)}{2}(x-2)(x-3)$$

ή

$$p(x) = \frac{\ln(4) - 2\ln(3) + 2\ln(2)}{2}x^2 - \frac{5\ln(4) - 12\ln(3) + 7\ln(2)}{2}x + 3\ln(4) - 8\ln(3) + 6\ln(2).$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.5

Απόδειξη:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-2)(-3)} = \frac{x^2-x}{6}.$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+2)(x-1)}{(2)(-1)} = \frac{x^2+x-2}{2}.$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+2)(x-0)}{(3)(1)} = \frac{x^2+2x}{3}.$$

Επιπλέον $f(x_0) = -32$, $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 1$. Επομένως το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange είναι

$$\begin{aligned} P(x) &= L_0F(x_0) + L_1F(x_1) + L_2F(x_2) \\ &= \frac{x^2-x}{6} + 0\frac{x^2+x-2}{2} + 16\frac{x^2+2x}{3} \\ &= -5x^2 + 6x. \end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.6

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε τη εμπροσθοδρομική μέθοδο του Newton.

$$u(x) = u_0 + x\Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 u_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 u_0 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\Delta^4 u_0 + \dots$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα διαφορών κάνοντας χρήση των δεδομένων

	x	$u(x)$	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$
x_0	0	5				
x_1	1	8	3			
x_2	2	17	9	6		
x_3	3	44	27	18	12	
x_4	4	101	57	30	12	0

Έχουμε ότι $\Delta^4 u = 0$ άρα το πολυώνυμο παρεμβολής είναι ένα 3ου βαθμού πολυώνυμο. Επομένως

$$u(x) = 5 + x(3) + \frac{x(x-1)}{2}(6) + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}(12) = 5 + 3x + 3(x^2 - x) + 2(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

ή

$$u(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5.$$

Επιπλέον

$$u(0.5) = 5 + \frac{1}{2}(3) + \frac{-1}{8}(6) + \frac{1}{16}(12) + 0 = 5 + 1.5 - 0.75 + 0.75 = 6.5,$$

$$u(1.1) = 5 + 1.1(3) + 0.055(6) + (-0.0165)(12) = 5 + 3.3 + 0.33 - 0.198 = 8.432$$

Εναλλακτικά $u(0.5) = 2(0.5)^3 - 3(0.5)^2 + 4(0.5) + 5$ και όμοια $u(1.1) = 8.432$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.7

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε τη εμπροσθοδρομική μέθοδο του Newton.

$$u(x) = u_0 + x\Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 u_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 u_0 + \ldots$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα διαφορών κάνοντας χρήση των δεδομένων

	x	$u(x)$	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
0	10	5			
1	14	1	-4		
2	18	-3	-4	0	
3	22	89	92	96	96

Έχουμε ότι $\Delta^4 u = 0$ άρα το πολυώνυμο παρεμβολής είναι ένα 3ου βαθμού πολυώνυμο. Επομένως

$$u(x) = 5 + x(-4) + \frac{x(x-1)}{2}(0) + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}(96) = 5 - 4x + 0 + 16(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

ή

$$u(x) = 16x^3 - 48x^2 + 28x + 5.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.8

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 205 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης $f(x) = 1 - \cos(\frac{\pi x}{2})$ στα σημεία $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Έχουμε $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 1$.

Επιπλέον

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2-x}{2}.$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(0-1)(0+1)} = x^2-1.$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x^2+x}{2}.$$

Επομένως το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange είναι

$$\begin{aligned} P(x) &= L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) \\ &= \frac{x^2-x}{2}(1) + (x^2-1)(0) + \frac{x^2+x}{2}(1) \\ &= x^2. \end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.9

Απόδειξη: Το σφάλμα της προσέγγισης δίνεται από τον τύπο

$$f(x) - P_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

με $\xi \in (-1, 1)$.

Έχουμε $f'''(x) = -\frac{\pi^3}{8}\sin(\frac{\pi x}{2})$ οπότε

$$f(x) - p(x) = -\frac{\pi^3}{8 \cdot 3!}(x + 1)x(x - 1)\sin(\frac{\pi x}{2}),$$

ή

$$|f(x) - p(x)| = \left| -\frac{\pi^3}{8 \cdot 3!}(x + 1)x(x - 1)\sin(\frac{\pi x}{2})\right| \leq \left|\frac{\pi^3}{48}(x + 1)x(x - 1)\right|.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x + 1)x(x - 1) = x^3 - x$. Αυτή έχει ακρότατα στο $[-1, 1]$ για $g'(x) = 3x^2 - 1$ ή για $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Επιπλέον $g''(x) = 6x$ και $g''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{6}{\sqrt{3}} \leq 0$, $g''(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{6}{\sqrt{3}} \geq 0$ και άρα η g έχει τοπικό μέγιστο για $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $g(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Επομένως

$$|f(x) - p(x)| =\leq \left|\frac{\pi^3}{48}(x + 1)x(x - 1)\right| \leq \left|\frac{\pi^3}{72\sqrt{3}}\right| \sim 0.24825.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.10

Απόδειξη: Το σφάλμα παρεμβολής δίνεται από τη σχέση

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)\Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!}.$$

Στη προκειμένη περίπτωση έχουμε ότι $n + 1 = 4$ άρα $n = 3$. Επιπλέον $f(\xi) = \xi^4$ και $f^4(\xi) = 24$ και $\Pi_{i=0}^{3}(x - x_i) = x(x-1)(x-2)(x-3)$, άρα τελικά

$$f(x) - p_n(x) = 24\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} = x(x-1)(x-2)(x-3).$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.11

Απόδειξη: Έχουμε $f \in C^3[2,4]$ και ότι

$$\epsilon(x) = f(x) - p(x) = (x-2)(x-3)(x-4)\frac{f'''(\xi)}{3!},$$

ή

$$\epsilon(3.5) = (3.5-2)(3.5-3)(3.5-4)\frac{f'''(\xi)}{3!} = \frac{3}{2}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\frac{f'''(\xi)}{3!} = -\frac{f'''(\xi)}{16},$$

με $\xi \in [2,4]$.

Επίσης έχουμε ότι η f''' είναι φθίνουσα και $f'''(4) \leq f'''(\xi) \leq f'''(2)$, άρα $\frac{1}{32} \leq f'''(\xi) \leq \frac{1}{4}$ και τελικά $-\frac{1}{64} \leq -\frac{f'''(\xi)}{16} \leq -\frac{1}{512}$ ή

$$-\frac{1}{64} \leq \epsilon(3.5) \leq -\frac{1}{512}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.12

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = y(x) - p(x) - C\pi(x)$ όπου C είναι μια σταθερά και $\pi(x)$ πολυώνυμο $n+1$ βαθμού. Επιλέγουμε $C = \frac{y(x_{n+1})-p(x_{n+1})}{\pi(x_{n+1})}$, για κάποιο σημείο $x_{n+1} \neq x_1, \ldots, x_n$. Τότε $F(x_{n+1}) = 0$ και η $F(x)$ έχει τουλάχιστον $n+2$ ρίζες. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle η $F'(x)$ έχει $n+1$ ρίζες μεταξύ των ριζών της $F(x)$, η $F''(x)$ έχει n ρίζες μεταξύ των ριζών της $F'(x)$ κλπ. Συνεχίζοντας έτσι συμπεραίνουμε ότι η $F^{(n+1)}(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο σημείο έστω $x = \xi$. Υπολογίζουμε την παράγωγο αυτή στο x (δεδομένου ότι $p^{(n+1)}(x) = 0$) και θέτουμε $x = \xi$. Επομένως $0 = y^{(n+1)}(\xi) - C(n+1)!$. Έτσι υπολογίζεται το C και παίρνουμε

$$y(x_{n+1}) - p(x_{n+1}) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi(x).$$

Το x_{n+1} όμως μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο διαφορετικό απο τα $x_1, \ldots, x_n$ και επομένως ισχύει

$$y(x) - p(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi(x).$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.13

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Σελίδα 210 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Το σφάλμα της προσέγγισης δίνεται από τη σχέση

$$f(x) - p(x) = \frac{f'''(x)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

με $-1 \leq \xi \leq 1$. Έχουμε $f'''(x) = e^x$ άρα

$$\left| f(x) - p(x) \right| = \left|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{e^x}{3!}\right| \leq \left|(x + 1)x(x - 1)\frac{e}{6}\right|.$$

Επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = (x+1)x(x-1)$ έχει μέγιστο για $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $g(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.
Επομένως $\left| f(x) - p(x) \right| \leq \frac{e}{6}\frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{e}{9\sqrt{3}}$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.14

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◂◂ ▸▸
◂ ▸
Σελίδα 211 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο, μοναδικό, που παρεμβάλει τη συνάρτηση e^{2x} στα σημεία $x_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ και το σφάλμα της παρεμβολής είναι

$$e^{2x} - p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!},$$

$1 < \xi < 4$. Επιπλέον $\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = 16\frac{e^{2\xi}}{24} = 2\frac{e^{2\xi}}{3}$. Άρα

$$e^{2x} - p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)2\frac{e^{2\xi}}{3} < 0,$$

για $x \in (1, 2)$. Επομένως $e^{2x} - p(x) < 0$ και $e^{2x} < p(x)$ για $x \in [1, 2]$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.15

Απόδειξη: Εάν S είναι το άθροισμα θα πρέπει να έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial B} = -2\sum_{i=0}^{N}(y_i - Mx_i - B) &= 0,\\ \frac{\partial S}{\partial M} = -2\sum_{i=0}^{N}x_i(y_i - Mx_i - B) &= 0,\end{aligned}$$

ή εναλλακτικά

$$\begin{aligned}(N+1)B + (\sum x_i)M &= \sum y_i,\\ (\sum x_i)B + (\sum x_i^2)M &= \sum x_i y_i.\end{aligned}$$

Θέτοντας $s_0 = N+1$, $s_1 = \sum x_i$, $s_2 = \sum x_i^2$, $t_0 = \sum y_i$, $t_1 = \sum x_i y_i$, έχουμε

$$M = \frac{s_0 t_1 - s_1 t_0}{s_0 s_2 - s_1^2}, \quad B = \frac{s_2 t_0 - s_1 t_1}{s_0 s_2 - s_1^2}.$$

Ο όρος $s_0 s_2 - s_1^2$ είναι διαφορετικός απο το μηδέν γιατί

$$0 < \sum_{i<j}(x_i - x_j)^2 = N\sum x_i^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j,$$

και

$$(\sum x_i)^2 = \sum x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j.$$

Επομένως η ποσότητα $s_0 s_2 - s_1^2$ γίνεται

$$(N+1)\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 = N\sum x_i^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j > 0.$$

Τα N και B είναι τα σημεία ελαχίστου γιατί

$$\frac{\partial^2 S}{\partial B^2} = 2s_0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial M^2} = 2s_2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial B \partial M} = 2s_1,$$

και επιπλέον $s_0 > 0$, $s_2 > 0$, $(2s_1)^2 - 2(N+1)(2s_2) = 4(s_1^2 - s_0 s_2) < 0$. Άρα το άθροισμα σαν συνάρτηση των M, B έχει μοναδικό ελάχιστο.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.16

Απόδειξη: Εάν X_i είναι το πλήθος των σημείων και θέσουμε $x_i = \frac{X_i - 6}{2}$ έχουμε ότι $x_i = 0, \ldots 9$. Θέτοντας $s_0 = 10$, $s_1 = \sum x_i = 45$, $s_2 = \sum x_i^2 = 285$, $t_0 = \sum Y_i = 41.5$, $t_1 = \sum x_i Y_i = 194, 1$ μπορούμε να προσδιορίσουμε τα σημεία στα οποία ελαχιστοποιείται η ποσότητα $\sum_{i=0}^{N}(y_i - Mx_i - B)^2$ όπου M και B είναι οι συντελεστές της ευθείας $p(x) = Mx + B$ που μας δίνει τη ζητούμενη γραμμική σχέση. Παίρνουμε

$$M = \frac{(10)(194.1) - (45)(41.5)}{(10)(285) - (45)^2} \sim 0.089, \quad B = \frac{(285)(41.5) - (45)(194.1)}{(10)(285) - (45)^2} \sim 3.76.$$

Επομένως $y \sim p(x)$ και $p(x) = 0.09x + 3.76 \sim 0.045X + 3.49$.

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.17

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Σελίδα 215 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Θέτουμε $y = \ln(P)$, $B = \ln(A)$. Λογαριθμίζουμε την προσδιοριστέα σχέση και παίρνουμε $\ln(P) = \ln(A) + Mx$ ή $y(x) = Mx + B$. Αυτή η ευθεία μπορεί να προσδιοριστεί με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων απο τα αντίστοιχα δεδομένα

x_i	1	2	3	4
P_i	1.95	2.40	2.83	3.30

Βρίσκουμε ότι $s_0 = 4$, $s_1 = 10$, $s_2 = 30$, $t_0 = 10.48$, $t_1 = 28.44$ και ότι $M \sim 0.45$, $B \sim 1.5$. Επομένως $P = 4.48e^{0.45x}$.

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.18

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 216 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Σε αυτή τη περίπτωση θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε ένα ολοκλήρωμα. Τα δεδομένα είναι οι τιμές της συνάρτησης $y(x)$ που θεωρούνται γνωστές σε ένα κατάλληλο διάστημα. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πολυωνύμων Legendre σχηματίζουμε κατάλληλες εξισώσεις από τις οποίες προσδιορίζονται τα a_k.

Για να έχουμε ελάχιστο πρέπει

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = -2\int_{-1}^{1}[y(x) - a_0P_0(x) - a_1P_1(x) - \ldots - a_mP_m(x)]P_k(x)dx = 0,$$

για $k = 0, 1, 2, \ldots, m$. Απο τις ιδιότητες της ορθογωνιότητας έχουμε

$$\int_{-1}^{1}[y(x) - a_kP_k(x)]P_k(x)dx = 0,$$

και τελικά

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} y(x)P_k(x)dx.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.19

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 217 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t = \frac{\pi(x+1)}{2}$ το πρόβλημα μετασχηματίζεται στο να προσδιορίσουμε τη παραβολή που προσεγγίζει τη συνάρτηση $y = \sin(\frac{\pi(x+1)}{2})$ στο διάστημα $(-1, 1)$. Οι συντελεστές a_i έτσι ώστε το

$$I = \int_{-1}^{1} [y(x) - a_0 P_0(x) - a_1 P_1(x) - \ldots - a_m P_m(x)]^2 dx$$

να γίνεται ελάχιστο, όπου $P_k(x)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre, είναι

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} y(x) P_k(x) dx.$$

Στη περίπτωση μας έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sin(\frac{\pi(x+1)}{2}) dx = \frac{2}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} \sin(\frac{\pi(x+1)}{2}) x dx = 0,$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} \sin(\frac{\pi(x+1)}{2}) \frac{1}{2}(3x^2 - 1) dx = \frac{10}{\pi}(1 - \frac{12}{\pi^2}),$$

Επομένως η ζητούμενη παραβολή είναι

$$y = \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}(1 - \frac{12}{\pi^2})\frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}(1 - \frac{12}{\pi^2})(\frac{6}{\pi^2}(t - \frac{\pi}{2})^2 - \frac{1}{2}).$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.20

Απόδειξη: Θέλουμε να προσεγγίσουμε ένα κομμάτι παραβολής με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Θέτουμε $t = (x+1)/2$ και το διάστημα γίνεται $(-1, 1)$ ενώ η y παίρνει τη μορφή $y(x) = (x+1)^2/4$. Επειδή $P_0(x) = 1$ και $P_1(x) = x$ έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(x+1)^2 dx = \frac{1}{3}, \quad a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(x+1)^2 x dx = \frac{1}{2}.$$

Άρα η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων είναι η

$$y = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x = t - \frac{1}{6}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.21

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 219 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Το ολοκλήρωμα που πρέπει να γίνει ελάχιστο σε αυτή τη περίπτωση είναι το

$$I = \int_a^b w(x)\,[y(x) - a_0 Q_0(x) - \ldots - a_m Q_m(x)]^2\, dx,$$

όπου τα πολυώνυμα $Q_k(x)$ ικανοποιούν τις συνθήκες ορθογωνιότητας

$$\int_a^b w(x) Q_j(x) Q_k(x) dx = 0,$$

για $j \neq i$.

Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο $(v_1(x), v_2(x)) = \int_a^b w(x) v_1(x) v_2(x) dx$. Εάν $p(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής θέλουμε να ισχύει $(y - p, Q_k) = 0$ ή ότι $(y, Q_k) = (p, Q_k)$. Το πολυώνυμο $p(x)$ θα έχει τη μορφή

$$p(x) = a_0 Q_0 + a_1 Q_1 + \ldots a_m Q_m,$$

και παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο του δεξιού και αριστερού μέλους της παραπάνω σχέσης με το Q_k παίρνουμε

$$(Q_0, Q_k) a_0 + \ldots (Q_m, Q_k) a_m = (y, Q_k),$$

για $k = 1, \ldots, m$. Άρα τελικά λόγω της ορθογωνιότητας των Q_k έχουμε

$$a_k = \frac{\int_a^b w(x) y(x) Q_k(x) dx}{\int_a^b w(x) Q_k^2(x) dx}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.22

Απόδειξη: Αρχικά υπολογίζουμε τους συντελεστές Hermite. Έχουμε

$$L_0(x) = 2 - x, \quad L_1(x) = x - 1.$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= (1 - 2(1 - x))\,(2 - x)^2 = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4, \\
H_1(x) &= (1 - 2(1 - x))\,(x - 1)^2 = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5, \\
\hat{H}_0(x) &= (x - 1)(2 - x)^2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 4, \\
\hat{H}_1(x) &= (x - 2)(x - 1)^2 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite το οποίο έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}
P(x) &= H_0(x) + \frac{1}{2}H_1(x) - \hat{H}_0(x) - \frac{1}{4}\hat{H}_1(x) \\
&= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x + 3.
\end{aligned}$$

Για το σημείο $x = 1.5$ το σφάλμα θα ικανοποιεί τη σχέση

$$E = |f(1.5) - P(1.5)| = \left|\frac{1}{24}(1.5 - 1)^2(1.5 - 2)^2\frac{24}{\xi^2}\right| \le \frac{1}{16}.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.23

Απόδειξη: Αρχικά υπολογίζουμε τους συντελεστές Hermite.

$$L_0(x) = \frac{1-x}{2}, \quad L_1(x) = \frac{x+1}{2}.$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= \left(1 - 2(x+1)\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\frac{(1-x)^2}{4} = \frac{1}{4}(x^3 - 3x + 2),\\
H_1(x) &= \left(1 - 2(x-1)\left(\frac{1}{2}\right)\right)\frac{(x+1)^2}{4} = \frac{1}{4}(-x^3 + 3x + 2),\\
\hat{H}_0(x) &= (x+1)\frac{(1-x)^2}{4} = \frac{1}{4}(x^3 - x^2 - x + 1),\\
\hat{H}_1(x) &= (x-1)\frac{(x+1)^2}{4} = \frac{1}{4}(x^3 + x^2 - x - 1).
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite το οποίο έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{1}{3}H_0(x) + \frac{1}{3}H_1(x) + \frac{1}{3}\hat{H}_0(x) + \frac{1}{3}\hat{H}_1(x)\\
&= -\frac{1}{12}\left(2x^3 - 2x + 4\right).
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.24

Απόδειξη: Σχηματίζουμε τα διαστήματα $[0,1]$, $[1,2]$ και $[2,3]$ και θεωρούμε τα κυβικά πολυώνυμα

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i = 0,1,2.$$

Θέλουμε αρχικά να προσδιορίσουμε τους συντελεστές a_i, b_i, c_i, d_i, $i = 0,1,2,3$. Έχουμε $a_i = f(x_i)$ για $i = 0,1,2,3$ και άρα

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{4}.$$

Επιπλέον για τους συντελεστές b_i, $i = 0,1,2$, δεδομένου ότι τα σημεία x_i ισαπέχουν και για $h_i = x_{i+1} - x_i$, $h_i = 1$, $i = 0,1,2$, έχουμε ότι

$$b_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) - \frac{1}{3}(2c_{i+1} + c_i), \quad i = 0,1,2.$$

Όμοια για τους συντελεστές d_i, $i = 0,1,2$ έχουμε

$$d_i = \frac{1}{3}(c_{i+1} - c_i), \quad i = 0,1,2.$$

Οι συντελεστές c_i, $i = 0,1,2,3$ προκύπτουν απο την επίλυση του γραμμικού συστήματος $Ac = B$ όπου, $c = [c_0, c_1, \ldots, c_n]^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & . & . & . \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & . \\ . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + hn - 1) & h_{n-1} \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

Άρα στη περίπτωση μας έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Αυτό το σύστημα μπορεί να λυθεί για παράδειγμα με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Αν πολλαπλασιάσουμε τη 1η γραμμή με -1 και τη προσθέσουμε στη δεύτερη γραμμή και επίσης πολλαπλασιάσουμε τη 1η γραμμή με $-\frac{1}{4}$ και τη προσθέσουμε στη δεύτερη προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Το σύστημα αυτό έχει πίνακα άνω τριγωνικό και λύνεται με πίσω αντικατάσταση. Παίρνουμε

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συντελεστές b_i, $i = 0, 1, 2$ και παίρνουμε

$$b_0 = -\frac{7}{12}, \quad b_1 = -\frac{1}{3}, \quad b_2 = -\frac{1}{12}.$$

Τέλος για τους συντελεστές d_i, $i = 0, 1, 2$ έχουμε

$$d_0 = \frac{1}{12}, \quad d_1 = -\frac{1}{12}, \quad d_2 = 0.$$

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση $S(x)$ είναι η

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{12}x^3, & x \in [0,1], \\ S_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{12}(x-1)^3, & x \in [1,2], \\ S_2(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}(x-2), & x \in [2,3]. \end{cases}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.25

Απόδειξη: Σχηματίζουμε τα διαστήματα $[1,2]$, $[2,3]$ και $[3,4]$ και θεωρούμε τα κυβικά πολυώνυμα

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i = 0, 1, 2.$$

Έχουμε $a_i = f(x_i)$ για $i = 0, 1, 2, 3$ και άρα

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{3}.$$

Επιπλέον για τους συντελεστές b_i, $i = 0, 1, 2$, δεδομένου ότι τα σημεία x_i ισαπέχουν και για $h_i = x_{i+1} - x_i$, $h_i = 1$, $i = 0, 1, 2$, έχουμε ότι

$$b_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) - \frac{1}{3}(2c_{i+1} + c_i), \quad i = 0, 1, 2.$$

Όμοια για τους συντελεστές d_i, $i = 0, 1, 2$ έχουμε

$$d_i = \frac{1}{3}(c_{i+1} - c_i), \quad i = 0, 1, 2.$$

Οι συντελεστές c_i, $i = 0, 1, 2, 3$ προκύπτουν από την επίλυση του γραμμικού συστήματος $Ac = B$ όπου, $c = [c_0, c_1, \dots, c_n]^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & . & . & . \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & . \\ . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + hn - 1) & h_{n-1} \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

Άρα στη περίπτωση μας έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί για παράδειγμα με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss και παίρνουμε

$$c_0 = 0, c_1 = -\frac{17}{60}, c_2 = \frac{2}{15}, c_3 = 0.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συντελεστές b_i, $i = 0, 1, 2$ και παίρνουμε

$$b_0 =, -\frac{14}{45} \quad b_1 = -\frac{29}{180}, \quad b_2 = -\frac{19}{180}.$$

Τέλος για τους συντελεστές d_i, $i = 0, 1, 2$ έχουμε

$$d_0 = -\frac{17}{180}, \quad d_1 = -\frac{1}{20}, \quad d_2 = -\frac{2}{45}.$$

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση $S(x)$ είναι η

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 - \frac{14}{45}(x-1) - \frac{17}{180}(x-1)^3, & x \in [0,1], \\ S_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{29}{180}(x-2) - \frac{17}{60}(x-2)^2 - \frac{1}{20}(x-2)^3, & x \in [1,2], \\ S_2(x) = \frac{1}{3} - \frac{19}{180}(x-3) - \frac{2}{15}(x-3)^2 - \frac{2}{45}(x-3)^3, & x \in [2,3]. \end{cases}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.26

Απόδειξη: Τα πολυώνυμα Chebychev ορίζονται απο τη σχέση $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, $-1 \leq x \leq 1$. Έχουμε τη τριγωνομετρική σχέση $\cos((n+1)A) = cos((n-1)A) = 2\cos(A)\cos(nA)$, οπότε για $A = \arccos(x)$ στον ορισμό των πολυωνύμων Chebychev προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.27

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $t = \frac{x+1}{2}$ έτσι ώστε η $y = y(x)$ να μεταβάλλεται στο διάστημα $[-1, 1]$. Έχουμε πλέον $y = \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1)$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε το πολυώνυμο ελαχίστων τετραγώνων που κάνει ελάχιστο το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[y(x) - a_0T_0 - \ldots - a_mT_m(x)\right]^2 dx,$$

όπου $T_i(x)$ τα πολυώνυμα Chebychev.

Έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{y(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad a_k = \frac{\int_{-1}^{1} w(x)y(x)T_k(x)dx}{\int_{-1}^{1} w(x)T_k^2(x)dx} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{y(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi} (\cos(A))^p dA = \begin{cases} \pi, & p = 0, \\ 0, & p = 1, \\ \frac{\pi}{2}, & p = 2, \\ 0, & p = 3 \end{cases}$$

Επομένως έχουμε $a_0 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + 0 + 1) = \frac{3}{8}$. Επίσης $y(x)T_1(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 + x)$ και $a_1 = \frac{1}{4}(0+2+0) = \frac{1}{2}$. Επιπλέον $a_i = 0$ για $i > 1$. Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο ελαχίστων τετραγώνων είναι το

$$P(x) = \frac{3}{8}T_0(x) + \frac{1}{2}T_1(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}x.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.28

Υπόδειξη: Σύμφωνα με τη σύνθετη μέθοδο του ορθογωνίου έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx \simeq y_1 h + y_2 h + \cdots + y_n h,$$

για $h = \frac{b-a}{n}$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.1

Υπόδειξη: Σύμφωνα με τη σύνθετη μέθοδο του ορθογωνίου έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\left[f(\frac{x_0+x_1}{2}) + (\frac{x_1+x_2}{2}) + \ldots + (\frac{x_{n-1}+x_n}{2})\right],$$

για $h = \frac{b-a}{n}$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.2

Υπόδειξη: Σύμφωνα με τη σύνθετη μέθοδο του τραπεζίου έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right).$$

για $h = \frac{b-a}{n}$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.3

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 233 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Σύμφωνα με τη σύνθετη μέθοδο του Simpson έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})\right].$$

για $h = \frac{b-a}{n}$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.4

Υπόδειξη: Το σφάλμα της μεθόδου δίνεται απο τη σχέση

$$E(f) \leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [a,b]} f''(x)$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.5

Υπόδειξη: Επιλέγουμε τα A_0, A_1, A_2 έτσι ώστε για τα πολυώνυμα 1, $(x - x_0)$ και $(x - x_0)^2$ να έχουμε $R = 0$. Με αυτό το τρόπο σχηματίζουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων για τα A_i τις οποίες επιλύουμε. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.6

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση για το σύνθετο τύπο του τραπεζίου

$$Q_{n+1} = h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right] + R_{n+1},$$

κατόπιν δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} Q_{n+1} = I$ και στη συνέχεια το αντίστροφο.
□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.7

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τις σχέσεις που μας δίνουν τα σφάλματα R_{n+1} για τη μέθοδο του τραπεζίου και της Simpson και από αυτές προσδιορίστε το n για κάθε περίπτωση. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.8

Υπόδειξη: Σύμφωνα με τη σύνθετη μέθοδο του Simpson έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})\right].$$

για $h = \frac{b-a}{n}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.9

Υπόδειξη: Σύμφωνα με τη σύνθετη μέθοδο του Simpson έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})\right].$$

για $h = \frac{b-a}{n}$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.10

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε για παράδειγμα τις προσεγγίσεις

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)],$$

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{2h}[-f(x_0-h) + f(x_0+h)]$$

και συγκρίνεται το αποτέλεσμα με τη πραγματική τιμή της $f'(x_0)$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.11

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 241 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη προσέγγιση

$$f''(x_0) = \frac{1}{x_0^2}\left[f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)\right].$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.12

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right),$$

Το πλήθος των σημείων που είναι απαραίτητα για να είναι το σφάλμα το πολύ $\frac{1}{2}10^{-4}$ μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση που μας δίνει το σφάλμα της μεθόδου. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.13

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιείσετε την εκτίμηση του σφάλματος απο τη χρήση της μεθόδου Simpson η οποία είναι

$$\epsilon = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi).$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.14

Υπόδειξη: Θεωρείστε τη συνάρτηση $F(h) = \int_{-h}^{h} y(x)dx - \frac{h}{3}[y(-h) + 4y(0) + y(h)]$ και υπολογίστε την $F'''(h)$. Στη συνέχεια ολοκληρώστε τη σχέση που προκύπτει έτσι ώστε να πάρετε μια εκτίμηση για την $F(h)$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.15

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx \frac{5}{9} g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} g(0) + \frac{5}{9} g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.16

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.17

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη σχέση

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx w_0 g(x_0) + w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + w_3 g(x_3).$$

$\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.18

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

□

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.19

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το πολυώνυμο παρεμβολής Newton για τη f,

$$f(x) \approx P(x) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{s}{3}\Delta^3 f_0,$$

$x = x_0 + sh$ και $f_i = f(x_i)$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.20

Απόδειξη: Υποδιαιρούμε το διάστημα $[0, 2]$ σε $n = 4$ υποδιαστήματα. Το καθένα από αυτά έχει μήκος $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = 0.5$ και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα προσεγγιστικά από τη σχέση

$$\int_a^b f(x)dx \simeq y_1 h + y_2 h + \cdots + y_n h.$$

Για τα y_i, $i = 0, 1, 2, 3$ έχουμε
$y_0 = 0$,
$y_1 = 0.125$,
$y_2 = 1$,
$y_3 = 3.375$.

Άρα έχουμε

$$\int_0^2 x^3 dx \simeq 0.5(0 + 0.125 + 1 + 3.375) = 2.25$$

.

□

Πίσω στην Άσκηση 5.2.1

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 251 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Υποδιαιρούμε το διάστημα $[0,2]$ σε $n = 4$ υποδιαστήματα. Το καθένα απο αυτά έχει μήκος $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = 0.5$ και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα προσεγγιστικά από τη σχέση

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\Big[f(\frac{x_0+x_1}{2}) + (\frac{x_1+x_2}{2}) + \ldots + (\frac{x_{n-1}+x_n}{2})\Big].$$

Έχουμε

$\frac{x_0+x_1}{2} = \frac{0+0.5}{2} = 0.015625,$
$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0.5+1}{2} = 0.5675,$
$\frac{x_2+x_3}{2} = \frac{1+1.5}{2} = 1.953125,$
$\frac{x_3+x_4}{2} = \frac{1.5+2}{2} = 5.890625.$

Άρα έχουμε

$$\int_0^2 x^3 dx \simeq 0.5(0.015625 + 0.5675 + 1.953125 + 5.890625) = 3.9453125$$

.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.2

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 252 από 273

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Σύμφωνα με τη μέθοδο του τραπεζίου έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}\right).$$

Έχουμε $a=0$, $b=2$, $h=\frac{2-0}{4}=0.5$,
$y_0=0$,
$y_1=0.125$,
$y_2=1$,
$y_3=3.375$,
$y_4=8$.

Άρα

$$\int_0^2 x^3dx \simeq 0.5\left(\frac{0+8}{2}+0.125+1+3.375\right)=4.25.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.3

Απόδειξη: Σύμφωνα με τη μέθοδο Simpson έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})\right].$$

Έχουμε $a = 0$, $b = 2$, $h = \frac{2-0}{4} = 0.5$,
$y_0 = 0$,
$y_1 = 0.125$,
$y_2 = 1$,
$y_3 = 3.375$,
$y_4 = 8$.

Άρα

$$\int_0^2 x^3 dx \simeq \frac{0.5}{3}\left[0 + 8 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot (0.125 + 1 + 3.375)\right] = 4.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.4

Απόδειξη: Έχουμε $a = 0$, $b = 1$, $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$. Επιπλέον το σφάλμα αποκοπής ικανοποιεί τη σχέση

$$E(f) \leq \frac{h^2}{12} \max_{x\in[0,2]} (e^{2x})'' = \frac{h^2}{12} 4e^2 = \frac{e}{3} h^2 = 0.153.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.5

Απόδειξη: Γράφουμε ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_0$ στη μορφή $p(x) = b_0(x - x_0)^2 + b_1(x - x_0) + b_2$ και παρατηρούμε ότι εάν διαλέξουμε τα A_i έτσι ώστε να έχουμε $R = 0$ για $f(x) = 1$, $(x - x_0)$ και $(x - x_0)^2$ τότε θα έχουμε και $R = 0$ για $p(x) = f(x)$. Χρησιμοποιώντας αυτά τα συγκεκριμένα πολυώνυμα παίρνουμε τρείς εξισώσεις για τους τρείς αγνώστους A_i.

$$A_0 + A_1 + A_2 = 2h,$$
$$A_1 + 2A_2 = 2h,$$
$$A_1 + 4A_2 = \frac{8}{3}h.$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε $A_0 = \frac{h}{3}$, $A_1 = \frac{4h}{3}$, $A_2 = \frac{h}{3}$ και

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2] + R,$$

όπου $R = 0$ εάν $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού ≤ 2.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι επιπλέον ισχύει η σχέση $R = 0$ και στη περίπτωση όπου η $f(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού ≤ 3.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.6

Απόδειξη: Έχουμε $[a, b] = [0, 1]$ και $h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$. Επίσης $x_i = a + ih = \frac{i}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Άρα

$$
\begin{aligned}
Q_{n+1} &= h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right] + R_{n+1}, \\
Q_{n+1} &= h\left[\frac{1}{2}f(0) + f(\frac{1}{n}) + \ldots + f(\frac{n-1}{n}) + \frac{1}{2}f(1)\right] + R_{n+1}, \\
Q_{n+1} &= \frac{1}{n}\left[0 + \frac{1}{n^2} + \ldots + (\frac{n-1}{n})^2 + 1\right] + R_{n+1}, \\
Q_{n+1} &= \frac{1}{n^3}\left[\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \frac{n^2}{2}\right] + R_{n+1}, \\
Q_{n+1} &= \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n^2}{2}\right] + R_{n+1}, \\
Q_{n+1} &= \frac{2n^3 + n}{6n^3} + R_{n+1} = \frac{2n^2 + 1}{6n^2} + R_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Έχοντας υπολογίσει τη συγκεκριμένη μορφή του Q_{n+1} μπορούμε να δείξουμε αρχικά ότι $\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} Q_{n+1} = I$.

Πράγματι

$$\lim_{n\to\infty} Q_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 1}{6n^2} + \lim_{n\to\infty} R_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{6} + 0 = \frac{1}{3} = I.$$

Άρα

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} Q_{n+1} = I.$$

Για το αντίστροφο έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(I - Q_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} I - \lim_{n\to\infty} Q_{n+1} = I - I = 0.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$ και

$$\lim_{n\to\infty} Q_{n+1} = I \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.7

Απόδειξη: (α) Το σφάλμα της μεθόδου του τραπεζίου είναι $R_{n+1} = \frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)$, άρα

$$|R_{n+1}| = |\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)| = |\frac{1}{12}h^2 f''(\xi)| \le \frac{h^2}{12}\|f''\|_\infty,$$

ή

$$|R_{n+1}| \le \frac{h^2}{12}\|f''\|_\infty.$$

Έχουμε $f(x) = e^{-x^2}$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$, $f'''(x) = 4x(3-2x^2)e^{-x^2} \ge 0$, $x \in [0,1]$. Συνεπώς η f'' είναι αύξουσα στο $[0,1]$ και $|\max_{0\le x\le 1} f''(x)| = \max\{|f''(0)|, |f''(1)|\} = \max\{|-2|, |\frac{2}{e}|\} = 2$.

Επομένως $|R_{n+1}| \le \frac{h^2}{12}\|f''\|_\infty \le \frac{\frac{1}{n^2}}{12}2 = \frac{1}{6n^2}$ και για το σφάλμα πρέπει να ισχύει $\frac{1}{6n^2} < 0.5\,10^{-6}$ ή $n > \frac{1}{\sqrt{3}}10^3 = 577.35 \sim 578$.

(β) Το σφάλμα της μεθόδου του Simpson είναι $R_{n+1} = -\frac{b-a}{168}h^4 f^{(4)}(\xi)$, $\xi \in [a,b]$ άρα

$$|R_{n+1}| = -|\frac{b-a}{168}h^4 f^{(4)}(\xi)| = |-\frac{1}{168}h^4 f^{(4)}(\xi)| \le \frac{h^4}{168}\|f^{(4)}\|_\infty,$$

ή

$$|R_{n+1}| \le \frac{h^4}{168}\|f^{(4)}\|_\infty.$$

Έχουμε $f^{(4)} = (12 - 48x^2 + 16x^4)e^{-x^2}$ και $f^{(5)} = (-120x + 160x^3 - 32x^5)e^{-x^2} \le 0$ για $x \in [0,1]$. Άρα η $f^{(4)}$ είναι φθίνουσα στο $[0,1]$ και

$$\max_{0\le x\le 1} |f^{(4)}(x)| = \max\{|f^{(4)}(0)|, |f^{(4)}(1)|\} = \max|12|, |-20| = 20.$$

Επομένως $|R_{n+1}| \le \frac{h^4}{168}\|f^{(4)}\|_\infty \le \frac{\frac{1}{n^4}}{168} = \frac{20}{168n^2}$ και για το σφάλμα πρέπει να ισχύει $\frac{20}{168n^2} < 0.5\,10^{-6}$ ή $n > \sqrt{\frac{10}{42}}10^3 = 487.95 \sim 488$.

□

Πίσω στην Άσκηση 5.2.8

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Simpson και έχουμε για $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$,

$$\int_1^2 xe^{-x}dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)).$$

Είναι
$f(x_0) = f(1) = e^{-1} = 0.3679,$
$f(x_1) = f(1.25) = 1.25e^{-1.25} = 0.3581,$
$f(x_2) = f(1.5) = 1.5e^{-1.5} = 0.3347,$
$f(x_3) = f(1.75) = 1.75e^{-1.75} = 0.3041,$
$f(x_1) = f(2) = 2e^{-2} = 0.2707,$
Επομένως $\int_1^2 xe^{-x}dx \simeq 0.9892.$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.9

Απόδειξη: Δεδομένου ότι η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού δύο υποδιαστήματα είναι αρκετά για να πάρουμε την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος. Θέτουμε $h = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$. Επομένως έχουμε

$$I \int_1^2 (x^3 - \frac{1}{4}x^4)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)],$$

ή

$$I = \frac{1}{12}[0.75 + 4 \cdot 2.8125 + 7] = \frac{19}{12} = 1.58333\,.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 5.2.10

Απόδειξη: Αρχικά υπολογίζουμε τις παραγώγους της $f(x)$.
$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi),$$

$\xi \in [x_0, x_0 + 2h]$. Πιο συγκεκριμένα παίρνουμε

$f'(2) = \frac{1}{0.2}[-3f(2)+4f(2.1)-f(2.2)] = \frac{1}{0.2}[-3\cdot 0.693147+4\cdot 0.741937-0.788457] = 0.49925$. Το σφάλμα είναι $\frac{h^2}{3}f'''(\xi) = \frac{h^2}{3}\frac{2}{\xi^2} \leq \frac{0.1^2}{3}\frac{2}{2^3} = 0.00083$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-f(x_0 - h) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{6}f'''(\xi),$$

παίρνουμε $f'(2) = \frac{1}{0.2}[-f(1.9) + f(2.1)] = \frac{1}{0.2}[-0.641854 + 0.741937] = 0.500415$, με σφάλμα $\frac{h^2}{6}f'''(\xi) \leq \frac{0.1^2}{6}\frac{2}{2^3} = 0.000420$.

Η ακριβής τιμή της παραγώγου είναι $f'(2) = 0.5$ και βλέπουμε ότι με τη μέθοδο κεντρικής διαφοράς το σφάλμα είναι μικρότερο και η προσέγγιση καλύτερη.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.11

Απόδειξη: Η δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης f μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση

$$f''(x_0) = \frac{1}{x_0^2}\left[f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)\right] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi),$$

$\xi \in [x_0-h, x_0+h]$. Συγκεκριμένα $f''(2) = \frac{1}{0.1^2}[f(2+0.1)+f(2-0.1)-2f(2)] = 100[f(2.1)+f(1.9)-2f(2)] = 100[2.1\ln(2.1)+1.9\ln(1.9)-2\cdot 2\ln(2)] = 100[1.2195224+1.5580684-2\cdot 1.3862944] = 0.5002.$

Η ακριβής τιμή είναι $f''(2) = \frac{1}{2} = 0.5$, επομένως το σφάλμα της προσέγγισης είναι 0.0002.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.12

Απόδειξη: Έχουμε $h = 0.25 = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n}$, άρα $n = 8$ και $x_i = 1 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, 8$. Οι τιμές της συναρτήσεις στα σημεία αυτά είναι
$f(x_0) = f(1) = 0$,
$f(x_1) = f(\frac{5}{4}) = \frac{5}{4}\ln(\frac{5}{4})$,
$f(x_2) = f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\ln(\frac{3}{2})$,
$f(x_3) = f(\frac{7}{4}) = \frac{7}{4}\ln(\frac{7}{4})$,
$f(x_4) = f(2) = 2\ln(2)$,
$f(x_5) = f(\frac{9}{4}) = \frac{9}{4}\ln(\frac{9}{4})$,
$f(x_6) = f(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}\ln(\frac{5}{2})$,
$f(x_7) = f(\frac{11}{4}) = \frac{11}{4}\ln(\frac{11}{4})$,
$f(x_8) = f(3) = 3\ln(3)$.

Η μέθοδος του τραπεζίου δίνεται από τη σχέση

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_n)\right),$$

και στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} I = \frac{h}{2}\,&(f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) \\ &+2f(x_5) + 2f(x_6)) + 2f(x_7) + f(x_8)), \end{aligned}$$

ή

$$I = \frac{1}{16}(0{+}0.5577{+}1.2165{+}1.9586{+}2.7724{+}3.6490{+}4.5815{+}5.5638{+}3.2958) = 1.3079.$$

Το σφάλμα της μεθόδου με τη μέθοδο του τραπεζίου είναι $\frac{h^2(b-a)}{12}f''(\xi)$ με $a \leq \xi \leq b$, άρα $\frac{h^2(b-a)}{12}f''(\xi) = \frac{h^2}{6}\frac{1}{\xi} \leq \frac{h^2}{6}$. Επομένως $\frac{h^2}{6} \leq 0.00005$ ή $h \leq 0.00173$. Επιπλέον πρέπει $\frac{2}{n} \leq 0.0173$ και $n \geq 115$.

□

Πίσω στην Άσκηση 5.2.13

Απόδειξη: Υπολογίζουμε πόσα σημεία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε. Έχουμε $h = 0.25 = \frac{2-1}{n}$ ή $n = 4$.

Η εκτίμηση του σφάλματος απο τη χρήση της μεθόδου Simpson είναι

$$\epsilon = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi),$$

με $\xi \in (a, b)$. Στη προκειμένη περίπτωση $f(x) = 0.003x^{10} - 0.25x^4$ και $f^{(4)}(x) = 15.12x^6 - 6$. Άρα

$$\epsilon = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{180}(\frac{1}{4})^4(15.12\xi^6 - 6) \leq \frac{1}{180}(\frac{1}{4})^4(15.122^6 - 6) = 0.02.$$

Άρα $\epsilon \leq 0.02$.

□

Πίσω στην Άσκηση 5.2.14

Απόδειξη: Θέτουμε $F(h) = \int_{-h}^{h} y(x)dx - \frac{h}{3}[y(-h) + 4y(0) + y(h)]$. Βρίσκουμε την $F'''(h)$ λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\frac{d}{dh}\int_{a(h)}^{b(h)} y(x,h)dx = \int_a^b \frac{\partial y}{\partial h}dx + y(b,h)b'(h) - y(a,h)a'(h),$$

και παίρνουμε

$$F'''(h) = -\frac{h}{3}[y'''(h) - y'''(-h)].$$

Επιπλέον $F(0) = F''(0) = F'''(0) = 0$. Υποθέτοντας ότι η $y^{(4)}$ είναι συνεχής από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$F'''(h) = -\frac{2}{3}h^2 y^{(4)}(\xi),$$

$\xi \in (-1, 1)$. Ολοκληρώνοντας διαδοχικά τη παραπάνω σχέση ανακτούμε την $F(h)$ και έχουμε

$$F(h) = -\frac{1}{3}\int_0^h (h-t)^2 t^2 y^{(4)}(\xi)dt.$$

Στη συνέχεια απο το θεώρημα μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα $\int_a^b f(t)g(t)dt = g(\xi)\int_a^b f(t)dt$ παίρνουμε στη περίπτωση μας, για $f(t) = -\frac{1}{3}t^2(h-t)^2$,

$$F(h) = y^{(4)}(\xi)\int_0^t f(t)dt = -\frac{h^5}{90}y^{(4)}(\xi).$$

Άρα η εκτίμηση του σφάλματος για το I είναι $-\frac{h^5}{90}y^{(4)}(\xi)$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.15

Απόδειξη: Αρχικά μεταφέρουμε τα όρια του ολοκληρώματος στα όρια του διάστηματος $[-1, 1]$. Θέτουμε $t = \frac{2-0}{2}x + \frac{b+a}{2} = x + 1$ και έχουμε

$$I = \int_{-1}^{1} e^{x+1} dx.$$

Επομένως χρησιμοποιώντας το κανόνα ολοκλήρωσης Gauss- Legendre για $n = 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} e^{x+1} dx &\approx \frac{5}{9} e^{\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}+1\right)} + \frac{8}{9} e^{0+1} + \frac{5}{9} e^{\left(\sqrt{\frac{3}{5}}+1\right)} \\ &= \frac{5}{9} 1.2528 + \frac{8}{9} 2.7183 + \frac{5}{9} 5.8979 = 6.3889\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 5.2.16

Απόδειξη: Το ζητούμενο ολοκλήρωμα έχει όρια τα όρια του διαστήματος $[-1,1]$, και χρησιμοποιώντας το κανόνα ολοκλήρωσης Gauss- Legendre για $n=2$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{x+2}dx &\approx \frac{5}{9}\sqrt{-\sqrt{\frac{3}{5}}+2}+\frac{8}{9}\sqrt{0+2}+\frac{5}{9}\sqrt{\sqrt{\frac{3}{5}}+2}\\ &= \frac{5}{9}1.1070+\frac{8}{9}1.4142+\frac{5}{9}1.6657=2.7975\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 5.2.17

Απόδειξη: Αρχικά μεταφέρουμε τα όρια του ολοκληρώματος στα όρια του διαστήματος $[-1, 1]$. Θέτουμε $t = \frac{2-0}{2}x + \frac{b+a}{2} = x + 1$ και έχουμε

$$I = \int_{-1}^{1} e^{x+1} dx.$$

Επομένως χρησιμοποιώντας το κανόνα ολοκλήρωσης Gauss- Legendre για $n = 3$,

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx w_0 g(x_0) + w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + w_3 g(x_3),$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e^{x+1} dx &\approx w_0 e^{(x_0+1)} + w_1 e^{(x_1+1)} + w_2 e^{(x_2+1)} + w_3 e^{(x_3+1)} \\
&= (0.3478548451)(1.1489674717) + (0.6521451549)(1.9348290114) \\
&\quad +(0.6521451549)(3.8189711107) + (0.3478548451)(6.4310402867) \\
&= 6.3890551
\end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 5.2.18

Απόδειξη: Αρχικά μεταφέρουμε τα όρια του ολοκληρώματος στα όρια του διαστήματος $[-1, 1]$. Θέτουμε $t = \frac{1-0}{2}x + \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}(x+1)$ και έχουμε

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{x+2}dx.$$

Επομένως χρησιμοποιώντας το κανόνα ολοκλήρωσης Gauss- Legendre για $n = 2$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{x+2}dx &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{5}{9}\sqrt{\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+2} + \frac{8}{9}\sqrt{0+2} + \frac{5}{9}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{5}}+2\right)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{9}1.10697 + \frac{8}{9}1.41421 + \frac{5}{9}1.66571\right) = 1.39872\end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.19

Απόδειξη: Έχουμε για την $f(x)$ αν $x = x_0 + sh$ και $f_i = f(x_i)$, ότι

$$f(x) \approx P(x) = f_0 + \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \Delta f_0 + \begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix} \Delta^2 f_0 + \begin{pmatrix} s \\ 3 \end{pmatrix} \Delta^3 f_0,$$

όπου $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$. Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι ουσιαστικά το πολυώνυμο παρεμβολής του Newton. Επομένως το ολοκλήρωμα μπορεί να προσεγγιστεί ως εξής :

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x^3} f(x)dx &\approx \int_{x_0}^{x_3} P(x)dx \\
&= \int_0^3 \left(f_0 + \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \Delta f_0 + \begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix} \Delta^2 f_0 + \begin{pmatrix} s \\ 3 \end{pmatrix} \Delta^3 f_0 \right) hds \\
&= \int_0^3 \left(f_0 + s\Delta f_0 + \frac{(s^2 - s)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{(s^3 - 3s^2 + 2s)}{6} \Delta^3 f_0 \right) hds \\
&= h \left(s f_0 + \frac{s^2}{2} \Delta f_0 + \frac{1}{2} \left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} \right] \Delta^2 f_0 + \frac{1}{6} \left[\frac{s^4}{4} - s^3 + s^2 \right] \Delta^3 f_0 \right)_{s=0}^{s=3} \\
&= h \left[3f_0 + \frac{9}{2} [f_1 - f_0] + \frac{9}{4} [f_2 - 2f_1 + f + 0] + \frac{3}{8} [f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0] \right]
\end{aligned}$$

Επομένως τελικά καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση

$$\int_{x_0}^{x^3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8} \left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right].$$

□

Πίσω στην Άσκηση 5.2.20

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 273 από 273
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Περιεχόμενα